OÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 113
2
1980

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

NGUYỄN CẢNH TOÀN
70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG
Dây nói: 52825

VÀI MỞ RỘNG VỀ «BÀI TOÁN CON ẾCH» TRONG KỲ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 21

PHAN ĐỨC THÀNH

G bài này chúng ta xét vài mở rộng của bài toán « con ếch nhảy » từ đỉnh A của một hình bát giác đều (Bài toán số 6 trong kỳ địch Toán quốc tế lần thứ 21).

toán 1. *Một con ếch nhảy từ đỉnh A của giác đều 2y cạnh. Tại mỗi đỉnh của đa giác đối tâm E con ếch có thể nhảy một bước trong hai đỉnh kề. Đến E thì ếch dừng luôn tại đó.*

A_n là số đường đi phân biệt của con ếch phát từ A đi đến E bằng đúng n bước nhảy. xác định A_n?

toán 2. *Tại mỗi đỉnh của đa giác đều 2y xuất phát từ A ếch có thể nhảy một bước trong hai đỉnh kề. Ta nói rằng, ếch trở lần đầu tiên đúng m bước nhảy nếu với $n < m$ nhảy ếch chưa có mặt ở A và ở bước nhảy ếch có mặt ở A. Trong C_{2n}^{n} đường đi phân ếch xuất phát từ A có bao nhiêu đường biệt để ếch trở lại A lần đầu tiên đúng nhảy ($n \leqslant y$).*

1. Mỗi bước nhảy theo chiều kim đồng hồ ta biểu thị bằng số $+1$ và mỗi bước ếch nhảy ngược chiều kim đồng hồ ta biểu thị bằng số -1. Như vậy mỗi đường đi phân biệt của con ếch có n bước nhảy sẽ được biểu thị bằng một dãy n ký hiệu $+1$ và -1.

Giả sử có p ký hiệu $+1$ và q ký hiệu -1 trong đó $p > q$. Ngôn ngữ toán học của bài toán 1 liên quan đến sự sắp xếp $x = p + q$ ký hiệu $e_1, e_2, \ldots, e_x$ ($e = \pm 1$) trong đó có p ký hiệu $+1$ và q ký hiệu -1. Tổng riêng $S_k = e_1 + e_2 \ldots + e_k$ là hiệu số của số ký hiệu $+1$ và -1 sau khi ếch đã nhảy được k bước. Rõ ràng là $S_x = p - q$ và

$$\left.\begin{array}{l} S_i - S_{i-1} = e_i = \pm 1 \\ S_0 = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, x) \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ngược lại mỗi bộ $\{S_1, S_2, \ldots, S_x\}$ các số nguyên thỏa mãn (1) là một kết cục có thể của ếch nhảy.

Định nghĩa: Giả sử $x > 0$ và y là các số nguyên. Ta gọi một *đường đi* $\{S_1, S_2, \ldots, S_x\}$ từ gốc tọa độ đến điểm (x, y) là đường gấp khúc với đỉnh có các hoành độ 0,1,..., x và tung độ $S_0, S_1, \ldots, S_x$ thỏa mãn điều kiện (1) và sao cho

$$S_x = y.$$

Trong bài toán 1 đang xét nếu p các ký hiệu e_i dương và q ký hiệu e_i âm thì

$$x = p + q,\quad y = p - q \qquad (2)$$

Điểm tùy ý (x, y) có thể nối bởi đường đi với gốc tọa độ khi và chỉ khi x và y có dạng (2). Trong trường hợp đó p ký hiệu dương e_i có thể sắp xếp theo $x = p + q$ vị trí có thể có bằng

$$N(x,y) = C_{p+q}^{p} = C_{p+q}^{q} = C_x^{(x+y)/2} = C_x^{(x-y)/2} \qquad (3)$$

phương pháp khác nhau.

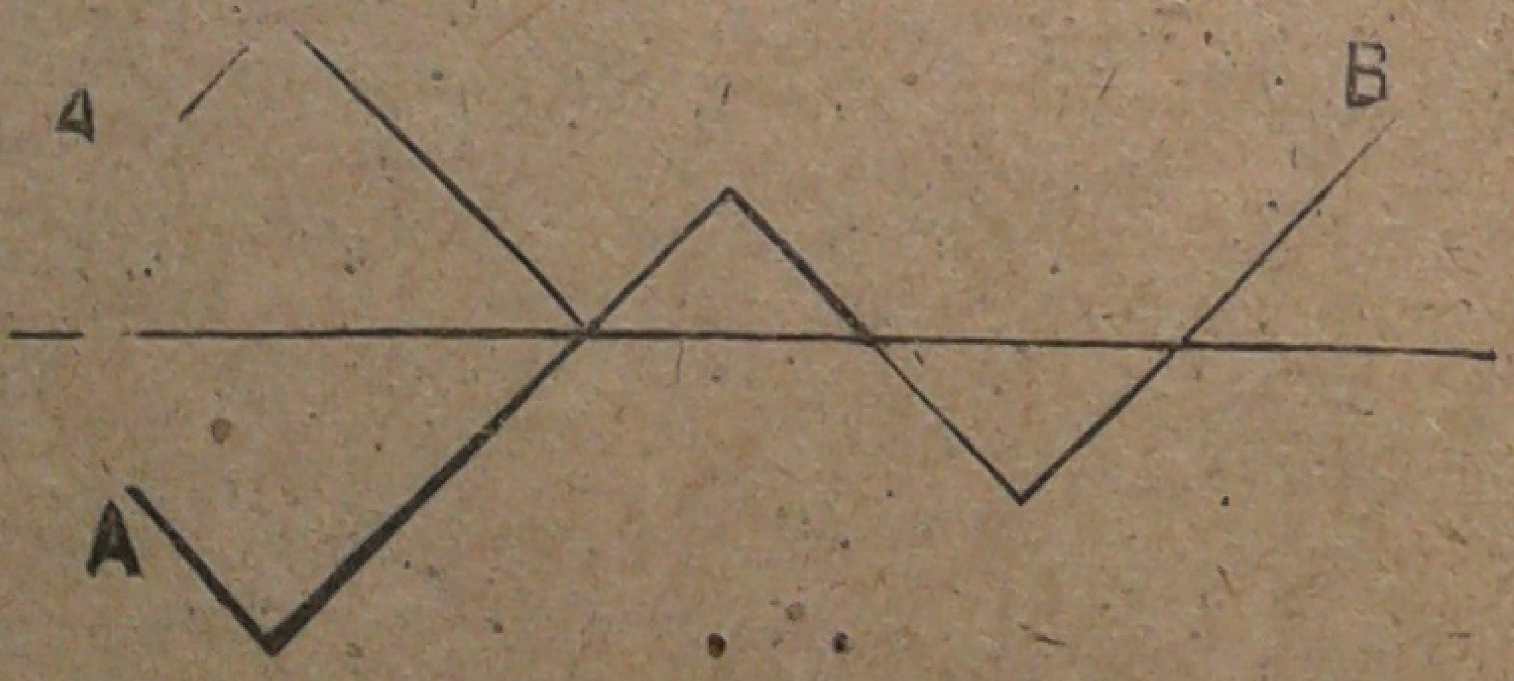
Nếu x và y không có dạng (2) ta quy ước viết $N(x, y) = 0$. Khi ấy có đúng $N(x, y)$ đường đi khác nhau từ gốc tọa độ đến điểm (x, y).

Ta sẽ chứng minh rằng (xem định lý 1) với $y > 0$ có $\frac{y}{x} N(x, y)$ đường đi thỏa mãn điều kiện $S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{x-1} > 0, S_x = y$.

2. Giả sử $A = (a, b)$ và $B = (c, d)$ là 2 điểm có các tọa độ nguyên đặt trong phần tư thứ nhất và sao cho $c > a \geqslant 0, b > 0, d > 0$. (Xem hình 1).

Ta gọi điểm $A' = (a, -b)$ là hình chiếu của điểm A đối với trục x. Dễ dàng chứng minh được: BỔ ĐỀ (nguyên lý phản chiếu).

Số những đường đi từ A đến B tiếp xúc hay cắt trục x bằng số tất cả các đường đi từ A' đến B.



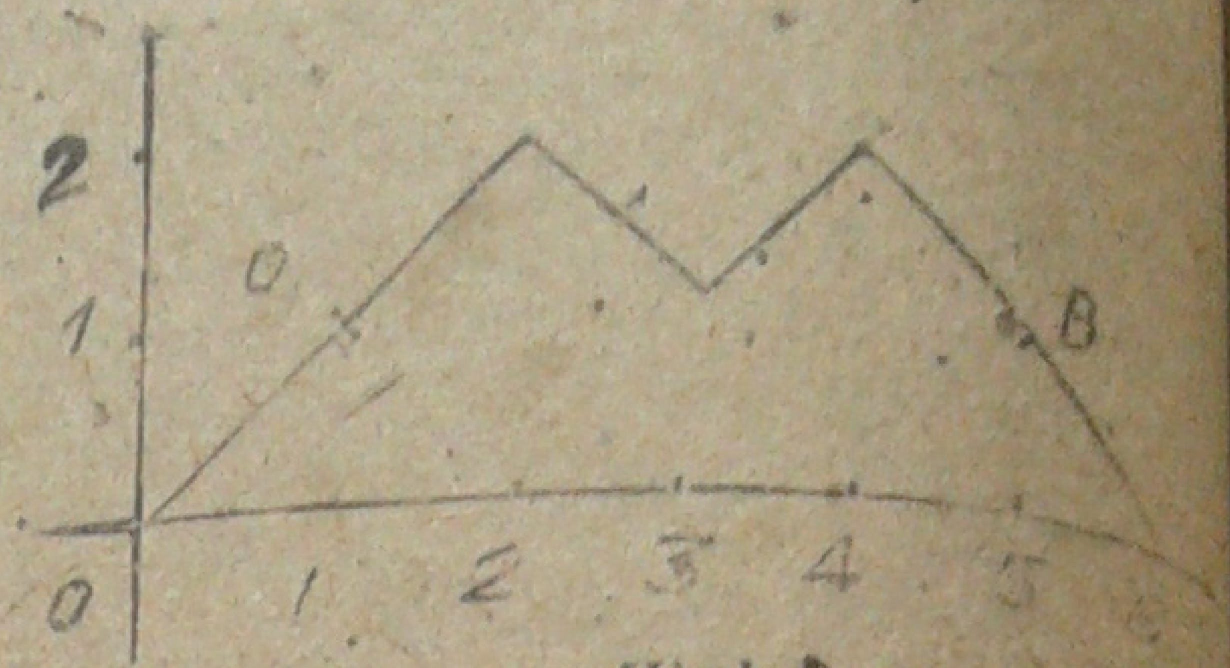
Hình 1

Ta có định lý quan trọng sau:

Định lý 1. (Béc-to-răng).

Giả sử $x > 0, y > 0$. Số các đường đi $\{S_1, S_2, \ldots, S_x = y\}$, từ gốc tọa độ đến điểm (x, y) sao cho $S_1 > 0$ $S_2 > 0, \ldots, S_x > 0$ bằng $(y/x)\, N(x, y)$.

Chẳng hạn: có $N(5, 1) = C_5^3 = 10$ đường đi nối điểm O đến điểm $B = (5, 1)$ trong đó có $C_4^2 - C_4^1 = (1/5)\, N(5, 1) = 2$ đường đi thỏa mãn điều kiện $S_i > 0$, đó là các đường đi $(1, 2, 1, 2, 1)$ và $(1, 2, 3, 2, 1)$. (Xem hình 2).



