HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

Số 110
5
1979

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm : **NGUYỄN CẢNH TOÀN** *Thư ký tòa soạn :* **HOÀNG CHÚNG**

Trụ sở : 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội Dây nói : 52825

NÓI CHUYỆN VỚI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN

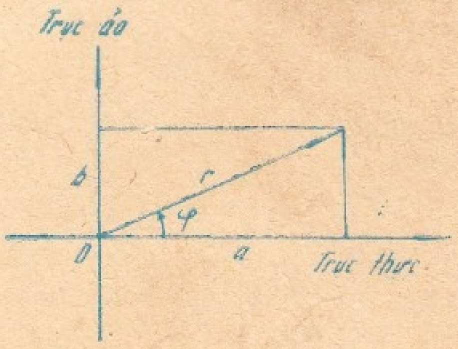
SỐ PHỨC, VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP BIẾN HÌNH

TRẦN THÚC TRÌNH

TRONG bài nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán « Tầm quan trọng của một cách nhìn » (Số 3—4 năm 1978), giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn đã chỉ ra nhiều hướng suy nghĩ sâu sắc liên quan đến vectơ, số phức và các phép biến hình.

Chúng tôi muốn cụ thể hóa thêm mối liên hệ giữa ba loại đối tượng trên (số phức, vectơ và các phép biến hình) và vận dụng vào một số bài toán cụ thể để giúp các bạn tập dượt thêm.

1. Số phức $z = a + bi$ hay $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tương ứng với một điểm Z trong mặt phẳng hay một vectơ $\overrightarrow{OZ}$ (hình 1).



Tổng hai số phức tương ứng với tổng hai vectơ.

Tích hai số phức $(z_1.z_2)$ tương ứng với phép quay $\overrightarrow{OZ_1}$ một góc φ_2, tiếp theo phép vị tự tâm O tỷ số r_2:

$$z = z_1.z_2 = r_1r_2 \times [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Như vậy nhân số phức z với $i (i^2+1=0)$ tương ứng với phép quay $\overrightarrow{OZ}$ quanh O một góc $90°$; nhân số phức z với α $(\alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$ tương ứng với phép quay $\overrightarrow{OZ}$ quanh O một góc $120°$ (vì $\alpha = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$).

2. Trên cơ sở mối liên hệ vừa trình bày, chúng ta có thể tìm thấy một số quy tắc « dịch » sau đây:

(a) Đường tròn bán kính bằng 1: $z\bar{z} = 1$.
Đường tròn bán kính bằng r: $z\bar{z} = r^2$.

(b) $\overrightarrow{AB}^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$.

$\overrightarrow{OA}^2 = a\bar{a}$.

(c) Tam giác ABC là đều: $a + \alpha b + \alpha^2 c = 0$ (nếu tam giác ABC có hướng dương) hay $\alpha^2 a + \alpha b + c = 0$.

(nếu tam giác ABC có hướng âm), trong đó $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

(d) Diện tích tam giác ABC:

$$S_{(\Delta ABC)} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}$$

Đặc biệt nếu A, B, C nằm trên đường tròn bán kính bằng 1 thì

$$S_{(\Delta ABC)} = \frac{i}{4}\,\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

(đ) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A_1B_1C_1$:

$$\frac{a-b}{a_1-b_1} = \frac{b-c}{b_1-c_1} = z \text{ (z là số phức).}$$

(e) $AB // CD$ với A, B, C, D nằm trên đường tròn $z\bar{z} = r^2$:

$$ab = cd.$$

(g) $AB \perp CD$ với A, B, C, D nằm trên đường tròn $z\bar{z} = r^2$:

$$ab + cd = 0.$$

(h) S là hình chiếu của M trên cát tuyến AB, trong đó A và B nằm trên đường tròn $z\bar{z} = r^2$:

$$S = (a + b - m - ab\bar{m})/2.$$

(i) A, B, C cộng tuyến $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}}$ hay

$$abc = \bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

(k) $$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{(b-a)(\bar{d}-\bar{c})+(\bar{b}-\bar{a})(d-c)}{2|b-a|\,|d-c|}$$

