TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

Số 112
1
1980

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

...iên: NGUYỄN CẢNH TOÀN
...: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG
Dây nói: 52825

VỀ PHƯƠNG PHÁP XUỐNG THANG

PHAN ĐỨC THÀNH

...người đều biết điều khẳng định của P.Fecma rằng với n nguyên $\geqslant 3$ phương trình

$$x^n + y^n = z^n \qquad (1)$$

...có nghiệm nguyên dương (mệnh đề đó ...được gọi là Định lý lớn Fecma).

...đầu Fecma đã quả quyết rằng «ông đã ...được cách chứng minh kỳ lạ định lý lớn ..., nhưng ông không viết vì không đủ chỗ» ...chú đó Fecma viết trên lề cuốn sách của ...ng). Cho đến nay Định lý lớn Fecma vẫn ...được chứng minh ở dạng tổng quát (và ...không phủ định được). Định lý lớn Fecma ...chứng minh với các số mũ riêng biệt hay ...nhóm số mũ, chẳng hạn với mọi $n \leqslant 4002$. ...lý lớn Fecma hiện nay vẫn là vấn đề rất ...vì việc giải quyết đòi hỏi phải sáng lập ...nhiều *phương pháp mới*.

...ương pháp chứng minh sẽ giới thiệu trong ...này (thường được gọi là phương pháp xuống ...) có cơ sở vững chắc để nhiều người nghĩ ...đó chính là cách chứng minh mà Fecma ...ng «nhưng ông không viết vì không đủ ...». Nhưng điều quan trọng muốn đề cập đến ...bài này là phương pháp xuống thang còn ...phương pháp có hiệu quả để giải một lớp khá ...những bài toán liên quan đến *phương trình nguyên*. Sau đây xin giới thiệu một số bài toán điển hình được giải bằng phương pháp xuống thang.

Bài toán 1. (Định lý lớn Fecma khi $n = 4$).

Chứng minh rằng phương trình Fecma

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (2)$$

không có nghiệm nguyên x, y, z, $xyz \neq 0$.

Trước khi chứng minh định lý trên, ta sẽ chứng minh một định lý mạnh hơn, cụ thể là

Định lý. Phương trình

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (3)$$

không có nghiệm nguyên x, y, z, $xyz \neq 0$.

Dễ dàng nhận thấy rằng từ sự không tồn tại nghiệm nguyên x, y, z, $xyz \neq 0$ của phương trình (3) suy ra sự không tồn tại nghiệm nguyên của phương trình (2). Thực vậy nếu $[x, y, z]$ là nghiệm của (2) thì $[x, y, z^2]$ là nghiệm của (3).

Bây giờ ta chú ý rằng nếu phương trình (3) có nghiệm nguyên x, y, z, $xyz \neq 0$ thì có thể giả thiết rằng các số x, y, z từng cặp nguyên tố cùng nhau. Thực vậy nếu x, y (thuộc nghiệm) có ước chung lớn nhất $d > 1$ thì

$$x = dx_1,\ y = dy_1,\ (x_1, y_1) = 1$$

Sau khi chia cả hai vế của (3) cho d^4 ta có

$$x_1^4 + y_1^4 = (z/d^2)^2 = z_1^2 \quad (4)$$

Nhưng x_1 và y_1 nguyên nên $z_1 = z/d^2$ cũng nguyên.

Nếu z_1 và y_1 có ước chung $k > 1$ thì $x_1^2 \vdots k$ có nghĩa là x_1 và k không thể nguyên tố cùng nhau. Như vậy chúng ta đã chứng minh được rằng nếu tồn tại nghiệm nguyên khác không của (3) thì tồn tại nghiệm nguyên khác không và nguyên tố cùng nhau. Do đó ta cần chứng minh rằng phương trình (3) không có nghiệm nguyên khác không và từng cặp nguyên tố cùng nhau. Để đơn giản cách nói ta quy ước: khi nói phương trình (3) có nghiệm thì điều đó có nghĩa là nó có nghiệm nguyên dương và từng cặp nguyên tố cùng nhau.

Dễ dàng nhận thấy rằng tất cả các nghiệm của phương trình

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (5)$$

nguyên dương, từng cặp nguyên tố cùng nhau thì x, y chẵn lẻ khác nhau, nếu x lẻ thì nghiệm có dạng:

$$x = uv,\ y = (u^2 - v^2)/2,\ z = (u^2 + v^2)/2 \quad (6)$$

trong đó u, v – mọi số dương, lẻ, nguyên tố cùng nhau. Nếu đặt

$$(u+v)/2 = a,\ (u-v)/2 = b \quad (7)$$

hay

$$u = a + b,\ v = a - b \quad (8)$$

ta có dạng khác của (6)

$$x = a^2 - b^2,\ y = 2ab,\ z = a^2 + b^2 \quad (9)$$

trong đó a, b – nguyên tố cùng nhau bất kỳ và chẵn lẻ khác nhau và $x > 0$.

Nếu (3) có nghiệm $[x_0, y_0, z_0]$ thì

$$(x_0^2)^2 + (y_0^2)^2 = z_0^2.$$

Từ đó $[x_0^2, y_0^2, z_0]$ là nghiệm của (5). Khi đó tồn tại a, b $(a > b)$ nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau sao cho

$$x_0^2 = a^2 - b^2,\ y_0^2 = 2ab,\ z_0 = a^2 + b^2 \quad (10)$$

Do bình phương một số lẻ chia cho 4 dư 1 nên từ

$$x_0^2 = a^2 - b^2 \quad (11)$$

suy ra a lẻ, b chẵn. Vì a lẻ, $(a, b) = 1$ nên $(a, 2b) = 1$. Khi ấy từ đẳng thức $y_0^2 = 2ba$ suy ra

$$a = t^2,\ 2b = s^2 \quad (12)$$

trong đó t, s – nguyên. Từ (11) suy ra $[x_0^2, b, a]$ là nghiệm của (5). Có nghĩa là

$$x_0^2 = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ a = m^2 + n^2$$

trong đó m, n – nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau. Từ (12) ta có

$$mn = b/2 = (s/2)^2.$$

Từ đó theo tính nguyên tố cùng nhau c… n suy ra

$$m = p^2,\ n = q^2$$

trong đó p, q – nguyên khác không.

Vì $a = t^2$, $a = m^2 + n^2$ nên

$$p^4 + q^4 = t^2$$

Nhưng $z_0 = a^2 + b^2 > a^2$, do đó

$$0 < t = \sqrt{a} < \sqrt[4]{z_0} < z_0.$$

Sau khi đặt $p = x_1$, $q = y_1$, $t = z_1$ ta th… nếu tồn tại nghiệm $[x_0, y_0, z_0]$ thì c… tại nghiệm khác $[x_1, y_1, z_1]$ trong đó $0 <$ … Quá trình nhận được nghiệm đó của p… trình (3) có thể tiếp tục vô hạn và ta th… dãy các nghiệm

$$[x_0, y_0, y_0],\ [x_1, y_1, z_1], \ldots [x_n, y_n, z_n] \ldots$$

trong đó các số nguyên dương $z_0, z_1, \ldots, z_n$ … điệu giảm

$$z_0 > z_1 > \ldots > z_n > \ldots$$

Nhưng các số nguyên dương không thể l… dãy đơn điệu giảm vô hạn vì trong dãy đó … thể có quá z_0 số hạng. Ta đi đến mâu … do giả thiết rằng phương trình (3) có ít n… nghiệm nguyên x, y, z, $xyz \neq 0$. Điều đó c… tỏ rằng phương trình (3) không có nghiệ…

Thực chất của phương pháp chứng min… ta đã tiến hành là: *xuất phát từ một n… xây dựng dãy vô số nghiệm có tính chấ… dương, giảm vô hạn*. Ta gọi đó là *phương… xuống thang*.

Bằng phương pháp xuống thang ta c… chứng minh được rằng phương trình

$$x^{4n} + y^{4n} = z^{2n}$$

không có nghiệm nguyên.

Bài toán 2. Chứng minh rằng phương… sau không có nghiệm nguyên

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu.$$

Giải: Giả sử phương trình có nghiệm … z, u). Vì $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ chẵn nên trong c… x, y, z, u có một số chẵn các số lẻ (hoặc 0 h… hoặc 4).

Nếu tất cả đều lẻ thì $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \vdots 4$ … khi đó $2xyzu$ không chia hết cho 4. Nếu c… hai số lẻ thì $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ không chi… cho 4, trong khi đó $2xyzu \vdots 4$. Vậy tất c… số x, y, z, u phải chẵn

$$x = 2x_1,\ y = 2y,\ z = 2z_1,\ u = 2u_1$$

Thay chúng vào phương trình đã cho ta đư…

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1.$$

... lý luận tương tự như trên tất cả các ... của phương trình này phải chẵn

$x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $u_1 = 2u_2$.

... đi đến

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32\, x_2 y_2 z_2 u_2.$$

... cách tổng quát, xuất phát từ nghiệm ... u) bằng phương pháp xuống thang ta đi ... phương trình

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 + u_s^2 = 2^{2s+1}\, x_s y_s z_s u_s$$

... đó $x_k = 2x_{k+1}$, $y_k = 2y_{k+1}$, $z_k = 2z_{k+1}$, $u_k = 2u_{k+1}$ $(k \geqslant 1)$, tức là với mọi s tự nhiên: ... $y/2^s$, $z/2^s$, $u/2^s$ là các số nguyên.

... là điều không thể có được với các x, y, ... tự nhiên.

Bài toán 3. Chứng minh rằng phương trình ... không có nghiệm nguyên

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = u^4$$

Giải: Giả sử phương trình có nghiệm nguyên ... z, u] với x có giá trị nhỏ nhất trong ... những giá trị có thể của nó.

Từ phương trình đã cho ta nhận thấy u chẵn ... $2u_1$.

... nghiệm này vào phương trình và chia 2 ... có

$$4x^4 + 2y^4 + z^4 = 8u_1^4.$$

Từ phương trình suy ra z chẵn $z = 2z_1$.

... vào phương trình ta đi đến

$$2x^4 + y^4 + 8z_1^4 = 4u_1^4.$$

Tương tự $y = 2y_1$

$$\Rightarrow x^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2u_1^4$$

Cuối cùng $x = 2x_1$

$$\Rightarrow 8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = u_1^4$$

Vậy $[x_1, y_1, z_1, u_1]$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Nhưng ở nghiệm này $x_1 < x$, mâu thuẫn với cách chọn nghiệm ban đầu có x bé nhất.

Bài toán 4. Cho một tờ giấy kẻ ô vuông. Chứng minh rằng với $n \neq 4$ không tồn tại đa giác đều n cạnh có đỉnh tại các điểm nút.

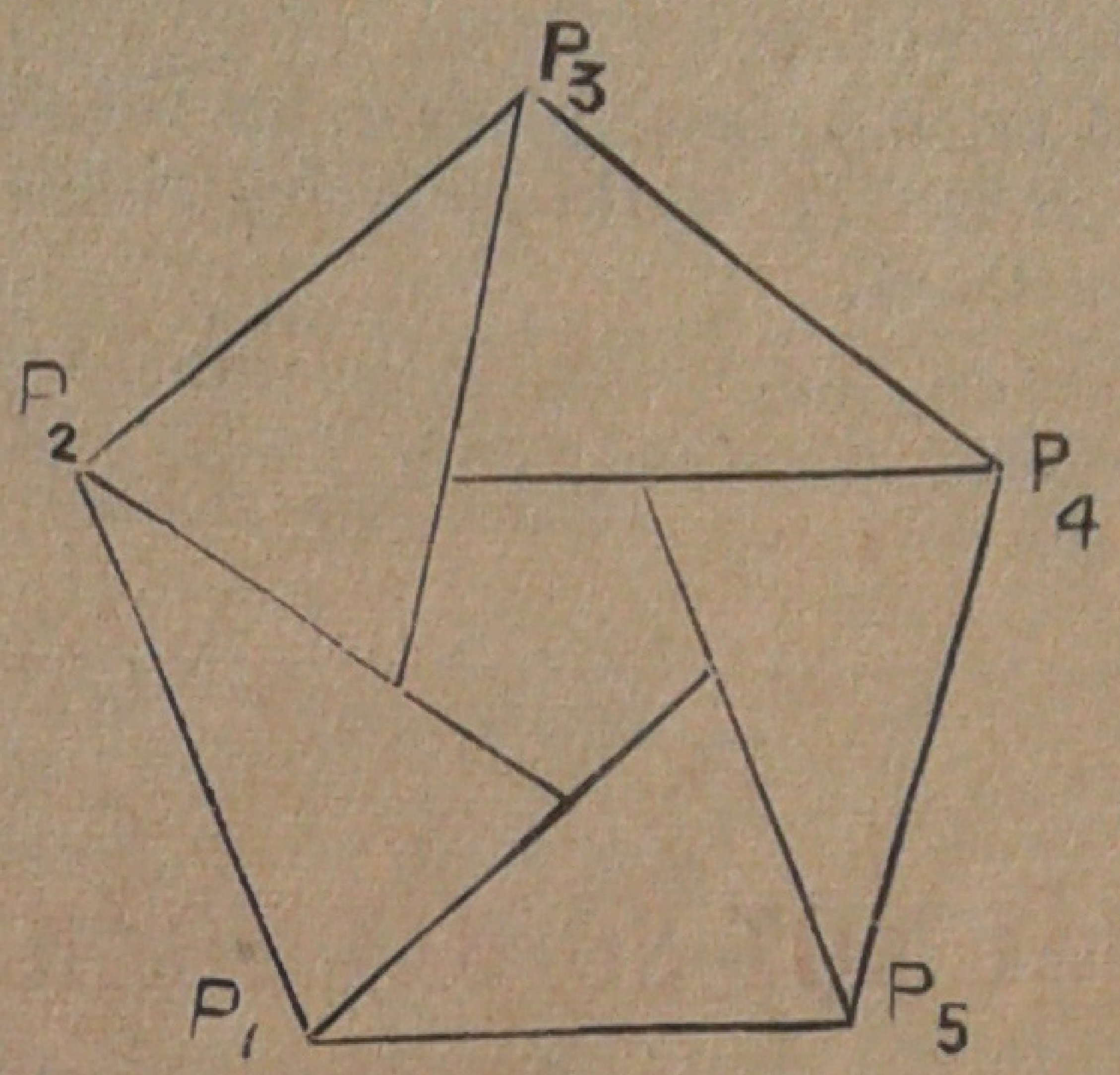
Giải: Trước hết ta chứng minh điều khẳng định khi $n = 3$ tức là không tồn tại tam giác ... có đỉnh tại các nút. Thực vậy giả sử a là cạnh của tam giác đó. Khi ấy a^2 là số nguyên theo định lý Pitago. Diện tích của tam giác này bằng $a^2\sqrt{3}/4$ là một số vô tỷ.

