TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

6

1979

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Tòa soạn: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG

Dây nói: 52825

SỐ PHỨC, VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP BIẾN HÌNH

(Tiếp theo kỳ trước)

TRẦN THÚC TRÌNH

Dưới đây là hướng dẫn giải các bài toán đã đề nghị.

Bài số 1. Theo giả thiết ta có (xem quy ước):

$$a_1 + \alpha b_1 + \alpha^2 c_1 = 0 \quad (1)$$
$$c_2 + \alpha a_2 + \alpha^2 b_2 = 0 \quad (2)$$
$$b_3 + \alpha c_3 + \alpha^2 a_3 = 0 \quad (3)$$
$$a_1 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_3 = 0 \quad (4)$$

Lấy (1) cộng với (2) với (3) rồi trừ đi (4) ta có:

$$c_2 + b_3 + \alpha(b_1 + c_3) + \alpha^2(c_1 + b_2) = 0$$

Đặt $p = (c_1 + b_2)/2$, $q = (c_2 + b_3)/2$, $r = (c_3 + b_1)/2$, nên $q + \alpha r + \alpha^2 p = 0$.

Bài số 2. Theo giả thiết ta có

$$a_1 + \alpha b_1 + \alpha^2 c_1 = 0 \quad (1)$$
$$c_2 + \alpha a_2 + \alpha^2 b_2 = 0 \quad (2)$$
$$b_3 + \alpha c_3 + \alpha^2 a_3 = 0 \quad (3)$$
$$a_1 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_3 = 0 \quad (4)$$
$$b_3 + \alpha b_1 + \alpha^2 b_2 = 0 \quad (5)$$

Lấy (1) cộng với (2) với (3) và chú ý đến (4) (5) sẽ có ngay $c_2 + \alpha c_3 + \alpha^2 c_1 = 0$.

Bài số 3. a) Theo giả thiết ta có

$$a + \alpha b_1 + \alpha^2 c = 0 \quad (1)$$
$$b + \alpha c + \alpha^2 a_1 = 0 \quad (2)$$
$$c_1 + \alpha a + \alpha^2 b = 0 \quad (3)$$

Mặt khác

$c_0 = (a + b + c_1)/3$, $a_0 = (b + c + a_1)/3$,

$b_0 = (c + a + b_1)/3$. Bây giờ xét biểu thức:

$$3(c_0 + \alpha b_0 + \alpha^2 a_0) = a + b + c_1 + \alpha c + \alpha a + \alpha b_1 + \alpha^2 b + \alpha^2 c + \alpha^2 a_1 = (a + \alpha b_1 + \alpha^2 c) + (b + \alpha c + \alpha^2 a_1) + (c_1 + \alpha a + \alpha^2 b) = 0$$

Do các đẳng thức (1), (2), (3).

Vậy
$$c_0 + \alpha b_0 + \alpha^2 a_0 = 0$$

b) $$a' = \frac{1}{2}\left[a + (b + c + a_1)/3\right]$$

$$= \frac{1}{6}(3a + b + c - \alpha^2 c - \alpha b)$$

$$b' = \frac{1}{2}\left[b + (c + a + b_1)/3\right]$$

$$= \frac{1}{6}(3b + c + a - \alpha^2 a - \alpha c)$$

$$c' = \frac{1}{2}\left[c + (a + b + c_1)/3\right]$$

$$= \frac{1}{6}(3c + a + b - \alpha^2 b - \alpha a).$$

Vậy

$$6(a' + \alpha b' + \alpha^2 c') = 3a + b + c - \alpha^2 c - \alpha b + 3\alpha b$$
$$- a + \alpha^2 c + 3\alpha^2 c + \alpha^2 a + \alpha^2 b - \alpha b - a$$
$$+ \alpha c + \alpha a - a - \alpha^2 c + 3\alpha^2 c + \alpha^2 a + \alpha^2 b + \ldots$$

$$= a(1 + \alpha + \alpha^2) + b(1 + \alpha + \alpha^2) + c(1 + \alpha + \alpha^2) = 0.$$

Vậy tam giác $A'B'C'$ là đều và ngược hướng với hướng ba tam giác đã dựng.

Bài số 4. Giả sử các tam giác A_0B_0C, B_0C_0A, C_0A_0B là đều và cùng hướng dương.

Như vậy:

$$a + \alpha b_0 + \alpha^2 c_0 = 0 \quad (1)$$
$$b = \alpha c_0 + \alpha^2 a_0 = 0 \quad (2)$$
$$c = \alpha a_0 + \alpha^2 b_0 = 0 \quad (3)$$

Khử c_0 từ (1) và (2) sẽ có:

$$a - \alpha b + \alpha b_0 - a_0 = 0 \quad (4)$$

Nhân (4) với $(-\alpha)$ rồi cộng với (3) sẽ được:

$$2\alpha a_0 = \alpha a - \alpha^2 b - c \quad (5)$$

Dựng tam giác đều $CA'B$ tức có

$$c + \alpha a' + \alpha^2 b = 0 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) sẽ có $a_0 = (a + a')/2$.

Tương tự, dựng các tam giác đều $AB'C$, $BC'A$ sẽ có $b_0 = (b + b')/2$, $c_0 = (c + c')/2$.

Bài số 5. Trước tiên xét tam giác ABC có đỉnh trên đường tròn $z\bar{z} = 1$. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Do (b) nên

$$a_1 = (b + c + m - bc\bar{m})/2,$$
$$b_1 = (c + a + m - ca\bar{m})/2,$$
$$c_1 = (a + b + m - ab\bar{m})/2.$$

Lại do (a) nên

$$S_0 = (i/4) \times \begin{vmatrix} \dfrac{b + c + m - bc\bar{m}}{2} & \dfrac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \bar{m} - \frac{m}{bc}}{2} & 1 \\ \dfrac{c + a + m - ca\bar{m}}{2} & \dfrac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \bar{m} - \frac{m}{ca}}{2} & 1 \\ \dfrac{a + b + m - ab\bar{m}}{2} & \dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \bar{m} - \frac{m}{ab}}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (i/16abc) \times \begin{vmatrix} b + c + m - bc\bar{m} & (b + c + \bar{m}bc - m)a & 1 \\ c + a + m - ca\bar{m} & (c + a + \bar{m}ca - m)b & 1 \\ a + b + m - ab\bar{m} & (a + b + \bar{m}ab - m)c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{i}{16abc}(a - b)(b - c)(c - a)(1 - m\bar{m}).$$

Nhưng $S_{(\Delta ABC)} = S = \dfrac{i}{4}\dfrac{(a - b)(b - c)(c - a)}{abc}$ (xem (d)), do đó:

$$S_0 = (S/4)(1 - OM^2) \qquad \text{(xem (b))}.$$

Bây giờ nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là R thì

$$S_0 = (S/4)(1 - OM^2/R^2).$$

S_0, S không đổi nên OM^2 không đổi. Vậy nói chung chạy trên đường tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

Nếu $S_0 = S/4$ thì $OM = 0$, $M \equiv 0$.

Nếu $S_0 > S/4$ thì $OM^2 < 0$, M chạy trên đường tròn ảo. Nếu $S_0 < S/4$ thì $OM^2 > 0$, M chạy trên đường tròn thực. Đặc biệt nếu $S_0 = 0$ thì $OM^2 = R^2$.

Bài số 6. Gọi x_1, x_2, x_3 là các số phức ứng với các đỉnh của tam giác đã cho và y_1, y_2, y_3 là các đỉnh của các tam giác đều ở phía ngoài với các tâm tương ứng là a_1, a_2, a_3. Thế thì

$$y_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2 = 0 \text{ hay}$$
$$y_1 = -\alpha(x_3 + \alpha x_2)$$

Tương tự

$$y_2 = -\alpha(x_1 + \alpha x_3)$$
$$y_3 = -\alpha(x_2 + \alpha x_1).$$

Do $3a_1 = x_3 + x_2 + y_1 = (1 - \alpha)(x_3 - \alpha^2 x_2)$ và tương tự nên

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (1 - \alpha)(x_3 - \alpha^2 x_2)/3 \\ a_2 &= (1 - \alpha)(x_1 - \alpha^2 x_3)/3 \\ a_3 &= (1 - \alpha)(x_2 - \alpha^2 x_1)/3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nếu gọi z_1, z_2, z_3 là các đỉnh của các tam giác đều ở phía trong với các tâm tương ứng là b_1, b_2, b_3 thì ta sẽ có:

$$z_1 = -\alpha(x_2 + \alpha x_3)$$
$$z_2 = -\alpha(x_3 + \alpha x_1)$$
$$z_3 = -\alpha(x_1 + \alpha x_2)$$

và

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= (1 - \alpha)(x_2 - \alpha^2 x_3)/3 \\ b_2 &= (1 - \alpha)(x_3 - \alpha^2 x_1)/3 \\ b_3 &= (1 - \alpha)(x_1 - \alpha^2 x_2)/3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Vậy

$$-4iS_{(T_1)} = \begin{vmatrix} a_1 & \bar{a}_1 & 1 \\ a_2 & \bar{a}_2 & 1 \\ a_3 & \bar{a}_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad -4iS_{(T_2)} = \begin{vmatrix} b_1 & \bar{b}_1 & 1 \\ b_2 & \bar{b}_2 & 1 \\ b_3 & \bar{b}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Chú ý đến (1) và (2) sẽ có:

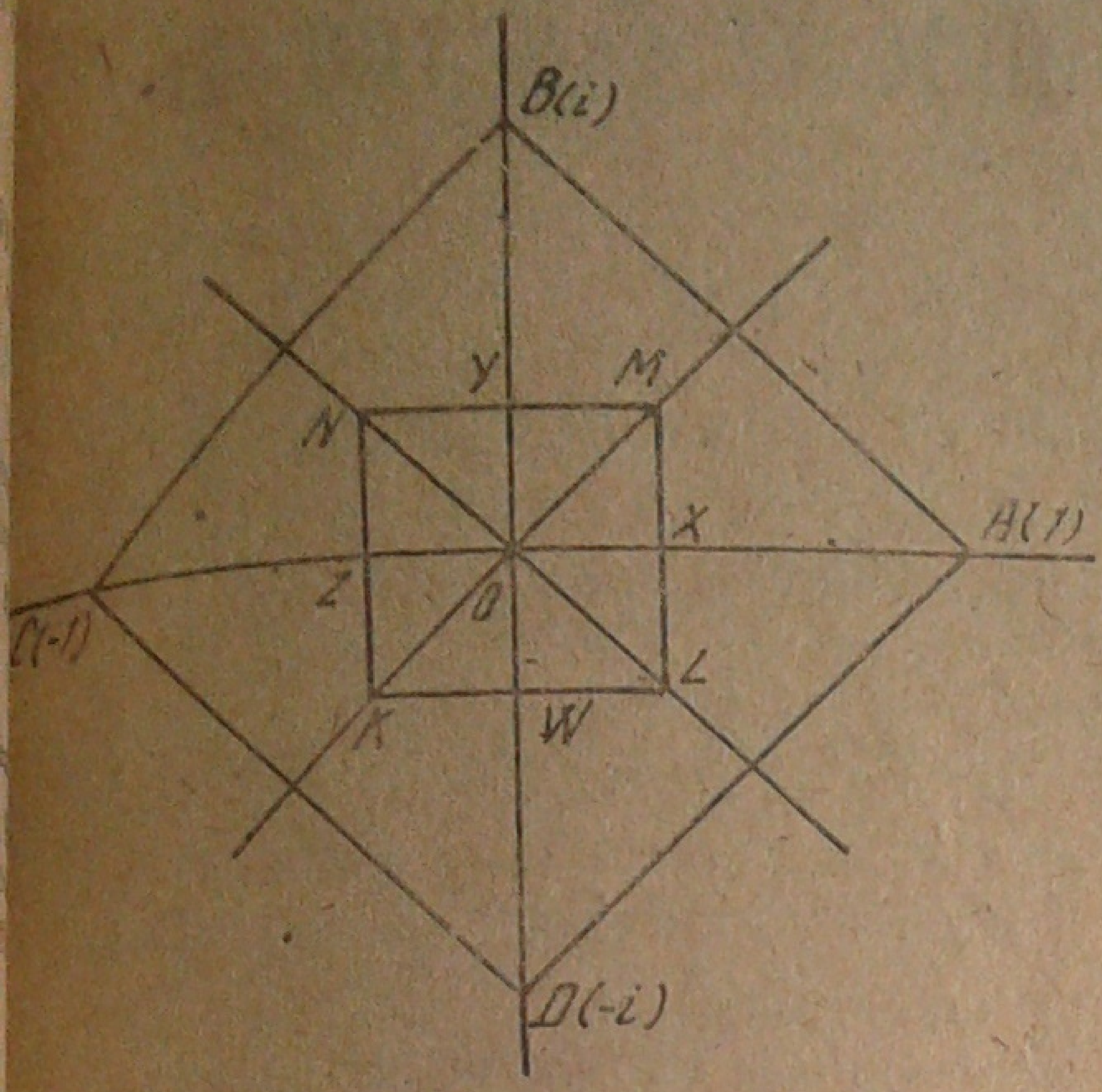
$$-4i[S_{(T_1)} - S_{(T_2)}] = \begin{vmatrix} x_1 & \bar{x}_1 & 1 \\ x_2 & \bar{x}_2 & 1 \\ x_3 & \bar{x}_3 & 1 \end{vmatrix} = -4iS.$$

Vậy $S = S_{(T_1)} - S_{(T_2)}$.