Hình 2

Chứng minh định lý 1: Với $S_1 = \ldots$ đường đi chấp nhận được bằng 1. Do đó số các đường đi chấp nhận được bằng số đường đi từ điểm $(1, 1)$ đến điểm (x, y) tiếp xúc với trục x và không cắt trục... nguyên lý phản chiếu số ấy bằng

$$N(x-1, y-1) - N(x-1, y+1) = C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{q-1} = \frac{p-q}{p+q} C_{p+q}^{p} = \frac{y}{x} N(x, y).$$

3 Định lý đối ngẫu. Cho đường đi

$$\{S_1, S_2, \ldots, S_x\}$$

Ta xét đường đi nhận được từ đường (...) cách thay đổi thứ tự các e_i bởi thứ tự ngược lại, tức là xét đường đi

$$\{S_1', S_2', \ldots, S_x'\}$$

trong đó

$$\begin{cases} S_1' = e_x \\ S_2' = e_x + e_{x-1} \\ S_3' = e_x + e_{x-1} + e_{x-2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ S_0' = 0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} S_1' = S_x - S_{x-1} \\ \ldots\ldots \\ S_i' = S_x - S_{x-i} \\ \ldots \\ S_x' = S_x \end{cases}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng đường đi thuận và đường đi ngược (5) có tính chất là: đường này nhận được từ đường kia bằng cách quay 180°. Do đó mỗi tính chất của đường đi thuận tương ứng với một tính chất về đường đi ngược. Chẳng hạn định lý 1 cho ta số đường đi ngược $\{S_1', \ldots, S_x'\}$ nối gốc tọa độ với điểm (x, y) và thỏa mãn điều kiện $S_i' > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, x)$ hay $S_x > S_{x-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, x-1)$.

Vậy tương ứng với định lý 1 ta có

Định lý 2. Số những đường đi $\{S_1 \ldots\}$ từ điểm $(0,0)$ đến điểm (x, y) sao cho $S_1 < S_x, S_2 < S_x, \ldots, S_{x-1} < S_x$ trong đó $S_x = y > 0$, bằng

$$A_x = \frac{y}{x} N(x, y)$$

...nh lý 2 ta suy ra rằng số đường đi ...t của ếch nhảy xuất phát từ A đến E ... m bước nhảy là

$$= \begin{cases} \frac{y}{2n} N(2n,y) & \text{nếu } m = 2n \\ 0 & \text{nếu } m \neq 2n \end{cases}$$

...xét bài toán con ếch nhảy theo hình ...đều (tức là khi $y = 4$).

...là số dãy $2n$ ký hiệu ϵ trong đó số ...+1 nhiều hơn -1 (tức là $p > q$). Rõ ràng ...$= 0$. Trong trường hợp này $x = 2n$, theo định lý 2 ta có:

$$b_{2n} = \frac{4}{2n} C_{2n}^{n+2}$$

...suy ra được b_{2n} thỏa mãn

$$b_{2n} = 4b_{2n-2} - 2b_{2n-4}.$$

...bài toán 2 liên quan đến nghiên cứu số ...đi nối gốc tọa độ với điểm $N = (2n,0)$ ...trục x. $(n < y)$.

...phiên là các đỉnh có hoành độ lẻ không ...trên trục x.

$$B_{2n} = \frac{1}{n+2} C_{2n}^{n} \qquad (6)$$

...giải của bài toán 2 chứa trong mệnh đề sau.

...đề: Trong C_{2n}^{n} đường đi phân biệt của ...nhảy xuất phát từ A đúng $2n$ bước nhảy ...về A có

...đúng B_{2n-2} đường đi sao cho

$$S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0 \qquad (7)$$

do đó có đúng $2B_{2n-2}$ đường đi phân biệt để ếch nhảy xuất phát từ A đúng $2n$ bước nhảy lần đầu tiên trở về A.

b) Đúng B_{2n} đường đi sao cho

$$S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_{2n-1} \geq 0, \ S_{2n} = 0 \qquad (8)$$

Chẳng hạn: với $n = 3$, trong $C_6^3 = 20$ đường đi từ gốc O đến điểm $N = (6,0)$ bằng đúng 0 bước nhảy có

$2B_4 = 2.\ \frac{1}{3}\ C_4^2 = 2.2 = 4$ đường đi lần đầu tiên ếch trở về N bằng đúng 6 bước nhảy.

Chứng minh: (xem hình vẽ 2).

a) Chú ý rằng mỗi đường đi thỏa mãn điều kiện (7) phải đi qua điểm $N_1 = (2n-1, 1)$. Theo định lý 1 số đường đi từ gốc tọa độ đến điểm N_1 sao cho $S_1 > 0, \ldots, S_{2n-2} > 0$ bằng

$$\frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = B_{2n-2}$$

b) Giả sử thỏa mãn điều kiện (7). Bằng cách bỏ đi các đoạn đầu và cuối ta nhận được đường đi nối điểm $O_1 = (1, 1)$ và $N_1 = (2n-1, 1)$ không có điểm nào trong những đỉnh của đường này nằm dưới đường $y = 1$. Bằng cách chuyển gốc tọa độ về điểm O_1 ta nhận thấy rằng đường đi từ O_1 đến N_1 thỏa mãn điều kiện (8). Điểm N_1 bây giờ có tọa độ là $(2n-2,0)$. Như vậy ta đã thiết lập được sự tương ứng một – một giữa các đường đi như vậy và tất cả các đường đi thỏa mãn (8). Mệnh đề đã được chứng minh hoàn toàn.

THỂ LỆ DỰ CUỘC THI GIẢI TOÁN NĂM 1980

...Tất cả các bạn hiện đang học tại các trường phổ thông đều có thể tham gia dự thi. ...lớp sau đây sẽ có giải thưởng riêng:

...Khối I: Gồm các bạn học sinh lớp 8 hệ phổ thông 10 năm và các bạn học sinh lớp 10 hệ ...thông 12 năm.

...Khối II: Gồm các bạn học sinh lớp 9 hệ ...thông 10 năm và các bạn học sinh lớp 11 hệ ...thông 12 năm.

...Khối III: Gồm các bạn học sinh lớp 10 hệ ...thông 10 năm và các bạn học sinh lớp 12 ...hệ thông 12 năm.

...Thời hạn gửi lời giải các bài toán dự thi ...mỗi số báo là hai tháng, kể từ ngày in ...số báo đó. Ngày gửi bài được tính theo ...bưu điện nơi gửi.

3. Để thuận tiện cho việc chấm bài, lời giải mỗi bài toán phải viết trên một tờ giấy riêng, trong đó có ghi họ, tên, và địa chỉ, trường, lớp của người dự thi.

4. Ngoài phong bì gửi bài dự thi xin đề:

BÀI DỰ THI GIẢI TOÁN – 1980

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ –

70 Trần Hưng Đạo Hà Nội (Không phải dán tem).

5. Sau khi công bố kết quả, bạn nào được giải mà thay đổi địa chỉ xin báo ngay cho tòa soạn để tiện việc liên lạc.

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/110. *Có 1979 học sinh của hai trường xếp thành một hàng ngang trên sân vận động. Biết rằng số học sinh mà bên phải mình là một bạn cùng trường bằng số học sinh mà bên phải mình là một bạn khác trường. Xác định xem hai học sinh đứng ở hai đầu hàng là cùng trường hay khác trường.*

Lời giải (của *Ngô Thế An* – lớp 11C2 trường Trần Quốc Tuấn, thành phố Hồ Chí Minh).

Ta có thể giải bài toán dạng tổng quát: với điều kiện như đầu bài đã cho, thay 1979 bằng một số n lẻ bất kỳ.

Quan sát một hàng học sinh từ trái sang phải, ta thấy nếu số lần đổi tên trường là chẵn thì hai học sinh ở hai đầu hàng cùng trường, còn nếu số lần đổi tên trường là lẻ thì hai học sinh ở hai đầu hàng khác trường. Từ điều kiện của đầu bài suy ra số lần đổi tên trường là $(n-1)/2$. Vậy nếu $n = 4k+1$ thì số lần đổi tên trường bằng $2k$, trong trường hợp này hai học sinh ở hai đầu hàng là cùng trường; nếu $n = 4k+3$ thì số lần đổi tên trường bằng $2k+1$, trong trường hợp này hai học sinh ở hai đầu hàng là khác trường.

Trường hợp $n = 1979 = 4 \times 494 + 3$, hai học sinh đứng ở hai đầu hàng khác trường nhau.

Bài 2/110. *Cho N là số tự nhiên có hai ước số nguyên tố. Gọi S là tổng tất cả các ước số của N. Chứng minh rằng không thể có đẳng thức $S = kN$ với k là số tự nhiên lớn hơn 2.*

Lời giải (của *Nguyễn Quốc Quân* – số 4 Ngô Quyền, Bến Tre).

Vì N là số tự nhiên có hai ước là số nguyên tố nên ta có thể viết: $N = p^m \cdot q^n$ với p và q là hai số nguyên tố khác nhau; m, n là những số tự nhiên nào đó.

Giả sử $p < q$ như thế $p \geqslant 2$ và $q \geqslant 3$.

Theo đầu bài

$$S = (1 + p + p^2 + \ldots + p^m)(1 + q + \ldots + q^n).$$

Nhưng ta có

$$1 + p + \ldots + p^{m-1} = (p^m - 1)/(p-1) < p^m$$

(vì $p \geqslant 2$)

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = (q^n - 1)/(q-1) < q^n/2$$

(vì $q \geqslant 3$).

Vậy

$$S < 2p^m \cdot (3/2)q^n = 3p^mq^n = 3N.$$

Điều này chứng tỏ không thể có đẳng thức $S = kN$ với k là những số nguyên lớn hơn [...]

Bạn *Ngô Duy Ninh* (57 Trần Phú, Quy[...]) lại giải bài toán tổng quát sau đây và c[oi bài] 2/110 như là trường hợp riêng:

N là số tự nhiên có n ước số nguyên tố, [S là] tổng tất cả các ước số của N. Khi ấy ta [không thể] có đẳng thức $S = kN$, nếu k là số tự nhiên [lớn] hơn hoặc bằng $\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}$.

Trong đó p_i là số nguyên tố thứ i.

Chứng minh: Theo đề bài ta có

$$N = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n};$$

trong đó a_i là những số nguyên tố khác [nhau] và α_i là những số tự nhiên $(i = 1, 2, \ldots$ [...]

Như vậy tổng các ước số của N là:

$$S = (1 + a_1 + \ldots + a_1^{\alpha_1})(1 + a_2 + \ldots + a_2^{\alpha_2}) \ldots (1 + a_n + \ldots + a_n^{\alpha_n})$$

$$= \frac{(a_1^{\alpha_1+1} - 1)(a_2^{\alpha_2+1} - 1)\ldots(a_n^{\alpha_n+1} - [1])}{(a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_n - 1)}$$

Như vậy đẳng thức $S = kN$ trở thành

$$k = \frac{S}{N} = \frac{(a_1^{\alpha_1+1} - 1)\ldots(a_n^{\alpha_n+1} - 1)}{a_1^{\alpha_1}(a_1 - 1)\ldots a_n^{\alpha_n}(a_n - 1)}$$

Bây giờ ta chọn số b_i sao cho

$$(a_i^{\alpha_i+1} - 1)/a_i^{\alpha_i}(a_i - 1) < b_i$$

hay

$$-1 < a_i^{\alpha_i}(a_ib_i - b_i - a_i).$$

Ta chọn b_i sao cho $a_ib_i - b_i - a_i \geqslant 0$ (2) [...] thỏa mãn.

Nhưng (2) tương đương với

$$(a_i - 1)(b_i - 1) \geqslant 1$$

Vì $a_i \geqslant p_i$ nên nếu ta chọn $b_i - 1 = 1/(p_i$ [...] hay $b_i = 1 + 1/(p_i - 1) = p_i/(p_i - 1)$ th[ì (2)] được thỏa mãn và do đó (1) được thỏa m[ãn].

Vậy ta luôn có

$$(a_i^{\alpha_i+1} - 1)/a_i^{\alpha_i}(a_i - 1) < p_i/(p_i - 1)$$

với $i = 1, 2, \ldots, n$

và

$$k = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha_i+1} - 1}{a_i^{\alpha_i}(a_i - 1)} < \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

... chứng tỏ không thể có đẳng thức

$$k \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

... của ta là trường hợp $n = 2$, ta sẽ ... thể có đẳng thức $S = kN$ với

$$k \geq 2(2 - 1) \times 3/(3 - 1) = 3.$$

L.H.

