

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC tuổi trẻ

Số 114

3

1980

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỶ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHUNG

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Dây số: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

CHUYỆN LẠ MÀ QUEN

NGUYỄN CẢNH TOÀN

TRONG toán học, có nhiều cái mới đầu rất lạ, thậm chí thấy vô lý nữa, nhưng nếu có một tầm nhìn rộng hơn thì lạ sẽ chóng trở thành quen, vô lý trở thành có lý. Chẳng hạn như qua bài nói chuyện: "Số ảo ngu ngốc hay thông minh" (TH và TT số 1, 1964) và bài: "Tầm quan trọng của một cách nhìn" (TH và TT số 3-4, 1978), các bạn trẻ đã thấy rằng số $i = \sqrt{-1}$ là rất có lý và rồi các bạn cũng chóng quen với nó. Trong bài này, tôi sẽ đi sâu thêm vào một sự kiện lạ mà lại quen đã gặp trong bài: "Tầm quan trọng của một cách nhìn".

Ở trường phổ thông, chắc các bạn đều biết định lý: "Điều kiện $ab=0$ có và đủ để một tích hai thừa số triệt tiêu là ít nhất một trong hai thừa số đó triệt tiêu". Cụ thể là:

$$ab=0 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} a=0, b \neq 0, \\ \text{hoặc } a \neq 0, b=0, \\ \text{hoặc } a=b=0. \end{cases} \quad (1)$$

Hiển nhiên là không thể xảy ra:

$$ab=0 \text{ khi } a \neq 0 \text{ và } b \neq 0 \quad (2)$$

Định lý trên rất quan trọng, chẳng hạn, nó là cơ sở cho những việc làm quen thuộc như từ

$$ab=ac \quad (3)$$

suy ra được

$$b=c \quad (4)$$

nếu bảo đảm rằng $a \neq 0$. Những học sinh kém thường quên mất điều kiện $a \neq 0$ vì không nắm vững cơ sở nói trên.

Quả vậy, từ (3) có thể suy ra:

$$ab-ac=0$$

hay

$$a(b-c)=0$$

và vì $a \neq 0$ nên theo định lý trên suy ra

$$b-c=0$$

hay

$$b=c.$$

Nếu như có một thứ số học hay đại số nào đó mà ở đây có thể xảy ra sự kiện (2) thì trong thứ số học hay đại số đó, từ (3) chưa thể suy ra (4) mặc dù biết chắc rằng $a \neq 0$. Ái chà! Nếu có thứ số học hay đại số đó thì rắc rối

qua nhì. Trong số học hay đại số thông thường, thiếu cảnh giác thì đã dễ mắc sai lầm là cứ hờ hững bừa bãi một thừa số chung có mặt ở cả hai vế của một đẳng thức mà quên xét xem thừa số đó có triệt tiêu hay không, hướng chỉ là ở đây thì lại càng phải cảnh giác gấp bội. Không may (cho những ai lười suy nghĩ) và may thay (cho những bạn không ngại gian khổ đi vào những cái mới lạ là có những số học và đại số như thế. Sau đây sẽ nêu ra hai ví dụ:

Ví dụ 1. Ta đem chia tất cả các số nguyên cho 18. Các số dư có thể là 0, 1, 2, 3, 4, ..., 15, 16, 17. Tập hợp tất cả các số nguyên cho cùng một số dư p (khi đem chia cho 18) sẽ gọi là lớp p và ký hiệu là $\{p\}$. Như vậy, ta có tất cả 18 lớp:

$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{15\}, \{16\}, \{17\}$$

Nếu lấy một số nguyên thuộc lớp p tức là một số có dạng $18k + p$ nhân với một số nguyên thuộc lớp q , tức là một số dạng $18l + q$ thì dĩ nhiên ta được một số nguyên thuộc lớp r trong đó r là số dư có được khi đem chia tích pq cho 18. Lớp $\{r\}$ đó sẽ gọi là tích của hai lớp $\{p\}$, $\{q\}$. Rõ ràng, ở đây, có thể xây ra $ab = 0$ với $a \neq 0$, $b \neq 0$ như $a = \{2\}$, $b = \{9\}$ hay $a = \{3\}$, $b = \{6\}$.

Ví dụ 2. Ta hãy nhắc lại ở đây một vài ý đã nêu ra ở bài: «Tâm quan trọng của một cách nhìn»: Với các số quen thuộc (các số thực), ta hãy nâng tầm nhìn lên: coi các số đó là những lệnh; ví dụ 2 là một «lệnh». Dem lệnh đó đặt trước một vectơ $\vec{V}$ nào đó thì tác là ra lệnh phải giữ nguyên phương, hướng của vectơ đó nhưng phải nhân đôi chiều dài của nó lên. Nếu ta ra hai cái lệnh liên tiếp, ví dụ 2 và 3 đối với một vectơ $\vec{V}$: $3(2\vec{V})$ thì tức là sau khi đã nhân chiều dài của $\vec{V}$ lên gấp đôi (giữ nguyên phương hướng), lại phải nhân chiều dài của vectơ mới $2\vec{V}$ lên gấp ba (giữ nguyên phương hướng). Kết quả là ta nhân chiều dài của $\vec{V}$ lên gấp sáu (giữ nguyên phương hướng); kết quả này tương đương với việc đem áp dụng lệnh 6 đối với $\vec{V}$. Mà $6 = 3 \times 2$. Vậy, với tầm nhìn mới, phải xem việc nhân hai số thực như là việc thực hiện liên tiếp hai lệnh ứng với hai số thực đó.

Với các số thực, ta chỉ được những lệnh mà hiệu lực khá hạn chế vì mỗi lệnh đó chỉ biến được một vectơ thành một vectơ cùng phương, chứ không thể thành một vectơ khác phương, chẳng hạn như dù a là số thực nào đi nữa thì

góc α giữa hai vectơ $\vec{V}$ và $a\vec{V}$ cũng chỉ có thể lấy hai giá trị: hoặc $\alpha = 0^\circ$, hoặc $\alpha = 180^\circ$. Để cho góc α có thể lấy những giá trị khác 0° và 180° , thì phải có những lệnh mới. Để tạo ra được những lệnh mới này, ta chú ý rằng việc mỗi lệnh cũ (số thực) tác động lên một vectơ tương đương với việc lệnh đó tác động lên tọa độ của vectơ ấy (khi mà vectơ đã cho nằm trên một trục có định hướng trên đó có chọn gốc tọa độ và đơn vị). Vì vậy, hướng mở rộng các lệnh cũ để có các lệnh mới là từ cả thể các số thực tác động lên tọa độ của một vectơ trên một trục chuyển lên «tập thể» các số thực tác động lên các tọa độ của một vectơ trong một mặt phẳng (trong đó đã cho hai trục tọa độ).

«Tập thể» đó là một bảng số thực $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Các lệnh mới là những bảng như vậy. Dem một lệnh đó tác động lên một vectơ $\vec{V}$ có tọa độ là x, y :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{V}$$

thì được một vectơ $\vec{V'}$ có tọa độ x', y' như sau:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (5)$$

Nếu $b = c = 0$ và $d = a$ thì lúc đó:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases}$$

tức là $\vec{V'} = a\vec{V}$. Vậy một lệnh cũ a (số thực a) tương đương với một lệnh mới có dạng đặc biệt:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Đặc biệt, lệnh cũ 0 (làm triệt tiêu mọi vectơ)

tương đương với lệnh mới $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{V} = 0\vec{V} = \vec{0} \text{ với mọi vectơ } \vec{V}.$$

Ta sẽ có tích hai lệnh $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

bằng cách thực hiện liên tiếp hai lệnh đó: thực

hiện lệnh $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ đối với vectơ $\vec{V}$ (có tọa độ x, y), ta được vectơ $\vec{V'}$ có tọa độ x', y' theo (5);

tiếp đó ta thực hiện phép $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ đối với vectơ $\vec{V}$ và được vectơ $\vec{V'}$ có tọa độ x', y' như sau:

$$x' = a'x + b'y$$

$$y' = c'x + d'y$$

Thay x' và y' bằng các giá trị ở (5), ta được

$$x' = a'(ax + by) + b'(cx + dy)$$

$$= (aa' + cb')x + (ab' + db')y$$

$$y' = c'(ax + by) + d'(cx + dy)$$

$$= (ac' + cd')x + (bc' + dd')y$$

Vậy

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ab' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

Bây giờ thì dễ thấy rằng với các phép biến đổi này có thể xảy ra $ab = 0$ với $a \neq 0, b \neq 0$. Ví dụ:

$$a = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Cứ việc đem nhân hai phép biến đổi theo qui tắc (6) thì thấy ngay: $ab = 0$.

Sự kiện này chủ yếu có gì lạ. Ta chú ý rằng vectơ $\vec{V'} = b\vec{V}$ chính là hình chiếu vuông góc của $\vec{V}$ lên phân giác thứ hai, còn $\vec{V''} = a\vec{V}$ chính là hình chiếu vuông góc của $\vec{V}$ lên phân giác thứ nhất. Rõ ràng là nếu ta chiếu vuông góc một vectơ xuống một đường thẳng nào đó, tiếp đó lại chiếu vuông góc hình chiếu này xuống một đường thẳng thứ hai vuông góc với đường thẳng đầu tiên thì kết quả cuối cùng sẽ là vectơ 0. Với nhận xét này, ta có thể tìm nhiều ví dụ khác, chỉ việc chọn lấy hai đường thẳng vuông góc bất kỳ để thực hiện liên tiếp hai phép chiếu vuông góc theo thứ tự xuống đó.