Bài số 7. Bố trí hình vuông như trong hình 2. Gọi P_8 là điểm giữa của AN.

Ta có:

$$n - \alpha i + \alpha^2 = 0 \text{ nên } n = \alpha i - \alpha^2,$$
$$l + \alpha i - \alpha^2 = 0 \text{ nên } l = \alpha^2 - \alpha i,$$
$$m - \alpha - \alpha^2 i = 0 \text{ nên } m = \alpha + \alpha^2 i.$$



Hình 2

Từ đó, $x = (l + m)/2$

$$= (\alpha + \alpha^2 - \alpha i + \alpha^2 i)/2 = (\sqrt{3} - 1)/2\,;$$

$$p_8 = (a + n)/2 = (1 + \alpha i - \alpha^2)/2 = [(3 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)]/4$$

Chú ý rằng $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

Do đó

$$x\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$= [(3 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)]/4.$$

Nói cách khác,

$$Q_O^{\pi/6}(X) = P_8$$

hay X, P_8 là hai đỉnh liên tiếp của hình 12 cạnh đều.

Nếu gọi $P_7, P_6, \ldots, P_1$ theo thứ tự là điểm giữa của $DM, DN, \ldots, AK$ thì tương tự

$$Q_O^{\pi/6}(P_8) = P_7, \quad Q_O^{\pi/6}(P_7) = Y, \ldots$$

Bài số 8. Gọi x là số phức ứng với O, thế thì $3x = a + b + c$. Do tam giác OAP là đều nên

$$p + \alpha\frac{a + b + c}{3} + \alpha^2 b = 0. \qquad (1)$$

Cũng vậy, do tam giác OAR là đều nên

$$q + \alpha b + \alpha^2\frac{a + b + c}{3} = 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$p = -\alpha\frac{a + b + c}{3} - \alpha^2 b \qquad (3)$$

$$q = -\alpha b - \alpha^2\frac{+ a\ b + c}{3} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có :

$$b + c + p + q = 4x. \qquad (5)$$

Vậy $p_1 + q_2 = 2x$, $p_2 + q_1 = 2x$, tức hai góc P_1OQ_1 và P_2OQ_2 có chung đường phân giác.

Bài số 9. Xét $z\bar{z} = R^2$. Theo (e) và (g) ta có :

$a_1a_2 = \varepsilon_{12}b_1b_2$, $b_2b_3 = \varepsilon_{23}a_2a_3$, $a_3a_4 = \varepsilon_{34}b_3b_4, \ldots,$

$a_{2n-1}a_{2n} = \varepsilon_{2n-1,2n}b_{2n-1}b_{2n}$,

trong đó $\varepsilon_{i,i+1} = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n - 1)$

tùy theo trường hợp kẻ dây song song hay vuông góc. Nhân vế với vế các đẳng thức trên, sẽ có

$$a_1a_{2n} = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\ldots\varepsilon_{2n-1,2n}b_1b_{2n}, \text{ tức}$$

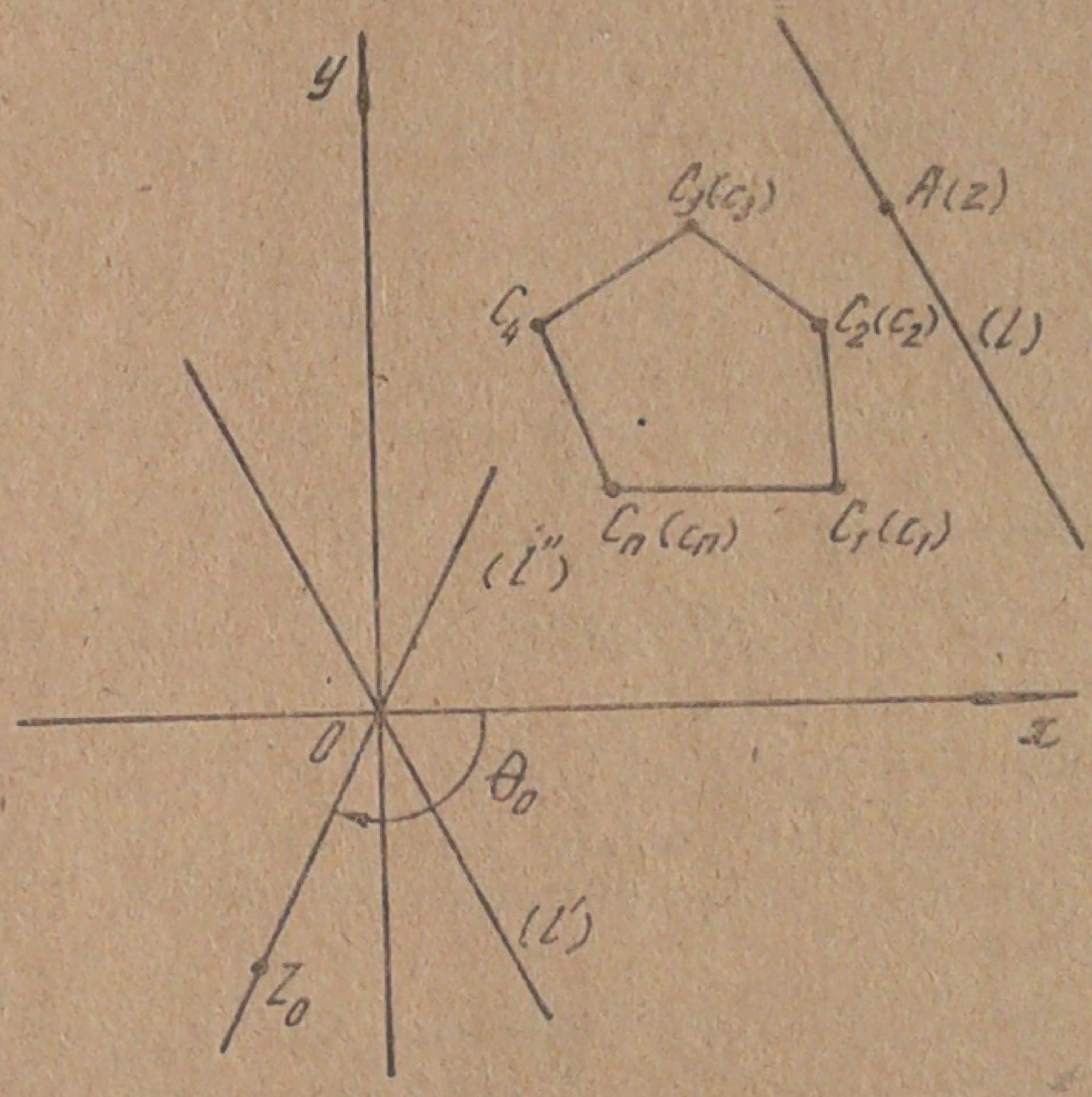
$$a_1a_{2n} = \varepsilon b_1b_{2n} \ (\varepsilon = \pm 1).$$

Bài số 10. (Chứng minh bằng phương pháp phản chứng, hình 3). Giả sử $A(z)$ nằm ngoài đa giác lồi $C_1C_2\ldots C_n$. Thế thì đa giác nằm kề một phía đối với đường thẳng (l) qua A. Gọi A_j là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC_j}$.

Vậy A_j nằm về một phía đối với (l') qua O song song với (l).

Đặt $z_j = z - c_j$ ứng với điểm A_j

Gọi $z'_j = 1/z_j = 1/(z - c_j)$ ứng với điểm A'_j.



Hình 3

Vậy A_j biến thành A'_j sao cho tia OA'_j đối xứng với tia OA_j qua Ox. Vậy các điểm A'_j nằm về một phía đối với đường thẳng (l'') đối xứng của (l') qua Ox. Trên (l'') lấy điểm z_o:

$z_o = \cos\theta_o + i\sin\theta_o$, sau đó thực hiện phép chia $z''_j = z'_j/z_o$, có điểm tương ứng là A''_j (ảnh của A'_j qua phép $Q_O^{-\theta_o}$, tức là ảnh của (l'') qua phép biến hình nói trên trùng với Ox), như vậy, các phần tử ảo của z''_j có những hệ số cùng dấu.

Tóm lại

$$z''_1 + \ldots + z''_n = (z'_1 + \ldots + z'_n).1/z_o \neq 0$$

tức $\quad z'_1 + \ldots + z'_n = 1/(z - c_1) + \ldots + 1/(z - c_n) \neq 0,$

mâu thuẫn với giả thiết.

NHỮNG BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ LẦN THỨ 21

(Tiếp theo kỳ trước)

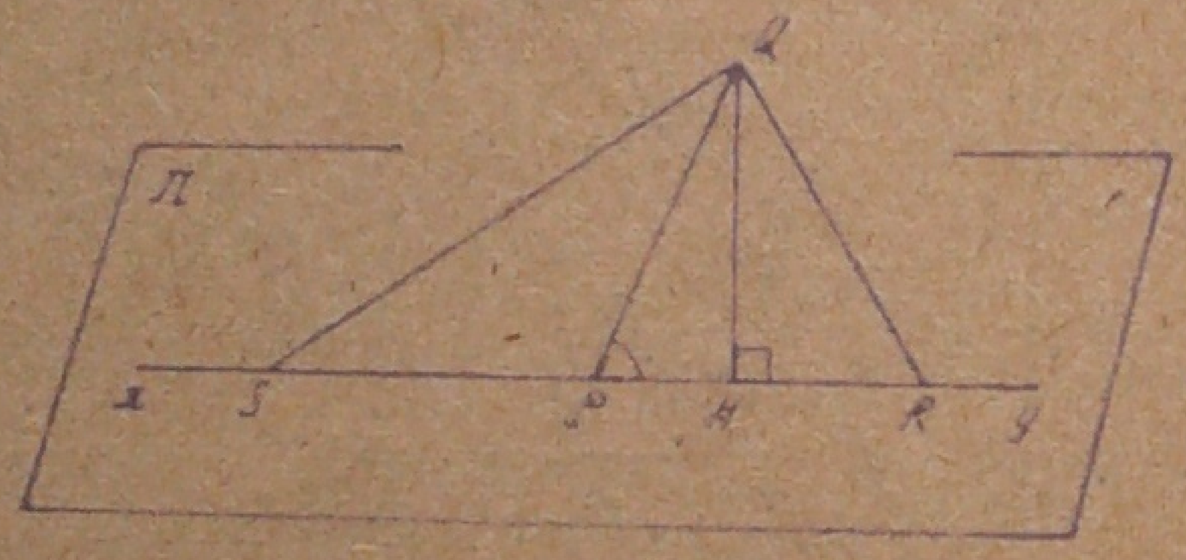
Bài 4. *Cho P là điểm nằm trong mặt phẳng π và Q là điểm nằm ngoài π. Tìm các điểm R trong mặt phẳng π sao cho biểu thức (QP+PR)/QR có giá trị lớn nhất.*

(Mỹ đề nghị, 6 điểm)

Lời giải. Qua P kẻ đường thẳng xy trong mặt phẳng π và lấy trên đường thẳng đó điểm S sao cho $\widehat{QPS} > 90°$ và $PS = PQ$ (hình 4). Rõ ràng là nếu chọn điểm R trên đường xy khác phía với S đối với điểm P thì giá trị của $(QP+PR)/QR$ sẽ lớn hơn so với vị trí của R cùng phía với S.