...3/110. *Chứng minh rằng phương trình*

$$x^{15} + y^{15} + z^{15} = 19^{1964} + 7^{1964} + 9^{1964}$$

... nghiệm nguyên.

... giải (*của Nguyễn Hoài Nam — lớp 10Đ* ... Hoàn Kiếm, Hà Nội). Ta có:

$$19^{1964} = (2 \times 9 + 1)^{1964} \equiv 1 \pmod 9;$$

$$7^{1964} = 7^2 \times 7^{3.654} = (45 + 4)(38 \times 9 + 1) \equiv 4 \pmod 9.$$

$$... 19^{1964} + 7^{1964} + 9^{1964} \equiv 5 \pmod 9.$$

... khác một số nguyên bất kỳ có thể biểu ... một trong các dạng: $9k$, $9k \pm 1$, $9k \pm 2$, ... $9k \pm 4$. Do đó lập phương của một số ... chia cho 9 chỉ có số dư là $0, \pm 1$. Ta có: $x^{15} + y^{15} + z^{15} = (x^5)^3 + (y^5)^3 + (z^5)^3$ chia cho 9 ... số dư khác 5.

... phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

... bạn: *Nguyễn Ngọc Khánh* (9C Đoàn Kết, ...), *Ngô Duy Ninh* (57 Trần Phú, Qui Nhơn) ... có lời giải tốt.

Bài 4/110. *Tìm nghiệm nguyên dương của ... phương trình:*

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^3 + 3z^2 = 1964 & (1) \\ x^2 - y^2 - 3z = 1979 & (2) \end{cases}$$

... giải. Từ (2) cho $x^2 > 1979 > 44^2$ ... $x \geq 45$. (*)

... phương trình (1):

$$y^3 = 1964 - (x-5)^2 - 3z^2 \leq 1964 - (45-5)^2 - 3 = 361 < 8^3, \text{ do đó } y < 8.$$

$$3z^2 = 1964 - (x-5)^2 - y^3 \leq 1964 - (45-5)^2 - 1 = 363,$$

... $z^2 \leq 363 : 3 = 121 = 11^2$, vậy $z \leq 11$.

... lại phương trình (2):

$$x^2 = 1979 + y^2 + 3z < 1979 + 8^2 + 3 \times 11 = 2076 < 46^2.$$

... $x < 46$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra x chỉ có thể bằng 45.

Thay $x = 45$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} y^3 + 3z^2 = 364 & (1') \\ y^2 + 3z = 46 & (2') \end{cases}$$

Vì $1 \leq z \leq 11$ nên từ (2') suy ra $4 \leq y \leq 6$. Thử với $y = 4, 5, 6$ vào hệ phương trình thì chỉ có $y = 4$ là cho z nguyên dương: $z = 10$.

Nghiệm nguyên dương duy nhất của hệ phương trình là $x = 45$, $y = 4$, $z = 10$.

Bài 5/110. *Chứng minh rằng số*

$$k = 64^{19^{15}} + 79^{19^{15}}$$

không thể biểu diễn được dưới dạng tổng các bình phương của ba số hữu tỉ.

Lời giải (*của Nguyễn Thanh Nhã — 11C 8 Lê Hồng Phong T.P Hồ chí Minh*).

Ta có $64 \equiv 0 \pmod 8$, $79 \equiv -1 \pmod 8$. Vậy

$$k = 8p - 1 = 8l + 7$$

Ta chứng minh nếu x, y, z là các số hữu tỉ thì không thể có đẳng thức

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8l + 7 \quad (1)$$

Bằng cách qui đồng mẫu số, có thể viết x^2, y^2, z^2 dưới dạng $(u^2 + v^2 + t^2)/s^2$, vậy (1) tương đương với:

$$u^2 + v^2 + t^2 = (8l + 7)s^2 \quad (2)$$

Ta xét hai trường hợp:

a) Nếu có các số u, v, t, l, s nguyên dương thỏa mãn (2) mà s là số lẻ:

$$s = 2m + 1 \Rightarrow s^2 = 4m(m+1) + 1 = 8p + 1.$$

Thay vào (2):

$$u^2 + v^2 + t^2 = (8l + 7)(8p + 1) = 8q + 7.$$

Nhưng với mọi n tự nhiên thì $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$, do đó $u^2 + v^2 + t^2$ chia cho 8 không thể có số dư là 7. Vậy trường hợp này không xảy ra.

b) Nếu có các số u, v, t, l, s nguyên dương thỏa mãn (2) mà s là số chẵn, ta chọn nghiệm nhỏ nhất của s.

Ta có $s = 2s' \Rightarrow s^2 = 4s'^2$. Thay vào (2) ta có $u^2 + v^2 + t^2 \vdots 4$.

Nhưng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. Nếu $u^2 + v^2 + t^2 \vdots 4$ thì từng số phải chia hết cho 4, tức là chúng đều là số chẵn: $u = 2u'$, $v = 2v'$, $t = 2t'$. Như vậy các số u', v', t', l, s' cũng là nghiệm của (2). Số s' không phải là số lẻ như đã chứng minh trong trường hợp a), nếu s' là số chẵn thì mâu thuẫn với s là nghiệm nhỏ nhất. Vậy trường hợp b) cũng không xảy ra.

Tóm lại không thể có đẳng thức (2) và do đó không thể có đẳng thức (1).

Bài 6/110. *Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng*

$$7 < (1 + 1/n)^{2n+1} \leqslant 8$$

Lời giải. Đặt $a_n = (1 + 1/n)^{2n+1}$. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức.

$$\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^{2k+1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^2 < 1 \qquad (1)$$

$k = 2,3,\ldots$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{k^2+1}\right)^{2k+1} > \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^2.$$

Do $\left(1+\dfrac{1}{k^2+1}\right)^{2k+1} = 1 + C^1_{2k+1}\, 1/(k^2-1) +$

$+ C^2_{2k+1}\, 1/(k^2-1)^2 + C^3_{2k+1}\, 1/(k^2-1)^3 + \cdots$

và chú ý đến khai triển của vế phải bất đẳng thức ta chỉ cần chứng minh :

$$C^1_{2k+1}\, 1/(k^2-1) + C^2_{2k+1}\, 1/(k^2-1)^2 + $$

$$+ C^3_{2k+1}\, 1/(k^2-1)^3 > 1/(k-1)^2 + 2/(k-1)$$

$\Leftrightarrow (2k+1)/(k^2-1) + k(2k+1)/(k^2-1)^2 +$

$+ k(2k+1)(2k-1)/3(k^2-1)^3 > 1/(k-1)^2 + 2/k-1).$

$\Leftrightarrow 2/(k-1) - 1/(k^2-1) + k(2k+1)/(k^2-1)^2 +$

$+ k(2k+1)(2k-1)/3(k^2-1)^3 > 1/(k-1)^2 + 2/(k-1)$

$\Leftrightarrow k(2k+1)/(k^2-1)^2 + k(2k+1)(2k-1)/3(k^2-1)^3$

$> 1/(k-1)^2 + 1/(k^2-1) = 2k/(k^2-1)(k-1)$

$\Leftrightarrow (2k+1)/(k+1) + (4k^2-1)/3(k+1)^2(k-1) > 2$

$\Leftrightarrow (4k^2-1)/3(k+1)^2(k-1) > 1/(k-1)$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 1 > 3k^2 - 3.$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên, vậy có (1).

Ta chứng minh $a_k < a_{k-1}$.

Ta có

$$a_k/a_{k-1} = (1+1/k)^{2k+1}/[1+1/(k-1)]^{2k-1}$$

$$= \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^{2k+1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^2 < 1 \quad (\text{do } (1)).$$

Vậy $\qquad a_k < a_{k-1}$.

Cho $k = 2,3,4,\ldots$ ta sẽ có

$$8 = a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$$

Vậy $a_n \leqslant 8$ với mọi n.

Để chứng minh $a_n > 7$, trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$(1+a)^m \geqslant 1 + ma + (m-1)^2 a^2 \qquad (2)$$

trong đó m là số tự nhiên, a là số dương và $a^2(m-1)[a(m-1)-1] \geqslant 0$.

Khi $m = 1$ bất đẳng thức (2) đúng.

Giả sử (2) đúng với $m = k$, ta chứng ... cũng đúng với $m = k + 1$:

$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geqslant$

$\geqslant (1+a)[1 + ka + (k-1)^2 a^2]$

$= 1 + ka + (k-1)^2 a^2 + a + ka^2 + (k-1) \ldots$

$= 1 + (k+1)a + k^2a^2 + a^2 - ka^2 + (k \ldots$

$= 1 + (k+1)a + k^2a^2 + a^2(k-1)[a(k- \ldots$

$\geqslant 1 + (k+1)a + k^2a^2$ (đ. p. c. m).

Áp dụng bất đẳng thức (2), đặt $a = 1 \ldots$ $2n+1$, ta có

$(1 + 1/n)^{2n+1} \geqslant 1 + (2n+1)/n + (2n+1 \ldots$

$= 7 + 1/n > 7$

Bài toán được giải xong.

Bài 7/110. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *là các đỉnh của đa giác đều* $(n \geqslant 8)$. *Tính n biết rằng*

$$1/A_1A_2 = 1/A_1A_3 + 1/A_1A_5 + 1/A_1A_8$$

Lời giải. Cách 1 (của *Nguyễn Quốc Quân* – ... Quyền, Bến Tre). Để cho gọn ta đặt

$$A_1A_i = a_i,\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Đẳng thức ở đầu bài trở thành

$$1/a_2 = 1/a_3 + 1/a_5 + 1/a_8$$

$$\Leftrightarrow a_3a_5a_8 = a_2a_5a_8 + a_2a_3a_8 + a_2a_3a_5$$

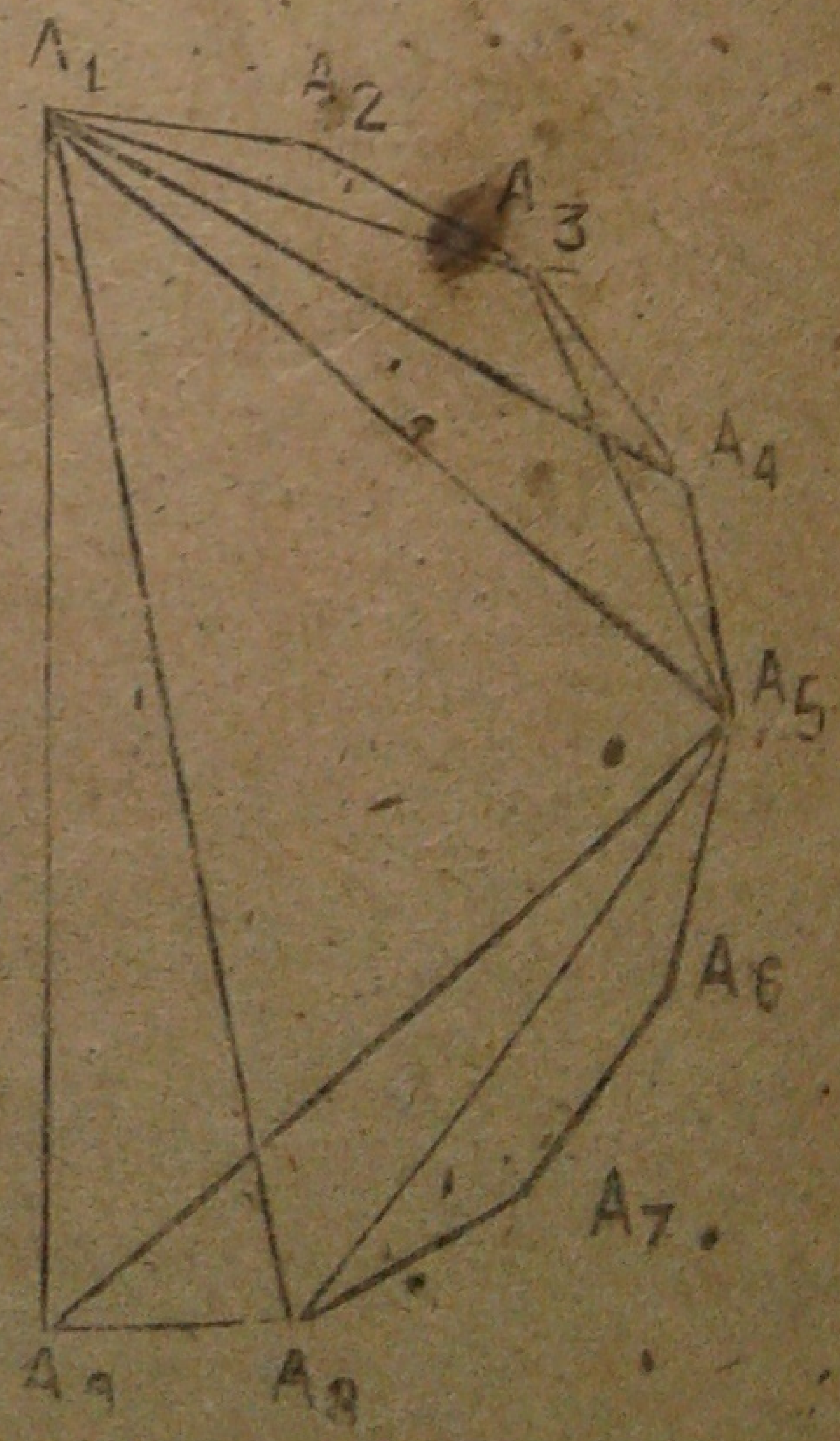
Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội ... $A_1\ A_3\ A_4\ A_5$ với chú ý $A_3A_4 = A_1A_2$, $A_3A_5 = a_3$, ta được

$$a_2a_5 = a_3a_4 - a_3a_2$$

Thay (2) vào số hạng đầu vế phải của (1) ta ...