Sau đây chúng tôi xin giải thích một vài quy tắc « dịch »:

Quy tắc (d). Trước tiên nhớ rằng trong phạm vi số thực, diện tích tam giác ABC mà các đỉnh A, B, C lần lượt có tọa độ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) được tính theo công thức:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bây giờ đặt $a = x_1 + iy_1$, $b = x_2 + iy_2$, $c = x_3 + iy_3$, trong đó các u_i, v_i, đều là số thực. Thế thì,

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+iy_1 & x_1-iy_1 & 1 \\ x_2+iy_2 & x_2-iy_2 & 1 \\ x_3+iy_3 & x_3-iy_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_1-iy_1 & 1 \\ x_2 & x_2-iy_2 & 1 \\ x_3 & x_3-iy_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iy_1 & x_1-iy_1 & 1 \\ iy_2 & x_2-iy_2 & 1 \\ iy_3 & x_3-iy_3 & 1 \end{vmatrix} = A + B.$$

Trong A nhân các phần tử của cột thứ nhất với (-1) rồi cộng vào cột thứ hai; trong B cộng các phần tử cột thứ nhất với các phần tử cột thứ hai ta sẽ có:

$$A + B = \begin{vmatrix} x_1 & -iy_1 & 1 \\ x_2 & -iy_2 & 1 \\ x_3 & -iy_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iy_1 & x_1 & 1 \\ iy_2 & x_2 & 1 \\ iy_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = -2i\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -4iS$. Từ đó $S = \dfrac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}$.

Quy tắc (i). Đặt $a = x_1 + iy_1$, $b = x_2 + iy_2$, $c = x_3 + iy_3$, thế thì

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}} \text{ biến thành}$$

$$\frac{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)}{(x_2-x_3)+i(y_2-y_3)} =$$

$= \dfrac{(x_1-x_2)-i(y_1-y_2)}{(x_2-x_3)-i(y_2-y_3)}$. Đặt $x_1 - x_2 = X$, $x_2 - x_3 = X'$, $y_1 - y_2 = Y$, $y_2 - y_3 = Y'$, ta sẽ có:

$\dfrac{X+iY}{X'+iY'} = \dfrac{X-iY}{X'-iY'}$ hay $XY' = YX'$ tức $\dfrac{X}{Y} = \dfrac{X'}{Y'}$, tức A, B, C cộng tuyến.

Các quy tắc còn lại các bạn tự tìm lấy.

3. Bây giờ chúng ta hãy tập vận dụng các quy tắc trên trong một số bài tập cụ thể.

Bài số 1. (5 tam giác đều). Cho ba tam giác đều $A_iB_iC_i$ cùng hướng ($i = 1, 2, 3$) sao cho tam giác $A_1A_2A_3$ cũng là đều và cùng hướng. Chứng minh rằng các điểm giữa P, Q, R lần lượt của C_1B_2, C_2B_3, C_3B_1 cũng là tam giác đều cùng hướng.

Bài số 2. (6 tam giác đều). Cho hai tam giác đều $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ cùng hướng. Trên A_iB_i dựng những tam giác đều $A_iB_iC_i$ cùng hướng Chứng minh rằng tam giác $C_1C_2C_3$ cũng là tam giác đều và cùng hướng.

Bài số 3. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác bất kỳ dựng những tam giác đều cùng hướng BCA_1, CAB_1, ABC_1. Chứng minh rằng:

a) Các tâm A_0, B_0, C_0 của những tam giác đều vừa dựng được là đỉnh của một tam giác đều ngược hướng. b) Các điểm giữa A', B', C' của AA_0, BB_0, CC_0 là đỉnh của một tam giác đều và ngược hướng với hướng ba tam giác đã dựng.