Lấy R trên xy, khác phía với S, ta có:

$(QP + PR)/QR = SR/QR = \sin\widehat{SQR}/\sin\widehat{QSP}$. Tỉ số trên đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{QSP}$ có giá trị nhỏ nhất và $\sin\widehat{SQR} = 1$.



Hình 4

— Muốn cho $\sin\widehat{QSP}$ nhỏ nhất thì $\widehat{QSP}$ có giá trị nhỏ nhất, hay QPR có giá trị nhỏ nhất, tức là khi đường xy chứa hình chiếu của PQ trên mặt phẳng π.

— Muốn cho $\sin\widehat{SQR} = 1$ thì $\widehat{SQR} = 90°$, tức là khi $PR = PQ$.

Vậy điểm R nằm trên đường thẳng đi qua P và chân đường vuông góc H hạ từ P xuống mặt phẳng π và cách P một khoảng bằng PQ thì biểu thức (PQ + PR)/QR có giá trị lớn nhất.

Dễ thấy rằng nếu PQ không vuông góc với π thì chỉ có một điểm R, còn nếu $PQ \perp \pi$ (P trùng với H) thì tập hợp các điểm R là cả một đường tròn tâm P bán kính bằng PQ.

Bài 5. *Tìm tất cả những số thực a sao cho tồn tại 5 số thực không âm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, thỏa mãn các hệ thức*

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a,\quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2,\quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

(I-xra-en đề nghị, 7 điểm).

Lời giải. Từ các hệ thức ở đầu bài suy ra

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{5} kx_k \cdot \sum_{k=1}^{5} k^5x_k,$$

tức là:

$$(x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5)^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5) \times$$
$$\times (x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5).$$

Sau khi khai triển cả hai vế ta sẽ được đẳng thức mà hệ số của các x_k^2 ở hai vế đều bằng nhau, trong khi đó với mọi tích x_ix_j $(i \neq j)$ thì các hệ số của nó ở vế phải đều lớn hơn hệ số của nó ở vế trái. Điều đó chứng tỏ mọi tích x_ix_j $(i \neq j)$ đều bằng 0, tức là *trong 5 số x_k thì chỉ có nhiều nhất một số dương.*

— Nếu mọi $x_k = 0$ thì $a = 0$.

— Nếu $x_1 > 0$ thì hệ thức thứ nhất (ở đầu bài) cho $x_1 = a$, hệ thức thứ hai cho $x_1 = a^2$. Vậy $a = 1$, các giá trị này của x_1 và a cũng thỏa mãn hệ thức thứ ba.

— Nếu $x_2 > 0$ thì hệ thức thứ nhất cho $2x_2 = a$ $\Rightarrow x_2 = a/2$, thay vào hệ thức thứ hai ta tìm được $a = 4$, các giá trị $a = 4$ và $x_2 = 4:2 = 2$ cũng thỏa mãn hệ thức thứ ba.

— Nếu $x_3 > 0$ thì hệ thức thứ nhất cho $3x_3 = a \Rightarrow x_3 = a/3$, thay vào hệ thức thứ hai ta tìm được $a = 9$, hệ thức thứ 3 cũng được thỏa mãn.

— Tương tự, nếu $x_4 > 0$ ta tìm được $a = 16$.

— Nếu $x_5 > 0$ ta tìm được $a = 25$.

Bài toán có các nghiệm là $a = 0, 1, 4, 9, 16, 25$.

Bài 6. *Một con ếch nhảy từ đỉnh A đến đỉnh đối tâm E của một hình bát giác đều. Tại mỗi đỉnh của bát giác trừ đỉnh E, con ếch có thể nhảy một bước tới một trong hai đỉnh kề. Đến E thì ếch dừng lại và ở luôn tại đó.*

Gọi a_n là số đường đi phân biệt của con ếch từ A đến E bằng đúng n bước nhảy.

Chứng minh rằng:

$$a_{2n-1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right]$$

(CHLB Đức đề nghị, 7 điểm)

Lời giải. Nếu mỗi bước con ếch nhảy thuận chiều kim đồng hồ ta biểu thị bằng một dấu cộng và mỗi bước con ếch nhảy ngược chiều

... đường hỗ ta biểu thị bằng một dấu trừ thì ... đường đi phân biệt của con ếch có n bước ... số được biểu thị bằng một dãy n dấu cộng ... trừ. Dễ thấy rằng mỗi dãy đều có hai tính chất:

1) Số dấu cộng và trừ chênh nhau đúng 4.

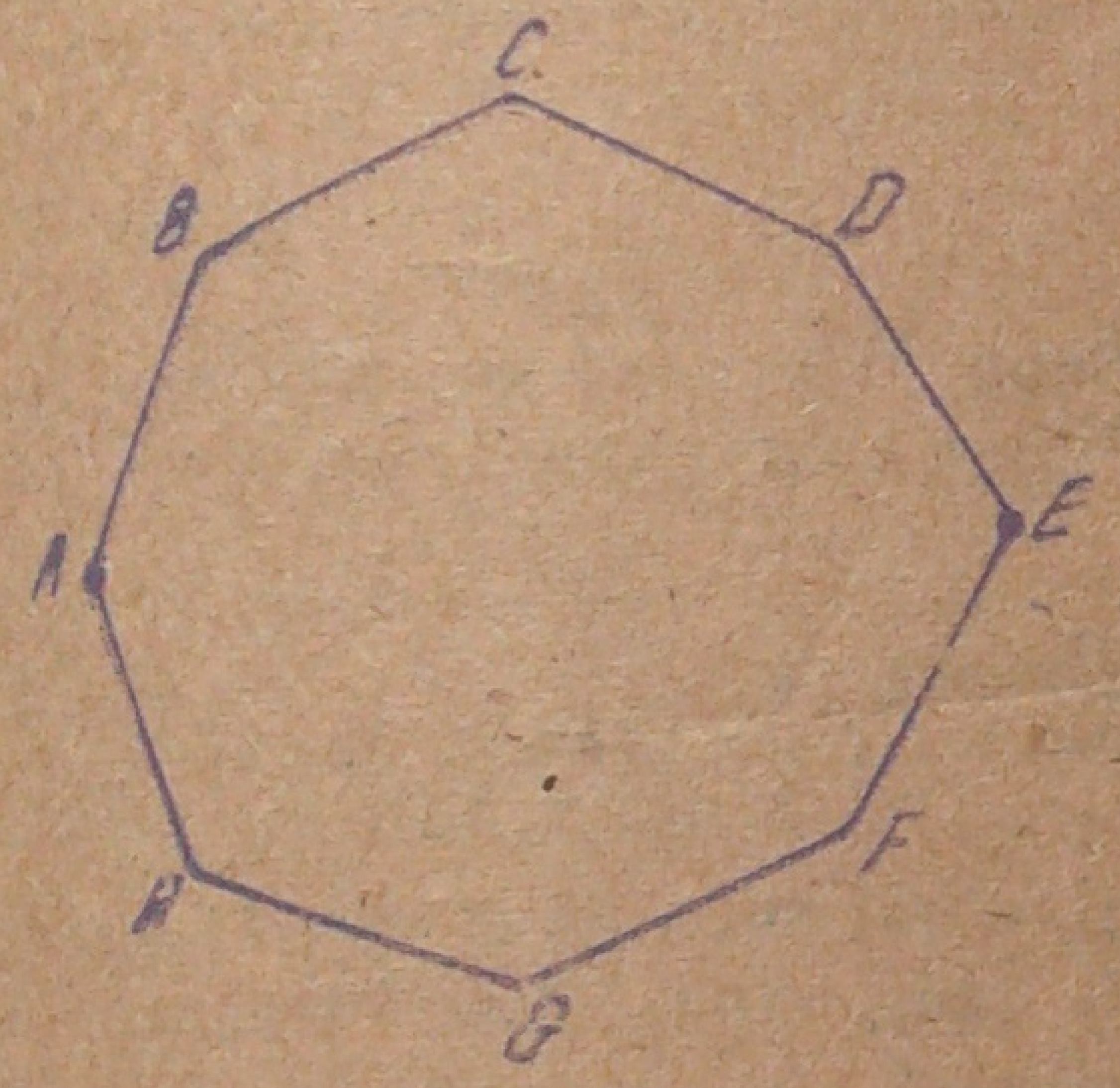
2) Một dãy con gồm các dấu từ dấu thứ nhất đến dấu thứ m với $m < n$ tùy ý có các dấu cộng và trừ chênh nhau không quá 3.

... Rõ ràng $a_{2n-1} = 0$, vì một dãy $2n - 1$ dấu ... số dấu cộng và số dấu trừ phải có một số ... và một số chẵn không thể chênh nhau đúng 4, ... là không thỏa mãn tính chất 1).

... Xét các dãy $2n$ dấu có số dấu cộng nhiều hơn số dấu trừ (ứng với các đường đi đến E qua đoạn DE, hình 5), ta gọi tất cả các dãy đó là các dãy cộng $2n$. Số các dãy cộng $2n$ là $b_{2n} = a_{2n}/2$.

Trước hết ta chứng minh công thức

$$b_{2n} = 4b_{2n-2} - 2b_{2n-4} \qquad (*)$$



Hình 5

Dễ thấy rằng $b_2 = 0$, $b_4 = 1$, $b_6 = 4$. Do đó có thể viết $b_6 = 4b_4 - 2b_2$, tức là công thức (*) đúng với $n = 3$.

Giả sử (*) đúng với $n = k - 1$:

$$b_{2k-2} = 4b_{2k-4} - 2b_{2k-6}$$

Ta chứng minh (*) cũng sẽ đúng với $n = k$.

Các dãy cộng $2k$ bao gồm các dãy sau đây:

(a) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 2$;

(b) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 3$;

(c) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 4$;

(d) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 5$;

(e) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 6$;

(f) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 7$.

Ngoài ra không còn dãy nào khác vì dễ thấy rằng với mỗi dãy cộng thì:

– Hai dấu cuối cùng phải là hai dấu cộng;

– Không thể cả 8 dấu cuối cùng là dấu cộng, vì nếu vậy thì một trong hai tính chất 1) hoặc 2) sẽ không được thỏa mãn.

Ta tính từng loại dãy trên:

+ Mỗi dãy cộng $2k - 2$ đều có dấu trừ cuối cùng ở trước vị trí thứ $2k - 3$, vì vậy từ mỗi dãy cộng $2k - 2$ sẽ lập được một dãy cộng $2k$ loại (a) bằng cách thêm một cặp $+\ -$ vào trước hai dấu cộng cuối cùng và lập được một dãy loại (b) bằng cách thêm một cặp $-\ +$ vào trước hai dấu cộng cuối cùng. Như vậy có ít nhất b_{2k-2} dãy loại (a) và b_{2k-2} dãy loại (b). Ta chứng minh *số dãy loại (a) đúng bằng* b_{2k-2}. Thật vậy dễ thấy rằng bất kỳ dãy loại (a) nào thì dấu ở vị trí $2k - 3$ là dấu cộng và dấu ở vị trí $2k - 2$ là dấu trừ. Vì vậy khi bỏ cặp $+\ -$ này đi thì sẽ được một dãy cộng $2k - 2$. Nếu số dãy loại (a) nhiều hơn b_{2k-2} thì bằng cách trên ta sẽ tìm được nhiều hơn b_{2k-2} dãy cộng $2k - 2$ là điều vô lý. Chứng minh tương tự ta có *số dãy loại (b) đúng bằng* b_{2k-2}.

+ Suy luận tương tự như trên sẽ thấy số dãy loại (c) bằng số dãy cộng $2k - 2$ không có dấu trừ ở vị trí $2k - 4$ tức là *số dãy loại (c) bằng* $b_{2k-2} - b_{2k-4}$.