$$a_3a_5a_8 = a_3a_4a_8 - a_3a_2a_8 + a_2a_3a_8 + a_2 \ldots$$

$$\Leftrightarrow a_5a_8 = a_4a_8 + a_2a_5$$



... $n > 8$ vì nếu $n = 8$ thì $a_2 = a_8$ đẳng ... bài không được thỏa mãn. Áp dụng ... cho tứ giác nội tiếp $A_1A_5A_8A_9$, ... $= a_2$, $A_5A_8 = a_4$, $A_5A_9 = a_5$, ta được

$$... a_9 a_5 = a_5 a_8 - a_4 a_9 \quad (4).$$

... và (4) suy ra $a_4 a_8 = a_4 a_9$ hay $a_8 = a_9$.

... $= 15$.

... (của nhiều bạn). Dựng đường tròn ... đa giác. Giả sử $\overparen{A_1A_2} = 2\alpha$ thì $\overparen{A_1A_3} = 4\alpha$, ... $\overparen{A_1A_8} = 14\alpha$. Theo giả thiết ta có

$$... = 1/2\sin 2\alpha + 1/2\sin 4\alpha + 1/2\sin 7\alpha$$

$$... 1/\sin ... - 1/\sin 7\alpha = 1/\sin 2\alpha + 1/\sin 4\alpha.$$

... đồng mẫu số:

$$\frac{\sin 7\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha\sin 7\alpha} = \frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha}$$

$$\frac{2\cos 4\alpha\sin 3\alpha}{\sin\alpha\sin 7\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha} \quad (1)$$

... thấy rằng $\sin 3\alpha \neq 0$ vì nếu $\sin 3\alpha = 0$ thì ... $\alpha = k\pi/3$, không thể có vì $\alpha \leqslant \pi/8$ ... Chia hai vế của (1) cho $2\sin 3\alpha$ ta được

$$\cos 4\alpha/\sin\alpha\sin 7\alpha = \cos\alpha/\sin 2\alpha\sin 4\alpha.$$

... biến đổi ra $2\sin 4\alpha\cos 4\alpha = \sin 7\alpha$ hay $\sin 8\alpha = \sin 7\alpha$

... $- 7\alpha = k\pi$ tức $15 = k\pi$.

... đa giác có 15 cạnh.

... $\geqslant 2$, $n \leqslant 15/2$ không thỏa mãn đầu bài.

Bài 8/110. *Cho hàm số $f(x)$ và một hằng số ... thỏa mãn điều kiện $f(x) = f(x+a)f(x-a)$ ... x. Chứng minh rằng $f(x)$ là một hàm ... tuần hoàn.*

Lời giải. Xét những giá trị của x sao cho ... suy ra $f(x+ka) \neq 0$ với k là số tự nhiên

... kiện $f(x) = f(x+a)f(x-a)$ thay ... ta được

$$f(x+a) = f(x+2a)f(x)$$

$$= f(x+2a)f(x+a)f(x-a)$$

$$... f(x+2a)f(x-a) = 1 \Rightarrow f(x+2a) = \frac{1}{f(x-a)}$$

... hệ thức này ta thay $x = x + 3a$ ta được

$$f(x+5a) = \frac{1}{f(x+2a)} = f(x-a)$$

... lại thay $x = x + a$ dẫn đến $f(x+6a)$ ...

... những x mà $f(x) = 0$ thì $f(x+6a)$ cũng ...

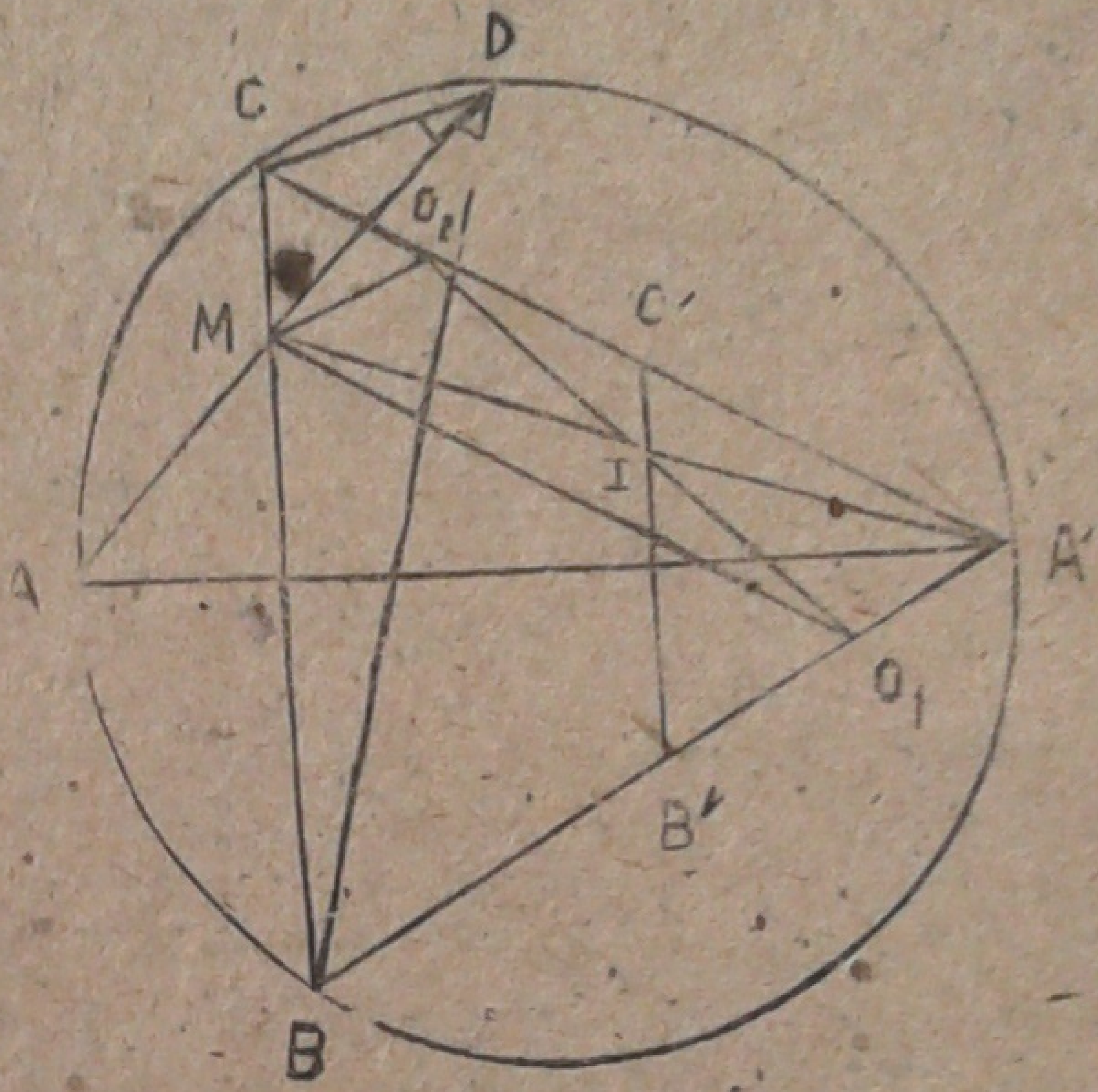
... $f(x+6a) = f(x)$ với mọi x, tức là ... hàm số tuần hoàn có chu kỳ bằng $6a$.

L. H.

Bài 9/112. *Trên một đường tròn cho hai điểm B và C cố định. A là điểm giữa của cung nhỏ BC, M là một điểm trên dây BC. Đường AM cắt đường tròn ở D. Tìm quĩ tích trung điểm đoạn nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDM và CDM khi M chạy trên BC nhưng không trùng với B và C.*

Lời giải. Gọi A' là điểm đối tâm của A, O_1 O_2 là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDM và CDM.

Vì góc ở tâm lớn gấp đôi góc nội tiếp chắn cùng một cung nên



$$\widehat{MO_1B} = \widehat{2MDB},$$

suy ra

$$\widehat{MO_1B} = \widehat{CA'B}.$$

Từ đó suy ra O_1 nằm trên BA' và $MO_1 \parallel CA'$

Chứng minh tương tự ta có O_2 nằm trên CA' và $MO_2 \parallel BA'$.

Như vậy tứ giác $MO_1A'O_2$ là hình bình hành. Từ đó dễ dàng suy ra quĩ tích trung điểm I của O_1O_2 là đường trung bình $B'C'$ của tam giác $A'CB$ trừ hai đầu nút B' và C'.

Bài 10/110. *Cho x, y, z là các số khác nhau và a, b, c là những số dương. Chứng minh rằng nếu*

$$(x+y)\lg a = (y+z)\lg b = (z+x)\lg c,$$

$$\text{thì } (a/b)^{y^2}.(b/c)^{z^2}.(c/a)^{x^2} = 1.$$

Lời giải. Bạn *Tô Thành Tuấn*, lớp 12C trường Lê Quý Đôn, T. P Hồ chí Minh đã phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát sau:

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số khác nhau và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương. Chứng minh rằng nếu

$$(x_1 + x_2)\lg a_1 = (x_2 + x_3)\lg a_2 = \dots$$
$$\dots = (x_n + x_1)\lg a_n$$

thì

$$(a_1/a_2)^{x_2^2}(a_2/a_3)^{x_3^2}\dots(a_{n-1}/a_n)^{x_n^2}(a_n/a_1)^{x_1^2} = 1.$$

Giải: Từ đẳng thức $(x_1+x_2)\lg a_1 = (x_2+x_3)\lg a_2$

ta có $\lg\left(a_1^{x_1} a_1^{x_2} / a_2^{x_2} a_2^{x_3}\right) = 0$ tức có

$$a_1^{x_1} a_1^{x_2} / a_2^{x_2} a_2^{x_3} = 1$$

$$\text{hay } (a_1/a_2)^{x_2} = a_2^{x_3} / a_1^{x_1}$$

Vậy $(a_1/a_2)^{x_2^2} = a_2^{x_3x_2} \Big/ a_1^{x_1x_2}$

Chứng minh một cách tương tự, từ đẳng thức

$$(x_2+x_3)\lg a_2 = (x_3+x_4)\lg a_3$$

ta có

$$(a_2/a_3)^{x_3^2} = a_3^{x_4x_3} \Big/ a_2^{x_2x_3}$$

....