Mặt khác diện tích của mọi đa giác có đỉnh tại các nút là số hữu tỷ. Vậy đi đến mâu thuẫn.

Điều khẳng định trên cũng được chứng minh cho trường hợp $n = 6$ vì mọi tam giác đều có thể nội tiếp trong một lục giác đều tại các đỉnh của nó.

Bây giờ ta chứng minh điều khẳng định trên cho trường hợp $n \neq 3, 4, 6$.

Giả sử $P_1P_2 \ldots P_n$ là một đa giác đều n cạnh có đỉnh ở các nút. Xuất phát từ các điểm $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ta đặt các vectơ tương ứng bằng các vectơ $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$, ..., $\overrightarrow{P_1P_2}$ (xem hình vẽ).



Các điểm mới lại rơi vào các nút và lập thành đa giác đều n cạnh trong đa giác đã cho. Đối với đa giác đều n cạnh mới ta cũng làm như trên. Chú ý rằng bình phương độ dài cạnh của đa giác n cạnh là một số nguyên.

Theo cách xây dựng của ta các số nguyên đó luôn luôn giảm xuống mãi! Đó là điều không thể được.

Phương pháp xuống thang còn cho phép ta giải một số bài toán về hình học tổ hợp. Chẳng hạn

Bài toán 5. Có thể chia cắt một khối lập phương thành một số lập phương nhỏ khác nhau hay không?

Giải: Trước hết ta hãy nêu lên một chú ý dĩ nhiên: nếu một hình vuông P phân chia được thành một số hữu hạn hình vuông khác nhau thì hình vuông bé nhất không dính với biên của hình vuông P.

Bây giờ ta giả thiết rằng có thể chia cắt lập phương Q thành các lập phương khác nhau Q_i và gọi P là một trong những mặt bên của Q.

Các lập phương Q_i dính với P tạo nên một sự phân chia P thành các hình vuông từng cặp khác nhau. Gọi P_1 là hình vuông bé nhất trong các hình vuông đó và Q_1 là lập phương tương ứng. P_1 không dính với biên của P do đó bị bao bọc bởi các hình vuông lớn hơn. Các lập phương tương ứng tạo thành một «cái giếng» có Q_1 nằm trong đó.

Giả sử P_1 là mặt đối diện với P_1 của lập phương Q_1. Các lập phương dính với P_1' tạo nên một sự phân hoạch P_1' thành một số hình vuông khác nhau. Gọi P_2 là hình vuông bé nhất trong chúng.

Vì P_2 đặt trong P_1' nên những lập phương bao bọc lập phương Q_2 lớn hơn Q_2 và tạo thành «giếng». Tiếp tục quá trình xây dựng đó nhận được một «cái tháp» vô hạn gồm tất cả các lập phương bé dần. Đó là điều không thể có được.

Để kết thúc bài này chúng tôi xin giới thiệu một số bài tập có thể giải bằng phương pháp xuống thang.

1. Chứng minh rằng không thể biểu diễn số 7 dưới dạng tổng bình phương của 3 số hữu tỷ.

Hướng dẫn: Bài toán đưa về phương trình nguyên

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7u^2.$$

2. Chứng minh rằng các phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz,$$
$$x^4 + 2y^4 = z^2$$

không có nghiệm nguyên dương.

3. Giải các phương trình nguyên

a) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0,$

b) $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0.$

Hướng dẫn: Bài a) Dùng tính chia hết

Bài b) Dùng tính chia hết

4. Chứng minh rằng số có dạng ... (trong đó k và n — tự nhiên) không thể chính phương và không thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai hay ba bình phương của số nguyên.

GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC BẰNG PHƯƠNG PHÁP QUĨ TÍCH VÀ BIẾN ĐỔI ĐỒNG DẠNG

VŨ ĐÌNH HOÀNG

Sau đây sẽ trình bày một phương pháp giúp ta giải ngắn gọn các bài toán loại sau đây:

Bài toán 1 (đề thi tuyển học sinh thi Quốc tế 1974).

Cho tam giác ABC, dựng ra ngoài trên hai cạnh của tam giác đó hai tam giác vuông ACE và BCD sao cho $\widehat{ECA} = \widehat{DBC} = 30^\circ$, $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$. F là điểm trên AB thỏa mãn: $AF = AB/4$. Tìm các góc của tam giác DEF.

Bài toán 2 (đề thi Quốc tế lần thứ 17—1975).

Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác ấy các tam giác BCP, CAQ và ABR sao cho:

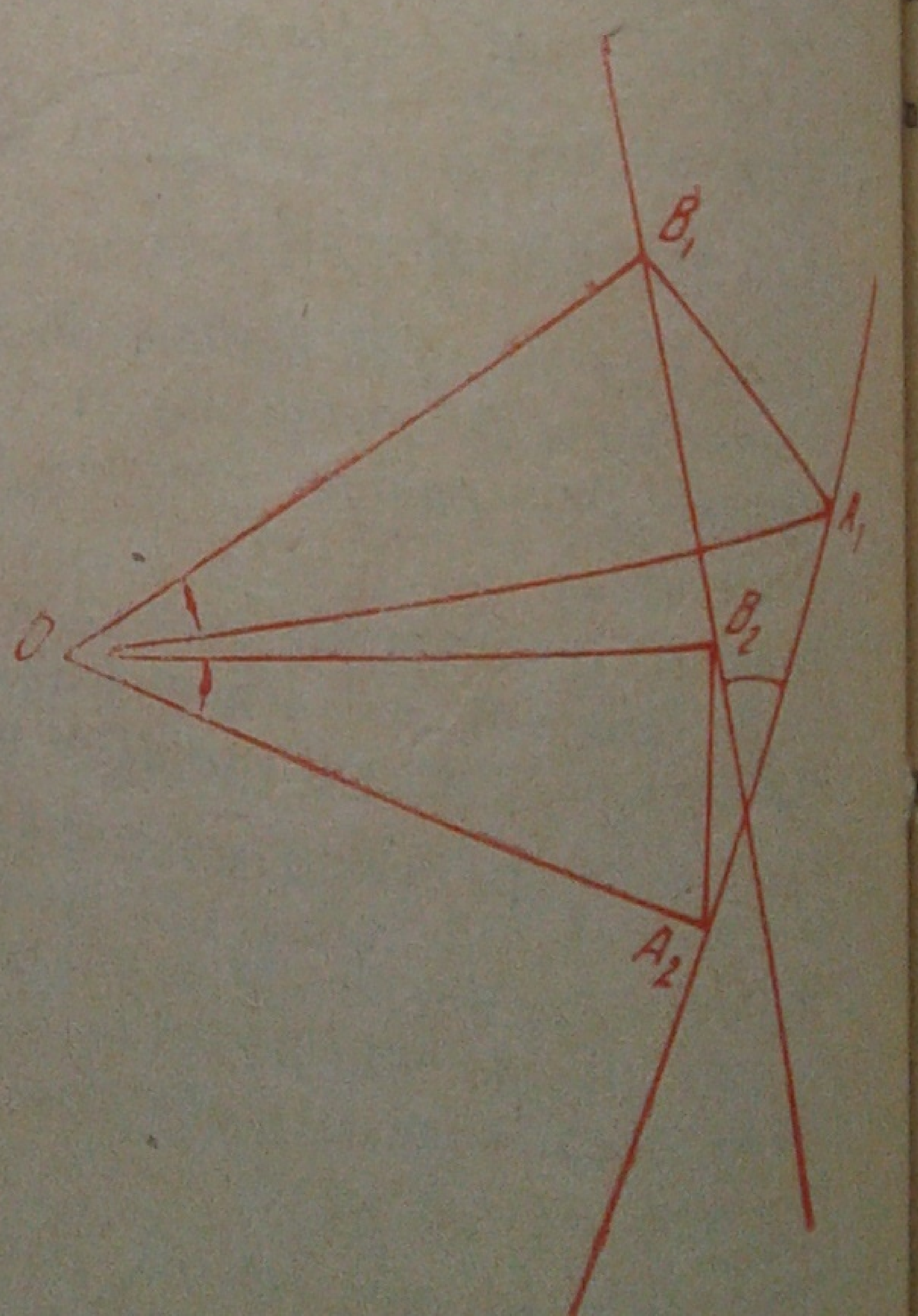
$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^\circ,$$
$$\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^\circ,$$
$$\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^\circ.$$

Chứng minh rằng tam giác QRP vuông cân.

Rõ ràng đây là hai bài toán mà thoạt đầu ta khó tìm ra hướng giải quyết. Thế nhưng chúng lại có cùng một đường lối giải khá đặc biệt là «dùng toán quĩ tích và biến đổi đồng dạng» để giải.

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định lí 1. Tam giác OAB giữ nguyên ... và hướng sao cho O cố định, thì: Nếu A ...



Hình 1

...ường thẳng thì quĩ tích của B cũng là ...ường thẳng.

...ai vị trí của tam giác $OA_1B_1 \backsim OA_2B_2$ ...thỏa mãn điều kiện của định lí, dễ thấy ...$A_2 \backsim OB_1B_2$.

...lấy $OA_3B_3 \backsim OA_1B_1$ thì sẽ có:

...OB_iB_j $(\forall i \neq j)$ Từ đó suy ra: nếu A_i ...) thẳng hàng thì B_j $(j = 1,2,...)$ cũng ...hàng.

...: Giả sử A chạy trên đường thẳng a, B chạy trên đường thẳng b.

...iệu: (x, y) là góc có hướng mà cạnh đầu ...cuối là y, ta sẽ có:

$(a, b) = (OA, OB)$.

...bài này kí hiệu (x, y) là để phân biệt góc ...âm, ví dụ $(x, y) = 45^\circ$ thì $(y, x) = -45^\circ$ ...ông xét các giá trị suy rộng của một góc ...ng.

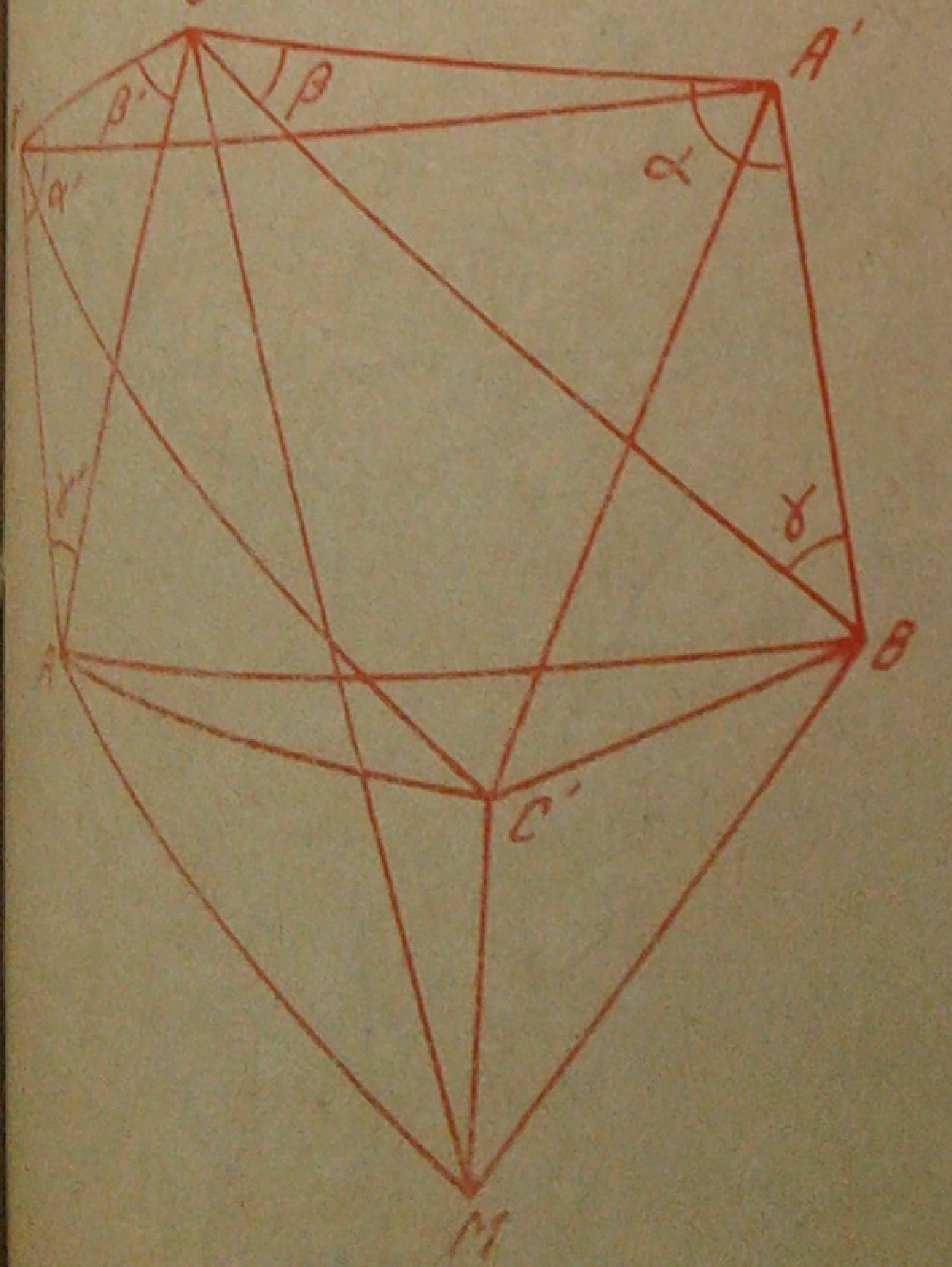
...phần chứng minh của định lí 1 ta dễ ...uy ra:

...lí 2. Tốc độ thẳng của A và B luôn tỉ ...nhau bằng tỉ số đồng dạng, tức là:

$B_1B_2/A_1A_2 = k$ (hằng số).

...lý 3. (Bài toán tổng quát).

...tam giác ABC. Dựng các tam giác ACB', ...phía ngoài tam giác đó. C' là điểm sao cho ...M để tam giác $AC'M$ và $BC'M$ đồng dạng và ...hướng theo thứ tự với các tam giác $AB'C$ và ... Hãy tính các góc của tam giác $A'B'C'$ theo ... để cho hai tam giác ACB' và BCA'. Chứng tỏ ...trị đó không phụ thuộc vào tam giác ABC. ...hiệu các góc của hai tam giác ACB' và BCA' ...hình vẽ (h. 2).