+ *Số dãy loại (d)* bằng số dãy cộng $2k - 2$ không có dấu trừ ở vị trí $2k - 4$, $2k - 5$, tức là bằng

$$b_{2k-2} - b_{2k-4} - b_{2k-4} = b_{2k-2} - 2b_{2k-4}$$

+ *Số dãy loại (e)* bằng số dãy cộng $2k - 2$ không có dấu trừ ở các vị trí $2k - 4$, $2k - 5$, $2k - 6$, bằng

$$b_{2k-2} - 2b_{2k-4} - (b_{2k-4} - b_{2k-6}) =$$
$$= b_{2k-2} - 3b_{2k-4} + b_{2k-6}$$

+ *Số dãy loại (f)* bằng số dãy cộng $2k - 2$ không có dấu trừ ở các vị trí $2k - 4$, $2k - 5$, $2k - 6$, $2k - 7$, bằng

$$b_{2k-2} - 3b_{2k-4} + b_{2k-6} - (b_{2k-4} - 2b_{2k-6}) =$$
$$= b_{2k-2} - 4b_{2k-4} + 3b_{2k-6}.$$

Tổng số cả 6 loại bằng:

$$b_{2k} = 6b_{2k-2} - 10b_{2k-4} + 4b_{2k-6}$$
$$= 4b_{2k-2} - 2b_{2k-4} + 2(b_{2k-2} - 4b_{2k-4} + 2b_{2k-6})$$

Theo giả thiết qui nạp: $b_{2k-2} = 4b_{2k-4} - 2b_{2k-6}$, nên biểu thức trong ngoặc bằng 0. Vậy:

$$b_{2k} = 4b_{2k-2} - 2b_{2k-4}$$

Đẳng thức (*) được chứng minh.

Từ (*) suy ra đẳng thức:

$$a_{2k} = 4a_{2k-2} - 2a_{2k-4} \qquad (**)$$

Bây giờ dùng (**) và cũng bằng qui nạp ta chứng minh

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right] \qquad (1)$$

Dễ kiểm tra được (1) đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử (1) đã đúng với $n \leq k$, ta chứng minh (1) cũng sẽ đúng với $n = k+1$.

Thật vậy, từ (**) và từ giả thiết qui nạp ta có

$$a_{2k+2} = 4a_{2k} - 2a_{2k-2}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{k-1} - (2-\sqrt{2})^{k-1}\right] - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{k-2} - (2-\sqrt{2})^{k-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{[4(2+\sqrt{2}) - 2](2+\sqrt{2})^{k-2} - [4(2-\sqrt{2}) - 2](2-\sqrt{2})^{k-2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(6+4\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^{k-2} - (6-4\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^{k-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^2(2+\sqrt{2})^{k-2} - (2-\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2})^{k-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{k} - (2-\sqrt{2})^{k}\right] \text{ (đ.p.c.m.)}$$

Như vậy công thức (1) được chứng minh.

C.T.

Bài 1/108. *Các số nguyên a, b, m, n ($m \neq n$) thỏa mãn các tính chất sau đây: phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm nguyên,*

$$(m^2 + am + b)(n^2 + an + b) = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a + 4b = (m+n)(m+n-1).$$

Lời giải (của *Đàm Quyết Thắng* — 4E, khoa Toán đại học Sư phạm Hà Nội I).

Từ các tính chất của các số a, b, m, n dễ chứng minh được rằng:

Nếu $a = 0$ thì $b = 0$ và nếu $b = 0$ thì $a = 0$; trong cả hai trường hợp m và n nhận hai giá trị 1 và -1 và đẳng thức cần chứng minh được nghiệm đúng.

Bây giờ giả sử a và b khác 0.

Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm nguyên nên biệt số của nó là số chính phương:

$$a^2 - 4b = k^2.$$

Song vì các số chính phương khác 0 không thể hơn kém nhau 4 nên $k = 0$, tức là

$$a^2 = 4b.$$

Từ giả thiết

$$(m^2 + am + b(n^2 + an + b) = 1$$

suy ra hai thừa số ở vế trái hoặc cùng bằng 1 hoặc cùng bằng -1 (vì là hai số nguyên), ta có

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} m^2 + am + b - 1 = 0 \\ n^2 + an + b - 1 = 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} m^2 + am + b + 1 = 0 \\ n^2 + am + b + 1 = 0. \end{cases}$$

Xét (I): Vì $m \neq n$ nên m và n là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 + ax + b - 1 = 0$$

(biệt số của phương trình này bằng 4). Theo định lý Vi-ét ta có

$$m + n = -a.$$

Từ đó (1) và (2) ta có

$$a + 4b = a + a^2 = -(m+n) + (m+n)^2$$
$$= (m+n)(m+n-1) \quad \text{(đ.p.c.m.)}$$

Trường hợp (II) không xảy ra vì phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ có biệt số $\Delta = a^2 - 4(b+1) = a^2 - 4b - 4 = -4 <$

Bài 2/108. *Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức*

$$3.7...(2^n-1)/2.4...2^{n-1} < (2-2/n+1/n2^{n-1})^n$$

Lời giải (của nhiều bạn). Ta có

$$A = 3.7...(2n-1)/2.4...2^{n-1}$$
$$= 2^n.1/2.3/4.7/8...(2^n-1)/2^n$$
$$= 2^n(1-1/2)(1-1/4)...(1-1/2^n)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương $(1-1/2), (1-1/4),...,(1-1/2^n)$, ta có

$$A < 2^n\left[\frac{(1-1/2)+(1-1/4)+...+(1-1/2^n)}{n}\right]^n$$
$$= 2^n\left[\frac{n-(1/2+1/4+...+1/2^n)}{n}\right]^n$$
$$= 2^n\left(1-\frac{1-1/2^n}{n}\right)^n$$
$$= (2-2/n+1/n2^{n-1})^n \qquad \text{(đ.p.c.m).}$$

Bài 3/108. *Chứng minh rằng tất cả các nghiệm x của phương trình*

$$22\cos x + 6194 = x$$

đều thỏa mãn

$$1964 < x/\pi < 1979.$$

Hãy tính số nghiệm của phương trình trên.

Lời giải. Ta viết phương trình về dạng

$$\cos x = x/22 - 3097/11$$

Số các nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị hai hàm số

$$y_1 = \cos x \qquad (1)$$
$$y_2 = x/22 - 3097/11 \qquad (2)$$

Ta có khi $x = 6172$ thì $y_2 = -1$ và khi $x = 6216$ thì $y_2 = 1$. Vậy đường thẳng có phương trình (2) đi qua hai điểm $M_1(6172, -1)$ và $M_2(6216, 1)$. Mặt khác ta có

$$1964\pi < 6172 < 1965\pi$$
$$1978\pi < 6216 < 1979\pi$$

Do $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ với mọi x nên y_1 và y_2 chỉ cắt nhau trong khoảng $(1964\pi, 1979\pi)$. Nếu chia khoảng đó ra thành 15 khoảng có độ dài bằng π thì trong mỗi khoảng nhỏ đó có một và chỉ một điểm y_1 và y_2 cắt nhau. Vậy phương trình đã cho có 15 nghiệm và tất cả các nghiệm đều thỏa mãn

$$1964\pi < x < 1979\pi$$

tức là

$$1964 < x/\pi < 1979$$

Các bạn: *Ngô Duy Ninh* (12C Quang Trung, Qui Nhơn), *Nguyễn Quốc Quân* (phường 3, thị xã Bến Tre) có lời giải tốt.

Bài 4/108. *Cho $0 < \alpha < \pi/2$. Chứng minh rằng*

$$(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)\sin\frac{\alpha}{2} < 2\sqrt{3}/9.$$

Lời giải. Nhiều bạn đã chứng minh *bất đẳng thức mạnh hơn:*

$$(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)\sin\frac{\alpha}{2} < (2-\sqrt{2})/2$$

$$((2-\sqrt{2})/2 < (2-1{,}4)/2 = 0{,}3 < 3{,}4/9 < 2\sqrt{3}/9)$$

Cách chứng minh như sau:

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha+\pi/4) \leqslant \sqrt{2}$$

Do $0 < \alpha < \pi/2$ nên $\cos\alpha + \sin\alpha > 1$. Vậy

$$0 < \cos\alpha + \sin\alpha - 1 < \sqrt{2} - 1 \qquad (1)$$

Mặt khác

$$\sin(\alpha/2) < \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)\sin\frac{\alpha}{2} <$$
$$(\sqrt{2}-1).\sqrt{2}/2 = (2-\sqrt{2})/2 \qquad \text{(đ.p.c.m)}$$

Bài 5/108. *Giả sử O là tâm và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi R, R_1, R_2, R_3 tương ứng là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB. Chứng minh hệ thức:*

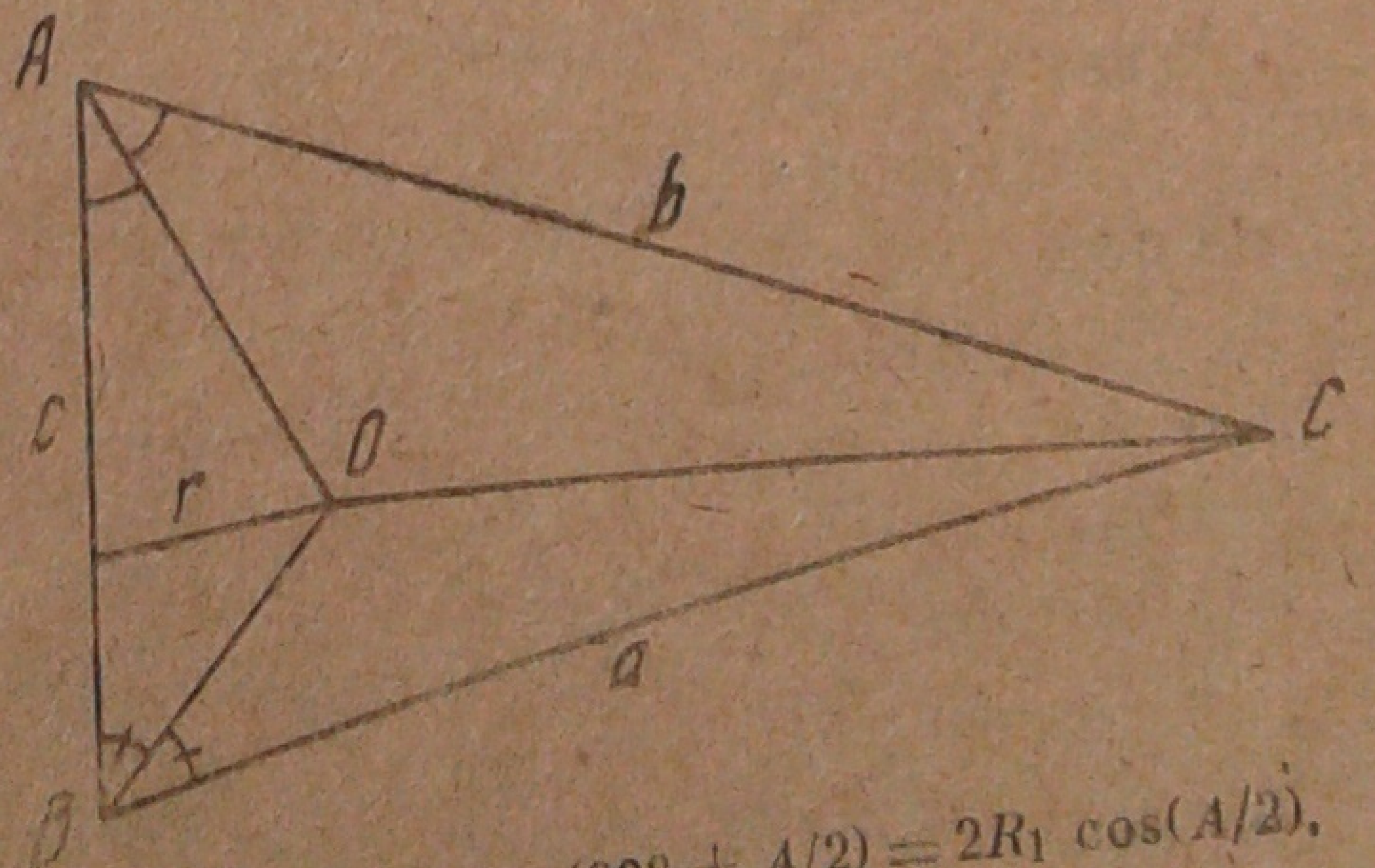
$$R_1R_2R_3 = 2R^2r$$

Lời giải (của *Nguyễn Ngọc Khánh* – 9C Đoàn Kết, Hà Nội).