Bài số 4. (3 tam giác đều). Cho tam giác ABC. Dựng tam giác $A_0B_0C_0$ sao cho những tam giác A_0C_0C, B_0C_0A, C_0A_0B là đều và cùng hướng.

Bài số 5. Trong tam giác ABC cho trước, hãy tìm quỹ tích những điểm P sao cho hình chiếu của M lên ba cạnh của tam giác đó là đỉnh của một tam giác có diện tích S_0 không đổi.

Bài số 6. Cho tam giác bất kỳ. Trên các cạnh và về phía ngoài của tam giác đó dựng các tam giác đều. Chứng minh tâm các tam giác vừa dựng tạo thành một tam giác đều T_1. Bây giờ dựng trên các cạnh và về phía trong các tam giác đều, gọi tam giác có đỉnh là tâm các tam giác vừa dựng là T_2. Chứng minh rằng hiệu các diện tích của T_1 và T_2 bằng diện tích của tam giác đã cho.

Bài số 7. (Bài thi toán quốc tế lần thứ 19 năm 1977 do Hà Lan đề nghị). Cho hình vuông $ABCD$. Dựng về phía trong hình vuông đó tam giác đều có cạnh bằng cạnh hình vuông: ABK, BCL, CDM, DAN. Chứng minh rằng điểm giữa của bốn đoạn thẳng KL, LM, MN, NK cùng 8 điểm giữa các đoạn AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN và AN là đỉnh của một hình 12 cạnh đều.

Bài số 8. Cho tam giác ABC và trọng tâm O. Dựng tam giác đều OAP và OAQ. Gọi P_1 và Q_1 là điểm giữa của CP và CQ; (l) là đường phân giác của góc $\widehat{P_1OQ_1}$. Chứng minh rằng nếu P_2, Q_2 lần lượt là điểm giữa của BP và BQ thì (l) cũng là đường phân giác của góc $\widehat{P_2OQ_2}$.

Bài số 9. Một đa giác $2n$ cạnh $A_1A_2 \dots A_{2n}$ nội tiếp trong một đường tròn. Từ điểm B_1 bất kỳ trên đường tròn đó kẻ $B_1B_2 //$ (hay $\perp$) với A_1A_2; sau đó kẻ $B_2B_3 //$ (hay $\perp$) với A_2A_3 và tiếp tục như vậy mãi. Chứng minh rằng $B_{2n}B_1 //$ (hay $\perp$) với $A_{2n}A_1$.

Bài số 10. Chứng minh rằng nếu có $\sum_{j=1}^{n} 1/ \times$ $\times (z - c_j) = 0$, trong đó c_j là đỉnh của n giác lồi thì z nằm trong đa giác đó.

DÙNG HỆ THỨC VÉCTƠ ĐỂ XÁC ĐỊNH CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG TỨ DIỆN

NGUYỄN CÔNG QUỲ
(*Đại học Sư phạm T.P. Hồ Chí Minh*)

TRONG nhiều bài toán hình học phẳng cũng như không gian, phương pháp vectơ tỏ ra rất có hiệu lực. Để giúp các bạn có thể vận dụng được phương pháp đó, bài này sẽ nêu lên cách xác định bằng vectơ một số điểm đặc biệt như trọng tâm, tâm các đường tròn (hay mặt cầu) ngoại tiếp, nội tiếp, bàng tiếp... của tam giác (hay tứ diện).