Hình 2

Theo giả thiết về các cặp tam giác ACB' và AMC', BCA' và BMC' là đồng dạng và cùng hướng nên theo định lí 1 nếu cho C chạy trên đường thẳng nối M và C, $C \equiv M$ thì $A' \equiv B' \equiv C'$. Vậy theo chú ý ở định lí 1 sẽ được:

$$\left.\begin{array}{l}(C'A', CM) = \gamma \\ (CM, C'B') = \gamma'\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$(C'A', C'B') = \gamma + \gamma' \qquad (*)$$

Mặt khác theo định lí 2 và định lí hàm số sin:

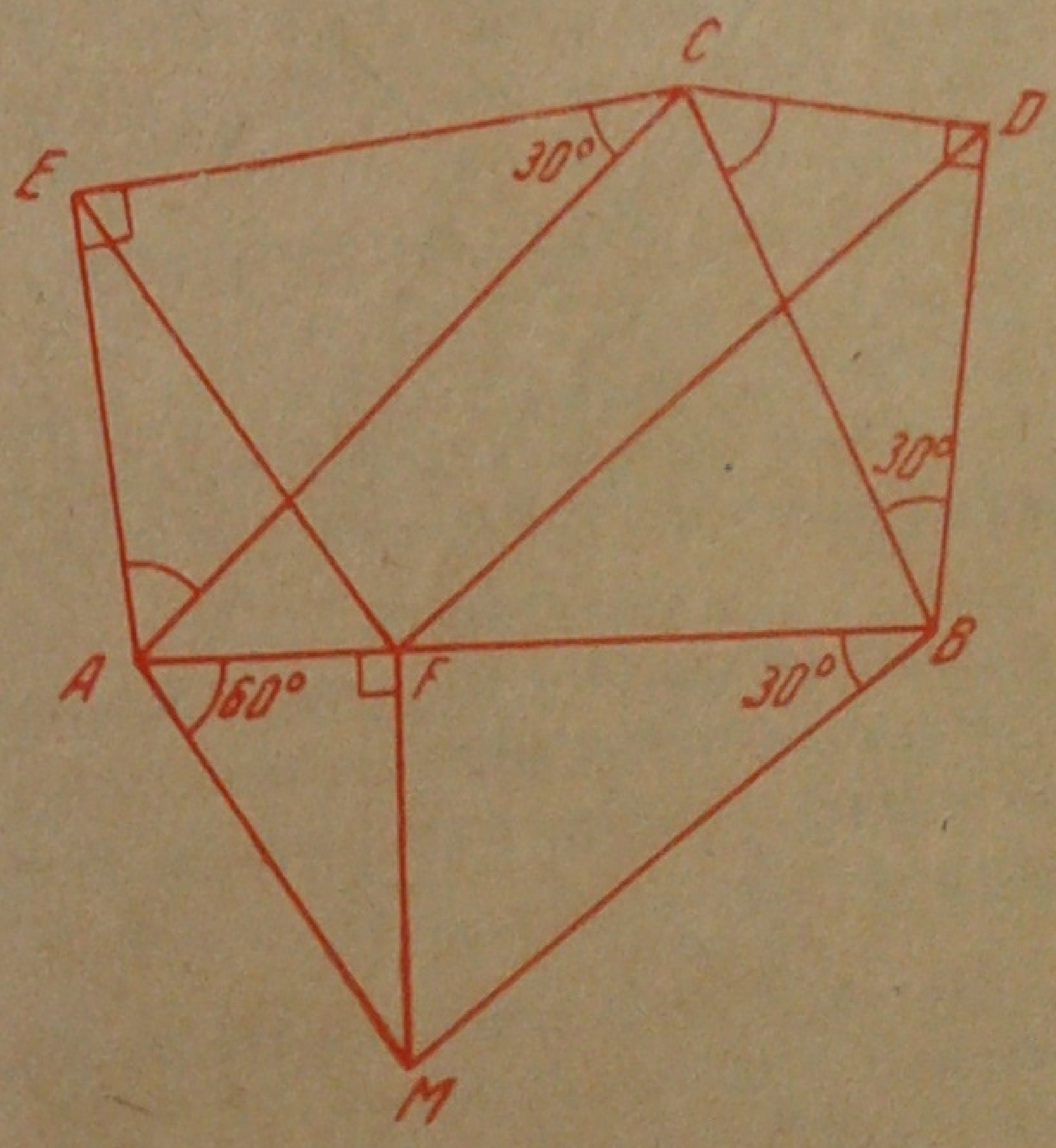
$$\left.\begin{array}{l}C'A'/CM = BA'/BC = \sin\beta/\sin\alpha \\ CM/C'B' = AC/AB' = \sin\alpha'/\sin\beta'\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$C'A'/C'B' = \sin\beta \sin\alpha'/\sin\alpha \sin\beta' \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) sẽ cho phép ta tính được các góc của tam giác $A'B'C'$.

ÁP DỤNG

Bài toán 1 (đã nói ở trên).

Dựng về phía ngoài tam giác ABC, tam giác MAB sao cho: $\widehat{MAB} = 60^\circ$, $\widehat{MBA} = 30^\circ$ (h. 3)



Hình 3

Theo cách dựng thì:

$$AM = AB/2 \Rightarrow AM = AF$$
$$\Rightarrow MF \perp AB.$$

Như vậy ta có điểm M thỏa mãn điều kiện định lí 3. Tức là có M để các cặp tam giác vuông CAE và MAF, BCD và BMF đồng dạng và cùng hướng.

Hay nếu $C \equiv M$ thì $D \equiv E \equiv F$.

Vậy: $(FD, FE) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ và

$FD/FE = \sin 60^\circ \sin 90^\circ/\sin 90^\circ \sin 30^\circ = \sqrt{3} = \mathrm{tg}60^\circ$

Như vậy tam giác DEF là vuông và $\widehat{DEF}=60^\circ$, $\widehat{EDF}=30^\circ$.

Bài toán 1'. Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài trên hai cạnh của tam giác đó các tam giác vuông ACE và BCD sao cho $\widehat{ECA}=\beta$, $\widehat{DBC}=\alpha$, $\widehat{D}=\widehat{E}=90^\circ$.

F là điểm trên AB thỏa mãn:

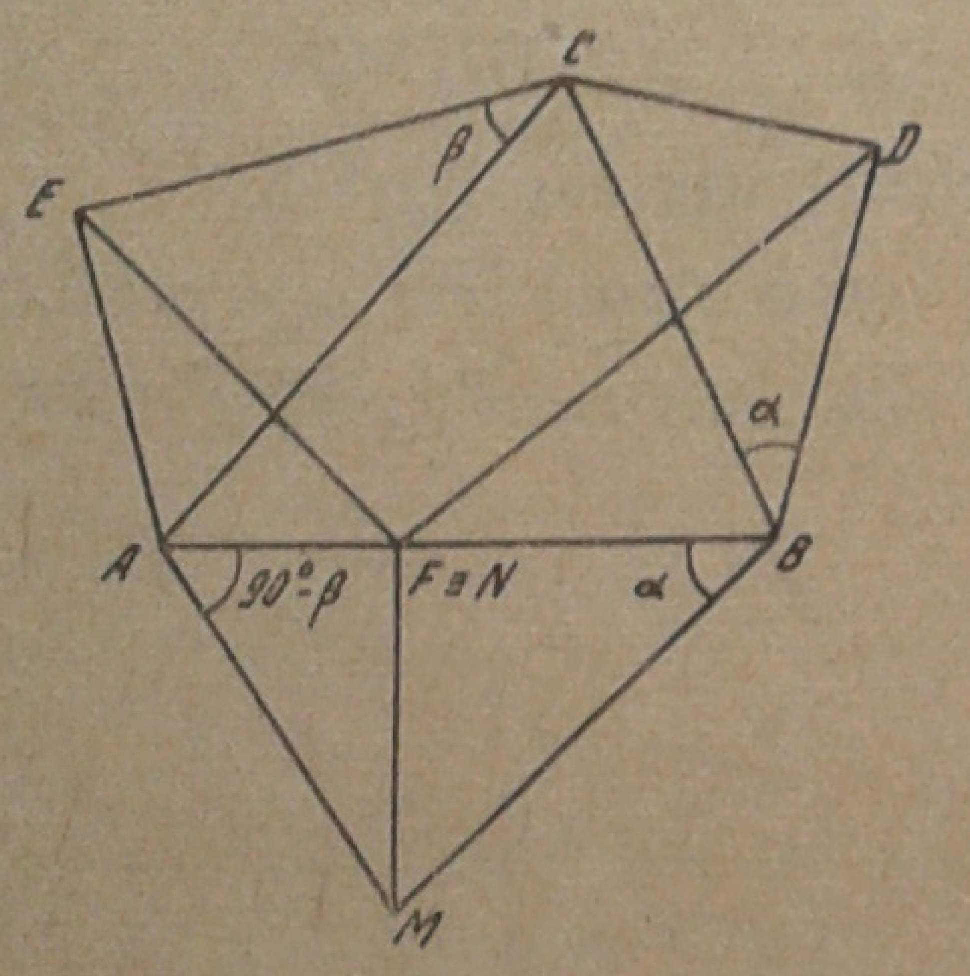
$$AF = AB \sin\alpha \sin\beta/\cos(\beta-\alpha)$$

Hãy xác định hình dạng tam giác DEF.

Để giải bài toán ta cần tìm điểm M thỏa mãn điều kiện định lí 3:

Dựng về phía ngoài tam giác ABC, tam giác AMB sao cho: $\widehat{ABM}=\alpha$, $\widehat{BAM}=90^\circ-\beta$.

Kẻ $MN \perp AB \Rightarrow \widehat{AMN}=\beta$ (h. 4)



Hình 4

Một mặt có:

$$AN = MA\sin\beta \qquad (*)$$

Mặt khác: $AB/\sin(\beta+90^\circ-\alpha) = MA/\sin\alpha$

$\Rightarrow MA = AB\sin\alpha/\cos(\beta-\alpha)$.

Thay giá trị vừa tính được của MA vào (*) ta sẽ được:

$$AN = AF \Rightarrow F \equiv N$$

Như vậy rõ ràng là nếu $C\equiv M$ thì $D\equiv E\equiv F$. Theo định lí 3 ta thu được:

$(FD, FE) = 90^0+\alpha-\beta$

và $ED/FE = \sin(90^0-\alpha)\sin 90^\circ/\sin 90^\circ \sin\beta$
$= \cos\alpha \sin\beta$.

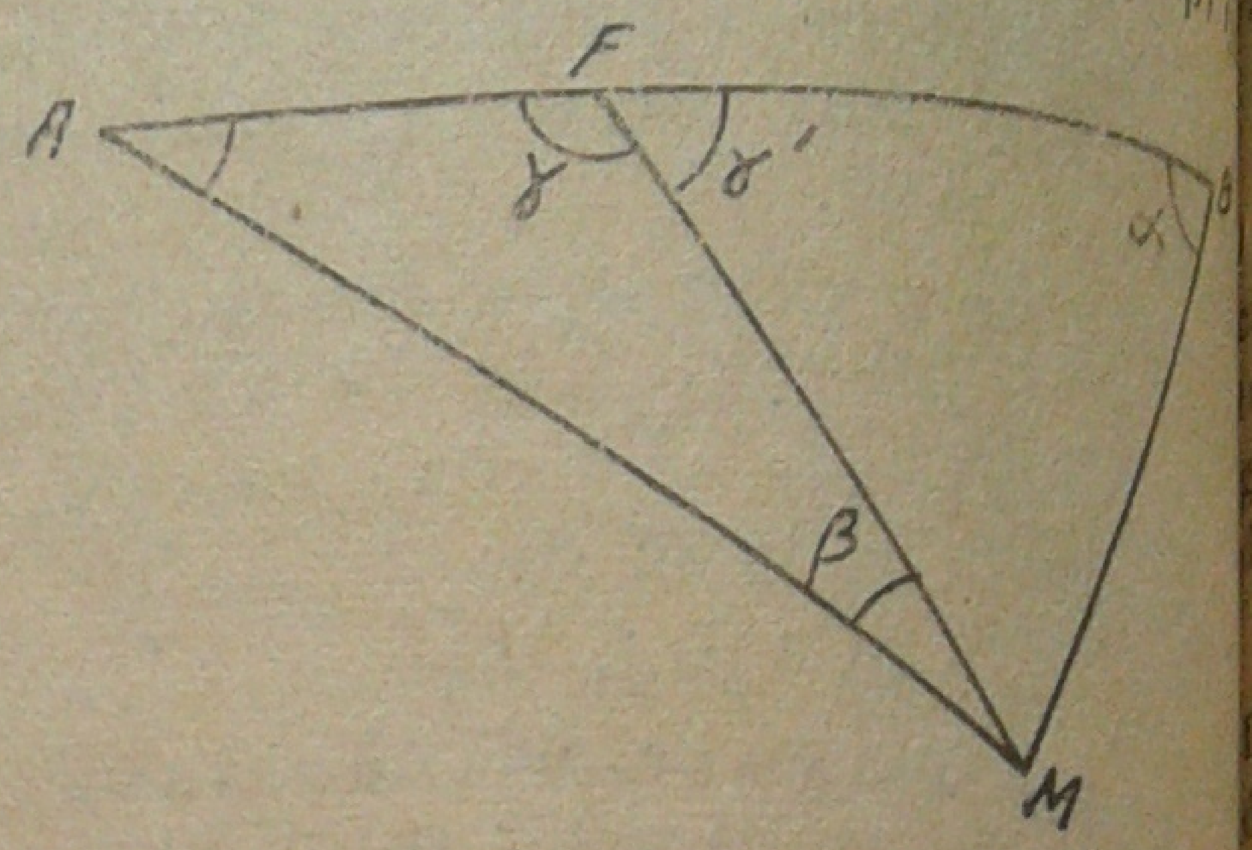
Nếu $\alpha=\beta=30^\circ$ thì ta lại trở về bài toán 1. Mặc dù kết quả đạt được đã «rộng» hơn, nhưng vẫn còn một yêu cầu khá «nặng» là $\widehat{D}=\widehat{E}=90^\circ$. Có thể giảm nhẹ yêu cầu đó được không. Từ suy nghĩ đó ta đi đến bài toán sau:

Bài toán 1''. Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài trên hai cạnh của tam giác đó, hai tam giác ACE và BCD sao cho $\widehat{ECA}=\beta$, $\widehat{DBC}=\alpha$, $\widehat{CEA}+\widehat{CDB}=180^\circ$.

Xác định F trên AB để tính được các góc của tam giác EFD.

Ta cũng được kết quả tương tự tổng quát. Kí hiệu $\widehat{CEA}=\gamma$, $\widehat{CDB}=\gamma'$. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện định lí 3 như sau:

Dựng ra phía ngoài tam giác ABC, tam giác ABM sao cho $\widehat{ABM}=\alpha$, $\widehat{BAM}=180^\circ-(\gamma+\beta)$



Hình 5

Kẻ MF sao cho $\widehat{AMF}=\beta$ cắt AB ở F. Ta dễ dàng thấy $\widehat{MFA}=\gamma$ và $\widehat{MFB}=\gamma'$.