Nếu hai đường thẳng làm với trục hoành các góc α và $\pi/2 + \alpha$ thì dễ dàng tính ra rằng:

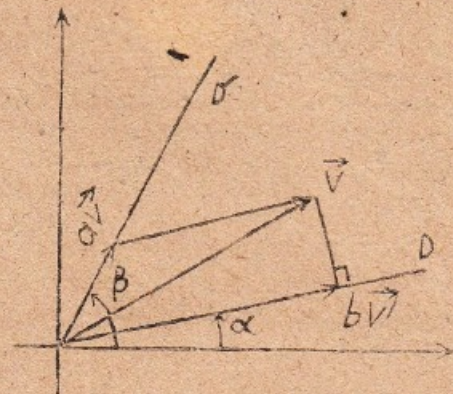
$$a = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Cho $\alpha = \pi/4$, ta được lại ví dụ ở trên. Nếu cho $\alpha = 0$ ta được:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ở đây, ta chú ý rằng $ab = ba = 0$ vì trong hai phép chiếu vuông góc xuống hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta thực hiện phép chiếu nào trước cũng được, kết quả đều được vectơ 0. Nhưng không phải bao giờ cũng vậy. Có thể xảy ra $ab = 0$ nhưng $ba \neq 0$. Chẳng hạn nếu b là phép chiếu vuông góc (vectơ $\vec{V}$) xuống một đường thẳng D làm với trục hoành góc α còn a là phép chiếu song song theo phương của D xuống một đường thẳng D' làm với trục hoành góc β (h. 1) thì rõ ràng là $ab = 0$ vì $b\vec{V}$ là một vectơ nằm trên đường thẳng D nên $a(b\vec{V})$ là vectơ 0. Nhưng nơi chung $ba \neq 0$ vì $a\vec{V}$ nói chung không vuông góc với D (h. 1), trừ trường hợp $\beta - \alpha = (2k + 1)\pi/2$.



Hình 1

Chỉ nhờ tính toán cụ thể, bạn sẽ thấy rằng ở đây:

$$a = \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} & \frac{-\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \\ \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} & \frac{-\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -\cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

và bạn có thể thử trực tiếp bằng cách áp dụng qui tắc (6) để thấy $ab = 0$ còn $ba \neq 0$.

Rõ ràng ở đây, chỉ một vấn đề như vấn đề khi nào thì có thể chuyển từ (3) sang (4) cũng đã khá phức tạp. Chắc các bạn đều không ngại sự phức tạp đó mà trái lại đều sung sướng thấy nó mở ra một chân trời mới. $ab = 0$ với $a \neq 0, b \neq 0$ nhưng $ba \neq 0$ cũng lạ đấy nhưng cũng quen đấy. Cách nhìn và tầm nhìn quan trọng biết bao nhiêu.

VÀI BÀI TOÁN TRÊN CÁC MẠNG LƯỚI

PHAN ĐỨC THÀNH

BÀI này giới thiệu một vài bài toán trên các mạng lưới phẳng và một số vấn đề có liên quan đến bài toán đó.

§1. CÁC MẠNG LƯỚI TRÊN MẶT PHẪNG

Cho O là một điểm nào đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ (không bằng vectơ không và không đồng thẳng). Tập hợp M tất cả những điểm P sao cho:

$$\vec{OP} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

(trong đó m, n là các số nguyên) được gọi là một mạng lưới trên mặt phẳng. Các điểm của M được gọi là các điểm nút của mạng lưới đó. Một hình bình hành có đỉnh ở các điểm nút và có các cạnh là các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là hình bình hành cơ sở hay hình bình hành sinh ra mạng lưới đó.

Nếu $\vec{a} \perp \vec{b}$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ thì mạng lưới được gọi là mạng kẻ ô vuông.

Mạng lưới trên mặt phẳng có các tính chất đơn giản sau đây:

1. Mọi phép dời song song biến một nút nào đó thành một nút khác sẽ biến mạng lưới thành chính nó.

2. (Bổ đề về đỉnh thứ 4 của hình bình hành).

Nếu 3 đỉnh của một hình bình hành là các nút của một mạng lưới nào đó thì đỉnh thứ 4 cũng là nút của mạng lưới đó.

3. Nếu qua hai nút bất kỳ của mạng ta kẻ một đường thẳng thì đường thẳng đó đi qua vô hạn nút. Tất cả các nút nằm trên đường thẳng này cách đều nhau.

Bài toán vui sau đây phản ánh một tính chất quan trọng của mạng lưới.

Một người đi săn đứng ở nút A . Các con thỏ đang ăn ở các nút còn lại của mạng. Người đi săn bắn hủ hơ (quy đạo của viên đạn là một tia xuất phát từ A). Người đi săn có bắn trúng chú thỏ nào không?

Tính chất sau đây trả lời câu hỏi trên.

5. (Bổ đề về người đi săn và con thỏ).

Giả sử tia X đi qua nút A của một mạng lưới nào đó. Khi đó tìm được một nút của mạng lưới

sao cho khoảng cách từ nút đó đến tia X sẽ bé hơn một số $\varepsilon > 0$ cho trước.

Vì các tính chất trên đơn giản nên bạn đọc có thể tự chứng minh lấy.

Hơn nữa có thể chứng minh được rằng trong các khoảng cách của từng cặp có thể có giữa các nút của mọi mạng lưới tồn tại một khoảng cách bé nhất.

Tính chất này cùng với tính chất 2 ở trên có thể lấy làm định nghĩa của mạng.

§2. CÁC ĐA GIÁC TRÊN MẠNG LƯỚI

Ta hãy xét bài toán quan trọng sau đây: Trên mạng lưới kẻ ô vuông có thể vẽ được hay không một đa giác dạng cho trước có các đỉnh đặt tại các nút của lưới? Phần lớn các đa giác không thể vẽ được theo điều kiện đó. Chẳng hạn trong các đa giác đều chỉ có hình vuông là có thể vẽ được như vậy mà thôi.

Một câu hỏi được đặt ra là những đa giác nào thì điều đó có thể làm được một cách gần đúng tức là có thể đặt các đỉnh của đa giác gần với các nút của mạng lưới một cách tùy ý. Như sẽ thấy ở sau này, điều đó có thể làm được đối với mọi đa giác.

Để làm sáng tỏ những vấn đề trên, ta đưa vào các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1. Ta nói rằng một đa giác nội tiếp được vào một mạng lưới M nếu tồn tại một đa giác đồng dạng với đa giác đã cho có đỉnh đặt tại các nút của mạng lưới.

Thí dụ 1. Hình vuông nội tiếp được vào mạng lưới kẻ ô vuông.

Thí dụ 2. Tam giác đều và lục giác đều nội tiếp được vào mạng lưới có tính chất

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \text{ góc } (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

Song, dễ dàng chứng minh được rằng:

Thí dụ 3. Tam giác đều không nội tiếp được vào mạng lưới kẻ ô vuông.

Thí dụ 4. Hình vuông không nội tiếp được vào mạng lưới của thí dụ 2.

Thí dụ 5. Ngũ giác đều không nội tiếp được vào một mạng lưới nào.

Thực vậy, giả sử có một mạng lưới để ngũ giác đều nội tiếp. Ta nối tất cả các đường chéo. Theo bổ đề về đỉnh thứ 4 của hình bình hành, các giao điểm của ngũ giác đều cũng là các nút của mạng. Các giao điểm này cũng lập thành một ngũ giác đều. Tiếp tục quá trình này ta thu được các ngũ giác đều bé dần, có cạnh bé hơn khoảng cách tối thiểu giữa các nút của mạng. Đó là điều không thể được.

Một cách tổng quát có thể chứng minh được rằng:

Thí dụ 6. Mọi đa giác đều n cạnh ($n \geq 7$) không nội tiếp được vào một mạng lưới nào.

Phương pháp chứng minh là: giả thiết rằng tồn tại đa giác đều n cạnh có đỉnh tại các điểm nút của mạng và xây dựng đa giác n cạnh bé hơn có đỉnh tại các nút. Tiếp tục quá trình đó, cuối cùng ta đi đến một đa giác đều n cạnh có cạnh bé hơn khoảng cách tối thiểu giữa các nút của mạng. Đó là điều không thể được.

Như vậy bài toán về các đa giác đều nội tiếp vào các mạng lưới đã được giải quyết. Cụ thể là: Ngoài tam giác, hình vuông và lục giác thì không có đa giác đều nào nội tiếp được vào một mạng lưới nào đó.

Hơn nữa một đa giác cho trước có dạng tùy ý cũng không thể nội tiếp được vào một mạng lưới nào.