Ta có:

$$\widehat{BOC} = 90^\circ + A/2, \ \widehat{COA} = 90^\circ + B/2,$$
$$\widehat{AOB} = 90^\circ + C/2.$$

Do đó nếu gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC như hình vẽ thì



$$a = 2R_1\sin(90^\circ + A/2) = 2R_1\cos(A/2),$$
$$b = 2R_2\cos(B/2),$$
$$c = 2R_3\cos(C/2). \text{ Vậy}$$
$$abc = 8R_1R_2R_3\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)$$

Từ đó $R_1R_2R_3 = abc/8\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)$ (*)

Từ định lý hàm số cosin ta có

$$(b^2 + c^2 - a^2)/2bc = \cos A = 2\cos^2(A/2) - 1.$$

Vậy

$$2\cos^2(A/2) = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)/2bc$$
$$= [(b + c)^2 - a^2]/2bc$$
$$= (b + c + a)(b + c - a)/2bc$$

Từ đó:

$$\cos(A/2) = \sqrt{p(p-a)/bc}$$

(p là nửa chu vi của tam giác ABC).

Tương tự:

$$\cos(B/2) = \sqrt{p(p-b)/ca},$$
$$\cos(C/2) = \sqrt{p(p-c)/ab}.$$

Thay vào (*) ta được

$$R_1R_2R_3 = abc : (8pS/abc) = a^2b^2c^2/8pS \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$2R^2r = 2(abc/4S)^2.S/p = a^2b^2c^2/8pS \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 6/108. *Trong tam giác ABC có* $\operatorname{cotg}(A/2)$, $\operatorname{cotg}(B/2)$, $\operatorname{cotg}(C/2)$ *lập thành cấp số cộng.*

a) Chứng minh rằng độ dài các cạnh của tam giác lập thành cấp số cộng.

***b) Tìm** góc lớn nhất của tam giác biết* $\operatorname{cotg}(A/2)$, $\operatorname{cotg}(B/2)$, $\operatorname{cotg}(C/2)$ *là ba số nguyên liên tiếp.*

Lời giải. (của *Ngô Duy Ninh* – 12C Quang Trung Qui Nhơn, *Nguyễn Thanh Nhã* – 11C8 Lê Hồng Phong, T.P. Hồ Chí Minh).

a. Ta đã biết

$$r = (p - a)\operatorname{tg}(A/2) = (p - b)\operatorname{tg}(B/2)$$
$$= (p - c)\operatorname{tg}(C/2). \text{ Từ đó}$$
$$\operatorname{cotg}(A/2) = (p - a)/r,$$
$$\operatorname{cotg}(B/2) = (p - b)/r,$$
$$\operatorname{cotg}(C/2) = (p - c)/r.$$

Theo giả thiết:

$$2\operatorname{cotg}(B/2) = \operatorname{cotg}(A/2) + \operatorname{cotg}(C/2)$$

do đó

$$2(p - b) = (p - a) + (p - c)$$

hay

$$2b = a + c.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ a, b, c, lập thành cấp số cộng.

b. Từ $2\operatorname{cotg}(B/2) = \operatorname{cotg}(A/2) + \operatorname{cotg}(C/2)$

suy ra $2\operatorname{tg}\dfrac{A+C}{2} = 1/\operatorname{tg}(A/2) + 1/\operatorname{tg}(C/2)$ hay

$$2\,\frac{\operatorname{tg}(A/2) + \operatorname{tg}(C/2)}{1 - \operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(C/2)} = \frac{\operatorname{tg}(A/2) + \operatorname{tg}(C/2)}{\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(C/2)}$$

Chia cả hai vế cho $\operatorname{tg}(A/2) + \operatorname{tg}(C/2)$ được $2\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(C/2) = 1 - \operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(C/2)$

hay

$$3\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(C/2) = 1$$

Từ đó

$$\operatorname{cotg}(A/2)\operatorname{cotg}(C/2) = 3$$
$$\operatorname{cotg}(A/2)\,[\operatorname{cotg}(A/2) + 2] = 3$$
$$\operatorname{cotg}^2(A/2) + 2\operatorname{cotg}(A/2) - 3 = 0$$

Giải phương trình trên được một nghiệm thích hợp $\operatorname{cotg}(A/2) = 1$, $A = \pi/2$. Vậy góc lớn nhất của tam giác bằng $\pi/2$.

Bạn *Nguyễn Trọng Thắng* (10K Lê Q... Hà Nội) giải phần b ngắn gọn hơn như sau:

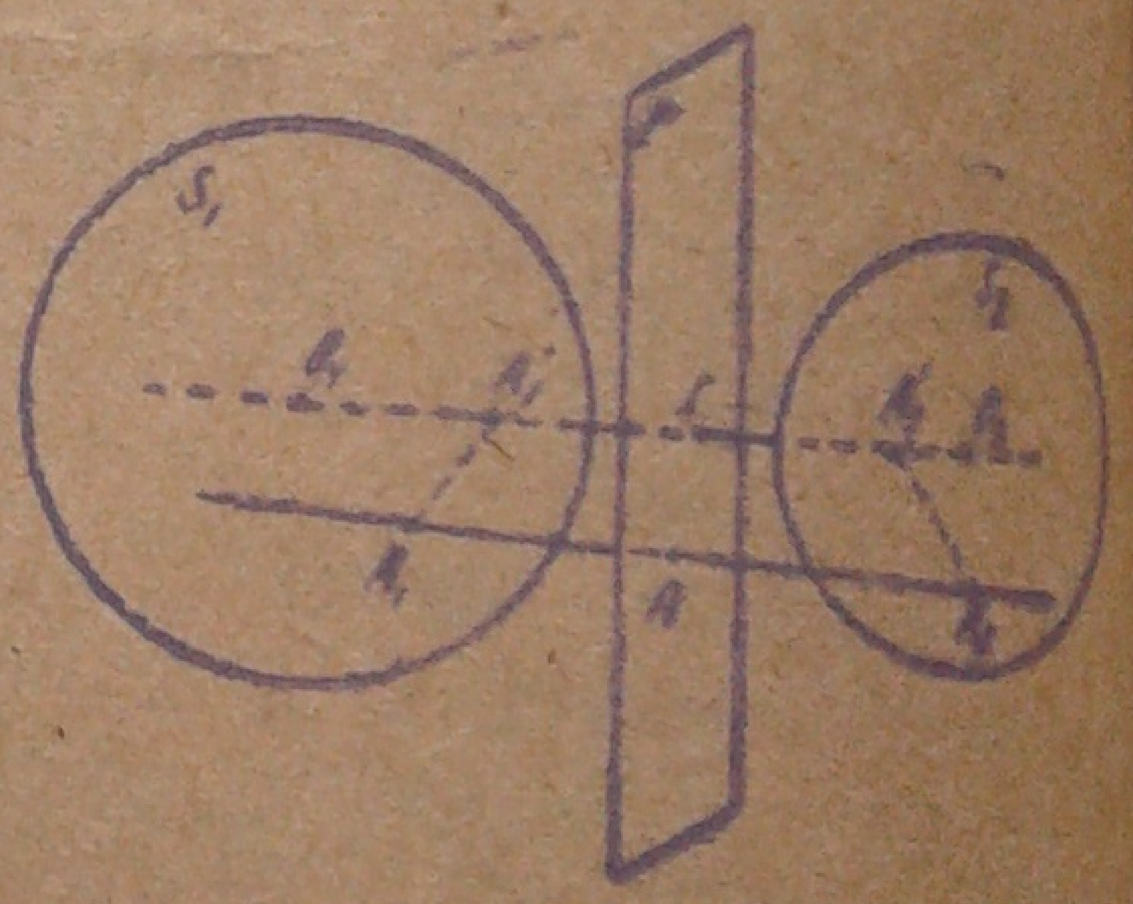
Góc A là góc lớn nhất của tam giác, vì $A < 180°$, hay $30° < A/2 < 90°$.

Ta có $\operatorname{cotg} 30° > \operatorname{cotg}(A/2) > \operatorname{cotg} 90°$

hay $\sqrt{3}/2 > \operatorname{cotg}(A/2) > 0$.

Vì $\operatorname{cotg}(A/2)$ là số nguyên nên $\operatorname{cotg}(A/2) = 1$, tức $A = 90°$.

Bài 7/108. *Hai mặt cầu* S_1, S_2 *có ... tuyến chung* A_1A_2, B_1B_2 (A_1, B_1 *thuộc* S_1, ... *thuộc* S_2). *Chứng minh rằng các hình chiếu ... các dây* A_1B_1 *và* A_2B_2 *trên đường nối tâm ... mặt cầu là những đoạn thẳng bằng nhau.*



Lời giải. Giả sử mặt phẳng đẳng phương của hai mặt cầu cắt A_1A_2 ở A và cắt đường nối tâm O_1O_2 ở I; hình chiếu của A_1, A_2 trên đường nối tâm là A_1', A_2'. Do $AA_1 = AA_2$ ... $IA_1' = IA_2'$, tức là A_1' và A_2' đối xứng với nhau qua I. Tương tự, nếu B_1' và B_2' là các hình chiếu của B_1 và B_2 trên đường nối tâm thì B_1' và B_2' đối xứng với nhau qua I. Từ đó các đoạn $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$ cũng đối xứng với nhau qua I, do đó chúng bằng nhau.

Bài 8/108. *Cho ba số a, b, c khác 0 ... nhau thỏa mãn đẳng thức:*

$$2(1/a + 1/b + 1/c) - (a/bc + b/ca + \ldots)$$
$$= 8/(a + b + c).$$

...ng minh rằng ... lẻ thì

$$\left[\left(\frac{a}{b-c}\right)^n+\left(\frac{b}{c-a}\right)^n+\left(\frac{c}{a-b}\right)^n\right]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{b-c}{a}\right)^n+\left(\frac{c-a}{b}\right)^n+\left(\frac{a-b}{c}\right)^n\right]=1$$

...giải (của *Ngô Duy Ninh* – 12C Quang Trung, ...nhơn; *Nguyễn Ngọc Khánh* – 9C Đoàn Kết, ...).

...ng thức ở đầu bài tương đương với

$$(a+b+c)(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2)=8abc$$

$$(a+b+c)[2c(a+b-c)+c^2-(a-b)^2]=8abc$$

$$(a+b+c)(a+b-c)+(a+b+c)\times$$

$$\times(c-a+b)(c+a+b)=8abc$$

$$[(a+b)^2-c^2-4ab]+(a+b+c)\times$$

$$\times(c-a+b)(c+a-b)=0$$

$$[(a-b)^2-c^2]+(a+b+c)(c-a+b)\times$$

$$\times(c+a-b)=0$$

$$(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c-2c)=0$$

$$(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)=0$$

$$\frac{(a-b+c)(c-a)}{(a-b)(b-c)}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b)}{(b-c)(c-a)}\times$$

$$\times\frac{(-a+b+c)(b-c)}{(c-a)(a-b)}=0$$

$$\frac{a(a-b)+c(b-c)}{(a-b)(b-c)}\cdot\frac{b(b-c)+a(c-a)}{(b-c)(c-a)}\times$$

$$\times\frac{c(c-a)+b(a-b)}{(c-a)(a-b)}=0$$

$$\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-a}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{b}{c-b}+\frac{c}{a-b}\right)=0$$

Một trong ba thừa số ở vế trái phải bằng 0, ...vậy với n lẻ ta có

$$\left[\left(\frac{c}{a-b}\right)^n+\left(\frac{a}{b-c}\right)^n\right]\left[\left(\frac{a}{b-c}\right)^n+\left(\frac{b}{c-a}\right)^n\right]$$

$$\times\left[\left(\frac{b}{c-a}\right)^n+\left(\frac{c}{a-b}\right)^n\right]=0.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 9/108. *Tìm tất cả các số liệt không giảm*

$$x_1, x_2, \ldots, x_{1979}$$

...1979 số hạng là những số nguyên dương sao ...mỗi số hạng không lớn hơn 1964 và

$$P=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x^2_{1979}}{(x_1+x_2\ldots+x_{1979})^2}$$

...giá trị lớn nhất.