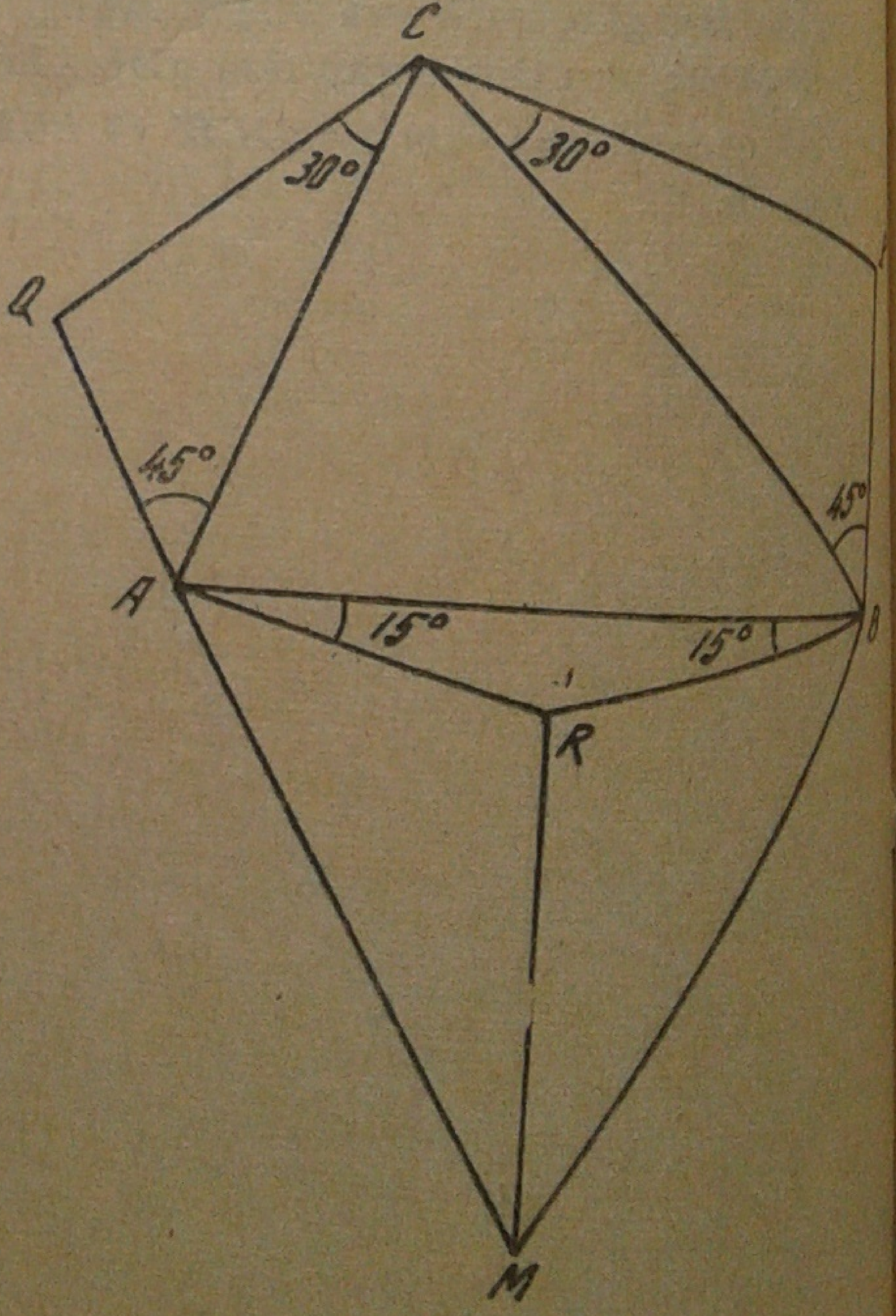
Xét các tam giác AFM, ABM, theo định lí số sin ta được

$AF/\sin\beta = AM/\sin\gamma = (AM/\sin\alpha)(\sin\alpha/\sin\gamma)$
$= [AB/\sin(\gamma-\alpha+\beta)](\sin\alpha/\sin\gamma)$

$\Rightarrow AF = AB\sin\alpha\sin\beta/\sin\gamma\sin(\gamma-\alpha$

Bài toán 2 (đề thi quốc tế 1975).

Dựng tam giác ABM đều ra phía ngoài tam giác ABC (h. 6).



Hình 6

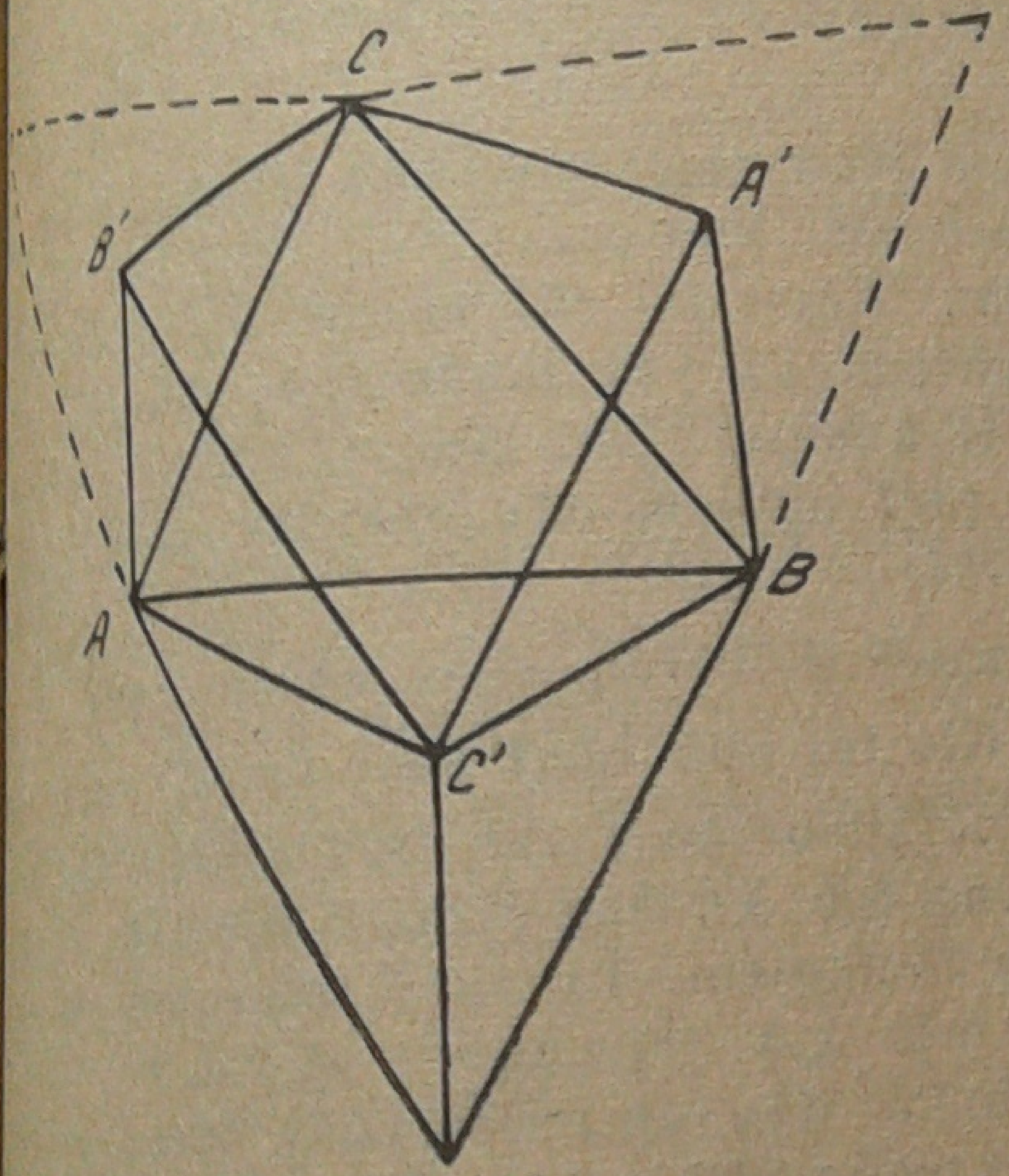
...ng ta nếu $C \equiv M$ thì $P \equiv Q \equiv R$.
...eo định lí 3:

$(RP, RQ) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$RP/RQ = \sin 30^\circ \sin 105^\circ / \sin 105^\circ \sin 30^\circ$
$= 1$ (đ.p.c.m).

...toán 3. Cho tam giác ABC. Dựng trên ...h $BC, CA\ AB$ phía ngoài tam giác đó ba ...ác đều. Chứng minh ba tâm của ba tam ...giác tạo thành ba đỉnh của một tam giác ...

...A', B', C' là các tâm của ba tam giác đều. ...y nếu $C \equiv M$ thì $A' \equiv B' \equiv C'$ (h. 7). Vậy ...thỏa mãn điều kiện định lí 3. Ta có ...$C'B) = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ và $C'A'/C'B' =$ ...$\sin 120^\circ/\sin 120^\circ \sin 30^\circ = 1$ (đ.p.c.m.).



Hình 7

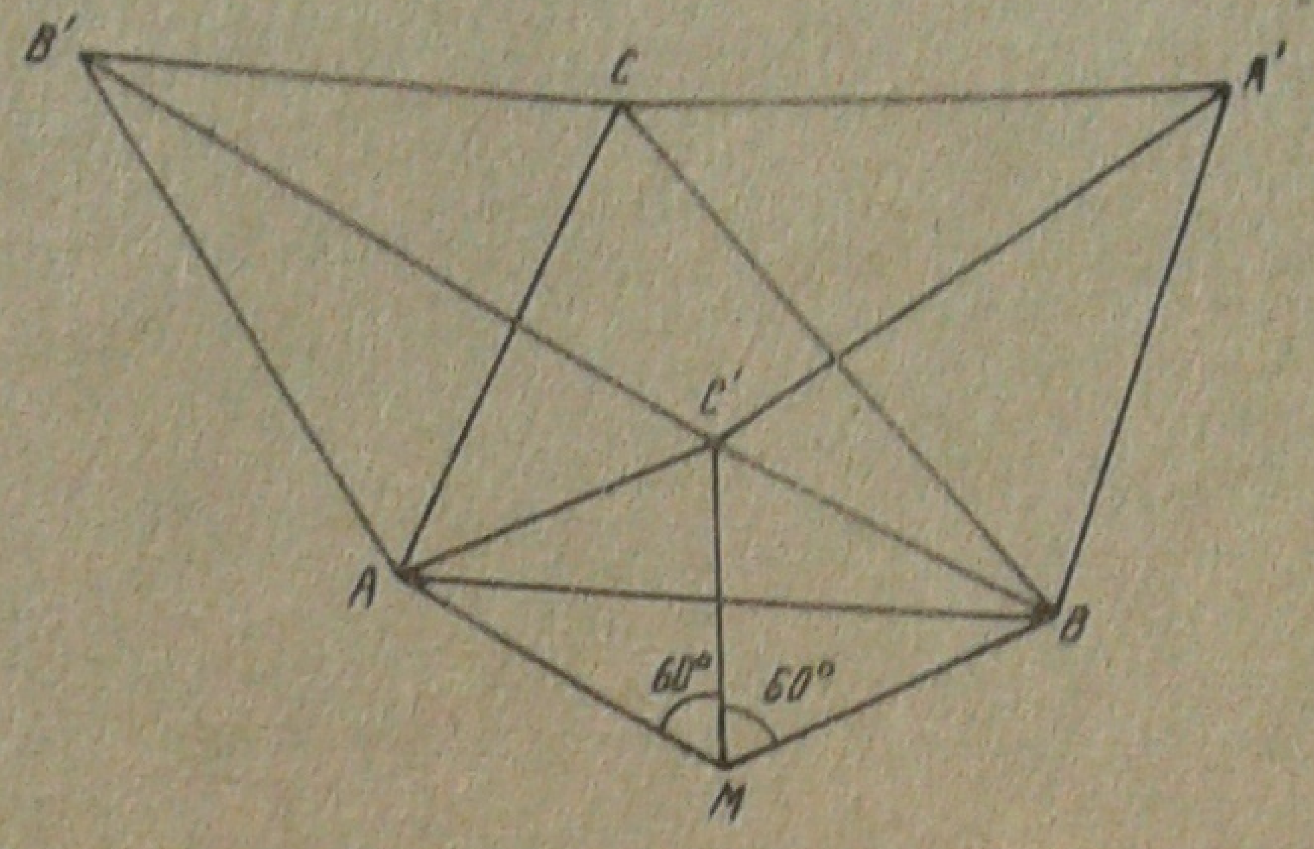
...ận xét: Vì vai trò của A', B', C' như nhau ...nếu $(C'A', C'B') = 60^\circ$ thì hai góc còn lại của ...giác $A'B'C'$ cũng bằng 60° mà không cần xét ...$C'A'/C'B'$ nữa.

...ài toán 4. Cho tam giác ABC. Dựng các ...giác đều ACB' và BCA' ra phía ngoài, tam ...cân ABC' về phía trong, sao cho: $\widehat{C'AB} =$ ...$= 30^\circ$.

...ứng minh rằng tam giác $A'B'C'$ cân, đỉnh C' ...$= 120^\circ$.