Như vậy trong phần lớn các trường hợp, bài toán nội tiếp một đa giác vào mạng lưới đã đưa đến kết quả phủ định. Vì vậy để bài toán không đi vào ngõ cụt, lẽ tự nhiên ta đưa một yêu cầu yếu hơn, với yêu cầu này đòi hỏi các đỉnh của đa giác rơi vào nút một cách gần đúng. Từ đó ta đưa vào:

Định nghĩa 2. Đa giác được gọi là ε -nội tiếp được vào một mạng lưới nếu tồn tại đa giác đồng dạng với nó (có hệ số vị tự tự nhiên) sao cho mỗi đỉnh của nó đặt cách một trong những nút của mạng lưới một khoảng bé hơn ε .

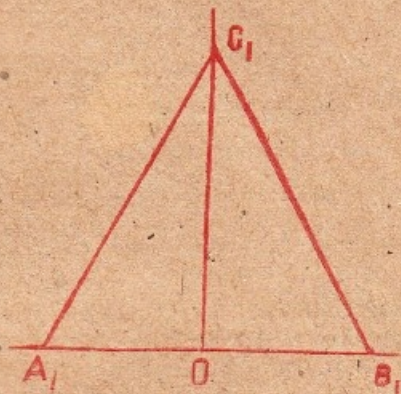
Rõ ràng là với $\varepsilon = 0$ ta nhận được định nghĩa về sự nội tiếp được (định nghĩa 1). Tuy nhiên với ε khá lớn (lớn hơn khoảng cách giữa các nút) định nghĩa đã cho không có nội dung thiết thực. Với hệ số vị tự tự nhiên và với ε đủ bé bất kỳ, 2 đỉnh của đa giác không thể rơi vào ε -lần cận của cùng một nút. (ε -lần cận của điểm O là hình tròn tâm O bán kính ε). Hơn nữa, ta đưa vào.

Định nghĩa 3. Ta nói rằng một đa giác hầu như nội tiếp được vào một mạng lưới nếu nó ε -nội tiếp được vào mạng lưới đó với mọi $\varepsilon > 0$.

Rõ ràng là nếu một đa giác nội tiếp được (một cách chính xác) thì nó hầu như nội tiếp được. Tuy nhiên mệnh đề ngược lại không đúng.

ĐỊNH LÝ. Tam giác đều hầu như nội tiếp được vào mạng lưới kẻ ô vuông.

Chứng minh. Ta hãy đặt tam giác đều có cạnh bằng 2 trên lưới kẻ ô vuông như hình vẽ.



Nhờ phép vị tự tâm O và hệ số k tự nhiên tam giác $A_1B_1C_1$ biến thành tam giác $A_kB_kC_k$, trong đó A_k và B_k là các nút của mạng, còn C_k có tọa độ $(O, k\sqrt{3})$. Vì A_k và B_k là các nút của mạng với mọi k nên bài toán đưa về việc tìm k sao cho khoảng cách từ C_k đến nút gần nhất của mạng bé hơn ε tức là sao cho $k\sqrt{3}$ sai kém một số nguyên nào đó một số bé hơn ε . Ta lấy số tự nhiên N sao cho $N < 1/\varepsilon$ và chia khoảng $(0,1)$ thành N khoảng có độ dài bé hơn ε . Trên đoạn $[0,1]$ ta đề ý đến các điểm $\{k\sqrt{3}\}$, $k=1,2,\dots,N+1$ trong đó $\{x\}$ là phần lẻ của x . Rõ ràng là có hai điểm nào đó rơi vào cùng một khoảng con. Chẳng hạn đó là các điểm $\{m\sqrt{3}\}$ và $\{n\sqrt{3}\}$ (m, n là các số tự nhiên, $m > n$), khi đó $(m-n)\sqrt{3}$ khác số nguyên một số bé hơn $1/N$ do đó bé hơn ε . Bằng cách chọn $k=m-n$ ta có điều phải chứng minh.

Hơn nữa xây ra định lý tổng quát hơn nhiều:

ĐỊNH LÝ. Mọi đa giác hầu như nội tiếp được vào một mạng lưới.

§ 3. HỮU TỈ HAY VÔ TỈ

Liên quan đến bài toán nội tiếp đa giác đều trên mạng lưới, trong mục này chúng ta sẽ chứng minh rằng:

Với những $a \neq k\pi/2, (3k \pm 1)\pi/3$ thì $\cos a$ (trong đó $a = p\pi/q$) là số vô tỉ.

Với những $a \neq k\pi/2, (6k \pm 1)\pi/6$ thì $\sin a$ ($a = p\pi/q$) là số vô tỉ.

Với những $a \neq k\pi, \pm \pi/4 + k\pi$ thì $\tan a$ ($a = p\pi/q$) là số vô tỉ.

Để chứng minh mệnh đề trên ta cần đến các tính chất đơn giản sau đây:

1. Với mọi số tự nhiên n , hàm $\cos nx$ là đa thức bậc n của $\cos x$ với hệ số nguyên

$$\cos nx = P_n(\cos x)$$

trong đó $P_n(y)$ là đa thức bậc n với hệ số nguyên.

2. Với số tự nhiên n

$$\sin nx = \sin x Q_{n-1}(\cos x)$$

trong đó $Q_{n-1}(y)$ là đa thức bậc $n-1$ với hệ số nguyên.

Cả hai tính chất đó được chứng minh bằng quy nạp theo n . Từ các tính chất 1 và 2 ta suy ra hai hệ quả đơn giản:

3. Nếu $\cos x$ là số hữu tỉ thì $\cos nx$ cũng hữu tỉ, còn các số $\sin x$ và $\sin nx$ thông ước (với $\sin nx \neq 0$).

4. Nếu $(p, q) = 1$ và $\cos(p\pi/q)$ hữu tỉ thì $\cos(\pi/q)$ cũng hữu tỉ.

Để chứng minh tính chất 4 trước hết ta chú ý rằng do $(p, q) = 1$ nên tồn tại số tự nhiên k để $kp = lq + 1$. Do đó nếu số $\cos(p\pi/q)$ hữu tỉ thì số $\cos(p\pi/q)$ hữu tỉ với mọi p nguyên.

$\cos(kp\pi/q) = \cos[(lq+1)\pi/q] = (-1)^l \cos(\pi/q)$. Ngược lại nếu số $\cos(\pi/q)$ hữu tỉ thì số $\cos(p\pi/q)$ hữu tỉ với mọi p nguyên.

Vậy, với $(p, q) = 1, q > 1$, số $\cos(p\pi/q)$ hữu tỉ khi và chỉ khi $\cos(\pi/q)$ hữu tỉ.

Bây giờ ta chứng minh rằng $\cos(\pi/q)$ vô tỉ với mọi số tự nhiên $q > 4$.

Thực vậy, giả sử $\cos(\pi/q) = m_1/n_1$ hữu tỉ. Ta xét đa giác đều có các đỉnh $A_0, A_1, \dots, A_{2q-1}$ nằm trên đường tròn đơn vị và có các góc tương ứng là $0, \pi/q, \dots, (2q-1)\pi/q$.

Tọa độ của điểm A_k là

$$A_k = \left(\cos \frac{k}{q} \pi, \sin \frac{k}{q} \pi \right).$$

Vì $\cos(\pi/q)$ hữu tỉ nên hoành độ của A_k cũng hữu tỉ

$$\cos(k\pi/q) = P_k \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) = m_k/n_k.$$

Tung độ của A_k bằng tích của số $\sin(\pi/q)$ với số hữu tỉ $Q_k \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) = r_k/s_k$.

Vậy

$$A_k = \left(\frac{m_k}{n_k}, \frac{r_k}{s_k} \sin \frac{\pi}{q} \right).$$

Gọi D là mẫu số chung của các phân số $m_k/n_k, r_k/s_k$, khi đó

$$A_k = \left(\frac{M_k}{D}, \frac{N_k}{D} \sin \frac{\pi}{q} \right)$$

(M_k, N_k - nguyên, $k = 1, 2, \dots, 2q-1$).

Ta xét mạng lưới chữ nhật sinh ra bởi các véc tơ a và b với

$$|a| = 1/D, |b| = \sin(\pi/q)/D.$$

Rõ ràng các đỉnh của đa giác đều $A_0, A_1, \dots, A_{2q-1}$ là các điểm nút của mạng lưới trên. Nhưng điều này không thể có được vì $2q > 6$ hay $q > 4$. Vậy giả thiết $\cos(\pi/q)$ hữu tỉ với $q > 4$ là không đúng. Vậy tất cả các số $\cos(p\pi/q)$ ($q > 4$), $(p, q) = 1$ là số vô tỉ.

Phần còn lại của mệnh đề trên được chứng minh tương tự.



Bài 1/111. Hãy xét xem trong dãy số $\{a_n\}$ với

$$a_n = 2^{2^n} + 5$$

(n con số 2) có bao nhiêu số là số nguyên tố.

Lời giải. Ta có $a_1 = 2 + 5 = 7$ là số nguyên tố. Với $n \geq 2$ thì

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{2^k} + 5 = 4^k + 5 = (3+1)^k + 5 \\ &= 3m + 6 \equiv 0 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Vậy dãy $\{a_n\}$ có số $a_1 = 7$ là số nguyên tố duy nhất.

Bài 2/111. Tìm hai số chính phương khác nhau $a_1a_2a_3a_4$ và $b_1b_2b_3b_4$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = a_4 - b_4.$$

Lời giải (của Nguyễn Thị Huyền Hương - Trường cấp 2 Xuân Song, Nghi Xuân, Nghệ Tĩnh và một số bạn khác).