I. Trước hết chúng ta bắt đầu bằng những bài toán trong mặt phẳng.

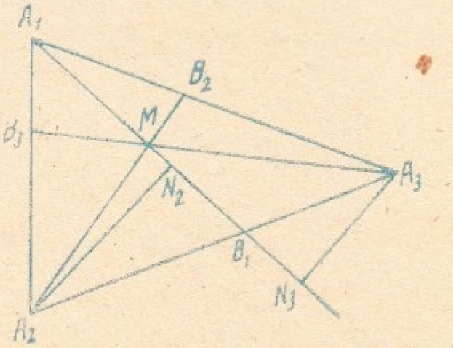
1. Xét bài toán sau đây : *Cho một điểm M nằm trong một tam giác $A_1A_2A_3$. Hãy xác định các số thực k_1, k_2 và k_3 không đồng thời bằng 0 sao cho.*

$$\Sigma\, k_i\overrightarrow{MA_i} = 0$$

(ký hiệu Σ ở đây và suốt trong mục 1 được hiểu là tổng $\sum\limits_{i=1}^{3}$).

Trước hết ta thấy rằng nếu (k_1, k_2, k_3) là một bộ số thực thỏa mãn hệ thức đã cho thì mọi bộ số thực $(\lambda k_1, \lambda k_2, \lambda k_3)$ trong đó λ là một số thực khác 0, đều thỏa mãn hệ thức đã cho. Vì vậy nghiệm của bài toán được xác định sai khác một thừa số khác 0.

Để giải bài toán này, ta hãy gọi B_i là giao điểm của đường nối M và đỉnh A_i với cạnh đối diện $(i=1, 2, 3)$; s_1, s_2, s_3 theo thứ tự là diện tích các tam giác MA_2A_3, MA_3A_1 và MA_1A_2 (hình 1).



Hình 1

Nếu N_2 và N_3 lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ A_2 và A_3 xuống A_1B_1 thì

$$\overrightarrow{B_1A_2}/\overrightarrow{B_1A_3} = -\,A_2N_2/A_3N_3 = -\,(1/2)\,A_2N_2.MA_1/(1/2)\,A_3N_3.MA_1 = -\,s_3/s_2.$$

Nếu P là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng thì hệ thức

$$\overrightarrow{B_1A_2}/\,\overrightarrow{B_1A_3} = -\,s_3/s_2.$$

có thể viết thành $(\overrightarrow{PA_2}-\overrightarrow{PB_1})/(\overrightarrow{PA_3}-\overrightarrow{PB_1}) = -s_3/s_2$ từ đó rút ra $(s_2+s_3)\,\overrightarrow{PB_1} = s_2\overrightarrow{PA_2} + s_3\overrightarrow{PA_3}$. (1)

Ta hãy chọn P là điểm chia đoạn A_1B_1 theo tỷ số $-(s_2+s_3)/s_1$, tức là $\overrightarrow{PA_1}/\overrightarrow{PB_1} = -(s_2+s_3)/s_1$ hay

$$s_1\overrightarrow{PA_1} + (s_2+s_3)\,\overrightarrow{PB_1} = 0$$

Hệ thức này cùng với (1) cho ta $s_1\overrightarrow{PA_1} + s_2\overrightarrow{PA_2} + s_3\overrightarrow{PA_3} = 0$ hay $\Sigma s_i\overrightarrow{PA_i} = 0$. (2)

Như vậy, điểm P xác định bởi hệ thức (2) nằm trên đường thẳng A_1B_1.

Để ý rằng trong hệ thức (2), các chỉ số 1, 2, 3 có vai trò như nhau, nên bằng cách tương tự ta cũng chứng minh được điểm P xác định bởi hệ thức (2) cũng nằm trên các đường thẳng A_2B_2 và A_3B_3. Nói cách khác điểm P xác định như vậy chính là điểm M đã cho.