từ đẳng thức $(x_n+x_1)\lg a_n = (x_1+x_2)\lg a_1$ ta có

$$(a_n/a_1)^{x_1^2} = a_1^{x_2x_1} \Big/ a_n^{x_nx_1}$$

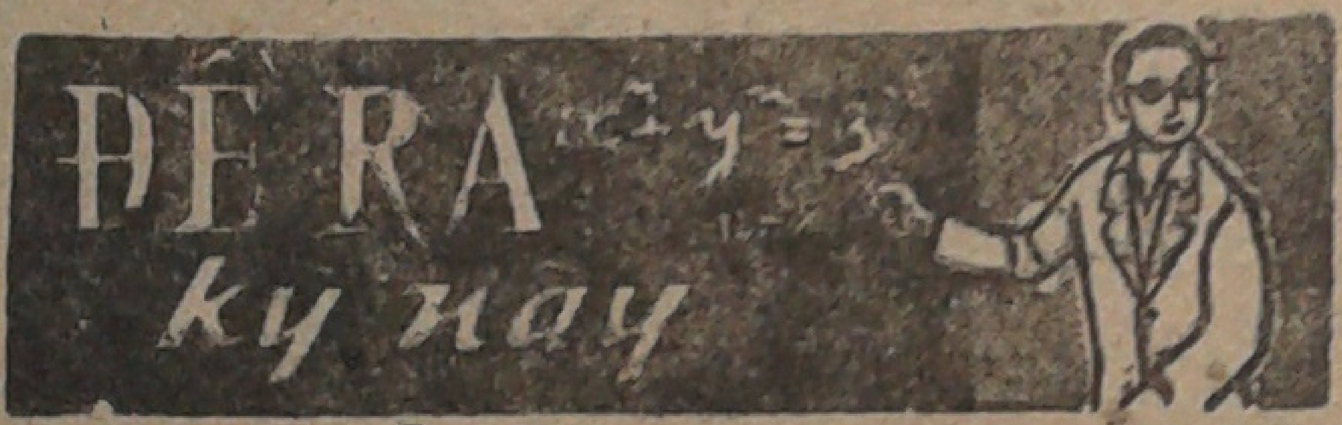
Vậy

$$(a_1/a_2)^{x_2^2}(a_2/a_3)^{x_3^2}\dots(a_n/a_1)^{x_1^2}$$

$$= \left(a_2^{x_3x_2} \Big/ a_1^{x_1x_2}\right)\left(a_3^{x_4x_3} \Big/ a_2^{x_2x_3}\right) \dots \left(a_1^{x_2x_1} \Big/ a_n^{x_nx_1}\right) = 1.$$

Với $n = 3, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ và $a_1 = a$, $a_2 = b, a_3 = c$ ta trở về bài toán 10/110.

L.H.



CÁC ĐỀ TOÁN CỦA CUỘC THI GIẢI TOÁN 1980

Bài 1/113. Chứng minh rằng nếu x là một số thực sao cho $(x - 1/x)$ là một số nguyên khác 0 thì số $(x + 1/x)^{1980}$ là một số nguyên còn số $(x + 1/x)^{1945}$ là một số vô tỷ.

Nguyễn Anh Dũng
(C.3 Hàm Rồng, Thanh Hóa)

Bài 2/113. Hãy xem số

$$Z = 1963^{1965} - 1963$$

chia hết cho những số nguyên tố nào sau đây: 2, 3, 5, 13, 109, 151, 451.

Nguyễn Quốc Trinh (ĐHSP 1 Hà Nội)

Bài 3/113. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là bốn số nguyên dương, sao cho

$$a^2 + b^2 + c^2 = abcd$$

thì ta phải có hoặc $d = 1$, hoặc $d = 3$.

Phan Đức Chính (ĐHTH Hà Nội).

Bài 4/113. Tìm những giá trị nguyên cặp số (a, b) sao cho phương trình

$$x^2 + ax + b = 0$$

có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm nằm trong khoảng $(-5, -4)$ và nghiệm còn nằm trong khoảng $(2, 3)$.

Bài 5/113. Giả thử

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

là một dãy số thực thỏa mãn điều kiện

$$a_i \leqslant c + (a_{i-1} + a_{i+1})/2 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

trong đó c là một số thực, không phụ thuộc vào i. Chứng minh rằng

$$a_i \leqslant i(n-i)\,c + (1 - i/n)\,a_0 + i a_n/n$$

với mọi $i = 0, 1, \dots, n$.

Phan Đức Chính

Bài 6/113. Cho hàm số $f(x)$ xác định với số thực x và thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $f(1) = 1$;

b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y;

c) Nếu $x \neq 0$, thì $f(x) = x^2 f(1/x)$.

Chứng minh rằng

$$f(\sqrt[3]{1980/1945}) = \sqrt[3]{1980/1945}$$

Phan Đức Chính

Bài 7/113. Cho một đường tròn, và điểm A cố định nằm trong đường tròn đó, điểm B và C nằm trên đường tròn đã cho

...ng góc với AC. Gọi B_1, C_1 theo thứ ...n AC và AB sao cho $\widehat{ABB_1} = \widehat{ABC}/3$, ...$B/3$. Hai đoạn thẳng BB_1 và CC_1 giao ...

...iên cứu những tính chất của các ...B_1C_1 khi B và C chạy trên đường ...

...113. Dựng một tam giác biết bán kính ...g tròn nội tiếp và ngoại tiếp, và độ ...cạnh.

Nguyễn Đăng Phất (ĐHSP 1 Hà Nội)

...113. Chứng minh rằng có thể dựng ...óc và compa một tứ giác lồi cho biết ...à và góc xen giữa hai đường chéo.

Nguyễn Cảnh Toàn

Bài 10/113 Trong không gian cho 3 đường thẳng đồng quy tại P và đôi một vuông góc với nhau. Trên ba đường thẳng đó ta lấy ba cặp điểm A, A'; B, B'; C, C' sao cho

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC'$$

Chứng minh rằng:

a) A, A', B, B', C, C' là các đỉnh của một khối tám mặt K nội tiếp một mặt cầu.

b) Trung điểm các cạnh của K và hình chiếu vuông góc của các điểm đó trên cạnh đối diện cùng nằm trên một mặt cầu.

c) Trọng tâm và trực tâm các mặt của K cùng nằm trên một mặt cầu.

Nguyễn Đăng Phất

...iểu sâu thêm toán học phổ thông

HÀM SỐ TUẦN HOÀN

TẠ VĂN TỰ

...c kiến thức về hàm số tuần hoàn có ...i trò quan trọng trong các bài toán ...inh tế, kỹ thuật,... và đặc biệt trong ...t hàm số ở chương trình phổ thông. ...số cần khảo sát về tính chất tuần hoàn, ...g có dạng là tổng của các hàm số lượng ...n hoặc cos, nên một vấn đề được đặt ra ...ì tìm điều kiện cần và đủ để tổng các ...ố lượng giác là hàm số tuần hoàn và hãy ...huật toán tìm chu kỳ của hàm tổng đó. ...ể cho việc trình bày, chúng ta cùng làm ...ới một vài khái niệm.

...nh nghĩa 1. Cho n số $a_i > 0$; $i = 1, \dots, n$; ...à tập các số hữu tỷ. Khi đó, ta nói các ...ố thông ước với nhau nếu $a_i/a_j \in Q$ với ...$j = 1, \dots, n$.

...nh nghĩa 2 Cho n số $a_i > 0$; $i = 1, \dots, n$. Gọi ...tập các số tự nhiên, Số được gọi là bội số ...g của các số a_i, ký hiệu là BSC $\{a_1, \dots, a_n\}$, ...BSC$\{a_1, \dots, a_n\}/a_i \in N$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

...nh nghĩa, 3. Cho n số $a_i > 0$; $i = 1, \dots, n$. ...được gọi là bội số chung nhỏ nhất của các ...ký hiệu là BSCNN $\{a_1, \dots, a_n\}$, nếu nó thỏa ...hai điều kiện sau:

...BSCNN$\{a_1, \dots, a_n\}/a_i \in N$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

b) BSCNN $\{a_1, \dots, a_n\} \leqslant$ BSC $\{a_1, \dots, a_n\}$ với BSC $\{a_1, \dots, a_n\}$ là bội số chung bất kỳ của các số a_i.

Nhận xét: Từ các định nghĩa trên, dễ dàng thấy rằng, nếu tồn tại BSC của $a_i > 0$; $i = 1, \dots, n$ thì có vô số BSC và tồn tại duy nhất BSCNN của chúng. BSC của $a_i > 0$ là tồn tại khi và chỉ khi a_i thông ước với nhau. Thực vậy: ta có BSC$\{a_1, \dots, a_n\} = n_i a_i = n_j a_j$ với mọi $i, j = 1, \dots, n$; $n_i, n_j \in N \Leftrightarrow a_i/a_j = n_j/n_i \in Q$.

Nói riêng, khi a_i là các số tự nhiên thì tồn tại BSC và khái niệm BSC, BSCNN vừa định nghĩa ở trên trùng với khái niệm BSC, BSCNN quen thuộc ở sách giáo khoa số học phổ thông.

Bằng phương pháp quy nạp ta có ngay kết quả sau:

• **Bổ đề.** $\sin^{(p)}(ax + t) = a^p \sin(ax + t + p.\pi/2)$

$\cos^{(p)}(ax + t) = a^p \cos(ax + t + p.\pi/2)$

với $a \neq 0$ và ký hiệu $\sin^{(p)}$; $\cos^{(p)}$ là đạo hàm cấp p.

Mệnh đề 1. Xét hàm số

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin a_i x + \sum_{j=1}^{m} B_j \cos b_j x + b \qquad (1)$$

với $n, m \in N$; $A_i \neq 0$; $i = 1, \dots, n$; $B_j \neq 0$; $J = 1, \dots, m$; các số $a_i > 0$ khác nhau và các số $b_j > 0$ khác nhau. Khi đó:

a) $f(x)$ tuần hoàn $\Leftrightarrow$ các số $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ thông ước với nhau.

b) $T_0 = \text{BSCNN}\{2\pi/a_1, \ldots, 2\pi/a_n, 2\pi/b_1, \ldots, 2\pi/b_m\}$ là chu kỳ của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn.

Chứng minh:

a) *Đủ*: Vì $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ dương, thông ước với nhau nên $1/a_1, \ldots, 1/a_n, 1/b_1, \ldots, 1/b_m$ dương và thông ước với nhau. Theo nhận xét trên, rõ ràng tồn tại BSC$\{1/a_1, \ldots, 1/a_n, 1/b_1, \ldots, 1/b_m\}$ nên theo định nghĩa 2 ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a_i.\text{BSC}\{1/a_1, \ldots, 1/a_n, 1/b_1, \ldots, 1/b_m\} = n_i \in N; \\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \text{và } b_j.\text{BSC}\{1/a_1, \ldots, 1/b_m\} = m_j \in N;\ j = 1, \ldots, m \end{array}\right\} \quad (2)$$

Lấy $T = 2\pi.\text{BSC}\{1/a_1, \ldots, 1/a_n, 1/b_1, \ldots, 1/b_m\}$, từ (2) ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a_iT = 2\pi n_i;\ i = 1, \ldots, n \\ b_jT = 2\pi m_j;\ j = 1, \ldots, m \end{array}\right\} \quad (3)$$

Xét
$$f(x+T) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(a_ix + a_iT) + \sum_{j=1}^{m} B_j \cos(b_jx + b_jT) + b$$

Từ (3) ta có

$$f(x+T) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(a_ix + 2\pi n_i) + \sum_{j=1}^{m} B_j \cos(b_jx + 2\pi m_j) + b$$
$$= \sum_{i=1}^{m} A_i \sin a_ix + \sum_{j=1}^{m} B_j \cos b_jx + b = f(x)$$ với mọi x. Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

Cần: Từ $f(x)$ tuần hoàn suy ra tồn tại $T > 0$ sao cho
$$\sum_{i=1}^{n} A_i \sin a_ix + \sum_{j=1}^{m} b_j \cos b_jx + b$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \sin a_i(x + T) + \sum_{j=1}^{m} B_j \cos b_j(x + T) + b.$$