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a_1a_2a_3a_4 > b_1b_2b_3b_4.$$

$$\text{Đặt } \overline{a_1a_2a_3a_4} = a^2, \quad \overline{b_1b_2b_3b_4} = b^2,$$

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = a_4 - b_4 = c. \text{ Khi đó ta có } 100 > a > b \geq 32$$

$$\text{và } \overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{b_1b_2b_3b_4} = a^2 - b^2 = 1111c$$

$$\text{hay } (a-b)(a+b) = 1111c = 11 \cdot 101 \cdot c.$$

Vì 11 và 101 là hai số nguyên tố và vì $a+b < 200$, $a-b < 100$, nên chỉ xảy ra trường hợp

$$\begin{cases} a+b=101 \\ a-b=11c \end{cases}$$

(Trường hợp $a+b=11c$ chỉ thích hợp với $c=1$ nên cũng nằm trong trường hợp này).

Từ hệ trên suy ra

$$a = (101 + 11c)/2, \quad b = (101 - 11c)/2.$$

Từ điều kiện $b \geq 32$ suy ra $c \leq 3$ và do $a+b=101$ là một số lẻ nên c là một số lẻ. Vậy chỉ có thể

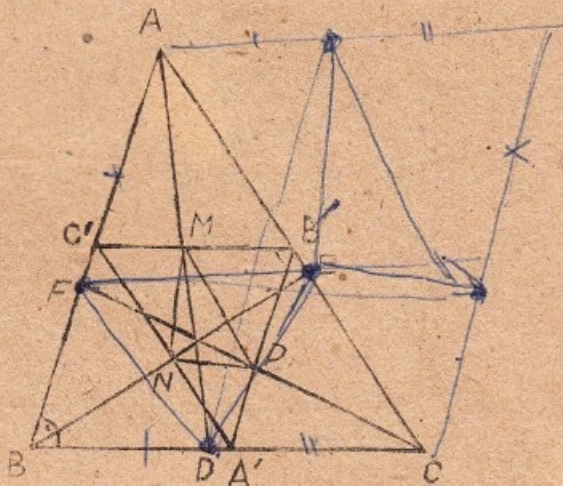
$$c=1 \text{ và } c=3.$$

Khi đó $a=56$, $b=45$ và $a=67$, $b=34$.

Các số chính phương cần tìm là (3186 và 2025), (4489 và 1156).
L.H.

Bài 3/111. Giả sử AD , BE , CF là các phân giác trong của tam giác ABC và M , N , P tương ứng là các điểm giữa của chúng. Chứng minh rằng diện tích tam giác MNP bằng $1/4$ diện tích tam giác DEF .

Lời giải (của nhiều bạn). Gọi A' , B' , C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA , AB và O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Dễ thấy M , N , P nằm tương ứng trên BC' , CA' , $A'B'$.



Dùng S để ký hiệu diện tích tam giác ghi ở chỉ số, ta có:

$$S_{MB'P} = MB' \cdot PB' \cdot \sin B' / 2.$$

Vì $MB' = DC/2$, $PB' = AF/2$, $B' = B$, nên

$$\begin{aligned} S_{MB'P} &= DC \cdot AF \cdot \sin B / 8 \\ &= (BC - BD)(AB - BF) \sin B / 8 \\ &= BC \cdot AB + BD \cdot BF - BC \cdot BF - BD \cdot AB \cdot \sin B / 8 \\ &= (S_{ABC} + S_{BDF} - S_{BCF} - S_{ABD}) / 4 \\ &= (S_{OAC} - S_{OBD}) / 4 \end{aligned} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$S_{MC'N} = (S_{OAB} - S_{ODE}) / 4 \quad (2)$$

$$S_{NA'P} = (S_{OBC} - S_{OEF}) / 4 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$S_{MB'P} + S_{MC'N} + S_{NA'P} = (S_{ABC} - S_{DEF}) / 4$$

hay

$$S_{ABC} / 4 - (S_{MB'P} + S_{MC'N} + S_{NA'P}) = S_{DEF} / 4 \quad (4)$$

Vì $S_{ABC}/4 = S_{A'B'C'}$ nên vẽ trái của (4) bằng S_{MNP} tức là $S_{MNP} = S_{DEF}/4$ (d.p.c.m.).

Nhận xét: Qua cách giải trên ta nhận thấy rằng kết luận vẫn đúng nếu các đường AD, BE, CF là ba đường đồng quy tại một điểm bất kỳ trong tam giác chứ không nhất thiết phải là ba đường phân giác.

L.H.

Bài 4/111. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của a và b , ta luôn có bất đẳng thức

$$(1+a+b)(ab+a+b) \geq 9ab.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$1+a+b \geq 3\sqrt[3]{ab} \quad (1)$$

$$ab+a+b \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) vẽ với vẽ ta được

$$(1+a+b)(ab+a+b) \geq 3\sqrt[3]{ab} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2} = 9ab.$$

Bài 5/111. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (\sin x + \sin 2x + \sin 4x)^5 - (\sin x + \sin 2x - \sin 4x)^5 - (\sin 2x + \sin 4x - \sin x)^5 - (\sin 4x + \sin x - \sin 2x)^5$$

với $x = 20^\circ$.

Lời giải (của Nguyễn Ngọc Khánh - 9C Đoàn Kết, Hà Nội).

Vì $x = 20^\circ$ nên

$$\sin x + \sin 2x = 2\sin(3x/2) \cos(x/2) = \cos(x/2) = \sin 4x.$$

Vậy A trở thành

$$\begin{aligned} A &= 2^5[(\sin x + \sin 2x)^5 - \sin^5 2x - \sin^5 x] \\ &= 2^5 \cdot 5[\sin x \sin 2x (\sin^3 x + \sin^3 2x) + 2\sin^2 x \sin^2 2x (\sin x + \sin 2x)] \\ &= 2^5 \cdot 5 \sin x \sin 2x (\sin x + \sin 2x) \times (\sin^2 x + \sin x \sin 2x \times \sin^2 2x) \\ &= 2^5 \cdot 5 \sin x \sin 2x \cos(x/2) [\cos^2(x/2) - \sin x \sin 2x]. \end{aligned}$$

Mặt khác cũng vì $x = 20^\circ$ nên

$$\sin x \sin 2x = (\cos x - 1/2)/2,$$

$$\cos x \cos(x/2) = [\cos(x/2) + 3/2]/2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} A &= 2^4 \cdot 5(\cos x - 1/2)\cos(x/2) \\ &\quad \times [\cos^2(x/2) - \cos(x/2) + 1/4] \\ &= 2^4 \cdot 5(\cos x - 1/2)\cos(x/2) \cdot (3/4) \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5[\cos(x/2)/2 + \sqrt{3}/4 - \cos(x/2)/2] \\ &= 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 15\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Bài 6/111. Từ một tam giác T_0 người ta dựng nên một dãy vô hạn những tam giác $T_0, T_1, T_2, \dots$ theo qui tắc sau: Các đỉnh của tam giác T_{i+1} là các tiếp điểm của các cạnh của tam giác T_i với đường tròn nội tiếp của tam giác đó ($i = 0, 1, 2, \dots$)

Chứng minh bất đẳng thức

$$p_0 \geq \sum_{i=1}^{\infty} p_i \quad (1)$$

trong đó p_i là nửa chu vi tam giác T_i ($i = 0, 1, \dots$)

Tam giác T_0 phải thỏa mãn điều kiện gì để (1) có đẳng thức.

Lời giải. Trước hết ta thấy rằng nếu A, B, C là các góc của một tam giác thì

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &\leq 3\sin 60^\circ = 3\sqrt{3}/2 \\ &= 3\tan 60^\circ/2 \leq (\tan A + \tan B + \tan C)/2, \end{aligned}$$

tức là

$$2(\sin A + \sin B + \sin C) \leq \tan A + \tan B + \tan C.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

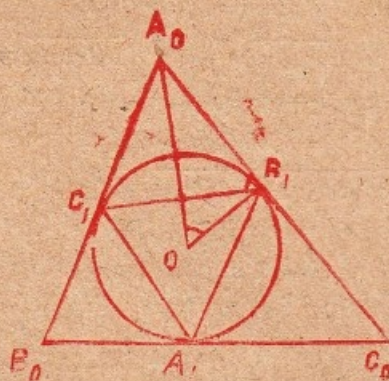
Mặt khác ta có

$$\widehat{A_0B_1} = \widehat{A_0B_1C_1} = \widehat{B_1A_1C_1},$$

do đó

$$A_0B_1 = OB_1 \tan \widehat{A_0OB_1} = r \tan A_1$$

với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác T_0 .



$$\text{Ta có } p_0 = A_0B_1 + B_0C_1 + C_0A_1$$

$$= r(\tan A_1 + \tan B_1 + \tan C_1).$$

$$2p_1 = B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1$$

$$= 2r(\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1).$$

Nhưng theo bất đẳng thức (1) ta có

$$2(\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1) \leq \tan A_1 + \tan B_1 + \tan C_1.$$

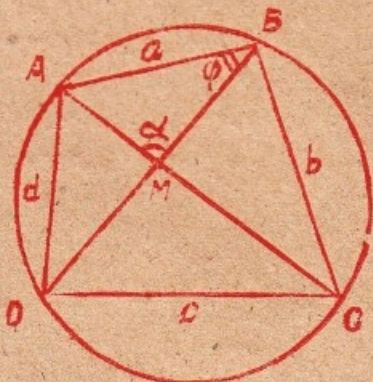
Từ đó suy ra $2p_1 \leq p_0$. Tương tự ta có $2p_{i+1} \leq p_i$ (i là số nguyên không âm). Từ đó suy ra $p_i \leq p_0/2^i$. Do đó

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots &\leq \\ &\leq p_0/2 + p_0/2^2 + \dots + p_0/2^n + \dots \\ &= \frac{p_0/2}{1 - 1/2} = p_0. \text{ tức là } \sum_{i=1}^{\infty} p_i \leq p_0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các tam giác T_i đều là tam giác đều; điều này xảy ra khi và chỉ khi tam giác T_0 là tam giác đều.