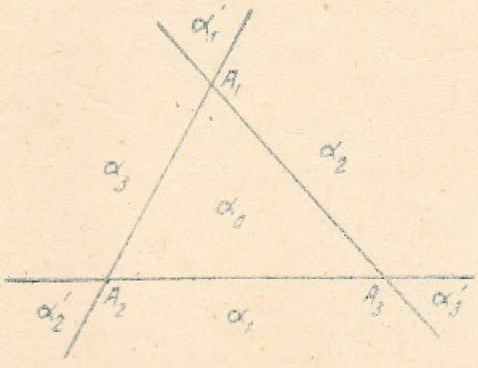
Như vậy là ta đã chứng minh được rằng k_i tỷ lệ với s_i $(i = 1, 2, 3)$, và *với mọi điểm M nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$ ta có hệ thức*

$$\Sigma s_i\overrightarrow{MA_i} = 0 \qquad (I)$$

Nếu O là một điểm tùy ý trong mặt phẳng thì hệ thức trên có thể viết thành $\Sigma s_i(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OM}) = 0$ từ đó rút ra $\overrightarrow{OM} = \Sigma s_i\overrightarrow{OA_i}/\Sigma s_i = \Sigma s_i\overrightarrow{OA_i}/S$ với S là diện tích tam giác $A_1A_2A_3$. Để cho gọn ta sẽ quy ước ký hiệu theo vectơ bán kính tức là viết $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{A_i}$. Như vậy hệ thức trên có thể viết thành

$$\overrightarrow{M} = \Sigma s_i\overrightarrow{A_i}/S \qquad (I)$$

2. Trường hợp điểm M nằm ngoài tam giác $A_1A_2A_3$, bằng đường lối tương tự trên ta dễ dàng đi tới kết quả sau đây. Nếu ta đánh số các miền của mặt phẳng như ở hình 2 thì trong trường hợp M thuộc miền α_1 hoặc α'_1 thì hệ thức (I) được thay thế bởi.



Hình 2

$-s_1\overrightarrow{MA_1} + s_2\overrightarrow{MA_2} + s_3\overrightarrow{MA_3} = 0$, còn (I') thì được thay thế bởi các hệ thức

$\overrightarrow{M} = (-s_1\overrightarrow{A_1} + s_2\overrightarrow{A_2} + s_3\overrightarrow{A_3})/S$ nếu $M \in \alpha_1$,

hoặc $\overrightarrow{M} = (s_1\overrightarrow{A_1} - s_2\overrightarrow{A_2} - s_3\overrightarrow{A_3})/S$ nếu $M \in \alpha'_1$

Trường hợp M nằm trong các miền khác cũng được giải quyết tương tự. Còn nếu M nằm trên một hoặc hai trong những đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 thì các hệ thức (I) và (I') vẫn đúng. Lúc đó sẽ có một hoặc hai trong những số s_i bằng 0.

3. Bây giờ ta hãy vận dụng các kết quả đã thu được để xác định các điểm đặc biệt trong tam giác.

a) Nếu điểm M trùng với trọng tâm G của tam giác $A_1A_2A_3$ thì rõ ràng $s_1 = s_2 = s_3$ và ta thu được các kết quả quen thuộc

$\Sigma\,\overrightarrow{GA_i} = 0$ và $\overrightarrow{G} = \Sigma\overrightarrow{A_i}/3$.

b) Nếu điểm M trùng với tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ thì $s_1/a_1 = s_2/a_2 = s_3/a_3 = r/2$ trong đó $a_1 = A_2A_3$, $a_2 = A_3A_1$, $a_3 = A_1A_2$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp. Hệ thức (I) trở thành

$$\Sigma a_i\overrightarrow{IA_i} = 0 \qquad (3)$$

Để ý đến các hệ thức $a_1h_1 = a_2h_2 = a_3h_3$ (h_i là đường cao hạ từ A_i) và $a_1/\sin A_1 = A_2/\sin A_2 = a_3/\sin A_3$, từ hệ thức (3) ta suy ra

$$\Sigma h_i^{-1}\,\overrightarrow{IA_i} = 0$$

$$\Sigma \sin A_i\,\overrightarrow{IA_i} = 0$$

Từ đó suy ra các hệ thức

$$\overrightarrow{I} = \Sigma a_i\,\overrightarrow{A_i}/2p$$

(trong đó p là nửa chu vi của tam giác)

$$\overrightarrow{I} = (h_2h_3\overrightarrow{A_1} + h_3h_1\overrightarrow{A_2} + h_1h_2\overrightarrow{A_3})/(h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2)$$

$$\overrightarrow{I} = \Sigma\sin A_i\,\overrightarrow{A_i}/\Sigma\sin A_i = \Sigma\sin A_i\,\overrightarrow{A_i}/4\pi\cos(A_i/2)$$