Lấy đạo hàm theo x ở hai vế tới cấp p với $0 \leqslant p \leqslant \max\{2n - 2, 2m - 1\}$ và theo bổ đề ta có
$$\sum_{i=1}^{n} A_i a_i^p \sin(a_ix + p\pi/2) + \sum_{j=1}^{m} B_j b_j^p \cos(b_jx + p\pi/2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_i a_i^p \sin(a_ix + a_iT + p\pi/2) + \sum_{j=1}^{m} B_j b_j^p \cos(b_jx + b_jT + p\pi/2).$$

Cho $x = -T/2$ ta có
$$\sum_{i=1}^{n} A_i a_i^p \sin(-a_iT/2 + p\pi/2) + \sum_{j=1}^{m} B_j b_j^p \cos(-b_jT/2 + p\pi/2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_i a_i^p \sin(a_iT/2 + p\pi/2 + \sum_{j=1}^{m} B_j b_j^p \cos(b_jT/2 + p\pi/2)$$

Mặt khác có
$$\cos(-b_jT/2 + p\pi/2) = \cos(b_jT/2 + p\pi/2)$$
$$= (-1)^p \cos(b_jT/2 + p\pi/2)$$
$$\sin(-a_iT/2 + p\pi/2) = -\sin(a_iT/2 + p\pi/2)$$
$$= (-1)^{p+1} \sin(a_iT/2 + p\pi/2)$$

Do đó với $p = 2k$, chẵn, ta có
$$\cos(-b_jT/2 + p\pi/2) = \cos(b_jT/2 + p\pi/2)$$
$$\sin(-a_iT/2 + p\pi/2) = -\sin(a_iT/2 + p\pi/2)$$

Kết hợp với (4) ta có
$$\sum_{i=1}^{n} A_i a_i^p \sin(a_iT/2 + k\pi) = 0$$ hay
$$\sum_{i=1}^{n} A_i a_i^p \sin(a_iT/2) = 0$$
vì $\sin(a_iT/2 + k\pi) = \sin(a_iT/2)\cos k\pi = (-1)^k \sin(a_iT/2)$. Từ đó, cho $p = 0, 2, \ldots$ ta có hệ phương trình n ẩn.

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(a_iT/2) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} A_i a_i^2 \sin(a_iT/2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i a_i^{2(n-1)} \sin(a_iT/2) = 0 \end{array}\right.$$

Tương tự, với $p = 2k + 1$, lẻ, từ (4), ta có
$$\sum_{j=1}^{m} B_j b_j^p \cos[b_jT/2 + (2k+1)\pi/2] = 0$$ hay
$$\sum_{j=1}^{m} B_j b_j^p \sin(b_jT/2) = 0$$ vì $\cos[b_jT/2 + (2k+1)\ldots$
$$= -\sin(b_jT/2)\sin[(2k+1)\pi/2] = (-1)^{k+1} \sin\ldots$$

$p = 1, 2, \ldots, 2m-1$ ta có hệ phương

$B_j b_j \sin(b_j T/2) = 0$

(11)

$B_j b_j^{2m-1} \sin(b_j T/2) = 0$

...ương pháp cộng đại số để giải các hệ ...h tuyến tính thuần nhất (1) và (11) ...$\neq 0$, $B_j \neq 0$, các số a_i khác nhau ...b_j khác nhau ta có nghiệm

...$(a_i T/2) = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots n$;

...$(b_j T/2) = 0 \ \forall j = 1, 2, \ldots, m$.

...ới mọi i có $n_i \in N$ (do $T > 0$, $a_i > 0$) ...$T/2 = n_i \pi$ hay

$$T = 2\pi n_i / a_i \tag{7}$$

...có $m_j \in N$ sao cho

$$T = 2\pi m_j / b_j \tag{8}$$

...(8), rõ ràng $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots,$ ...ước với nhau.

...$f(x)$ tuần hoàn thì theo phần a) ta ...(8). Do vậy theo định nghĩa 2 ta có

$$\text{BSC}\left\{\frac{2\pi}{a_1}, \ldots, \frac{2\pi}{a_n}, \frac{2\pi}{b_1}, \ldots, \frac{2\pi}{b_m}\right\}$$

...ếu $T = \text{BSC}\left\{\frac{2\pi}{a_1}, \ldots, \frac{2\pi}{b_m}\right\}$

...có dạng (7) (8) thì

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(a_i x + a_i 2\pi n_i / a_i)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} B_j \cos(b_j x + b_j \cdot 2\pi m_j / b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \sin a_i x + \sum_{j=1}^{m} B_j \cos b_j x = f(x) \tag{9}$$

$$= \text{BSC}\left\{\frac{2\pi}{a_1}, \ldots, \frac{2\pi}{a_n}, \frac{2\pi}{b_1}, \ldots, \frac{2\pi}{b_m}\right\}$$

$f(x + T) = f(x)$ với mọi x, $T > 0$

$$f(x + T_0) = f(x) \text{ với mọi } x \tag{10}$$

...với mọi S sao cho $0 < S < T_0$ ta ...$f(x + S) \neq f(x)$ với ít nhất một x (11) ...thì theo (9) và định nghĩa BSCNN ...$\leq S$.

...(10) và (11) ta có T_0 là chu kỳ của

Nhận xét: Mệnh đề 1 vẫn đúng khi $n = 0$ ($m \geq 1$) tức là:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m}{}' B_j \cos b_j x + b \tag{12}$$

hoặc $m = 0$ ($n \geq 1$) tức là:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin a_i x + b \tag{13}$$

Điều này thu được bằng cách lặp lại cách chứng minh mệnh đề 1 với chú ý là: ứng với $f(x)$ dạng (12) ta không phải giải hệ (1) còn ứng với $f(x)$ dạng (13) ta không phải giải hệ (11).

Mệnh đề 1 cho ta tiêu chuẩn cần và đủ đơn giản nhận biết các hàm $f(x)$ dạng (1), (12), (13) có phải tuần hoàn hay không. Mệnh đề dưới đây chỉ ra thuật toán xác định chu kỳ rất đơn giản bằng cách tính BSCNN của các số tự nhiên.

Cho các số $a_i > 0$; $i = 1, \ldots, n$ thông ước với nhau, ta có: $a_i = n_i \cdot a_1 \ \forall i = 1, \ldots, n$; $n_i \in Q$. Vì $n_i \in Q$ dương nên có $q_i, p_i \in N$ sao cho $n_i = p_i / q_i$ là phân số tối giản (14). Khi đó ta có

Mệnh đề 2.

$$\text{BSCNN}\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 \cdot \text{BSCNN}\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$$

Chứng minh: Theo định nghĩa BSC và (14), ta có $a_1 \cdot \text{BSCNN}\{p_1, \ldots, p_n\} = a_1 \cdot p_i m_i = a_1 n_i \cdot m_i q_i = a_i \cdot (m_i q_i) \ \forall i = 1, \ldots, n$. Chú ý $m_i, q_i \in N$ nên $m_i q_i \in N$. Do vậy $a_1 \cdot \text{BSCNN}\{p_1, \ldots, p_n\}$ là BSC của $a_1, \ldots, a_n$. Từ đó theo định nghĩa BSCNN, ta có $a_1 \cdot \text{BSCNN}\{p_1, \ldots, p_n\} \geq \text{BSCNN}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Ngược lại: $a_1 k_1 = \text{BSCNN}\{a_1, \ldots, a_n\} =$

$$= a_i \cdot k_i = a_1 \cdot n_i k_i \text{ với } k_i \in N \tag{15}$$

$\Rightarrow k_1 = n_i \cdot k_i \Rightarrow n_i k_i \in N$ vì $k_1 \in N$. Theo (14):

$\Rightarrow (p_i k_i / q_i) \in N$.

Vì p_i / q_i là phân số tối giản, nên k chia hết cho q_i.

Do vậy đặt $m_i = k_i / q_i \Rightarrow m_i \in N$. Từ (15) ta có $\text{BSCNN}\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 \cdot p_i m_i \Rightarrow$

$$\frac{1}{a_1} \text{BSCNN}\{a_1, \ldots, a_n\}$$

là BSC của $\{p_1, \ldots, p_n\} \rightarrow \frac{1}{a_1} \text{BSCNN}\{a_1, \ldots, a_n\}$

$\geq \text{BSCNN}\{p_1, \ldots, p_n\}$ đpcm)

Suy trực tiếp mệnh đề 2, ta có kết quả sau:

Hệ quả: $T_0 = \text{BSCNN}\{2\pi/a_1, \ldots, 2\pi/a_n\} =$

$$= \frac{2\pi}{a_1} \cdot \text{BSCNN}\{q_1, \ldots, q_n\}.$$

Sau đây là vài ví dụ tiêu biểu, đơn giản minh họa cho các kết quả trên.

Ví dụ 1. Hãy xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau:

a) $\sin 1964\pi x - \cos(\pi x/1979)$.

b) $\sin x - \sin(x/2) + \sin(x/3) - \dots + \sin(x/9) - \sin(x/10)$.

c) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \cos\sqrt{i}\,x$ với $n \geqslant 2$.

Giải: a) Tuần hoàn và chu kỳ $T_0 = \text{BSCNN}\{2\pi/1964\pi,\ 2\pi.1979/\pi\} =$

$$= \frac{2}{1964}\text{BSCNN}\{1;\ 1979.1964\} = 2.1979 = 1358$$

b) Tuần hoàn và chu kỳ $T_0 = \text{BSCNN}\{2\pi, 4\pi, \dots, 20\pi\} = 2\pi.\ \text{BSCNN}\{1, 2, \dots, 10\} = 2\pi.2^3.3^2.5.7 = 5040\pi$.

c) Không tuần hoàn vì $b_1/b_2 = 1/\sqrt{2} \in Q$ (so sánh dạng (12)).

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ

a) $\cos x.\cos\sqrt{2}\,x$.

b) $\sin^3(x/\sqrt{2}).\cos^2(\sqrt{2}\,x)$.

Giải:

a) Ta có $\cos x\cos\sqrt{2}\,x = \frac{1}{2}\cos(1+\sqrt{2})x +$

$$+ \frac{1}{2}\cos(1-\sqrt{2})x$$

nên không tuần hoàn vì

$(1-\sqrt{2})/(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3$ là số vô tỷ.

b) Theo công thức $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ ta có:

$$\sin^3(x/\sqrt{2}).\cos^2(\sqrt{2}x) =$$

$= [(3/4)\sin(x/\sqrt{2}) - (1/4)\sin(3x/\sqrt{2})] \times$
$\times [(1/2)\cos 2\sqrt{2}\,x + 1/2]$

$= (3/8)\sin(x/\sqrt{2})\cos 2\sqrt{2}\,x + (3/8)\sin(x/\sqrt{2})$
$- (1/8)\sin(3x/\sqrt{2})\cos 2\sqrt{2}\,x - (1/8)\sin(3x/\sqrt{2})$
$= (3/16)[\sin(5\sqrt{2}\,x/2) - \sin(3\sqrt{2}\,x/2)] +$
$+ (3/8)\sin(x/\sqrt{2}) - (1/16)[\sin(7\sqrt{2}\,x/2)$
$- \sin(\sqrt{2}\,x/2)] - (1/8)\sin(3x/\sqrt{2})$
$= (3/16)\sin(5\sqrt{2}\,x/2) - (5/16)\sin(3\sqrt{2}\,x/2)$
$- (1/16)\sin(7\sqrt{2}\,x/2) + (7/16)\sin(\sqrt{2}\,x/2)$

Vậy là hàm số tuần hoàn (theo m... và chu kỳ

$T_0 = \text{BSCNN}\{4\pi/5\sqrt{2};\ 4\pi/3\sqrt{2};\ 4\pi/7\sqrt{2}; \dots$

$= (4\pi/5\sqrt{2}).\text{BSCNN}\{1,\ 5/3,\ 5/7,\ 5\}$

$= (4\pi/5\sqrt{2})\text{BSCNN}\{1,\ 5,\ 5,\ 5\}$

$= (4\pi/5\sqrt{2}).5 = 2\sqrt{2}\,\pi$

Từ phương pháp giải ở ví dụ 2 ta có ... sau:

Mệnh đề 3.