Bài 7/111. Các đường chéo của tứ giác nội tiếp $ABCD$ cắt nhau ở M . Cho biết bán kính các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MAB, MBC, MCD và MDA , hãy tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Lời giải. Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, \angle AMB = \alpha, \angle BMC = \varphi$. Gọi R_1, R_2, R_3, R_4, R theo thứ tự là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MCD, MDA và tứ giác $ABCD$. Ta có:



$$a/R_1 = b/R_2 = c/R_3 = d/R_4 = 2\sin\alpha. \text{ Mặt khác,}$$

$$MA = 2R_1\sin\varphi = 2R_1d/2R = R_1d/R.$$

Nhưng vì $d = 2R_4\sin\alpha$ nên ta có:

$$MA = 2R_1R_4\sin\alpha/R.$$

Tương tự:

$$MC = 2R_2R_3\sin\alpha/R.$$

Từ đó:

$$AC = MA + MC = (R_1R_4 + R_2R_3)2\sin\alpha/R.$$

Tương tự:

$$BD = (R_1R_2 + R_3R_4)2\sin\alpha/R.$$

Theo định lý Ptolômê: $AC \cdot BD = ac + bd$, tức là

$$\begin{aligned} (R_1R_2 + R_3R_4)(R_1R_4 + R_2R_3)2\sin^2\alpha/R^2 \\ = (R_1R_2 + R_3R_4)4\sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Từ đó rút ra:

$$R = \sqrt{(R_1R_2 + R_3R_4)(R_1R_4 + R_2R_3)/(R_1R_3 + R_2R_4)}$$

Bài 8/111. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định với mọi giá trị của x , thỏa mãn điều kiện tồn tại số thực a sao cho

$$f(x+a) = f(x) + g(x)$$

và

$$g(x+na) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -g(x) & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \text{ nếu } 0 \leq x \leq a.$$

Chứng minh rằng nếu $|g(x)| \leq 1$ thì

$$0 \leq f(x) \leq 2 \quad (1)$$

Lời giải (của Nguyễn Thị Huyền Hương - Nghi Xuân, Nghệ Tĩnh). Ta có:

$$f(x+2a) = f[(x+a)+a] = f(x+a) + g(x+a)$$

Mà

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x) + g(x), \quad g(x+a) = -g(x) \text{ nên} \\ f(x+2a) &= f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ $2a$. Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1) trong khoảng $0 \leq x \leq 2a$.

Trong khoảng $0 \leq x \leq a$, theo giả thiết $f(x) = 1$ nên (1) được thỏa mãn.

Với $a < x \leq 2a$, đặt $y = x - a$, ta có:

$$f(x) = f(y+a) = f(y) + g(y) = 1 + g(y).$$

Vì $|g(y)| \leq 1$ nên trong khoảng này

$$0 \leq f(x) \leq 2.$$

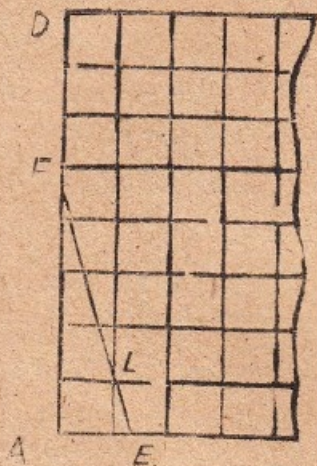
Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Các bạn: Nguyễn Văn Nhạc (HCT Bùi Thị Xuân, T.P. Hồ Chí Minh), Nguyễn Hoài Nam (10A Hoàn Kiếm, Hà Nội) Hoàng Minh Quốc (12C Bùi Thị Xuân, T.P. Hồ Chí Minh) và Đặng Tất Thành (phường 18, quận 3, T.P. Hồ Chí Minh) có lời giải tương tự.

Bài 9/111. Cho hình vuông có cạnh bằng 8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị. Có một loại các vết cắt làm cho không có một ô vuông nào

nguyên vẹn nhưng có ít nhất một đỉnh của hình vuông không có vết cắt nào đi qua chia hình vuông thành một số chẵn các tam giác bằng nhau. Hỏi số tam giác đó ít nhất là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi A là một đỉnh hình vuông không có vết cắt đi qua; thế thì phải có một trong các tam giác bằng nhau là tam giác vuông đỉnh A , ta gọi là tam giác T . Vì cạnh huyền của tam giác T cắt ở vuông đơn vị có đỉnh A nên bao giờ cũng dựng được một tam giác AEF có E và F nằm trên hai cạnh của hình vuông kẻ với đỉnh A và cạnh huyền EF đi qua nút L như hình



vẽ chưa chọn trong nó tam giác T . Như vậy diện tích tam giác T , tức là diện tích mỗi tam giác được tạo thành do các vết cắt, bao giờ cũng nhỏ hơn diện tích tam giác AEF lớn nhất có thể có.

Ta tính diện tích tam giác AEF lớn nhất. Về mặt diện tích thì vai trò của E và F hoán loạn như nhau nên không mất tổng quát có thể giả sử $AF \geq AE$; ta dễ dàng chứng minh được AEF có diện tích lớn nhất khi $F \equiv D$ và diện tích đó bằng $32/7$.

Như vậy diện tích mỗi tam giác do các vết cắt tạo thành nhỏ hơn $32/7$; do đó số tam giác phải lớn hơn $64 : (32/7) = 14$. Vì số tam giác chẵn nên số tam giác ít nhất là 16.

Ta chỉ ra cách cắt tạo thành 16 tam giác. Đó là cách cắt tạo thành các tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 1 và 8.

Các bạn: Vũ Đức Vinh và Vũ Anh Tuấn (12C Lê Quý Đôn, T.P. Hồ Chí Minh), Nguyễn Hoài Nam (10D Hoàn Kiếm, Hà Nội) có lời giải tốt.

L.H.

Bài 10/111. Cho biết:

$$x_1^{a_{11}} + x_2^{a_{12}} + \dots + x_n^{a_{1n}} = y_1$$

$$x_1^{a_{21}} + x_2^{a_{22}} + \dots + x_n^{a_{2n}} = y_2$$

$$x_1^{a_{n1}} + x_2^{a_{n2}} + \dots + x_n^{a_{nn}} = y_n$$

trong đó

$$x_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

và

$$a_{1k} + a_{2k} + \dots + a_{nk} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Chứng minh rằng

$$y_1^{1979} + y_2^{1979} + \dots + y_n^{1979} \geq n^{1980}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương $x_1^{a_{1k}}, x_2^{a_{2k}}, \dots, x_n^{a_{nk}}, k=1, 2, \dots, n$, ta có

$$y_1 \geq n \left(x_1^{a_{11}} \dots x_n^{a_{1n}} \right)^{1/n}$$

$$y_2 \geq n \left(x_1^{a_{21}} \dots x_n^{a_{2n}} \right)^{1/n}$$

$$y_n \geq n \left(x_1^{a_{n1}} \dots x_n^{a_{nn}} \right)^{1/n}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} & y_1^{1979} + y_2^{1979} + \dots + y_n^{1979} \\ & \geq n^{1979} \left[\left(x_1^{a_{11}} \dots x_n^{a_{1n}} \right)^{1979/n} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \left(x_1^{a_{n1}} \dots x_n^{a_{nn}} \right)^{1979/n} \right] \\ & \geq n^{1979} \cdot n \left(x_1^{\sum a_{i1}} \dots x_n^{\sum a_{in}} \right)^{1979/n^2} \end{aligned}$$

(do áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương $x_1^{a_{i1}}, \dots, x_n^{a_{in}}, i=1, 2, \dots, n$. Dấu Σ lấy i từ 1 đến n).

Theo giả thiết $\sum_{i=1}^n a_{ik} = 0; k=1, 2, \dots, n$, nên

$$y_1^{1979} + y_2^{1979} + \dots + y_n^{1979} \geq n^{1979} \cdot n = n^{1980}$$



CÁC ĐỀ TOÁN CỦA CUỘC THI GIẢI TOÁN 1980

(Tiếp theo vù liệt)

Bài 1/114. Cho dãy số tự nhiên $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, với $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ và tổng các a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) bằng tích các a_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Giả sử $k \geq 2$, chứng minh rằng tổng và tích các a_i này luôn luôn bé hơn hoặc bằng $2k$. Tìm các a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) trong trường hợp tổng và tích các a_i bằng $2k$.