...tìm điểm M thỏa mãn điều kiện định lí 3 ...ựng tam giác cân ABM ra phía ngoài tam ...ABC, sao cho:

$$\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = 30^\circ \text{ (h. 8).}$$



Hình 8

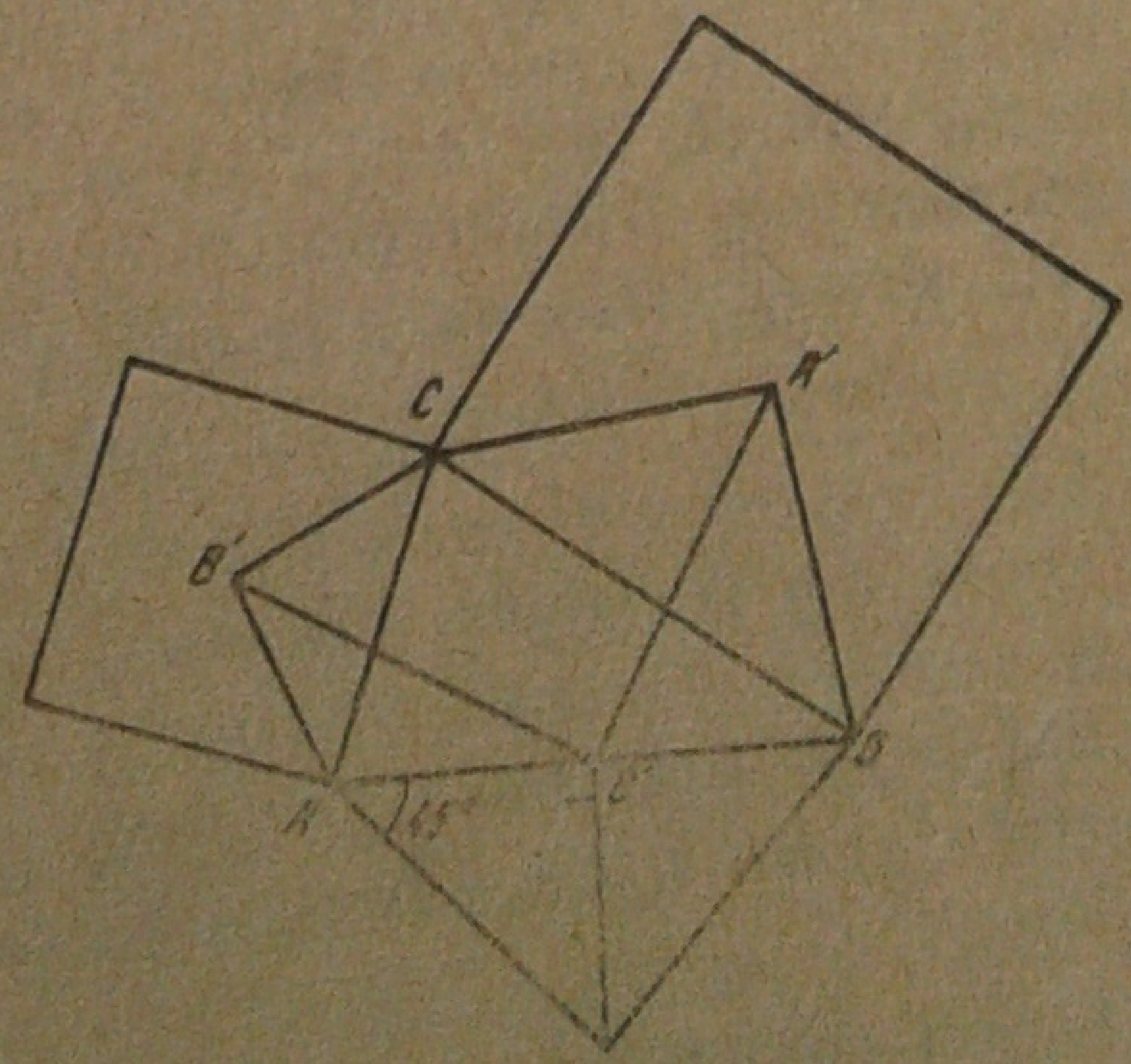
Bài toán 5. A', B' là tâm hai hình vuông dựng trên các cạnh BC, CA phía ngoài tam giác ABC. C' là điểm giữa AB. Chứng minh rằng tam giác $A'B'C'$ vuông cân đỉnh C'.

Ta dựng ra phía ngoài tam giác ABC, tam giác vuông cân ABM sao cho: $\widehat{ABM} = 90^\circ$ (h.9). Rõ ràng nếu $C \equiv M$ thì $A' \equiv B' \equiv C'$, tức là M thỏa mãn điều kiện định lý 3.

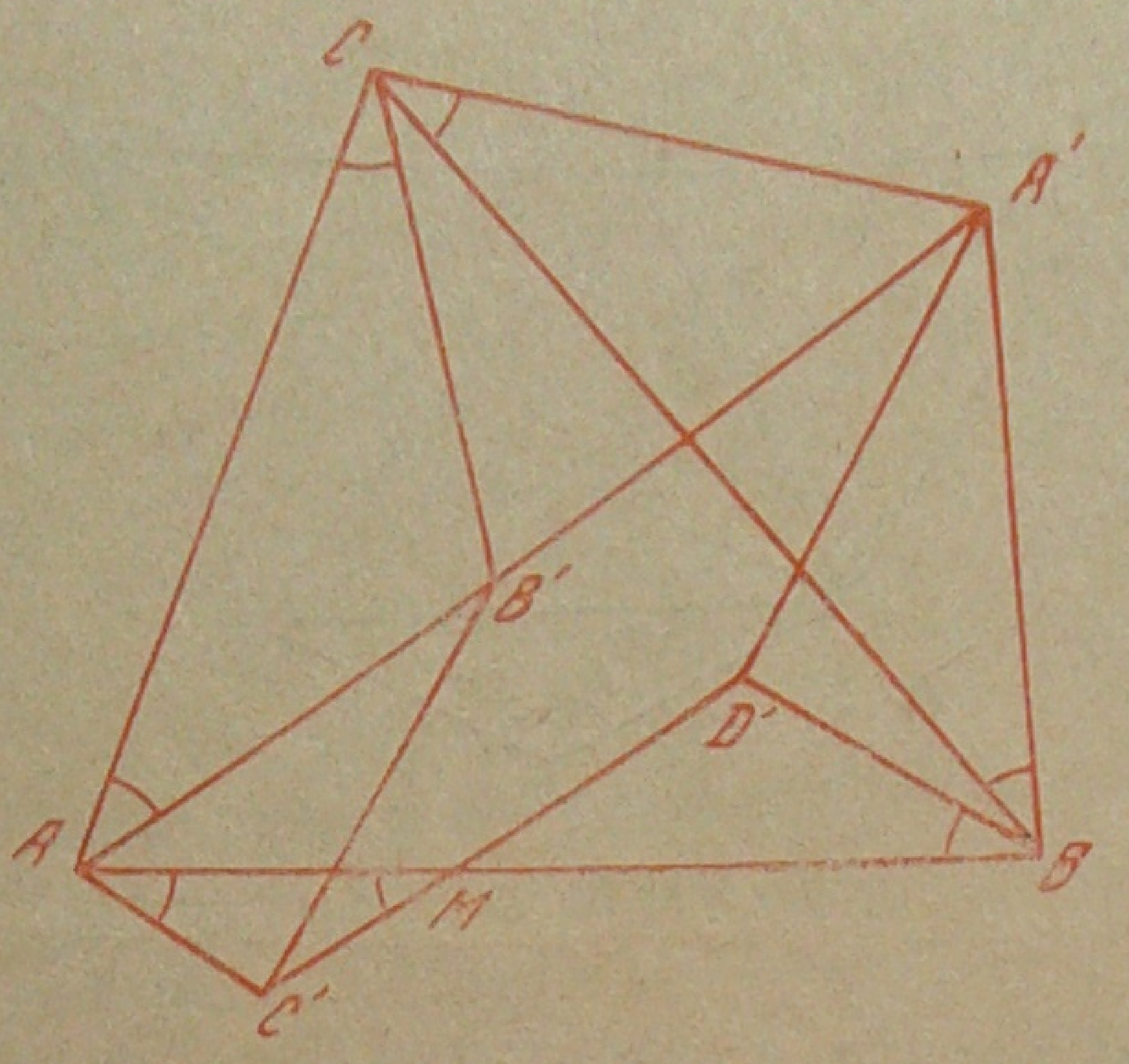
Bây giờ chúng ta hãy giải thêm bài toán sau đây:

Bài toán 6. Từ mỗi vị trí của C của tam giác ABC, ta dựng trên hai cạnh BC, CA các tam giác cân BCA', CAB' sao cho một về phía trong và một về phía ngoài tam giác ABC, và $\widehat{A'BC} = \widehat{A'CB} = 30^\circ$, $\widehat{ACB'} = \widehat{CAB'} = 30^\circ$. Chứng minh rằng đoạn thẳng $A'B'$ có độ dài không đổi và luôn song song với một đường thẳng cố định, khi C chạy trên nửa mặt phẳng đối với đường thẳng AB.

Giả sử tam giác cân BCA' phía ngoài, CAB' phía trong tam giác ABC. Lấy điểm M trên AB' dựng các tam giác cân MBD' phía trong, MAC' phía ngoài tam giác ABC sao cho $\widehat{D'MB} = \widehat{D'BM} = 30^\circ$, $\widehat{MAC'} = \widehat{AMC'} = 30^\circ$ (h.10). Dễ dàng thấy



Hình 9



Hình 10

$C \equiv M$ thì $A' \equiv D'$ và $B' \equiv C'$. Vậy theo ở định lí 1 ta được:

$$\left.\begin{aligned}(A'D', CM) &= (BA'BC) = 30^\circ \\ (CM, B'C') &= (AC, AB) = -30^\circ\end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow (A'D', CM) + (CM, B'C') = 0^\circ.$$

Hay là $(A'D', B'C') = 0^\circ$, nghĩa là $A'D' \parallel B'C'$.
Mặt khác theo định lí 2 ta lại được

$$\left.\begin{aligned}B'C'/CM &= A'B'/AC \\ CM/A'D' &= BC/BA'\end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow B'C'/A'D' = (AB'/AC)(BC/BA')$$

hay $\qquad B'C' = A'D'$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra điều phải chứng minh.

Bằng phương pháp trên đây, chúng ta có thể giải nhiều bài toán khác.

GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/109. *Cho phương trình*

$$(-1)^{[x]}(x - 2[x/2] - 1) = \{x\} - 1 \qquad (1)$$

Người ta lấy 1979 nghiệm không âm $x_1, x_2, \ldots x_{1979}$ của phương trình đó thỏa mãn điều kiện $x_{n+1} - x_n \geqslant 1/2$ ($n = 1, 2, \ldots, 1978$).

a. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của x_{1979}.

b. Khi x_{1979} nhận giá trị nhỏ nhất thì trong số 1979 nghiệm nói trên có thể có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm nguyên và có ít nhất bao nhiêu nghiệm nguyên?

Lời giải (của *Ngô Duy Ninh* – Quy Nhơn).

Ta tìm tất cả các nghiệm không âm của (1). Lấy $x = 2m + \alpha$ với $0 \leqslant \alpha < 1$ và m nguyên không âm thay vào (1) ta được.

$$(-1)^{2m}(2m + \alpha - 2m - 1) = \alpha - 1$$

hay $\qquad \alpha - 1 = \alpha - 1.$

Như vậy $x = 2m + \alpha$ với $0 \leqslant \alpha < 1$ và m nguyên không âm là nghiệm của (1).

Lấy $x = 2m + 1 + \alpha$ với $0 \leqslant \alpha < 1$ và m nguyên không âm thay vào (1) ta được:

$$(-1)^{2m+1}(2m + 1 + \alpha - 2m - 1) = \alpha - 1$$

hay $\alpha = 1/2$.

Vậy (1) còn có nghiệm $x = 2m + 1/2$ với m nguyên không âm.

a. Như vậy ta có nhận xét nếu lấy các nghiệm theo điều kiện $x_{n+1} - x_n \geqslant 1/2$ thì trong khoảng $[2m, 2(m+1))$ chỉ có thể lấy nhiều nhất 3 nghiệm. Do vậy muốn x_{1979} nhỏ nhất thì mỗi khoảng $[2m, 2(m+1))$ lấy 3 nghiệm và 1977 nghiệm đầu phải lấy trong khoảng [0, 1318):

$$x_{1977} = 1317{,}5, \quad x_{1978} = 1318, \quad x_{1979} = 1318{,}5$$

Giá trị nhỏ nhất phải tìm là $x_{1979} = 1318{,}5$.

b. Theo câu a thì 1977 nghiệm đầu phải nằm trong 659 khoảng $[2m, 2(m+1))$, mỗi khoảng lấy 3 nghiệm. Ta thấy trong mỗi khoảng có một giá trị nguyên là $2m$, vậy trong 1977 nghiệm đầu có nhiều nhất 659 nghiệm nguyên. Vậy trong 1979 nghiệm có nhiều nhất 660 nghiệm nguyên. Rõ ràng trong 1979 nghiệm có ít nhất 1 nghiệm nguyên là $x_{1978} = 1318$.

Bài 2/109. *Trên một bàn cờ cháu A. viết vào các số từ 1 đến 64 (mỗi ô viết một số khác nhau). Chứng minh rằng luôn luôn tìm được một ô trắng và một ô đen sao cho hiệu hai số ghi trên đó không bé hơn 5.*

Lời giải (của *Vũ Tám* – S.P. 10 + 3 Hà ...)

Có thể chứng minh luôn tìm được một ô trắng và một ô đen sao cho hiệu hai số ghi trên đó *không bé hơn 31*. Thật vậy gọi a_i là các số trong các ô trắng và b_i là các số viết trong ô đen. Ta có thể giả sử

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_{32},$$
$$b_1 > b_2 > \ldots > b_{32}$$

Ta có:

$$a_1 \geqslant a_2 + 1 \geqslant a_3 + 2 \geqslant \ldots \geqslant a_{32} + 31,$$
$$b_1 \geqslant b_2 + 1 \geqslant b_3 + 2 \geqslant \ldots \geqslant b_{32} + 31,$$

…$_1 + b_1 \geqslant a_{32} + b_{32} + 62.$

…$) + (b_1 - a_{32}) \geqslant 62.$

…suy ra ít nhất một trong hai số $(a_1 - b_{32})$, … không bé hơn 31 (đ.p.c.m.).

…3/109. *Cho bốn số tự nhiên a, b, c, d; … tổng của bốn số đó chia hết cho một … trong bốn số đó và một số bất kỳ trong … nhỏ hơn tổng của ba số còn lại. Chứng … có ít nhất hai số bằng nhau.*

…giải. Ta có thể giả thiết $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. … $= a + b + c + d$. Theo giả thiết $d < a +$ …

$$2d < p \leqslant 4d$$

…cũng theo giả thiết $p \vdots d$ nên chỉ xảy ra … trường hợp:

…$= 4d$, khi đó $a = b = c = d$ và điều kết … đúng.