Lời giải. Đặt $a=x_1=\min(x_1, x_2, \ldots, x_{1979})$, ta có

$$(x_k-a)(x_k-1964)\leqslant 0\ (k=1,2,\ldots,1979)$$

$$\leftrightarrow x_k^2-(a+1964)x_k+1964a\leqslant 0.$$

Lấy tổng từ 1 đến 1979 và đặt

$$A=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{1979}^2)/1979,$$

$$B=(x_1+x_2+\ldots+x_{1979})/1979$$

thì ta được

$$A-(a+1964)B+1964a\leqslant 0$$

hay

$$A\leqslant(a+1964)B-1964a$$

$$A/B^2\leqslant-1964a/B^2+(a+1964)/B.$$

Đặt vế phải bằng $f(1/B)$, nó là tam thức bậc hai đối với $1/B$ có hệ số của $(1/B)^2$ là $-1964a<0$, vì vậy

$$f(1/B)\leqslant f\left(\frac{a+1964}{2.1964a}\right)=\frac{(a+1964)^2}{4.1964a}.$$

Do đó $A/B^2\leqslant\dfrac{(a+1964)^2}{4.1964a}$.

Ta có $P=1979A/1979^2B^2=A/1979B^2$

nên $P\leqslant\dfrac{1}{1979}\cdot\dfrac{(a+1964)^2}{4.1964a}$.

Như vậy P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$$(x_k-a)(x_k-1964)=0\ (k=1,2,\ldots,1979)$$

và

$$B=2.1964a/(a+1964)$$

Gọi x là số các số hạng của số liệt bằng 1964, ta có

$$B=\frac{(1979-x).a+1964x}{1979}=\frac{2.1964a}{a+1964}$$

$$\Rightarrow(1964-a)x=(1964-a)1964a/(a+1964)$$

1) Nếu $1964-a\neq 0$ thì $x=1979a/(a+1964)$. Dễ chứng minh được rằng x nguyên khi và chỉ khi $a=15$, $x=15$ (chú ý 1979 là số nguyên tố). Ta có số liệt:

$$x_1=x_2=\ldots=x_{1964}=15,$$

$$x_{1965}=x_{1966}=\ldots=x_{1979}=1964$$

Khi đó:

$$P_1=(1/1979)(15+1964)^2/(4.1964.15)=1979/(60.1964)$$

2) Nếu $1164-a=0$ thì $a=1964$, khi đó

$$x_1=x_2=\ldots=x_{1979}=1964$$

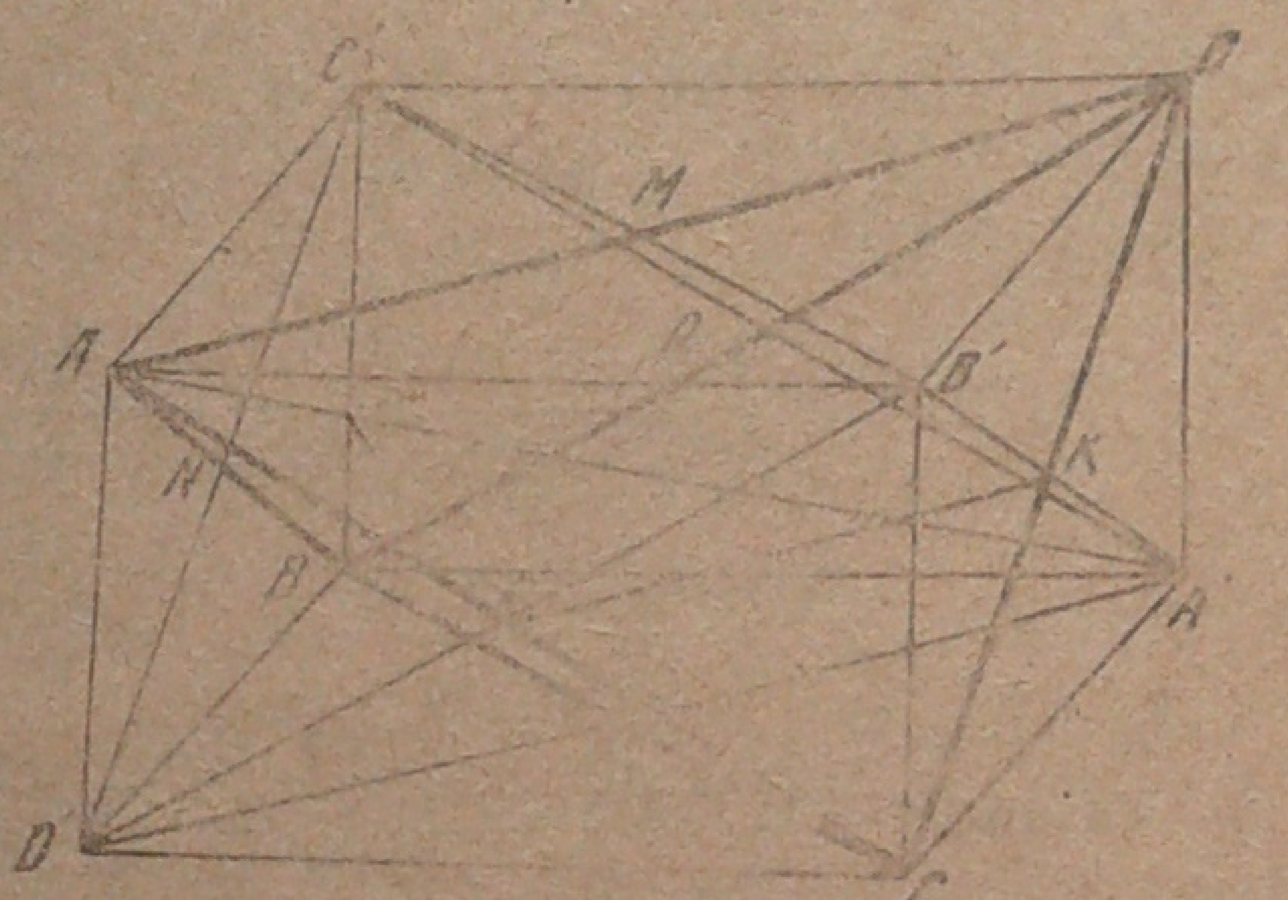
và $P_2=1/1979$.

Nhưng rõ ràng $P_2 < P_1$, vì vậy chỉ có một số liệt thỏa mãn điều kiện bài là liệt tìm ra ở phần 1).

Bài 10/108. *Cho tứ diện nửa đều ABCD. Độ dài các cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh là a, b, c, có $a + b + c = S$ không đổi.*

a) Chứng minh rằng nếu qua điểm giữa mỗi cạnh dựng các đường thẳng song song với cạnh đối của cạnh đó thì ta được tứ diện mới $A'B'C'D'$.

b) Từ một đỉnh của một trong hai tứ diện trên nối với các đỉnh của tứ diện còn lại và gọi d là khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách trên. Tìm hệ thức giữa a, b, c để d đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải. a. Gọi I, K, M, N, P, Q là trung điểm của AC, CD, DA, AB, BC, DB. Dễ thấy $IK // AD$. Qua IK dựng mặt phẳng R song song với (ADB). Nếu qua I, K dựng các đường thẳng x song song với BD, y song song với AB thì $x, y // (ADB)$ và $x, y \in R$. Vì AB, BC không song song nên x, y cũng không song song. Vậy x và y phải cắt nhau, giả sử tại B'.

Làm tương tự ta cũng tìm được A', C', D'. Ta được tứ diện mới $A'B'$...

b. Gọi α_1 là mặt phẳng qua AC và ...

α_2 là mặt phẳng qua DB và ...

β_1 là mặt phẳng qua CD và ...

β_2 là mặt phẳng qua AB và ...

γ_1 là mặt phẳng qua AD và ...

γ_2 là mặt phẳng qua BC và ...

Ta có $\alpha_1 // \alpha_2$, $\beta_1 // \beta_2$, $\gamma_1 // \gamma_2$. Do ... $AB'DC'.D'CA'B$ là khối hộp. Tứ giác ... hình bình hành nên $B'D' = BD$. Nhưng ... nên $B'D' = AC$ và hình bình hành $AB'CD'$ ... chữ nhật. Chứng minh tương tự đối ... mặt khác ta cũng được chúng là các ... nhật. Vậy khối hộp tạo được là khối ... nhật.

Đặt $AC = a$, $AB = b$, $AD = c$, ta ... $AA' = d$. Gọi $D'A = x$, $D'C = y$, $D'B = z$ ...

$$a^2 = x^2 + y^2,\ b^2 = x^2 + z^2,\ c^2 = y^2 \ldots$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \ldots}$$

$$= \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)}/\sqrt{6}$$

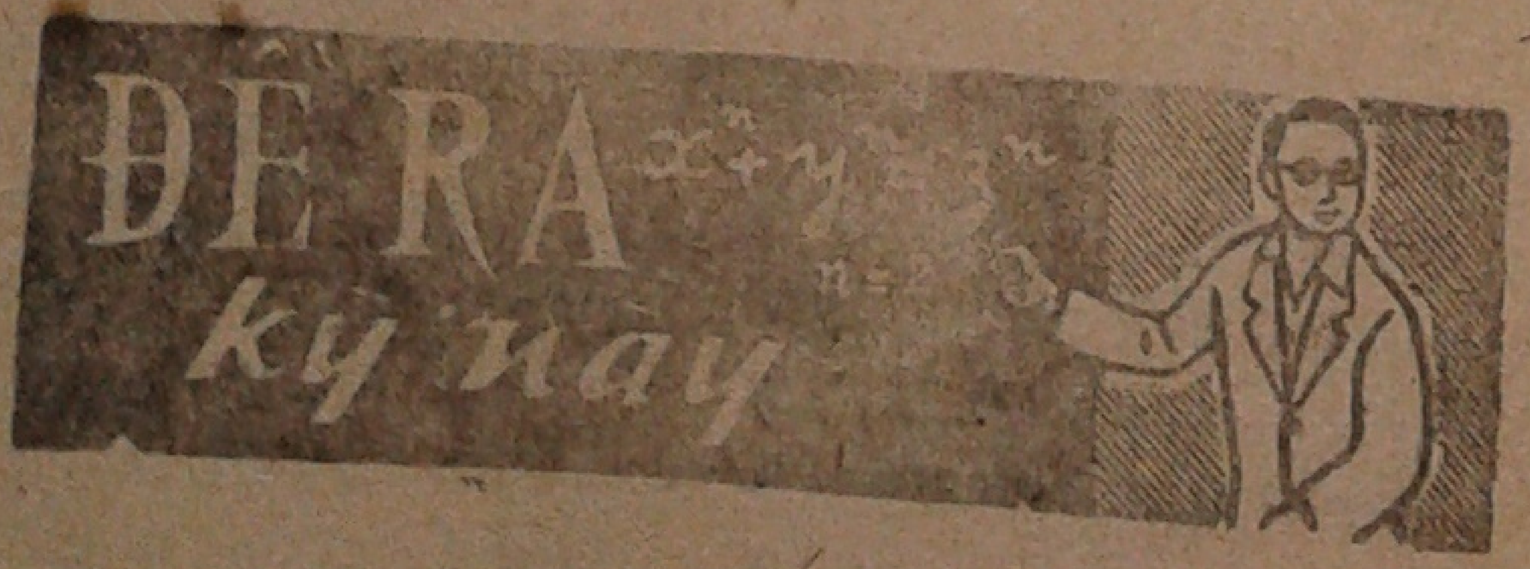
Theo bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki

$$\sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)} \geqslant a + b \ldots$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ ... đó $d \geqslant (a + b + c)/\sqrt{6}$

Giá trị nhỏ nhất của $d = (a + b + c$ ... $S/\sqrt{6}$ đạt được khi và chỉ khi $a = b = c$

Vậy hệ thức phải tìm là $a = b = c = $ ...



Bài 1/111. Hãy xét xem trong dãy số $\{a_n\}$

với $a_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} + 5$

(n con số 2) có bao nhiêu số là số nguyên tố.

Lê Việt Nga (ĐHSP Vinh)

Bài 2/111. Tìm hai số chính phương ... nhau $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ thỏa mãn điều ...