Ngô Đạt Tú (Viện Toán học)

Bài 2/114. Cho các số nguyên $(0, 1, 2, \dots, n)$. Hãy tìm một hoán vị của các số nguyên này không chứa cặp số cộng gồm 3 số hạng.

Ngô Đạt Tú

Bài 3/114. Giả sử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ là hai hoán vị của dãy $(1, 1/2, \dots, 1/n)$, thỏa mãn điều kiện

$$a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq \dots \geq a_n + b_n \quad (*)$$

Chứng minh rằng với mọi $k = 1, 2, \dots, n$, ta có bất đẳng thức thực sự

$$a_k + b_k < 4/k.$$

Hơn nữa, hãy chứng tỏ rằng không thể cải tiến được kết quả này, theo nghĩa: với $\epsilon > 0$ cho trước tùy ý, tồn tại một số tự nhiên n và hai hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ của dãy $(1, 1/2, \dots, 1/n)$, thỏa mãn điều kiện $(*)$, nhưng đồng thời có một số tự nhiên k sao cho

$$a_k + b_k > 4/k - \epsilon.$$

Phan Đức Chính

(ĐHTH Hà Nội)

Bài 4/114. Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1. Giả sử có tất cả k phân số tối giản dạng a/b với $1 \leq a \leq b \leq n$. Chứng minh rằng nếu

$$1/n = a_1/b_1 < a_2/b_2 < \dots < a_k/b_k = 1$$

thì ta có:

$$1) \quad a_{i+1}b_i = a_i b_{i+1} = 1, \quad \text{với } 1 \leq i < k;$$

$$2) \quad \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{b_{i-1} + b_{i+1}} = \frac{a_i}{b_i}, \quad \text{với } 2 \leq i \leq k-1;$$

$$3) \quad \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \dots + \frac{1}{b_{k-1} b_k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Vũ Đình Hòa (Hà Nội)

Bài 5/114. Tìm các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số

$$f(x, y) = \frac{a \sin^4 x + b \cos^4 y}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{a \cos^4 x + b \sin^4 y}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số dương.

Nguyễn Công Quý

(ĐHSP T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 6/114. Cho hàm số của hai biến số thực $f(x, y)$, thỏa mãn các tính chất sau:

$$(1) \quad f(x, y) = f(y, x), \quad \text{với mọi } x, y;$$

$$(2) \quad z f(x, y) = f(xz, zy) \quad \text{với mọi } x, y, z;$$

$$(3) \quad z + f(x, y) = f(z+x, z+y) \quad \text{với mọi } x, y, z.$$

Hãy tính $f(1936, 1980)$

Nguyễn Công Quý

Bài 7/114. Cho đa thức

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

thỏa mãn điều kiện: $|f(x)| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Chứng minh rằng khi $|x| \leq 1$, ta có

$$|3ac^2 + 2bx + c| \leq 9.$$

và không thể thay số 9 bằng một số nhỏ hơn.

Phan Đức Chính

Bài 8/114. Trong mặt phẳng cho bốn điểm A, B, C, D , trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D trên các đường thẳng BC, CA, AB . Tam giác $A'B'C'$ gọi là tam giác chiếu của điểm D trên tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng đối với mỗi bộ bốn điểm phẳng (A, B, C, D) , bốn tam giác chiếu của bốn điểm đó trên các tam giác xác định bởi ba điểm còn lại là bốn tam giác đồng dạng.

b) Bốn điểm phẳng A, B, C, D phải thỏa mãn điều kiện gì để bốn tam giác đó bằng nhau?

Nguyễn Đăng Phát (ĐHSP 1 Hà Nội)

Bài 9/114. Cho mặt cầu tâm O bán kính R và một điểm P cố định nằm trong mặt cầu ($OP = d < R$). Ba dây cung AA', BB', CC' thay đổi của mặt cầu luôn đi qua P và vuông góc đôi một tại P tạo nên một khối tâm mặt (K) nội tiếp mặt cầu, có các đỉnh là các đầu mút của các dây cung đó. Hỏi trong số những khối tâm mặt (K) nội tiếp mặt cầu tạo thành bằng cách nêu trên, khối nào có thể tích lớn nhất, khối nào có thể tích nhỏ nhất? Tính

thể tích lớn nhất và nhỏ nhất đó theo R và d .

Nguyễn Đăng Phát

Bài 10/114. Gọi V là thể tích, S là diện tích toàn phần của một tứ diện tùy ý trong không gian. Chứng minh rằng

$$S^3 \geq 216 \sqrt{3} V^2,$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra đối với tứ diện đều.

Phán Đức Chính

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

TIÊU CHUẨN CHIA HẾT CHO 7

ĐỖ MINH TỰ

TRONG chương trình toán phổ thông người ta đã nêu lên các tiêu chuẩn chia hết của các số tự nhiên cho 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Chúng ta hãy nhắc lại ở đây các tiêu chuẩn đó. Với chú ý rằng mọi số tự nhiên n đều viết được dưới các dạng:

$$\begin{aligned} n &= 10a + b \text{ với } 0 \leq b \leq 9, \\ n &= 100c + d \text{ với } 0 \leq d \leq 99, \\ n &= 1000e + f \text{ với } 0 \leq f \leq 999, \\ n &= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \dots + c_1 10 + c_0. \end{aligned}$$

ta có thể phát biểu các tiêu chuẩn chia hết đã biết như sau:

Số tự nhiên $n = 10a + b$ chia hết cho 2 (tương ứng 5) khi và chỉ khi b chia hết cho 2 (tương ứng 5).

Số tự nhiên $n = 100c + d$ chia hết cho 4 khi và chỉ khi d chia hết cho 4.

Số tự nhiên $n = 1000e + f$ chia hết cho 8 khi và chỉ khi f chia hết cho 8.

Số tự nhiên $n = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \dots + c_1 10 + c_0$ chia hết cho 3 (tương ứng 9) khi và chỉ khi $c_k + c_{k-1} + \dots + c_2 + c_1 + c_0$ chia hết cho 3 (tương ứng 9).

Số tự nhiên n chia hết cho 6 khi và chỉ khi n đồng thời chia hết cho 2 và cho 3.

Như vậy là chúng ta đã biết các tiêu chuẩn chia hết của các số tự nhiên cho một số tự nhiên gồm một chữ số bất kỳ trừ số 7. Ta hãy đặt vấn đề tìm tiêu chuẩn chia hết của các số tự nhiên cho 7.

Nếu số tự nhiên $n = 10a + b$ chia hết cho 7 thì phải có một số tự nhiên k sao cho:

$$10a + b = 7k \quad (1)$$

từ đó suy ra:

$$10a + 50b = 7k - b + 50b$$

$$\text{hay } 10(a + 5b) = 7(k + 7b) \quad (2)$$

Đẳng thức (2) chứng tỏ rằng $7(k + 7b)$ chia hết cho 10, nhưng 7 và 10 nguyên tố cùng nhau, nên phải có một số tự nhiên h sao cho:

$$k + 7b = 10h \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) và giản ước cho 10 ta được:

$$a + 5b = 7h \quad (4)$$

Đẳng thức (4) chứng tỏ $a + 5b$ chia hết cho 7. Vậy ta đã tìm được điều kiện cần để cho số tự nhiên $n = 10a + b$ chia hết cho 7 là số tự nhiên $n' = a + 5b$ chia hết cho 7.

Điều kiện đó cũng là đủ. Thật vậy:

Nếu $a + 5b = 7h$

thì $10(a + 5b) = 70h$,

suy ra $10a + b = 70h - 49b = 7(10h - 7b) = 7k$,
với $k = 10h - 7b$ (là một số nguyên).

Vậy:

$$n = 10a + b : 7 \Leftrightarrow n' = a + 5b : 7.$$

Ví dụ:

a) $274 \rightarrow 27 + 20 = 47$, 47 không chia hết cho 7.
Vậy 274 không chia hết cho 7.

b) $198492 \rightarrow 19849 + 10 = 19859 \rightarrow 1985 + 45 = 2030 \rightarrow 203 + 0 = 203 \rightarrow 20 + 15 = 35$. Vậy 198492 chia hết cho 7.

Vận dụng liên tiếp tiêu chuẩn trên đây bao giờ ta cũng đưa được việc xét tính chia hết cho 7 của một số tự nhiên n bất kỳ về việc xét tính chia hết cho 7 của số tự nhiên n' gồm nhiều lắm là 2 chữ số. Thật vậy:

Nếu $n = 10a + b > 49$, tức là

$$a > 4 \text{ và } 0 \leq b \leq 9, \text{ thì: } 9a > 4b$$

$$10 + b > a + 5b.$$

nghĩa là ta đưa việc xét mỗi số tự nhiên

$$n = 10a + b > 49$$

về xét số tự nhiên

$$n' = a + 5b < n.$$

Còn nếu $n = 10a + b \leq 49$, tức là $a \leq 4$ và $0 \leq b \leq 9$, thì:

$$0 \leq n' = a + 5b \leq 4 + 45 = 49.$$

Tiêu chuẩn chia hết cho 7 vừa tìm được, thực ra không phải là duy nhất. Chẳng hạn chúng ta có tiêu chuẩn sau:

$$n = 10a + b : 7 \Leftrightarrow n' = a - 2b : 7$$

Ví dụ: (lấy lại ví dụ b) đã nêu ở trên):

$$198492 \rightarrow 19849 - 4 = 19845 \rightarrow 1984 - 10 = 1974 \rightarrow$$

$$197 - 8 = 189 \rightarrow 18 - 18 = 0.$$

Vậy 198492 chia hết cho 7.