…$= 3d$, khi đó $a + b + c = 2d$ (1)

…thiết ta suy ra

$$a + b + d = kc \quad (2)$$

$$a + c + d = tb \quad (3)$$

…không có số nào bằng nhau thì từ (1), … suy ra.

$$t > k > 2 \text{ hay } t \geqslant 4. \quad (*)$$

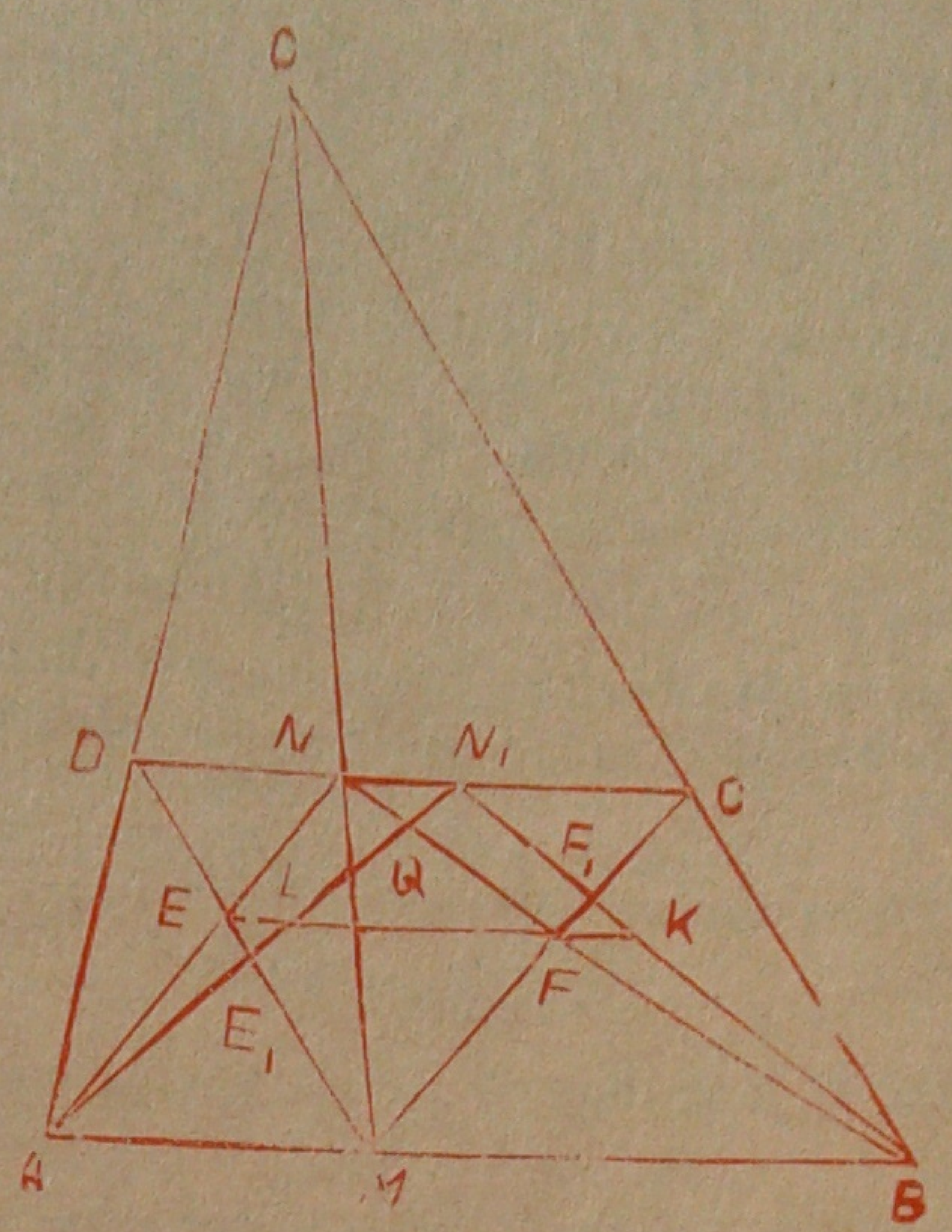
…cộng (1) với (2) với (3) thì lại được

$$3a = (k-2)c + (t-2)b$$
$$\geqslant c + (t-2)b$$
$$> a + (t-2)a$$
$$3a > ta - a$$
$$\Rightarrow 4a > ta$$
$$\Leftrightarrow t < 4, \text{ mâu thuẫn với } (*)$$

…có ít nhất hai số bằng nhau.

…4/109. *Trên đáy lớn AB của hình thang … cho điểm M. Tìm trên đáy CD một điểm … cho diện tích của tứ giác nhận được do các … thẳng AN, BN, CM, DM cắt nhau tạo thành … nhất.*

…giải. Gọi O là giao của AD và BC, MO cắt … N. Ta chứng minh N là điểm phải tìm. … sử AN, BN cắt DM, CM tương ứng ở E … F. N_1 là một điểm tùy ý trên DC khác … AN_1, BN_1 cắt DM, CM tương ứng ở E_1 và … chứng minh diện tích tứ giác MENF lớn … diện tích tứ giác $ME_1N_1F_1$ là xong. Dễ dàng … minh được $EF \parallel AB$. Giả sử đường thẳng … EF cắt AN_1 và BN_1 tương ứng ở L và K. … dàng chứng minh được $EL = FK$. Do đó



diện tích ENN_1L bằng diện tích FNN_1K. Từ đó nếu gọi Q là giao của AN_1 và BN ta sẽ chứng minh được diện tích EF_1QN lớn hơn diện tích QN_1F_1F. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5/109. *Tìm nghiệm nguyên dương của hệ bất phương trình sau*

$$\begin{cases} 2^x - |y^2 - y| + 1 > 0 \\ 2^x + |y - 1| < 5. \end{cases}$$

Lời giải (của nhiều bạn). Vì $y \geqslant 1$ nên $y^2 - y \geqslant 0$ và $y - 1 \geqslant 0$, do đó chỉ cần tìm nghiệm nguyên dương của hệ:

$$\begin{cases} 2^x - y^2 + y + 1 > 0 & (1) \\ 5 > 2^x + y - 1 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) vế với vế ta được

$$y^2 < 7 \Rightarrow y = 1, 2.$$

— Với $y = 1$, thay vào (2) ta được

$$2^x < 5 \Rightarrow x = 1, 2.$$

Thay $(x, y) = (1, 1)$ và $(2, 1)$ vào hệ bất phương trình ta thấy hệ được nghiệm đúng.

— Với $y = 2$, thay vào (2) ta được

$$2^x < 4 \Rightarrow x = 1.$$

Thử lại ta cũng thấy $(x, y) = (1, 2)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.

Tóm lại hệ bất phương trình có 3 nghiệm nguyên dương là

$$x = 1, \quad y = 1;$$
$$x = 1, \quad y = 2;$$
$$x = 2, \quad y = 1.$$

Bài 6/109. *Giải phương trình*

$$\sin^6 x - 3\sin^8 x - 1/256 = 0$$

với x thỏa mãn điều kiện $|\sin x| < \sqrt{3}/3$.

Lời giải. Cách 1 (của *Nguyễn Thanh Nhã* – 11 C8 Lê Hồng Phong, T.P Hồ Chí Minh). Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin^6 x\,(1 - 3\sin^2 x) = 1/256 \qquad (^*)$$

Vì $|\sin x| < \sqrt{3}/3$ nên $\sin^2 x < 1/3$ hay $1 - 3\sin^2 x > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm trong đó 1 số bằng $1 - 3\sin^2 x$ và 3 số bằng $\sin^2 x$, ta có

$$\sin^6 x\,(1 - 3\sin^2 x) \leqslant \left[\frac{(1 - 3\sin^2 x) + 3\sin^2 x}{4}\right] = 1/256.$$

Vậy bất đẳng thức $(^*)$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x$$

hay $\sin^2 x = 1/4, \quad x = \pm \pi/6 + k\pi.$

Cách 2 (của *Ngô Duy Ninh* – Qui Nhơn). Ta phải giải phương trình

$$\sin^6 x = 3\sin^8 x + 1/2^8 \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm gồm 3 số $\sin^8 x$ và số $1/2^8$ ta có

$$3\sin^8 x + 1/2^8 \geqslant 4\sqrt[4]{\sin^{24} x/2^8} = \sin^6 x.$$

Vậy đẳng thức (1) xảy ra $\Leftrightarrow \sin^8 x = 1/2^8$

$\Leftrightarrow |\sin x| = 1/2 < \sqrt{3}/3 \Leftrightarrow x = \pm \pi/6 + k\pi$

Cách 3 (của nhiều bạn). Phân tích vế trái của phương trình thành tích:

$$\sin^6 x - 3\sin^8 x - 1/256 = (\sin^4 x - \sin^2 x/2 + 1/16) \times (-3\sin^4 x - \sin^2 x/2 - 1/16)$$
$$= -(\sin^2 x - 1/4)^2 (3\sin^4 x + \sin^2 x/2 + 1/16).$$

Vì $3\sin^4 x + \sin^2 x/2 + 1/16 > 0$ nên phương trình tương đương với

$$\sin^2 x = 1/4 \Leftrightarrow |\sin x| = 1/2 < \sqrt{3}/3$$
$$\Leftrightarrow x = \pm \pi/6 + k\pi.$$

Bài 7/109. *Giải và biện luận hệ phương trình theo thông số m*

$$\begin{cases} (2x_1^2 - 4\cos m\, x_1 + 1)/(x_1 - 2\cos m) = x_2 \\ (2x_2^2 - 4\cos m\, x_2 + 1)/(x_2 - 2\cos m) = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ (2x_{n-1}^2 - 4\cos m\, x_{n-1} + 1)/(x_{n-1} - 2\cos m) = x_n \\ (2x_n^2 - 4\cos m\, x_m + 1)/(x_n - 2\cos m) = x_1. \end{cases}$$

Lời giải: Giả sử $x_1 > 2\cos m$. Nếu $x_2 < x_1$ thì từ phương trình đầu ta có

$$2x_1^2 - 4\cos m\, x_1 + 1 < x_1(x_1 - 2\cos m)$$

hay $x^2 - 2\cos m x_1 + 1 < 0$

hay $(x_1 - \cos m)^2 < \cos^2 m - 1 \leqslant 0$, điều vô lý, vậy $x_2 \geqslant x_1$.

Chứng minh tương tự ta có

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant x_1$$

Vậy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$. Ta có phương trình

$$(2x^2 - 4\cos m x + 1)/(x - 2\cos m) = x$$

hay $x^2 - 2\cos m + 1 = 0$

hay $(x - \cos m)^2 = \cos^2 m - 1.$

Muốn có nghiệm thì $\cos^2 m = 1$ và $x = \cos m$, tức là

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \cos m = -1$$

(nếu $\cos m = 1$ thì do điều giả sử ban đầu $1 = x_1 > 2\cos m = 2$, vô lý).

Giả sử $x_1 < 2\cos m$. Nếu $x_1 < x_2$ thì từ phương trình đầu ta có

$$2x_1^2 - 4\cos m x_1 + 1 < x_1(x_1 - 2\cos m)$$

hay $x_1^2 - 2\cos m x_1 + 1 < 0$, vô lý. Vậy $x_1 \geqslant x_2$.

Chứng minh tương tự ta có

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n \geqslant x_1.$$

Vậy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$. Giải phương trình

$$(2x^2 - 4\cos m x + 1)/(x - 2\cos m) = x$$

đưa về $\qquad (x - \cos m)^2 = \cos^2 m - 1.$

Muốn có nghiệm thì $\cos^2 m = 1$ và $x = \cos m$, tức là $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \cos m = 1$

Tóm lại: 1) $m = (2k + 1)\pi$ phương trình có nghiệm

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \cos m = -1.$$

2) $m = 2k\pi$ phương trình có nghiệm

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \cos m = 1.$$

3) $m \neq k\pi$ phương trình vô nghiệm.

Bài 8/109. *Trong mặt phẳng, hãy tìm điểm (x, y) mà các tọa độ x và y của chúng thỏa mãn phương trình*

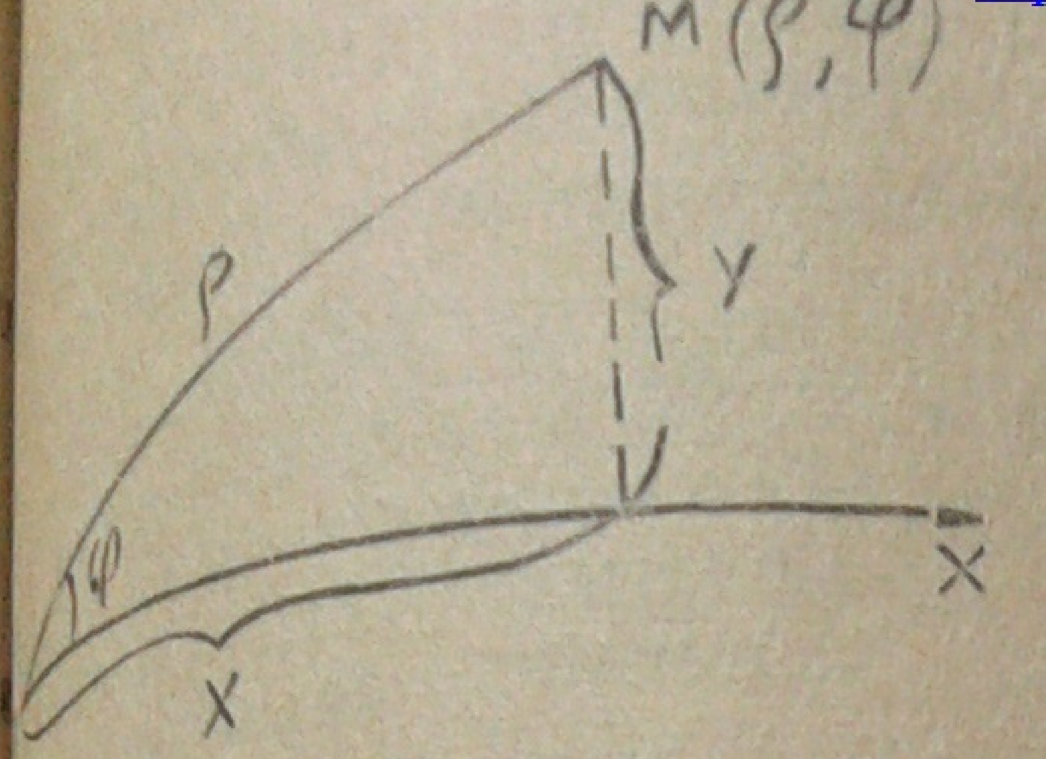
$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$$

sao cho biểu thức $x^2 + y^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất.

Lời giải. Biểu diễn tọa độ của điểm M theo tọa độ cực ρ và φ ta có

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$\rho_M = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bài toán đưa về việc xác định vị trí của điểm M sao cho ρ_M^2 lớn nhất và bé nhất.