Hàm số $f(x) = \prod_{i=1}^{n}\sin^{n_i} a_i x.\prod_{j=1}^{m}\cos^{m_j} \dots$

n_i, m là các số hữu tỷ dương; $a_i > 0$, ... là tuần hoàn khi và chỉ khi $a_1, \dots$ thông ước với nhau.

Cuối cùng, vấn đề xét tính tuần hoàn ... chu kỳ của hàm $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$; với ... hàm tuần hoàn có chu kỳ, $a_i \neq 0$; $i = \dots$ tuy không có kết quả đẹp như mệnh đề ... cũng có những kết quả lý thú. Lời giải ... vẹn xin dành cho các bạn.

GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ BÉ NHẤT, LỚN NHẤT

(trong đại số và lượng giác)

NGUYỄN ĐỨC THUẦN

Có một phương pháp để giải các bài toán về giá trị bé nhất, lớn nhất là phương pháp đạo hàm. Dùng phương pháp đạo hàm thì ta tìm được giá trị cực tiểu và giá trị cực đại của hàm số. Giá trị cực tiểu bé nhất so với tất cả các giá trị cực tiểu của hàm số trong một khoảng nào đó được gọi là *giá trị bé nhất* của hàm số trong khoảng đó. Giá trị cực đại lớn nhất so với tất cả các giá trị cực đại của hàm số trong một khoảng nào đó, được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số trong khoảng đó. Vì vậy, dùng phương pháp đạo hàm ta tìm được cực trị của hàm số, còn phải chứng minh nó hoặc là giá trị lớn nhất hoặc giá trị bé nhất trong một khoảng xác định. Sau đây là một vài phương pháp không dùng đạo hàm để tìm giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của hàm số.

...pháp dựa vào lũy thừa bậc chẵn.
...pháp dựa vào tam thức bậc hai
...giá trị của hàm số.
...pháp dựa vào bất đẳng thức.
...pháp dựa vào hàm số lồi, hàm

...pháp lượng giác.
...ta không nên quá nhấn mạnh về
...pháp này hay phương pháp khác. Vấn
...là giải được các bài toán về giá trị
...nhất. Có khi, người ta còn kết hợp
...pháp đồ thị để tìm giá trị bé nhất,
...của hàm số (xem ví dụ 9 trong bài
...đây, trình bày *các ví dụ với lời giải*
...minh họa cho các phương pháp đã

...ương pháp dựa vào lũy thừa ...ẵn.

...1. Tìm giá trị bé nhất và giá trị lớn
$...= x^6 + y^6$ *biết rằng* $x^2 + y^2 = 1$.

...Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên $y^2 = 1 - x^2$. Do đó ...$(1-x^2)^3$. Suy ra: $S = 3(x^2 - 1/2)^2 + 1/4$.
...$-1/2)^2 \geqslant 0$ nên $S_{min} = 1/4$ tại $x = \pm\sqrt{2}/2$.
...vì $1 - x^2 \geqslant 0$ nên $(x+1)(x-1)$ ...suy ra, ta có $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Do đó khi ...hoặc $x = 0$ thì có $S_{max} = 3(1/2)^2 + 1/4 = 1$.

...2. Tìm giá trị bé nhất của
$S = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$.

...Vì $S = (x + y + 1)^2 + (x - 2)^2 - 3$ nên S ...trị bé nhất khi $x - 2 = 0$ và $x + y + 1 = 0$. ...$x = 2$, $y = -3$. Do đó, ta có:

$$S_{min} = -3$$

...Phương pháp dựa vào tam thức ...hai hoặc miền giá trị hàm số.

...3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé ...của $u = x^2 + y^2$ *với điều kiện*

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \qquad (1)$$

...Ta biến đổi (1):
$(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -4x^2$.
...đó $u^2 - 3u + 1 \leqslant 0$.
...ra $(3 - \sqrt{5})/2 \leqslant u \leqslant (3 + \sqrt{5})/2$.
...$u_{max} = (3 + \sqrt{5})/2$; $u_{min} = (3 - \sqrt{5})/2$.

...4. Nếu x nhận giá trị thực bất kỳ tìm ...lớn nhất và nhỏ nhất của

$$u = \frac{3x - 2}{4x - x^2 - 6} \qquad (1)$$

Giải: Vì $4x - x^2 - 6$ có biệt số âm nên (1) tương đương với: $ux^2 + (3 - 4u)x + 6u - 2 = 0$. Đây là phương trình bậc hai đối với x. Để x nhận giá trị thực bất kỳ thì điều kiện cần và đủ là:

$$\Delta = (3 - 4u)^2 - 4u(6u - 2) \geqslant 0.$$

Suy ra $8u^2 + 16u - 9 \leqslant 0$.
Do đó $-1 - \sqrt{34}/4 \leqslant u \leqslant -1 + \sqrt{34}/4$

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số $y = 3\sin x + \cos 2x$.

Giải: Ta có $y = -2\sin^2 x + 3\sin x + 1$

$$= -2\left[(\sin x - 3/4)^2 - 17/16\right]$$

Do đó y lớn nhất khi $(\sin x - 3/4)^2$ nhỏ nhất tức là khi $\sin x = 3/4$

$$y_{max} = -2(0 - 17/16) = 17/8.$$

Mặt khác $(\sin x - 3/4)^2$ nhận giá trị lớn nhất khi $\sin x = -1$. Lúc đó y nhận giá trị bé nhất:

$$y_{min} = -2\left[(-1 - 3/4)^2 - 17/16\right] = -4.$$

III. Phương pháp dựa vào bất đẳng thức

Ví dụ 6. Biết rằng $x + y + z = 1$ *và* $x, y, z > 0$, *tìm giá trị lớn nhất của*

$$S = xyz(x + y)(y + z)(z + x).$$

Giải: Ta biến đổi: $S = z(x + y)x(y + z)y(z + x)$.

Vận dụng bất đẳng thức Côsi với hai số dương z và $(x + y)$, ta có:

$$z + (x + y) \geqslant 2\sqrt{z(x + y)} \qquad (1)$$

Tương tự:

$$x + (y + z) \geqslant 2\sqrt{x(y + z)} \qquad (2)$$

$$y + (z + x) \geqslant 2\sqrt{y(z + x)} \qquad (3)$$

Nhân vế với vế (1), (2) và (3) ta có:

$$1 \geqslant 8\sqrt{xyz(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Do đó: $S = xyz(x + y)(y + z)(z + x) \leqslant 1/64$.
Vậy $S_{max} = 1/64$.

Ví dụ 7. Với n là số tự nhiên, tìm giá trị bé nhất của:

$$S = \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n + \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n$$

Giải: Hai số hạng của S đều dương, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$S \geqslant 2\sqrt{\left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n}$$

$$S \geqslant 2\sqrt{(8/\sin^2 2x + 1)^n}$$

Khi $\sin^2 2x = 1$, suy ra $x = \pi/4 + k\pi/2$ thì S nhận giá trị bé nhất

$$S = 2\sqrt{9^n} = 2.3^n.$$

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$y = 3\sin^2 x\,(1 - 4\sin^2 x)/\cos^4 x \quad (0 < x < \pi/6).$

Giải : Ta biến đổi : $y = \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1 - 4\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

Với $0 < x < \pi/6$ thì $1 - 4\sin^2 x > 0$. Do đó hai nhân tử trong biểu thức y đều dương. Hơn nữa, dễ thấy rằng tổng của chúng bằng 1. Do đó tích của chúng, tức y_x có giá trị lớn nhất khi chúng bằng nhau. Suy ra $3\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x$. Ta rút được $\sin^2 x = 1/7$ và $\cos^2 x = 6/7 \Rightarrow \cos^4 x = 36/49$. Thay vào biểu thức của y, ta có $y_{max} = 1/4$.

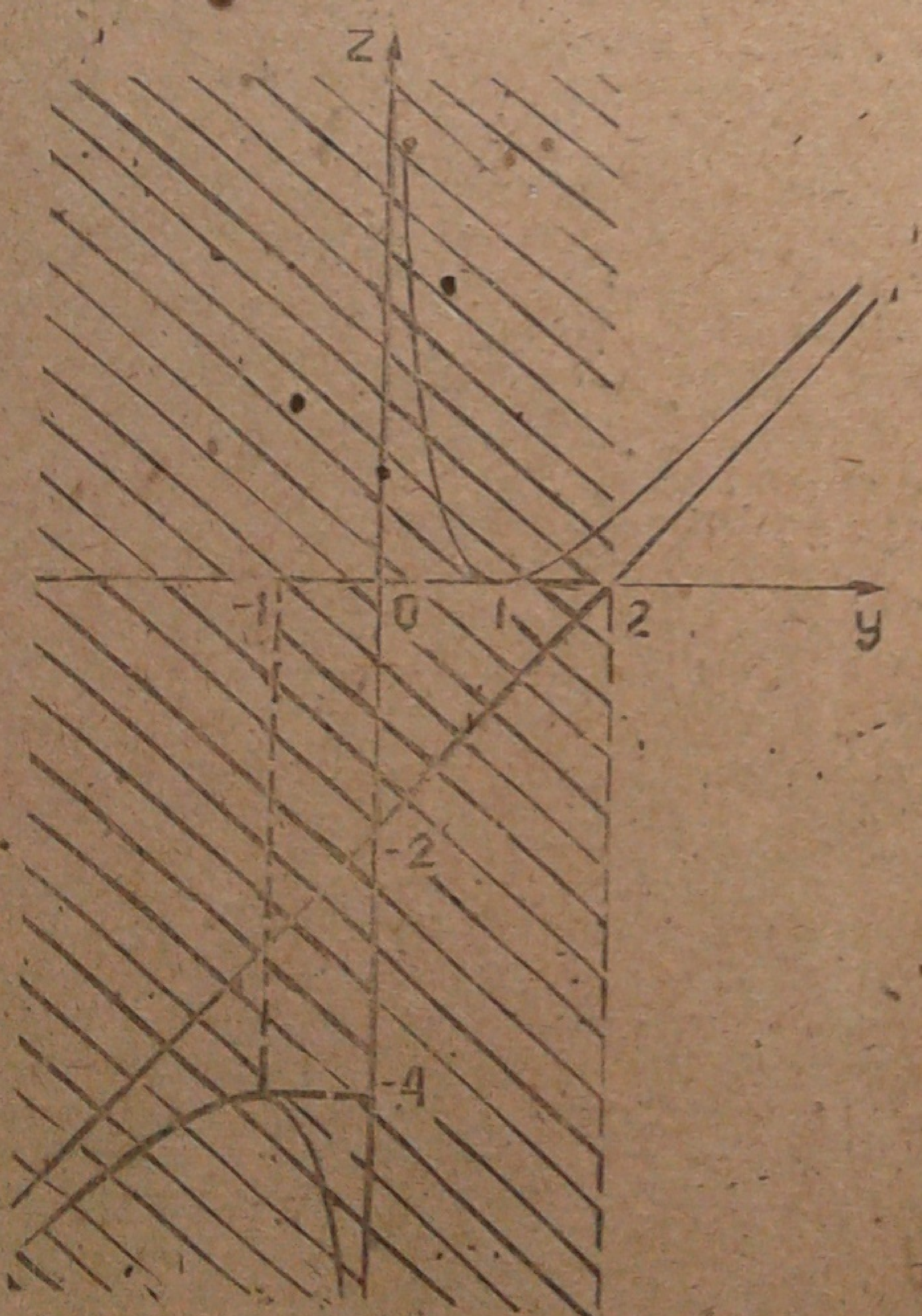
? −1

Ví dụ 9. Với giá trị nào của x thì hàm số sau đây có giá trị bé nhất :

$$z = \lg^2 x + 1/(\lg^2 x + 2)$$

Giải. Đầu tiên, ta thấy rằng x phải là số dương, vì nếu không thì không có lôgarit. Đặt $\lg^2 x + 2 = y$, do đó $y \geqslant 2$. Ta có $z = y + 1/y - 2$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi với hai số dương y và $1/y$, ta viết được $y + 1/y \geqslant 2\sqrt{y.1/y}$. Do đó :

$$y + 1/y - 2 \geqslant 2\sqrt{y.1/y} - 2 = 0.$$



Dấu bằng xảy ra khi $y = 1/y \Rightarrow y = \pm 1$. Cả hai giá trị này đều không thỏa mãn điều kiện $y \geqslant 2$. Nếu vẽ đồ thị hàm số $z = y + 1/y - 2$, ta thấy rằng với $y \geqslant 2$ thì z đạt giá trị bé nhất khi $y = 2$. Tuy nhiên, với đồ thị ta coi như còn ở mức độ trực giác. Ta phải chứng minh rằng z là hàm số tăng với $y \geqslant 2$. Muốn th[...] minh rằng, nếu $2 \leqslant a < b$ thì $a + 1/a$ [...] Thực vậy, dễ dàng suy ra $(b - a)(1 -$ [...] Vì $b > a$ và $ab > 1$ nên điều ta vừa [...] luôn luôn có. Như vậy, hàm số $z = y +$ [...] đạt giá trị bé nhất với $y = 2$, có ngh[...]

$$z_{min} = 2 + 1/2 - 2 = 1/2.$$

Ta có $\lg^2 x + 2 = y = 2$, suy ra $\lg^2 x = 0$ [...]