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = a_4 - b_4$$

Lê Quốc Hán (ĐHSP Vinh)

Bài 3/111. Giả sử AD, BE, CF là các ... giác trong của tam giác ABC và M, N, P ... ứng là các điểm giữa của chúng. Chứng ... rằng diện tích tam giác MNP bằng 1/4 di... tam giác DEF.

Lê Quốc Hán

Bài 4/111. Chứng minh rằng với mọi ... trị dương của a và b ta luôn có bất đẳng ...

$$(1 + a + b)(ab + a + b) \geqslant 9ab$$

Vũ Quang Lâm (Hà Nam Ninh)

5/111. Tính giá trị biểu thức

$$\frac{(\sin 2x+\sin 4x)^5-(\sin x+\sin 2x-\sin 4x)^5}{(\sin 4x-\sin x)^5-(\sin 4x+\sin x-\sin 2x)^5},$$

$x = 20^\circ$.

Nguyễn Hải Châu (Hải Hưng)

6/111. Từ một tam giác T_0 người ta ... một dãy vô hạn những tam giác T_0, ... theo quy tắc sau: các đỉnh của tam ... là các tiếp điểm của các cạnh của ... T_i với đường tròn nội tiếp của tam giác T_i ($i = 1, 2, \ldots$). Chứng minh bất đẳng thức

$$p_0 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} p_i \qquad (1)$$

... p_i là nửa chu vi của tam giác T_i ... Tam giác T_0 phải thỏa mãn điều ... để ở (1) có đẳng thức?

Nguyễn Công Quỳ
(ĐHSP T.P. Hồ Chí Minh)

7/111. Các đường chéo của tứ giác nội ... $ABCD$ cắt nhau ở M. Cho biết bán kính ... đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ... MBC, MCD, MDA, hãy tính bán kính của ... tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Nguyễn Công Quỳ

Bài 8/111. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác ... với mọi giá trị của x, thỏa mãn điều kiện ... số thực a sao cho

$$f(x+a) = f(x) + g(x)$$

$$g(x+na) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -g(x) & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

$f(x) = 1$ nếu $0 \leqslant x \leqslant a$.

Chứng minh rằng nếu $|g(x)| \leqslant 1$ thì

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 2.$$

Đinh Quang Mẹo (Bình Trị Thiên)

Bài 9/111. Cho hình vuông có cạnh bằng 8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị. Có một loạt các vết cắt làm cho không có một ô vuông nào nguyên vẹn, nhưng có ít nhất một đỉnh của hình vuông không có nhát cắt nào đi qua, chia hình vuông thành một số chẵn các tam giác có diện tích bằng nhau. Hỏi số tam giác đó ít nhất là bao nhiêu?

Lê Thống Nhất (ĐHSP Vinh)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/111. Cho biết

$$x_1^{a_{11}} + x_2^{a_{12}} + \ldots + x_n^{a_{1n}} = y_1$$

$$x_1^{a_{21}} + x_2^{a_{22}} + \ldots + x_n^{a_{2n}} = y_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^{a_{n1}} + x_2^{a_{n2}} + \ldots + x_n^{a_{nn}} = y_n.$$

Trong đó $x_i > 0$ ($i = 1, \ldots, n$) và

$$a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{nk} = 0 \ (k = 1, \ldots, n).$$

Chứng minh rằng

$$y_1^{1979} + y_2^{1979} + \ldots + y_n^{1979} \geqslant n^{1980}$$

Nguyễn Đức Học
(9C Lê Hồng Phong, Hà Nam Ninh)

Sửa lại: Bài 4/110 ở số báo trước sửa $3x^2$ thành $3z^2$.

... hiểu sâu thêm toán học phổ thông

SƠ LƯỢC LÝ THUYẾT CHIA HẾT ĐỐI VỚI CÁC ĐA THỨC

LÊ QUỐC HÁN

... báo Toán học và tuổi trẻ cũng như trong các kỳ thi giỏi toán có nhiều bài ... liên quan đến vấn đề chia hết của các ... Vì có nhiều bạn học sinh phổ thông chưa được biết đến, nên trong bài này sẽ giới thiệu vài nét về vấn đề đó.

Giả sử $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ với các hệ số a_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) là các số hữu tỷ.

Khi đó n được gọi là *bậc của đa thức* $f(x)$ và được ký hiệu là deg $f(x)$. Người ta đã chứng minh được rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức với hệ số hữu tỷ thì tồn tại duy nhất hai đa thức $q(x)$ và $r(x)$ với hệ số hữu tỷ sao cho $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$, trong đó hoặc $r(x) = 0$ hoặc deg $r(x) <$ deg $g(x)$. Nếu $r(x) = 0$ thì người ta nói rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Từ định nghĩa ta suy ra:

1) Nếu $f(x)$ chia hết $g(x)$ mà deg $f(x) <$ deg $g(x)$ thì $f(x) = 0$.

2) Lý thuyết về chia hết của các số nguyên có thể mở rộng cho lý thuyết chia hết của các đa thức. (Chẳng hạn: nếu $f(x)$ và $g(x)$ chia hết cho $p(x)$ thì $f(x) \pm g(x)$ chia hết cho $p(x)$,..).

Sau đây, nêu thêm một số định lý quan trọng đặc trưng về lý thuyết chia hết của đa thức.

Mệnh đề 1 (*định lý Bedu*). Điều kiện ắt có và đủ để đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - a$ là $f(a) = 0$.

Chứng minh. Giả sử $f(x) = (x - a).g(x) + b$ (vì deg$(x - a) = 1$) thế thì $f(x) = 0 \Leftrightarrow b = 0$, nên $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) \vdots (x - a)$.

Mệnh đề 2. Điều kiện ắt có và đủ để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ là: với mọi a sao cho $g(a) = 0$ ta đều có $f(a) = 0$.

Ta công nhận mệnh đề này, vì chứng minh nó phải dùng đến số phức.

Ví dụ 1. Tìm điều kiện ắt có và đủ để cho $x^n - a^n$ chia hết cho $x^k - a^k$, với n và k là các số tự nhiên ($n \geqslant k$).

Ta có: $n = kq + r$ với $q \geqslant 1$, $0 \leqslant r < k$ và $x^n - a^n = x^{kq+r} - a^{kq+r} = x^r(x^{kq} - a^{kq}) + a^{kq}(x^r - a^r)$ chia hết cho $x^k - a^k$ khi và chỉ khi $x^r - a^r$ chia hết cho $x^k - a^k$ (vì $x^{kq} - a^{kq} = (x^k)^q - (a^k)^q$ chia hết cho $x^k - a^k$), mà deg $(x^r - a^r) <$ deg$(x^k - a^k)$ nên $x^r - a^r = 0$ với mọi $x \Leftrightarrow r = 0$.

Kết luận $(x^n - a^n)$ chia hết cho $x^k - a^k$ khi và chỉ khi n chia hết cho k.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện ắt có và đủ để $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

Chỉ dẫn: $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1$.

Do đó $x^m + x^n + 1 \equiv 0 \Leftrightarrow m \equiv 2 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 3$, ở đây vai trò m và n có thể đánh đổi cho nhau.

Đạo hàm của đa thức $f(x)$ được định nghĩa (và ký hiệu) hoàn toàn như định nghĩa (và ký hiệu) của đạo hàm hàm số $f(x)$. Định ... có ích trong nhiều ứng dụng:

Mệnh đề 3. Điều kiện ắt có và ... thức $f(x)$ chia hết cho « đa thức » ... $f(a), f'(a), \ldots, f^{(k-1)}(a)$ bằng 0.

Chứng minh. Điều kiện ắt có là d... chứng minh điều kiện đủ: Giả sử

$$f(x) = (x - a)^k.g(x) + r(x)$$

với $r(x) = b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1x ...$

$$f'(x) = k(x - a)^{k-1}.g(x) + (x - a)^k g' ...$$
$$= (x - a)^{k-1}.g_1(x) + r'(x), \ldots$$
$$f^{(k-1)}(x) = (x - a)g_{k-1}(x) + r^{(k-1)}(x)$$

(Các qui tắc lấy đạo hàm vẫn đúng ... chứng minh).

Vì $f^{(k-1)}(a) = 0$ nên $r^{(k-1)}(a) = 0 \Rightarrow$ ...
Tương tự, từ
$f^{(k-2)}(a) = 0, \ldots, f(a) = 0 \Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow$ ... hết cho $(x - a)^k$.

Bài tập 1. Chứng minh điều kiện ... để $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^k$ mà không ... cho $(x - a)^{k+1}$ là $f(a) = 0$, $f'(a) = 0, \ldots, f^{(k-1)}$ ... nhưng $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Ví dụ 3. Tìm a và b để cho $f(x) = 2x$... $bx^2 + ax - b$ chia hết cho $(x - 1)^2$. Chứng minh rằng khi đó $f(x)$ không chia hết cho $(x$ ...

Giải. $f(1) = 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$

$$f'(1) = 8 + 3a + 2b + a = 0 \Rightarrow \ldots$$

Vậy $a = -1$, $b = -2$. Khi đó $f''(1) = 24 -$ ... nên $f(x)$ không chia hết cho $(x - 1)^3$.

Bây giờ, các bạn dùng những kiến th... để giải các bài tập sau đây:

1) Tìm điều kiện ắt có và đủ để $x^n +$ ... hết cho $x^k + 1$..

2) Chứng minh rằng $x^{9999} + x^{8888} + \ldots$ chia hết cho $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1$.

3) Tìm điều kiện để $x^m + x^n + x^p$ chia ... $x^4 + x^2 + 1$. Khi đó $x^m + x^n + x^p$ có chia ... $(x^2 - x + 1)^2$ không?

4) Chứng minh rằng với mọi số tự n... ta đều có: $1 + x^{10} + x^{1969}$ và $1 + x^{16} + x^{197..}$ nguyên tố cùng nhau.

5) Tồn tại hay không số nguyên tố p ... $x^2 + px + p^2$ chia hết cho 3 với mọi x ...

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

QUỐC TRINH

Chương trình đại số hiện nay ở trường phổ thông các bạn chỉ học một loại phương trình bậc bốn đặc biệt. Đó là phương trình trùng phương.

Xin giới thiệu với các bạn vài cách giải phương trình bậc bốn dạng

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$

a, b, c, d là các số thực khác không.

Với các phương trình bậc bốn, trong một trường hợp cụ thể, nếu bạn có *cách nhìn biết biến đổi hợp lý và sáng tạo*, bạn có thể giải được chúng không khó khăn gì.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) được viết thành

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$$

$$x^4 - (2a + 6)\, x^2 + 4x + a^2 + 2a = 0 \qquad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình bậc bốn tổng quát mà bạn không được học cách giải. Nhưng ta lại có thể viết phương trình (1) dưới dạng

$$a^2 - 2(x^2 - 1)\, a + x^4 - 6x^2 + 4x = 0 \qquad (3)$$

và (3) là phương trình bậc hai đối với a.

Với cách nhìn này, ta tìm được a theo x:

$$a = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 6x^2 - 4x}$$

$$= x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

$$= x^2 - 1 \pm (2x - 1).$$

Giải các phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 + 2x - a - 2 = 0 \qquad (4)$$

$$x^2 - 2x - a = 0 \qquad (5)$$

ta được các nghiệm của (1) theo a.

Điều kiện để (4) có nghiệm là $3 + a \geqslant 0$

và nghiệm của (4) là $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3 + a}$

Điều kiện để (5) có nghiệm là $1 + a \geqslant 0$ và nghiệm của (5) là

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 + a}\,.$$

Tổng kết,

a		-3 -1	
Phương trình (4)	Vô nghiệm	2 nghiệm	2 nghiệm
Phương trình (5)	Vô nghiệm	Vô nghiệm	2 nghiệm
Phương trình (1)	Vô nghiệm	2 nghiệm	4 nghiệm

1 nghiệm 3 nghiệm

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$x^4 - x^3 - x^2 - (4x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$x^2\,(x^2 - x - 1) - 4\,(x^2 - x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 4)\,(x^2 - x - 1) = 0.$$

Vậy (1) có 4 nghiệm là:

$$x_1 = -2;\ x_2 = 2;$$

$$x_3 = (1 - \sqrt{5})/2;\ x_4 = (1 + \sqrt{5})/2$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0 \qquad (1)$$

Ta viết (1) dưới dạng:

$$2\,(16x^4 - 24x^3 + 9x^2) - 7\,(4x^2 - 3x) + 5 = 0$$

và đặt

$y = 4x^2 - 3x$ thì (1) được biến đổi thành

$$2y^2 - 7y + 5 = 0.$$

Từ đó $y_1 = 1$ và $y_2 = 5/2$.