$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ vào phương ta có

$$(\ldots\varphi + 1)^2 + 4\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \rho^2 = 0$$

$$\ldots + (2\cos 2\varphi - 1)\rho^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

có nghiệm thì

$$\Delta = (2\cos 2\varphi - 1)^2 - 4 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (2\cos 2\varphi - 1)^2 \geqslant 4$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cos 2\varphi - 1 \geqslant 2 \text{ hoặc} \\ 2\cos 2\varphi - 1 \leqslant -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 2\varphi \geqslant 3/2 \text{ hoặc} \\ -1 \leqslant \cos 2\varphi \leqslant -1/2 \end{array}\right.$$

phương trình thứ nhất không có nghiệm (*) có nghiệm thì

$$2\pi/3 + 2k\pi \leqslant 2\varphi \leqslant 4\pi/3 + 2k\pi$$
$$\pi/3 + k\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi/3 + k\pi \qquad (**)$$

các giá trị của φ thỏa mãn (**) thì phương (*) cho ta

$$= \frac{1 - 2\cos\varphi \pm \sqrt{(2\cos 2\varphi - 1)^2 - 4}}{2} \qquad (***)$$

biến thiên của ρ^2 theo sự biến thiên của φ trong khoảng $(\pi/3, 2\pi/3)$ cho trong bảng sau

φ	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
2φ	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$
$\cos 2\varphi$	$-1/2$ ↘	-1 ↗	$-1/2$
ρ^2	min	max	min

Từ đó ta có:

ρ^2 lớn nhất khi $\cos 2\varphi = -1$ và trước dấu căn trong (***) lấy dấu cộng. Ta có $\rho^2_{max} = (3 + \sqrt{5})/2$.

ρ^2 bé nhất khi $\varphi = \pi/3$ hoặc $2\pi/3$. Khi đó $\rho^2_{min} = 1$.

Vậy các điểm M trong mặt phẳng có ρ_M^2 lớn nhất là

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \pi/2\right), \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ 3\pi/2\right)$$

(do $\sqrt{(3+\sqrt{5})/2} = (1+\sqrt{5})/2$).

Các điểm M trong mặt phẳng có ρ_M^2 bé nhất là $(1, \pi/3)$, $(1, 4\pi/3)$, $(1, 2\pi/3)$, $(1, 5\pi/3)$.

Bài 9/109. *Trong không gian cho một mặt cầu S và các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_n$ cố định (n là một số tự nhiên cho trước lớn hơn 1). Ứng với mỗi điểm M trong không gian ta dựng vectơ*

$$\overrightarrow{MK} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MM_i}$$

Tìm quĩ tích của điểm K khi M chạy trên mặt cầu S.

Lời giải. Gọi G là trọng tâm của hệ điểm M_1, $M_2, \ldots, M_n$. Ta có

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MM_i}$$

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{MK} = n\overrightarrow{MG}$. Từ đó

$$\overrightarrow{MK}/\overrightarrow{MG} = -n.$$

Ta có

$$\overrightarrow{GK}/\overrightarrow{GM} = \frac{\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MK}}{\overrightarrow{GM}}$$
$$= 1 + \overrightarrow{MK}/\overrightarrow{GM} = 1 - n.$$

Hệ thức $\overrightarrow{GK}/\overrightarrow{GM} = 1 - n$ chứng tỏ K là ảnh của điểm M trong phép vị tự tâm G tỉ số $1-n$. Vậy quỹ tích cần tìm là mặt cầu S' ảnh của S qua phép vị tự nói trên. Nếu gọi O là tâm, r là bán kính của S thì tâm O' và bán kính r' của S' được xác định bởi các hệ thức

$$\overrightarrow{GO'} = (1-n)\ \overrightarrow{GO}, \ r' = (1-n)r.$$

Các bạn *Vũ Tám* (8D Toán Lý, 10+3 Hà Bắc), *Ngô Duy Ninh* (Qui Nhơn), *Nguyễn Thanh Nhã* (11 C8 Lê Hồng Phong, T.P. Hồ Chí Minh) có lời giải tốt.

Bài 10/109. *Cho một tam giác đều ABC nội tiếp trong một đường tròn (c). Từ một điểm M tùy ý trên đường tròn (c) kẻ MH, MI, MK theo thứ tự vuông góc với AB, BC, CA (H, I, K, theo thứ tự nằm trên AB, BC, CA). Tìm vị trí điểm M trên đường tròn sao cho*

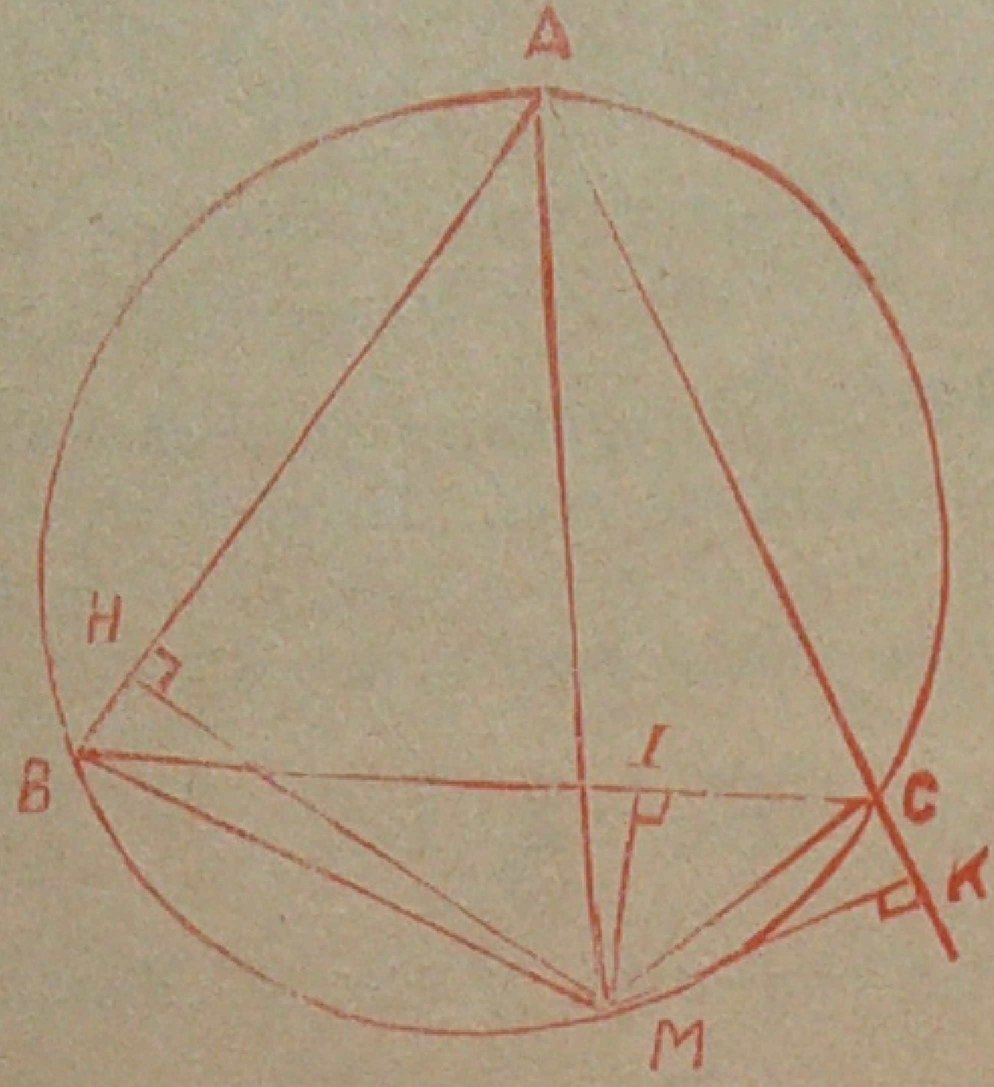
$$d = MA + MI + MB + MK + MC + MH$$

có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất.

Lời giải (của *Nguyễn Thanh Nhã* — 11 C8 Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh, *Ngô Duy Ninh* — (Qui Nhơn). Ta có

$$d = d_1 + d_2$$

với $d_1 = MA + MB + MC$, $d_2 = MI + MK + MH$



Xét điểm M nằm trên cung nhỏ ... định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp ... dễ dàng chứng minh $MA = MB + MC$ ...

$$d_1 = 2MA$$

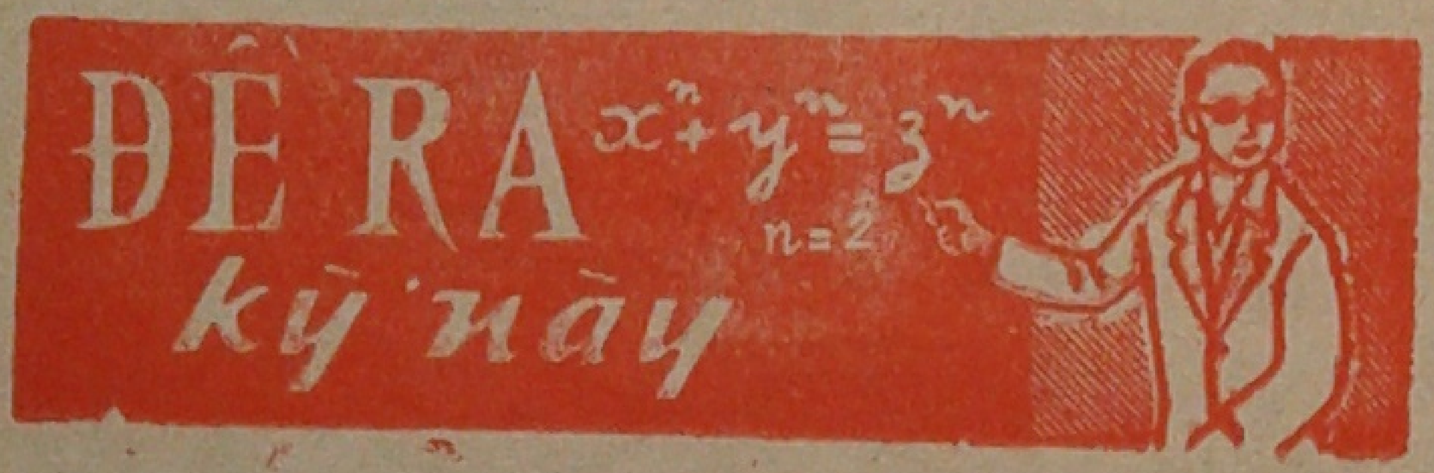
Mặt khác, gọi a là cạnh tam giác ... thì

$$ad_2 = aMI + aMK + aMH$$
$$= 2\,(\mathrm{dt}MBC + \mathrm{dt}MCA + \mathrm{dt}MA...$$
$$= 2(\mathrm{dt}ABC + 2\mathrm{dt}MBC),$$

Do đó $d_2 = 2\mathrm{dt}ABC/a + 4\mathrm{dt}MBC/a$

Từ (1) và (2) suy ra d_1 và d_2 cùng ... khi và chỉ khi M trùng với B và C, ... cùng lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm ... cung BC,

Vậy d nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng ... các đỉnh của tam giác ABC và d lớn nhất ... và chỉ khi M là điểm giữa của các cung ... BC, CA, AB.



Bài 1/112. Tìm giá trị của 1930 số thực $x_1, x_2, \ldots, x_{1930}$ thỏa mãn các điều kiện

$$\sum_{i=1}^{1930} x_i = 1980;$$

$$1 \leqslant x_i \leqslant 3 \ (i = 1, 2, \ldots, 1930).$$

sao cho $\sum_{i=1}^{1930} x_i^3$ có giá trị lớn nhất.

Tìm giá trị lớn nhất đó của $\sum_{i=1}^{1930} x_i^3$

Đỗ Đức Thái (ĐHSP 1 Hà Nội)

Bài 2/112. Cho α là một số vô tỷ. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố p sao cho $[p\alpha]$ không chia hết cho p.

Tài Rất Ngoong
(ĐH Kỹ thuật công nghiệp Việt Bắc)

Bài 3/112. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2(y + 3) = yz^2$$

Vũ Quang Sửu (ĐHSP Vinh)

Bài 4/112. Cho các số nguyên dương ... thỏa mãn

$$\sqrt{7} - m/n > 0.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{7} - m/n > 1/mn.$$

Bài 5/112. Chứng minh rằng trong ... giác $ABCD$ các hệ thức sau đây là tương đương

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$$

và $\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C + \mathrm{cotg}D = 0$.

Lê Quốc Hán (Nghệ Tĩnh)

Bài 6/112. Gọi R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC; ... d_b, d_c là những khoảng cách từ trực tâm ... tam giác đến các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng nếu các góc A, B, C đều ... thì

$$R + r \geqslant d_a + d_b + d_c \geqslant 7r - 2R.$$

Tạ Văn Tự (ĐH Bách khoa)

Bài 7/112. Biết rằng $f(n) = 1 + 1/2 + \ldots$ là hàm số của biến số tự nhiên n. Chứng minh rằng

$$1/m \leqslant 2\,f(m) - f(m^2) \leqslant 1.$$

Dương Quốc Việt
(Cao đẳng SP Tây Bắc)

…/112. Giải và biện luận phương trình
…số a:
…$(\cos x + \sin x) + 3/2 = \cos x - \sin x$.

Nguyễn Khánh Nguyên (Hải Phòng)

…HỌC SINH TÌM TÒI

…/112. Chứng minh rằng với mọi số tự … n mà $1 \leqslant m \leqslant n$ ta đều có

$$\sum_{k=m}^{n} \sqrt{(k+1)^k} < (n+1)!$$

Phạm Hữu Đức
(…12C Bùi Thị Xuân, T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 10/112. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc lớn hơn 1 có các hệ số đều nguyên, thỏa mãn các điều kiện:

$$f(a+b) = ab,$$
$$f(ab) = (a+b),$$

với a và b là hai số nguyên cho trước. Chứng minh rằng $f(a)$ chia hết cho b và $f(b)$ chia hết cho a.

Phạm Hữu Đức

Chú thích: *Bài 4/112 do Đỗ Đức Thái sưu tầm*

«PHƯƠNG PHÁP HỆ PHƯƠNG TRÌNH»

LÊ QUỐC HÁN

…thời gian qua, báo «Toán học và tuổi …đã đăng rất nhiều bài bàn về các phương …giải phương trình không mẫu mực. …xin trình bày thêm một phương pháp …nhiều bạn còn chưa chú ý tới.

…đã biết, để giải một hệ phương trình …ẩn số, ta tìm cách khử dần các ẩn để …việc giải phương trình có một ẩn số. Ở …tiến hành công việc theo chiều ngược …giải một phương trình không mẫu mực, …vào các ẩn phụ thích hợp rồi đưa việc …phương trình đã cho về việc giải một hệ …trình quen thuộc.

…1. Giải phương trình

$$\sqrt{…x+\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{2x-\sqrt{x+1}} = …2\sqrt{x+1}+1 \qquad (1)$$

…bạn không thú vị gì khi phải dùng …pháp nâng lên lũy thừa để đưa phương …cho về phương trình bậc bốn đủ (mà …nghiệm hữu tỷ của nó, bạn chẳng còn biết …ra sao). Vậy ta phải dùng một phương …khác để giải.