IV. Phương pháp dựa vào t[...] hàm lồi, lõm.

Định nghĩa 1. *Hàm số $y = f(x)$ [...] trong khoảng (a, b) được gọi là hàm [...] khoảng đó, nếu như đối với x_1, x_2 bất [...] (a, b), ta có :*

$$f(x_1) + f(x_2) \leqslant 2.f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Suy ra : $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leqslant$

$$\leqslant n.f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

Định nghĩa 2. *Hàm số $y = f(x)$ [...] trong khoảng (a, b) được gọi là hàm lõm [...] khoảng đó, nếu như x_1, x_2 bất kỳ thuộc [...] ta có :*

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2.f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Suy ra : $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant$

$$\geqslant n.f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

Ví dụ 10. Tìm giá trị lớn nhất của $S =$ [...] $\sin B + \sin C$, biết rằng A, B, C là 3 góc của m[...] giác.

Giải. Hàm số $y = \sin x$ trong khoảng $0 <$ [...] dễ dàng chứng minh được là hàm số l[...] ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant 3\sin\frac{A + B + C}{3} = [\ldots]$$

Vậy $S_{max} = 3\sqrt{3}/2$ khi $A = B = C = \pi$[...]

Ví dụ 11. A, B, C là 3 góc của một tam [...] tìm giá trị bé nhất của

$$S = 1/\sin^2(A/2) + 1/\sin^2(B/2) + 1/\sin^2(C[\ldots]$$

Giải. Vì x_1 và x_2 thuộc khoảng $0 <$ [...] nên $\sin x_1$ và $\sin x_2$ đều dương. Áp dụng bất [...] thức Côsi, với hai số dương $1/\sin x_1$ và [...] ta có :

$$1/\sin x_1 + 1/\sin x_2 \geqslant 2\sqrt{\sin x_1.\sin x_2}[\ldots]$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}.\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}} \geqslant 64.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với ba số dương, ta có:

$$S \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}}} = 3\sqrt[3]{64} = 12.$$

Vậy $S_{min} = 12$.

V. Phương pháp lượng giác.

Ví dụ 12. Tìm giá trị bé nhất và giá trị lớn nhất của $S = x + y$ biết rằng $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Vì x và y thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ nên có thể tìm được góc α sao cho $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Nếu thế, ta có: $x + y = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \pi/4)$ mà $-1 \leqslant \sin(\alpha + \pi/4) \leqslant 1$, nên: $-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\sin(\alpha + \pi/4) \leqslant \sqrt{2}$ với mọi α. Như vậy, ta kết luận được $S_{min} = -\sqrt{2}$, $S_{max} = \sqrt{2}$.

Chú ý: Ta có thể giải bằng phương pháp lượng giác ví dụ 1 của bài này.

Ví dụ 13. Tìm giá trị bé nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x/(x^2 + 1)$ với $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải: Ta đặt $x = \mathrm{tg}t$, $-\pi/4 \leqslant t \leqslant \pi/4$. Như thế, ta có:

$y = \mathrm{tg}t/(\mathrm{tg}^2t + 1) = \mathrm{tg}t.\cos^2t = \sin t.\cos t = \sin 2t/2.$

Từ đó $y_{min} = -1/2$ khi $\sin 2t = -1$ tức $2\mathrm{tg}t/(\mathrm{tg}^2t + 1) = -1$.

$\Leftrightarrow (\mathrm{tg}t + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$. Và $y_{max} = 1/2$ khi $\sin 2t = 1$ và suy ra khi ấy $x = 1$.

Các bạn hãy giải các bài tập sau:

1. Tìm giá trị bé nhất, lớn nhất của các hàm số sau đây:

a) $y = x^4 - 4x^2 + 5$. b) $y = \cos^4x + \sin^4x$.

c) $y = \cos^6x + \sin^6x$. d) $y = x\sqrt{1 - 4x^2}$.

2. Hãy tìm giá trị bé nhất, lớn nhất của các biểu thức sau đây:

a) $S = x^2 - y^2$ với điều kiện
$x^4 + y^4 - x^2y^2 - 4x^2 + 4y^2 + 3 = 0$.

b) $S = x + y + 1$ với điều kiện
$x^2 + 2xy + 7(x + y) + 10 + 2y^2 = 0$.

c) $S = \sin x + \cos x$ với điều kiện
$4\sin x\cos x + \sin^2x - 3(\sin x + \cos x) + 3 = 0$.

d) $S = 4/\sqrt{x^2 + 3x + 5}$

e) $S = (-2x + 3)/(x^2 + 6x + 10)$

f) $S = (2x - 1)/(2x - x^2 - 4)$

g) $S = (x^2 + 2x + 3)/(x^2 + 2x + 2)$

3. Tìm giá trị bé nhất, lớn nhất của các hàm số sau đây:

a) $y = \log_2^4x + 12\log_2^2x.\log_2(8/x)$ với $1 \leqslant x \leqslant 64$.

b) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 5)(x - 6) + 9$.

c) $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

d) $y = 1/\cos^4 x - \mathrm{tg}^4 x$.

e) $y = 3\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x + 2$.

f) $y = 3/\sin^4 x - 2\mathrm{ctg}^4 x$.

4. Tìm giá trị bé nhất, lớn nhất của các hàm số sau đây:

a) $y = (\sin x + \cos x)^3 + 1/(\sin^2 x . \cos^2 x)$.

b) $y = 1/\cos^4 x + 1/\sin^4 x + \sin^4 x + \cos^4 x$.

c) $y = 2x + 25/8(x+1)$,

d) $y = 3^{x-1} + 3^{-x+1}$

e) $y = \sin^2 x + 1/(\sin^2 x + 2)$.

f) $y = \cos^2 x + 1/(\cos^2 x + 2)$.

g) $y = 2.5^{\lg x}/(x^{2\lg 5} + 1)$.

h) $y = (1 + x^4)/(1 + x^2)^2$.

i) $y = (x+1)^2/(x^2 + 1)$.

k) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{1+x}$.

5. Tìm giá trị bé nhất, lớn nhất của các hàm số sau đây:

a) $y = 1/\sin(\pi/3 + x) + 1/\sin(\pi$... $0 \leqslant x < \pi/3$.

b) $y = (a + x)(b + x)/cx$.

c) $y = \sin^3 x + 2\sqrt{2 - \sin^2 x} - 2$.

d) $y = \cos A + \cos B + \cos C$ (biết rằng ... góc nhọn trong tam giác).

e) $y = 1/\sin(A/2) + 1/\sin(B/2) + 1$... (biết A, B, C là các góc trong tam giác)

Bạn đọc tìm tòi

VỀ MỘT BÀI TOÁN THI QUỐC TẾ

TRONG báo Toán học và tuổi trẻ số 5 năm 1979 có đăng lời giải bài toán số 2 của kỳ thi vô địch toán quốc tế lần thứ 21. Trong phần chứng minh «tất cả 5 cạnh của một đáy lăng trụ phải được tô bằng cùng một màu», tác giả đã phân biệt hai trường hợp. Theo tôi, để *lời giải gọn hơn một chút* thì không cần phân hai trường hợp như vậy, chỉ cần chú ý là *đỉnh A_2 có ít nhất ba cạnh xiên cùng màu thì thế nào cũng có hai trong ba cạnh đó nối với hai đỉnh kề nhau của đáy B*. Từ đó suy luận tiếp dẫn đến điều vô lý. Tôi xin thể hiện ý đó trong việc chứng minh bài toán tổng quát.

Bài toán tổng quát. Cho lăng trụ n − giác có hai đáy $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$. Người ta tô màu các cạnh đáy và tất cả các đoạn A_iB_j $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ bằng hai màu xanh, đỏ sao cho trong các tam giác có các cạnh được tô màu không có tam giác nào mà cả ba cạnh được tô cùng một màu. Chứng minh rằng nếu n lẻ thì cả $2n$ cạnh đáy phải được tô bằng cùng một màu. Với n chẵn thì không nhất thiết phải như vậy.

Chứng minh bài toán tổng quát.

1. Với $n = 2k$. Có thể chỉ ra cách tô màu mà $2n$ cạnh đáy không cùng một màu: Tô màu xanh các đoạn $A_{2i-1}A_{2i}$, $B_{2i-1}B_{2i}$, $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ và các đoạn A_iB_j mà $|i - j| \vdots 2$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Các đoạn còn lại tô màu đỏ.

2. Với $n = 2k + 1$. *Một số nhận xét:*

— Lấy $k + 1$ đỉnh bất kỳ của một đáy thì sẽ có hai đỉnh kề nhau.

— Nếu tô màu $2k + 1$ cạnh bằng hai ... ít nhất có $k + 1$ cạnh được tô cùng ...

a) Chứng minh các cạnh của một đáy ...

Xét chẳng hạn đáy $A: A_1A_2 \ldots A_n$. Giả ... cạnh của chúng không cùng màu thì ... cạnh kề nhau khác màu nhau là A_{i-1}... A_iA_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n$, $A_{n+1} = A_1$, $A_0 = \ldots$ ... $2k + 1$ cạnh xiên nên có $k + 1$ cạnh ... màu (*) và các cạnh xiên đó nối với $k +$ ... của đáy B sẽ nối với hai đỉnh liên tiếp ... B_{j+1} $(1 \leqslant j \leqslant n$, $B_{n+1} = B_1)$. Trong hai đỉnh ... A_{i+1} sẽ có một đỉnh mà cạnh nối với ... màu (*), không mất tổng quát ta giả thiết ... A_{i-1}. Rõ ràng các cạnh B_jB_{j+1}, B_jA_{i-1}, ... phải được tô màu khác màu (*) và như ... giác $B_jB_{j+1}A_{i-1}$ có ba cạnh cùng màu, mâu ...

b) Chứng minh các cạnh của hai đáy ...

Giả sử hai đáy có hai màu khác nhau ... A_1 có $k + 1$ cạnh xiên cùng màu, giả sử ... (*), sẽ có hai cạnh xiên trong số đó nối ... đỉnh liên tiếp B_i, B_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n$, B_{n+1} ... Rõ ràng $B_i B_{i+1}$ có màu khác màu (*) ... đó A_1A_2 có màu (*). Như vậy thì tam giác ... có ba cạnh cùng khác màu (*), mâu ...

Như vậy ta đã giải quyết trọn vẹn bài ... tổng quát. Nếu $n = 5$ thì ta có bài toán ... của kỳ thi quốc tế lần thứ 21 nói trên.

Bài toán này còn có thể mở rộng và ... tự hóa. Rất mong được gặp lại các bạn ... báo Toán học và tuổi trẻ.

DƯƠNG TẤN THÀNH ...
(lớp 10 chuyên toán ĐHTH ...

In tại Xí nghiệp in 75—77 Hàng Bồ Hà Nội. Số in 34/80. Chỉ số: 12884
In xong ngày 30-4-1980; gửi lưu chiểu tháng 5-1980.