Chúng tôi xin nhường cho bạn đọc tự chứng minh lấy tiêu chuẩn vừa nêu.

TOÁN HỌC

và ĐỜI SỐNG



TRÌNH TỰ NÀO LÀ TỐT NHẤT

TRONG cuộc sống hàng ngày chúng ta thường phải tính toán, sắp đặt công việc sao cho hợp lý, việc nào nên làm trước, việc nào nên làm sau. Trong thực tiễn sản xuất cũng vậy, trong một xưởng máy hay trong một đội sản xuất, thường có nhiều công việc phải làm, mỗi việc cần trải qua một số thao tác hay máy móc nhất định, thời gian làm mỗi việc trên mỗi máy lại rất khác nhau, vậy nên sắp xếp trình tự làm các công việc đó như thế nào để hoàn thành toàn bộ công việc trong thời hạn sớm nhất? Nếu biết sắp xếp, bố trí khéo thì chẳng những chúng ta có thể tiết kiệm được thời gian mà còn tận dụng được năng lực của máy móc thiết bị, làm tăng năng suất lao động, hạ giá thành sản phẩm. Sau đây là một loại bài toán như thế (tất nhiên các điều kiện đã được đơn giản hóa so với thực tế).

Bài toán Giôn-xon (Johnson). Cần sản xuất (hoàn thành) m chi tiết (công việc), mỗi chi tiết đều phải lần lượt được gia công trên các máy $1, 2, \dots, n$. Đã biết $t_{ij} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)

là thời gian cần thiết để gia công chi tiết i trên máy j . Hãy xác định trình tự gia công các chi tiết (trên mỗi máy gia công chi tiết nào trước, chi tiết nào sau) để toàn bộ thời gian sản xuất các chi tiết là nhỏ nhất, với các điều kiện sau đây:

– Đối với mỗi chi tiết thì việc gia công nó trên máy j chỉ có thể được bắt đầu sau khi chi tiết đó đã được gia công xong trên máy $j - 1$;

– Trên mỗi máy cùng một lúc chỉ có thể gia công nhiều nhất là một chi tiết, khi máy đã gia công chi tiết nào thì phải làm xong chi tiết đó mới được chuyển sang gia công chi tiết khác.

Bài toán này thường gặp trong việc lập kế hoạch sản xuất ở các nhà máy, lập lịch chạy tàu, lập thời gian biểu học tập ở các trường học và trong nhiều vấn đề khác. Đó là loại bài toán tìm trình tự tối ưu, được nghiên cứu trong một môn toán học ứng dụng rất mới mẻ có tên gọi là «lập kế hoạch lịch». Để dễ hình dung ta có thể xét bài toán cụ thể như sau: Một nhà máy in cần phải sản xuất m cuốn sách bằng hai máy (như vậy ở đây $n = 2$), một máy in và một máy đóng sách. Cho biết a_i là thời gian in cuốn sách thứ i và b_i là thời gian đóng cuốn sách đó. Tất nhiên là sách phải in xong mới đóng. Vậy trình tự in–đóng các cuốn sách nên như thế nào để toàn bộ m cuốn sách đó được sản xuất ra trong thời hạn sớm nhất?

Bài toán Giôn-xon nêu trên tuy có vẻ đơn giản, nhưng cách giải không phải dễ. Khó khăn ở đây chỉ là về mặt tính toán. Thật vậy, dễ thấy rằng với mỗi máy có tất cả $m!$ cách sắp xếp trình

tự gia công các chi tiết và trên các máy khác nhau có thể có trình tự gia công khác nhau nên với n máy có tất cả $(m!)^n$ cách sắp xếp trình tự. Đó là một con số hữu hạn, vì thế để giải bài toán này có một cách « đơn giản » nhất là dùng phương pháp « duyệt toàn bộ », tức là kiểm tra lần lượt từng cách sắp xếp rồi chọn ra cách sắp xếp tốt nhất (tức với thời hạn hoàn thành toàn bộ công việc là sớm nhất). Nhưng tiếc thay, với m và n hơi lớn một chút thì $(m!)^n$ là một con số khổng lồ, cho dù có dùng máy tính điện tử cực nhanh, bằng phương pháp trên cũng không thể giải nổi bài toán. Người ta đã cố gắng tìm những phương pháp giải khác có hiệu quả hơn, nhưng cho đến nay vẫn chưa có một phương pháp hiệu quả nào để giải bài toán trong trường hợp tổng quát, trừ ra một số trường hợp riêng như ta sẽ xét dưới đây.

Bài toán gia công m chi tiết trên 2 máy.

Bài toán Giôn-xơn trong trường hợp $n=2$ (còn m nguyên dương tùy ý) có thể phát biểu lại dưới dạng cụ thể như sau: Cần gia công m chi tiết trên hai máy A và B (lần lượt qua A trước, B sau). Đã biết a_i là thời gian cần để gia công chi tiết i trên máy A ; b_i là thời gian cần để gia công chi tiết i trên máy B . Hãy tìm trình tự gia công các chi tiết trên mỗi máy sao cho toàn bộ thời gian kể từ khi máy A bắt đầu gia công chi tiết đầu tiên cho đến khi máy B hoàn thành gia công chi tiết cuối cùng (gọi tắt là thời hạn hoàn thành) là ngắn nhất.

Các nhà toán học Giôn-xơn (Johnson S.M.) và Ben-man (Bellman R.) là những người đầu tiên nghiên cứu bài toán này (cách đây khoảng 25 năm) và đã đề ra một phương pháp giải rất đơn giản như sau. Trước hết nhận xét rằng không làm mất tính tổng quát có thể giả thiết trình tự gia công các chi tiết là như nhau trên cả hai máy, nghĩa là chi tiết nào làm xong trước trên máy A thì được gia công trước trên máy B (khi máy B rỗi). Làm như vậy không có ảnh hưởng gì đến thời hạn hoàn thành toàn bộ. Như vậy mỗi trình tự gia công sẽ tương ứng một hoán vị của các số tự nhiên $1, 2, \dots, m$. Xét một trình tự $S = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, tức là đầu tiên gia công chi tiết i_1 , rồi đến chi tiết $i_2, \dots$, và cuối cùng là chi tiết i_m . Gọi x_i là thời gian « chết » của máy B từ khi hoàn thành việc gia công chi tiết i_{k-1} đến khi bắt đầu gia công chi tiết $i_k = i$. Gọi $T_m(S)$ là thời hạn hoàn thành ứng với trình tự gia công S . Để đơn giản ký hiệu và không làm mất tính tổng quát, ta xem rằng $S = (1, 2, \dots, m)$. Để dễ dàng thấy rằng thời hạn hoàn thành tương ứng là:

$$T_m(S) = \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{i=1}^m x_i$$

Vì $\sum_{i=1}^m b_i$ là một hằng số nên bài toán tìm cực

tiểu $T_m(S)$ qui về bài toán tìm cực tiểu $\sum_{i=1}^m x_i$

là tổng thời gian « chết » của máy B .

Vì các chi tiết phải gia công lần lượt trên máy A rồi máy B nên thời gian máy B chờ gia công chi tiết i đúng bằng thời gian gia công chi tiết i trên máy A , tức là $x_i = a_i$.

Khi gia công chi tiết thứ hai, máy B sẽ phải chờ đợi nếu máy B tuy đã gia công xong chi tiết 1, nhưng máy A chưa gia công xong chi tiết 2. Nói cách khác, máy B sẽ phải chờ đợi nếu $a_1 + a_2 > x_1 + b_1$ và thời gian chờ đợi bằng

$$x_2 = a_1 + a_2 - b_1 - x_1$$

Còn nếu trái lại $a_1 + a_2 \leq x_1 + b_1$ thì chi tiết 2 có thể gia công ngay trên máy B , tức là $x_2 = 0$. Qui tụ cả hai trường hợp, ta có:

$$x_2 = \max(a_1 + a_2 - b_1 - x_1; 0) \\ = \max\left(\sum_{i=1}^2 a_i - \sum_{i=1}^1 b_i - x_1; 0\right)$$

Do đó

$$x_1 + x_2 = \max\left(\sum_{i=1}^2 a_i - \sum_{i=1}^1 b_i; a_1\right)$$

Bảng lập luận tương tự, ta có:

$$x_3 = \max\left(\sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{i=1}^2 b_i - \sum_{i=1}^2 x_i; 0\right)$$

do đó

$$\sum_{i=1}^3 x_i = \max\left(\sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{i=1}^2 b_i; \sum_{i=1}^2 x_i\right) \\ = \max\left(\sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{i=1}^2 b_i; \sum_{i=1}^2 a_i - \sum_{i=1}^1 b_i; a_1\right)$$

Tổng quát ta có:

$$\sum_{i=1}^m x_i = \max\left(\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=1}^{m-1} b_i; \sum_{i=1}^{m-1} a_i - \sum_{i=1}^{m-2} b_i; \dots; a_1\right) \\ = \max_{1 \leq k \leq m} \left(\sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh qui tắc xác định trình tự gia công tối ưu.