…nhận xét là:

$$…\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{…+\sqrt{x+1}+1})^2 - (\sqrt{2x-\sqrt{x+1}})^2$$

…nếu đặt

$$\sqrt{…\sqrt{x+1}+1} = u,\ \sqrt{2x-\sqrt{x+1}} = v$$

thì phương trình (1) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} u+v = 2\sqrt{x+1}+1 \\ u^2-v^2 = 2\sqrt{x+1}+1 \\ u,\ v \geqslant 0. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta đi đến $u = \sqrt{x+1}+1$, $v = \sqrt{x+1}$. Do đó giải phương trình (1), ta chỉ cần giải phương trình đơn giản: $\sqrt{2x-\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}$, mà nghiệm của nó là $x=3$. Đó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ta lấy một thí dụ tương tự về phương trình lượng giác, mà báo Toán học và tuổi trẻ đã đăng với lời giải rất phức tạp.

Thí dụ 2. (bài 7/39). Giải phương trình

$$\sqrt{\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x} - \sqrt{1-\mathrm{cotg}x} = 1 - \mathrm{cotg}x.$$

Ta áp dụng phương pháp trên, đặt: $\sqrt{\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x} = X$, $\sqrt{1-\mathrm{cotg}x} = Y$, để đưa về giải hệ:

$$\begin{cases} X - Y = 1 - \mathrm{cotg}x \\ X^2 - Y^2 = \mathrm{tg}x - 1 \\ X, Y \geqslant 0. \end{cases}$$

Từ $X^2 - Y^2 = \mathrm{tg}x - 1 = (1-\mathrm{cotg}\,x)/\mathrm{cotg}x$, và $X - Y = 1 - \mathrm{cotg}x$ ta suy ra:

1) $X + Y = 1/\mathrm{cotg}x = \mathrm{tg}x \Rightarrow$
$X = (\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x + 1)/2 \Rightarrow X = (X^2+1)/2$.

Sau những phép biến đổi tầm thường, ta đi đến $\mathrm{tg}x = (1+\sqrt{5})/2 \Rightarrow x = \mathrm{arctg}\,[(1+\sqrt{5})/2] + k\pi$.

2) $1 - \operatorname{cotg} x = 0 \Rightarrow x = \pi/4 + k\pi$.

Thí dụ sau đây có phần tế nhị hơn.

Thí dụ 3. Giải phương trình : $x = \sqrt{a - \sqrt{a + x}}$ với a là thông số.

Đặt $\sqrt{a + x} = u$ ($u \geqslant 0$). Thế thì

$$\begin{cases} x = \sqrt{a - u} \\ u = \sqrt{a + x} \\ u \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a - u \\ u^2 = a + x \\ 0 \leqslant u \leqslant a,\ x \geqslant -a. \end{cases}$$

Từ đó

$$u^2 - x^2 = x + u \Rightarrow \begin{cases} u = -x \\ u = x + 1 \end{cases}$$

Đến đây, lời giải bài toán đã sáng rõ, xin các bạn tiếp tục.

Cuối cùng, các bạn hãy dùng « phương vừa nêu ra, để giải các phương trình và so sánh ưu thế của nó so với việc các phương pháp khác :

1) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97 - x} = 5$.

2) $\sqrt{p + x} + \sqrt{p - x} = x$, với p là thông

3) $\sqrt[3]{a + x} - \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[6]{a^2 - x^2}$, thông số.

4) $(\sqrt{1 - \cos x} + 1)(\sqrt{1 + \cos x} - 1) = 2$

5) $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^x} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^x} = 2^x$.

Bạn đọc trao đổi ý kiến

HÃY BÀN THÊM VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ THỐNG NHẤT

Các bạn thân mến!

Ở bài này tôi muốn bàn với các bạn một vài vấn đề về bất đẳng thức. Vì đã có nhiều người bàn nên không hiểu những lời bàn này có thêm được gì mới hay không, nhưng dù sao tôi cũng vui lòng vì mình làm một việc tự rèn luyện bổ ích và trao đổi cùng các bạn.

I. Hãy nhìn ra bất đẳng thức từ đẳng thức.

Đẳng thức diễn đạt quan hệ bằng nhau (đây là quan hệ tương đương — nói theo ngôn ngữ hiện đại), còn bất đẳng thức diễn đạt sự không bằng nhau, so sánh cái này với cái kia (đây là quan hệ thứ tự), vậy mà trong nhiều trường hợp các bất đẳng thức được sinh ra từ những đẳng thức.

Ví dụ 1. Từ đẳng thức :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4),$$

do $|\cos(x - \pi/4)| \leqslant 1$ nên ta có được bất đẳng thức

$$|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}.$$

(Các bạn hãy liên hệ với bài thi đại học năm 1970).

Ví dụ 2. Từ đẳng thức :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2/\sin 2x, \text{ do } |\sin 2x| \leqslant$$

nên ta có bất đẳng thức :

$$|\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x| \geqslant 2.$$

(Các bạn nhớ lại đề thi vào đại học năm

Ví dụ 3. Từ đẳng thức:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin^2 2x/2, \text{ do } 0 \leqslant \sin$$

nên suy ra bất đẳng thức

$$1/2 \leqslant \sin^4 x + \cos^4 x \leqslant 1.$$

(Các bạn liên hệ với đề thi vào đại h 1976).

Mặt khác rất nhiều bài toán mang bất đẳng thức được phát biểu dưới h đẳng thức. Đối với các bài toán này v hiện đúng nội dung bất đẳng thức sẽ m lời giải đẹp và thích hợp.

Ví dụ 4. Kỳ thi toán quốc tế lần th bài: « Tìm tất cả các giá trị thực của tại các số không âm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 th

$$\sum_{k=1}^{5} k x_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k =$$

... chỉ xuất hiện các đẳng thức, nhưng ... áp dụng bất đẳng thức Bunhiacô-ski ... ra:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2$$

... nếu có các đẳng thức ở đề toán thì bất đẳng trên xảy ra dấu bằng ... $=(a^2)^2$). Mà điều kiện để xảy ra dấu bất đẳng thức này thì ta đã rõ.

... 5. Đề thi vào Đại học năm 1976, (khối B)

... minh rằng điều kiện cần và đủ để ... trở thành tam giác đều là:

$1/a + 1/b + 1/c = 9/(a + b + c)$;

... là các độ dài các cạnh của tam giác».

... ý đến bất đẳng thức Bunhiacôpski ... bất đẳng thức Côsi cũng được) ta sẽ có:

$(1/a + 1/b + 1/c)(a + b + c) \geqslant 9.$

... kiện cần và đủ để xảy ra đẳng thức ở ... đã biết: $1/a : a = 1/b : b = 1/c : c$, hay ... $= c^2$, tức $a = b = c$, tam giác là đều.

... vậy ta có thể sáng tác ra một loạt các bài ... cần và đủ từ bài toán bất đẳng thức:

... 6. Từ bất đẳng thức $S \leqslant p^2/3\sqrt{3}$ với ... lượt là diện tích và nửa chu vi tam ... có thể phát biểu một điều kiện cần và ... tam giác đều là $S = p^2/3\sqrt{3}$.

... 7. Từ bất đẳng thức

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geqslant 6$$

... b, c, p lần lượt là độ dài các cạnh và ... vi của tam giác ta có thể phát biểu ... kiện cần và đủ để tam giác đều là:

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} = 6$$

... trong khi làm toán hay cụ thể là ... kỳ thi các bạn nhìn rõ được các việc ... qua, chuyển lại giữa đẳng thức và ... thức thì chất lượng công việc của các ... khá hơn nhiều.

... Cái gì liên quan giữa bất phương ... và bất đẳng thức?

... thông nếu hỏi các bạn giải bất phương ... hay chứng minh bất đẳng thức việc nào ... chịu» hơn thì nhiều bạn đều trả lời: ... phương trình! (Mặc dù ngay giải bất ... trình các bạn đó có thể còn giải nhầm ... thạo). Thành ra có một tâm lý ở các bạn là «sợ» bất đẳng thức! Thế thì giữa hai việc này có gì liên quan không? Tưởng rằng ai cũng biết là với những giá trị của ẩn nằm trong miền nghiệm của bất phương trình thì khi đó các bất phương trình trở thành các bất đẳng thức đúng đắn. Nhưng ít bạn để ý là một bài toán bất phương trình có thể sinh ra nhiều bài toán bất đẳng thức (thậm chí là hắc búa).

Ví dụ 8: Giải bất phương trình:

$$\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x} < 0$$

các bạn tìm được nghiệm là: $x < 0$; $1 < x < 2$; $2 < x < 3$; $x > 4$.

Từ đó có thể phát biểu một bài toán bất đẳng thức:

«Chứng minh rằng nếu $\pi/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ thì

$$\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x} < 0.$$

Chẳng qua các giá trị $\pi/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ lấy để cho x nằm trong miền nghiệm của bất phương trình, thế là xong. Thế mà khi phát biểu kiểu này sẽ gây ra một đám hỏa mù xung quanh cái giả thiết $\pi/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$, nhất là nhiều bạn nhìn thấy $\pi/2$ thì đã nghĩ đến lượng giác rồi. Xoay quanh con số $\pi/2$ và $\sqrt{3}$ để tìm ra lời giải thì thật là bế tắc.

Ví dụ 9: Từ việc giải bất phương trình:

$\sin^3 x\sin(\pi/2 - 3x) + \cos^3 x\cos(\pi/2 - 3x) > 3\sqrt{3}/8$

có nghiệm là: $\pi/12 + k\pi/12 < x < \pi/6 + k\pi/2$, các bạn có bài bất đẳng thức: «Chứng minh rằng nếu: $4/15 \leqslant x \leqslant 1/2$ thì:

$\sin^3 x \sin(\pi/2 - 3x) + \cos^3 x \cos(\pi/2 - 2x) > 3\sqrt{3}/8$».

Vậy thì vấn đề sẽ xuất hiện là: Để chứng minh một số bất đẳng thức nào đấy có thể làm bằng phương pháp chuyển về giải bất phương trình, sau đó so sánh các giá trị của các ẩn đã cho với miền nghiệm của bất phương trình giải được.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng với $0 < x < \pi/4$ hoặc $-\pi/4 < x < 0$ thì:

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

Các bạn có thể giải dễ dàng bất phương trình tìm nghiệm và chỉ cần chỉ ra $0 < x < \pi/4$ và $-\pi/4 < x < 0$ đều nằm trong miền nghiệm của bất phương trình. Còn các bạn dùng các phương pháp khác thử xem?

3. Khi nào thì nghĩ đến việc «lượng giác hóa» các bất đẳng thức?

Các bạn chắc đều đã biết phương pháp dùng phép «lượng giác hóa» để chứng minh một số bất đẳng thức đại số. Vậy phải bàn với nhau kinh nghiệm khi nào sẽ làm được như vậy? Nhiều bạn cho rằng cần phải có những giả thiết $x^2 + y^2 = 1$, $u^2 + v^2 = 1$, thì mới lượng giác hóa được, vì lúc bấy giờ đặt $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$,... Chẳng hạn như:

Ví dụ 11. Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $-\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant \sqrt{2}$. Các bạn đặt như sau: $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ thì sẽ đưa về dạng lượng giác ở ví dụ 1.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$ và $u^2 + v^2 = 1$ thì $-\sqrt{2} \leqslant x(u - v) + y(u + v) \leqslant \sqrt{2}$. Các bạn đặt $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $u = \sin\beta$, $v = \cos\beta$ thì sẽ «lượng giác hóa» bất đẳng thức cần chứng minh. (Có thể đặt $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $(u - v)/\sqrt{2} = \sin\beta$, $(u + v)/\sqrt{2} = \cos\beta$).

Hay là khi gặp $xy = 1$ thì đặt $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{cotg}\alpha$. Chẳng hạn như:

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi $x \neq 0$ thì $[x + 1/x] \geqslant 2$. Các bạn chỉ cần đặt $x = \operatorname{tg}\alpha$, $1/x = \operatorname{cotg}\alpha$ sẽ đưa về dạng lượng giác ở ví dụ 2.

Nhưng thực ra không chỉ có thế, dưới đây ta chỉ ra những ví dụ như vậy.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng.

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a + b}{2}\right)^4.$$

Ở đây ta thấy chỉ cần xét trường hợp $a > 0$, $b > 0$. (Các bạn thử giải thích xem vì sao?). Như vậy ta có thể coi a và b là các độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, lúc đó tam giác vuông hoàn toàn xác định có độ dài c của cạnh huyền và góc α với cạnh độ dài a thỏa mãn các đẳng thức

$$a = c\sin\alpha,\ b = c\cos\alpha$$

Do đó ta cần chứng minh,

$$\frac{c^4\sin^4\alpha + c^4\cos^4\alpha}{2} \geqslant \left(\frac{c\sin\alpha + c\cos\alpha}{2}\right)^4$$

hay:

$$\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{2} \geqslant \left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2}\right)^4$$

Nhưng theo ví dụ 3 thì $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geqslant$ ...

$$(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)/2 \geqslant 1/4.$$

Theo ví dụ 1 thì $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$ nên

$$\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2}\right)^4 \leqslant (\sqrt{2}/2)^4 = 1/4$$

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Như vậy tam giác vuông có thể dùng làm nhịp cầu để nối các bất đẳng thức đại số với các bất đẳng thức lượng giác (tất nhiên trong một phạm vi nào đó). Các bạn tự giải bài toán sau:

Ví dụ 15. Chứng minh rằng nếu $m > n$ ...

$$\sqrt{m^2 - n^2} + \sqrt{2mn - n^2} \geqslant m.$$

Chú ý là do $m > n$ nên các bạn hãy ... ví dụ 14 để m và n đứng bình đẳng!

Trong khuôn khổ một bài báo, tôi ... bàn đến ba vấn đề xung quanh bất đẳng ... Rất mong các bạn hãy bàn thêm nữa ... ta sẽ gom góp lại để được nhiều điều ... Chúc các bạn thành công.

THÔNG BÁO VỀ CUỘC THI GIẢI TOÁN

Để chào mừng ba ngày lễ lớn trong năm 1980, báo THvTT tổ chức một cuộc thi giải toán cho các bạn đọc của báo là học sinh cấp 3.

Các đề toán ra cho cuộc thi sẽ đăng trong hai số báo 3 và 4 của năm 1980. Cuộc thi sẽ tổng kết vào cuối năm 1980 và công bố kết quả trên báo số 6 năm 1980.

Thể lệ dự thi sẽ đăng trong số báo sau.

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

In tại Xí nghiệp In – 75 Hàng Bồ – Hà Nội. Số in: 14/80.
Gửi lưu chiểu tháng 3-1980. Chỉ số: 12884.