Giải tiếp các phương trình bậc hai đối với x sau đây (sau khi thay $y_1 = 1$ và $y_2 = 5/2$ vào $y = 4x^2 - 3x$):

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\text{và } 8x^2 - 6x - 5 = 0,$$

ta sẽ được các nghiệm của (1).

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0 \qquad (1)$$

Đây là phương trình bậc bốn (và là *phương trình đối xứng* vì các hệ số của những số hạng cách đều các số hạng đầu và cuối bằng nhau).

Với phương trình này ta giải như sau:

Chia hai vế của phương trình cho x^2 (khác không) thì (1) tương đương với

$$2x^2 + 3x - 16 + 3/x + 2/x^2 = 0$$

hay $\quad 2(x^2+1/x^2)+3(x+1/x)-16 = 0.$

Đặt $\quad x+1/x = y$ thì $(x+1/x)^2 = y^2$

hay $\quad x^2+1/x^2=y^2-2.$

Phương trình (1) được biến đổi thành:

$$2(y^2-2)+3y-16=0$$

hay $\quad 2y^2+3y-20=0.$

Phương trình này có nghiệm là $y_1 = -4$, $y_2 = 5/2$.

Vì vậy $x+1/x = -4$ và $x+1/x = 5/2$

tức là $\quad x^2+4x+1=0$ và $2x^2-5x+2=0.$

Từ đó ta tìm được các nghiệm của (1) là:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}, \quad x_3 = 1/2, \quad x_4 = 2.$$

Như vậy, với các ví dụ 2, 3 và 4 ta giải được phương trình bậc bốn nhờ *biết biến đổi sáng tạo vế trái của phương trình để dẫn tới việc giải các phương trình tích và phương trình quen thuộc.*

§ 2. Có thể giải phương trình bậc bốn nói trên bằng cách phân tích vế trái của phương trình thành các nhân tử *bằng phương pháp hệ số bất định.*

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0. \qquad (1)$$

Ta thử phân tích vế trái của phương trình ra hai nhân tử bậc hai x^2+px+q và x^2+rx+s, trong đó p, q, r, s là các hệ số nguyên chưa xác định.

Ta có:

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14 = \\ =(x^2+px+q)(x^2+rx+s) \qquad (2)$$

Đồng nhất các hệ số của những số hạng cùng bậc ở hai vế của đồng nhất thức ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} p+r=-4 \\ s+q+pr=-10 \\ ps+qr=37 \\ qs=-14 \end{cases}$$

Nhờ phương trình cuối cùng của hệ ta đoán nhận các giá trị nguyên tương ứng có thể lấy được của q và s như sau:

q	1	2	7	14	−1	−2	−7
s	−14	−7	−2	1	14	7	2

Thử lần lượt các giá trị trên của q thì với $q=2$, $s=-7$ phương trình thứ hai và ba của hệ trên cho ta hệ phương trình

$$\begin{cases} pr=-5 \\ -7p+2r=37 \end{cases}$$

mà khử p đi thì được

$$2r^2 - 37r + 35 = 0.$$

Phương trình này cho nghiệm nguyên là 1. Nhờ thế ta suy ra $p=-5$.

Thay các giá trị p, q, s, r vừa tìm vào (2) thì có:

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=(x^2-5x+2)(x^2+x-7)$$

Phương trình (1) tương đương với

$$(x^2-5x+2)(x^2+x-7)=0$$

Giải phương trình tích này ta được các nghiệm sau của (1):

$$(5 \pm \sqrt{17})/2; \quad (-1 \pm \sqrt{29})/2.$$

§ 3. Sau đây ta sẽ tìm công thức nghiệm phương trình bậc bốn

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

trong đó a, b, c, d là các số thực.

Dụng ý của ta là phân tích đa thức

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

thành hai nhân tử bậc hai.

Dùng ẩn phụ h, ta biến đổi như sau:

$$f(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}h\right)^2+bx^2+cx+d \\ -\frac{1}{4}a^2x^2-\frac{1}{4}h^2-hx^2-\frac{1}{2}ahx$$

$$f(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}h^2\right)-\left[\left(h+\frac{1}{4}a^2-b\right)x^2 \\ +\left(\frac{1}{2}ah-c\right)x+\left(\frac{1}{4}h^2-d\right)\right].$$

Tam thức trong dấu móc vuông có dạng

$$Ax^2 + Bx + C.$$

$Ax^2 + Bx + C$ có thể viết dưới dạng:

$$Ax^2 + Bx^2 + C = (px + q)^2$$

khi và chỉ khi $B^2 - 4AC = 0.$

... có khả năng tính được một nghiệm ... phương trình có ẩn phụ h.

... từ $B^2 - 4AC = 0$

hay $4AC - B^2 = 0$

$$\ldots\left(\frac{1}{4}h^2 - d\right) - \left(\frac{1}{2}ah - c\right)^2 = 0.$$

... phương trình bậc ba đối với h nên ... nhất một nghiệm thực (*).

... nghiệm đó là $h = t$.

... (2) được viết dưới dạng:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}t\right)^2 - (px + q)^2 \quad (4)$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}t + px + q\right) \times$$

$$\times\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}t - px - q\right) = 0.$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a + p\right)x + \frac{1}{2}t + q = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a - p\right)x + \frac{1}{2}t - q = 0.$$

... phương trình bậc hai này ta được ... nghiệm của (1):

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + p\right) \pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}a + p\right)^2 - 4q - 2t}$$

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a - p\right) \pm$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}a - p\right)^2 + 4q - 2t}\,.$$

... 6: Giải phương trình

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0.$$

Dựa vào công thức (3) ta xác định được h:

$$4\left(h + \frac{29}{4}\right)\left(\frac{1}{4}h^2 - 6\right) - \left(-\frac{1}{2}h - 1\right)^2 = 0$$

tức

$$h^3 + 7h^2 - 25h - 175 = 0.$$

Ta tìm được một nghiệm thực h của phương trình này là $h = 5$.

Dựa vào (3) và với $h = t = 5$, $a = -1$, $b = -7$, $c = 1$, $d = 6$ thì tính được

$$p = 7/2, \; q = -1/2$$

Phương trình đã cho sẽ được diễn đạt theo (4) là:

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Từ đó ta giải phương trình tích:

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

thì được tập hợp nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\{-1; -2; 3; 1\}.$$

§ 4. Ta lại còn có thể giải phương trình bậc bốn bằng *cách sử dụng đồ thị.*

Thật vậy, để giải phương trình bậc bốn

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

bằng đồ thị, ta hãy đặt

$$x^2 = y - mx.$$

Phương trình (1) trở thành

$$y^2 - 2mxy + m^2x^2 + axy - amx^2 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Để khử được các số hạng có xy trong phương trình này thì phải có:

$$-2m + a = 0 \quad \text{tức } m = a/2.$$

Vậy nếu đặt

$x^2 = y - mx$ mà $m = a/2$ tức $x^2 = y - (a/2)\,x$

(*) *Xem Quốc Trinh – Giải phương trình bậc ba – báo Toán học và Tuổi trẻ số 107.*

thì (1) trở thành:

$$y^2 + (a^2/4)x^2 - (a^2/2)x^2 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

Thay x^2 bởi $y - (a/2)x$ và biến đổi thì (2) trở thành

$$x^2 + y^2 + (a/2 + a^3/8 - ab/2 + c)x$$
$$+ (b - a^2/4 - 1)y + d = 0.$$

Vậy phương trình (1) tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 + (a/2)x & (3) \\ x^2 + y^2 + (a/2 + a^3/8 - ab/2 + c)x \\ \quad + (b - a^2/4 - 1)y + d = 0 & (4) \end{cases}$$

Do đó hoành độ các giao điểm của parabôn, đồ thị của (3) và của đường tròn, đồ thị của (4), là nghiệm của phương trình (1) đã cho.

Nếu ta đặt $my = x^2 + (a/2)x$ $(m \neq 0)$ thì ấy nghiệm của phương trình (1) lại là hoành độ các giao điểm của hai parabôn

$$y = (1/m)x^2 + (a/2m)x$$

và

$$x = m^2y^2/(ab/2 - a^3/8 - c)$$
$$+ m(b - a^2/4)y/(ab/2 - a^3/8 - c)$$

∴

Bạn hãy vận dụng các phương pháp trên giải các phương trình bậc bốn sau:

1) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$,
2) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$,
3) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.
4) $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$.
5) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

MỘT CÁCH GIẢI HAY HƠN

TRONG số báo 106 (số 1 năm 1970) đề giải bài toán số 3 của kỳ thi toán quốc tế lần thứ 20, tác giả đã chứng minh bằng phương pháp qui nạp bổ đề: « Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $g(n) = f(n) + n$.

Cách chứng minh đó cũng tốt, nhưng tôi thấy còn dài quá, tôi xin trình bày một cách chứng minh rất ngắn gọn:

Ta thấy có $g(n)$ số tự nhiên từ 1 đến $g(n)$. Trong đó những số thuộc tập G là:

$$g(1),\ g(2), \ldots,\ g(n),$$

tất cả có n số. Còn lại là những số thuộc tập F.

Do $g(n) = f(f(n)) + 1$ nên $f(f(n)) < g(n)$ và 2 số đó là hai số tự nhiên liên tiếp. Do đó những số tự nhiên nằm trong khoảng từ 1 đến $g(n)$ mà thuộc F là

$$f(1),\ f(2), \ldots,\ f(f(n)),$$

tất cả có $f(n)$ số.

Như vậy với $g(n)$ số tự nhiên từ 1 đến $g(n)$ thì có n số thuộc G và $f(n)$ số thuộc F, tức là

$$g(n) = f(n) + n.$$

Lê Việt Nga
(Đại học Sư phạm Vinh)

THẾ GIỚI CỦA « 1979 = 1964 »

Nếu bạn lạc vào thế giới của các đẳng thức liên quan đến hai con số 1979 và 1964 thì bạn sẽ được thưởng thức nhiều đẳng thức thú vị. Vì trang giải trí ít chỗ, nên chỉ xin kể với các bạn 15 đẳng thức trong số hàng trăm đẳng thức của thế giới đó:

$$19 + 7 \times 9 = 1 + 9^{6-4}$$
$$1^9 \times 79 = 1 + 9 \times 6 + 4!$$
$$(1 - 9) : (7 - 9) = 1 \times (96 : 4!)$$
$$-1 + 9 - 7 + 9 = \sqrt{196} - 4$$
$$1 \times \sqrt{9}! \times 7 + \sqrt{9} = 1 \times (9 + 6^{\sqrt{4}})$$
$$(1 + \sqrt{9})! \times (-7 + 9) = (1 + \sqrt{9})\sqrt{6 \times 4!}$$
$$(-1 + \sqrt{9} + 7) \times 9 = 1 \times (9 - 6)^4$$
$$(1 + \sqrt{9}) \times 7 + 9 = 1^9 + 6^{\sqrt{4}}$$
$$(1 + \sqrt{9}) \times 7\sqrt{9} = (1 : 9) \times 61 + 4$$
$$1 \times \sqrt{9} \times 7 \times \sqrt{9} = -1^9 + 64$$
$$1 \times 9 \times (7 + \sqrt{9}) = 1 \times \sqrt{9} \times (61 : 4!)$$
$$1^9 \times (-7 + 9) = \log_{-1+9} 64$$
$$\log_{1+9-7} 9 = 1 - 9 + 6 + 4$$
$$\log_{1+9-7} 9 = \log_{-1+9-6} 4$$
$$(1 + 9 - 7)! + 9 = (-1 \times 9) + 6 \times 4 = 1$$

TRẦN THỊ TẠO

In 15.400c tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà Nội. Số in 180/79. Chỉ số 12884.
In xong 30-12-1979. Gửi lưu chiểu tháng 12-1979 Giá: 0đ10