Xét hai trình tự gia công:

$$S' = (1, 2, \dots, j-1, j, j+1, \dots, m)$$

$$S'' = (1, 2, \dots, j-1, j+1, j, \dots, m)$$

là hai trình tự chỉ khác nhau ở các vị trí giá công hai chỉ tiết j và $j+1$. Vì thế trong các biểu thức xác định thời hạn hoàn thành $T_m(S')$ và $T_m(S'')$, chúng chỉ khác nhau ở hai đại lượng:

$$K(S') = \max \left(\sum_{i=1}^j a_i - \sum_{i=1}^{j-1} b_i, \sum_{i=1}^{j+1} a_i - \sum_{i=1}^j b_i \right)$$

$$\text{và } K(S'') = \max \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_i - a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j-1} b_i, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{j+1} a_i - \sum_{i=1}^{j-1} b_i - b_{j+1} \right)$$

Có thể kiểm tra lại rằng nếu

$$\min(a_j, b_{j+1}) < \min(a_{j+1}, b_j)$$

thì $K(S') < K(S'')$, do đó $T_m(S') < T_m(S'')$. Còn nếu $\min(a_j, b_{j+1}) = \min(a_{j+1}, b_j)$ thì $T_m(S') = T_m(S'')$. Vì thế, chỉ tiết j sẽ được gia công chỉ tiết $j+1$ nếu

$$\min(a_j, b_{j+1}) \leq \min(a_{j+1}, b_j).$$

Quan hệ này có tính chất bắc cầu, nên cuối cùng ta có kết luận:

Định lý: Trong một trình tự tốt nhất bất kỳ, chỉ tiết i được gia công trước chỉ tiết k khi và chỉ khi

$$\min(a_i, b_k) \leq \min(a_k, b_i) \quad (*)$$

Theo kết quả này, để tìm trình tự tốt nhất ta làm như sau:

Quy tắc Giòn-xon:

1. Ghi các giá trị a_i và b_i tương ứng vào hai dòng nằm ngang (xem bảng)

i	1	2	...	m
a_i	a_1	a_2		a_m
b_i	b_1	b_2		b_m

2. Tìm trong các giá trị a_i và b_i của bảng một số nhỏ nhất (nếu có nhiều số nhỏ nhất thì có thể chọn một số tùy ý trong số đó).

3. Nếu số đã chọn là a_{i_0} thì bất đẳng thức (*) sẽ được thỏa mãn với $i = i_0$ và mọi $k \neq i_0$, nên chỉ tiết i_0 tương ứng được xếp làm đầu tiên.

Còn nếu số đã chọn là b_{i_0} thì (*) được thỏa mãn với $k = i_0$ và mọi $i \neq i_0$, nên khi đó chỉ tiết i_0 được xếp làm sau cùng.

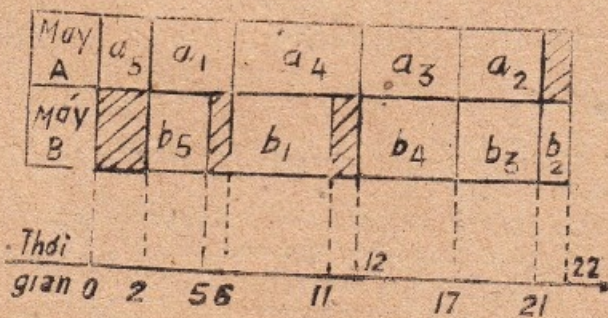
4. Loại khỏi bảng (không xét tới nữa) cả hai giá trị a_{i_0} và b_{i_0} tương ứng với chỉ tiết i_0 vừa được xếp thứ tự.

5. Trong bảng các a_i và b_i còn lại ta tiếp tục qua trình trên cho đến khi mọi chỉ tiết đều được sắp xếp thứ tự.

Ví dụ: Giải bài toán với các số liệu cho trong bảng sau đây:

i	1	2	3	4	5
a_i	1	4	5	6	2
b_i	5	1	4	5	3

Ta thấy số nhỏ nhất trong bảng là $b_2 = 1$, nên chỉ tiết 2 được xếp làm sau cùng. Tiếp đó, số nhỏ nhất trong bảng còn lại (sau khi đã loại $a_2 = 4$, và $b_2 = 1$) là $a_5 = 2$, chỉ tiết 5 được xếp làm đầu tiên. Cứ như vậy cuối cùng ta được trình tự tốt nhất là $S = (5, 1, 4, 3, 2)$. Thời hạn hoàn thành toàn bộ là $T_5(S) = 22$ (xem hình vẽ).



Trên đây ta đã xét bài toán Giòn-xon và nêu cách giải trong trường hợp $n=2$. Một số trường hợp khác sẽ được xét tiếp ở bài sau.

VŨ QUANG

Các bạn có bài đã đăng chú ý: Bạn nào có địa chỉ đã thay đổi xin báo cho Tòa soạn biết để tiện cho việc liên lạc.

BẠN ĐỌC TÌM TÔI

LÀM BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI CHẶT THÊM

Tôi xin trình bày với các bạn một bất đẳng thức: «Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương. Hãy chứng minh rằng:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \times (\sqrt[n]{a_1/a_2} + \sqrt[n]{a_2/a_3} + \dots + \sqrt[n]{a_{n-1}/a_n} + \sqrt[n]{a_n/a_1}) \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Bất đẳng thức này chặt hơn bất đẳng thức Côsi vì ta luôn có với $a_1, a_2, \dots, a_n$ dương thì

$$n \leq \sqrt[n]{a_1/a_2} + \sqrt[n]{a_2/a_3} + \dots + \sqrt[n]{a_{n-1}/a_n} + \sqrt[n]{a_n/a_1}$$

Cách chứng minh bất đẳng thức (1) như sau:

$$\text{Đặt } a_i = x_i^n \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad x_i \geq 0 \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \\ &\geq x_1 x_2 \dots x_n (x_1/x_2 + x_2/x_3 + \dots + x_{n-1}/x_n + x_n/x_1) \\ &\Leftrightarrow x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \\ &\geq x_1^2 x_3 \dots x_n + x_1 x_2^2 x_4 \dots x_n + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n-1}^2 + \\ &\quad + x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n^2 \end{aligned}$$

Trước hết ta chứng minh:

$$x_1^n + \frac{1}{2} x_3^n + \dots + \frac{1}{2} x_n^n \geq \frac{n}{2} \cdot x_1^2 x_3 \dots x_n$$

Ta hãy áp dụng bất đẳng thức Côsi suy rộng:

«Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương và $m_1, m_2, \dots, m_n$ là các số hữu tỉ dương, ta có:

$$\begin{aligned} &m_1 + m_2 + \dots + m_n \\ &\quad \sqrt[n]{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n}} \\ &\leq \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{aligned}$$

Lấy $(n-1)$ số với

$$a_1 = x_1^n, \quad a_3 = x_3^n, \dots, a_n = x_n^n,$$

$$m_1 = 1, \quad m_3 = m_4 = \dots = m_n = \frac{1}{2}$$

ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{x_1^n + \frac{1}{2} x_3^n + \dots + \frac{1}{2} x_n^n}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}} \geq \\ &\quad \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}{n-2} \sqrt[n]{x_1^n (x_3^n)^{1/2} \dots (x_n^n)^{1/2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_1^n + \frac{1}{2} x_3^n + \dots + \frac{1}{2} x_n^n}{n/2} \\ &\geq \sqrt[n]{x_1^n x_3^{n/2} \dots x_n^{n/2}} = x_1^2 x_3 \dots x_n \\ &\Leftrightarrow x_1^n + \frac{1}{2} x_3^n + \dots + \frac{1}{2} x_n^n \geq \frac{n}{2} \cdot x_1^2 x_3 \dots x_n \\ &\text{Tương tự, ta có:} \\ &\quad x_2^n + \frac{1}{2} x_4^n + \dots + \frac{1}{2} x_n^n + \frac{1}{2} x_1^n \geq \\ &\quad \geq \frac{n}{2} \cdot x_2^2 x_4 \dots x_n x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_{n-1}^n + \frac{1}{2} x_1^n + \dots + \frac{1}{2} x_{n-2}^n \geq \frac{n}{2} \cdot x_{n-1}^2 x_1 \dots x_{n-2} \\ &x_n^n + \frac{1}{2} x_2^n + \dots + \frac{1}{2} x_{n-1}^n \geq \frac{n}{2} \cdot x_n^2 x_2 \dots x_{n-1} \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta có:

$$\begin{aligned} &(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}) x_1^n + (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}) x_2^n + \\ &\quad \dots + (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}) x_n^n \\ &\geq \frac{n}{2} (x_1^2 x_3 \dots x_n + x_2^2 x_4 \dots x_n x_1 + \dots + x_n^2 x_2 \dots x_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \geq x_1^2 x_3 \dots x_n + \\ &\quad + x_2^2 x_4 \dots x_n x_1 + \dots + x_n^2 x_2 \dots x_{n-1} \\ &\Leftrightarrow x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \geq \\ &\geq x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \right) \end{aligned}$$

Thay các x_i bằng các a_i theo cách đặt trên ta có bất đẳng thức (1).

Hoàng Tiến Tùng

(Lớp 10 chuyên toán,
Thái Phiên, Hải Phòng)