(với $\pi = \prod_{i=1}^{3}$ là ký hiệu tích).

c) Nếu điểm M trùng với tâm I_1 của đường tròn bàng tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ nằm trong góc $A_2A_1A_3$ thì ta thu được các hệ thức

$$-a_1\overrightarrow{I_1A_1} + a_2\overrightarrow{I_1A_2} + a_3\overrightarrow{I_1A_3} = 0,$$

$$-h_1^{-1}\overrightarrow{I_1A_1} + h_2^{-1}\overrightarrow{I_1A_2} + h_3^{-1}\overrightarrow{I_1A_3} = 0,$$

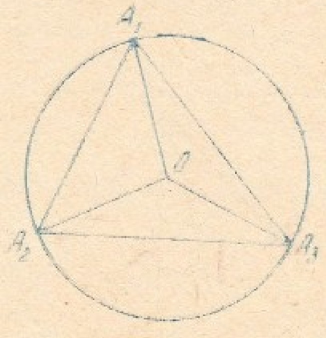
$$-\sin A_1\overrightarrow{I_1A_1} + \sin A_2\overrightarrow{I_1A_2} + \sin A_3\overrightarrow{I_1A_3} = 0,$$

$$\overrightarrow{I_1} = (-a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + a_3\overrightarrow{A_3})/2(p - a_1),$$

$$\overrightarrow{I_1} = (-h_2h_3\overrightarrow{A_1} + h_3h_1\overrightarrow{A_2} + h_1h_2\overrightarrow{A_3})/(-h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2),$$

$$\overrightarrow{I_1} = (-\sin A_1\overrightarrow{A_1} + \sin A_2\overrightarrow{A_2} + \sin A_3\overrightarrow{A_3})/(-\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3)$$
$$= (\sin A_1\overrightarrow{A_1} + \sin A_2\overrightarrow{A_2} + \sin A_3\overrightarrow{A_3})/4\cos(A_1/2)\sin(A_2/2) \times \sin(A_3/2).$$

d) Nếu điểm M trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ (hình 3) thì



Hình 3

$s_1/\sin\widehat{A_2OA_3} = s_2/\sin\widehat{A_3OA_1} = s_3/\sin\widehat{A_1OA_2}$

hay

$$s_1/\sin 2A_1 = s_2/\sin 2A_2 = s_3/\sin 2A_3$$

Vì vậy các hệ thức (1) và (1') lần lượt cho ta

$$\sum \sin 2A_i \overrightarrow{OA_i} = 0$$

và $$\vec{O} = \sum \sin 2A_i \vec{A_i} / \sum \sin 2A_i$$
$$= \sum \sin 2A_i \vec{A_i} / 4\Pi \sin A_i$$

Chúng ta có thể kiểm nghiệm lại rằng các hệ thức này đúng với mọi vị trí của tâm O (ở trong, ở ngoài hay ở trên biên của tam giác), tức là đúng cho mọi tam giác (có toàn góc nhọn, có góc tù hay góc vuông).

e) Trường hợp điểm M trùng với trực tâm của tam giác xin dành cho các bạn nghiên cứu.

II. Bây giờ ta hãy mở rộng các kết quả trên vào hình học không gian.

1. Trước hết xét bài toán: *Cho một điểm M nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Hãy xác định các số thực k_1, k_2, k_3 và k_4 không đồng thời bằng 0 sao cho*

$$\sum k_i \overrightarrow{MA_i} = 0$$

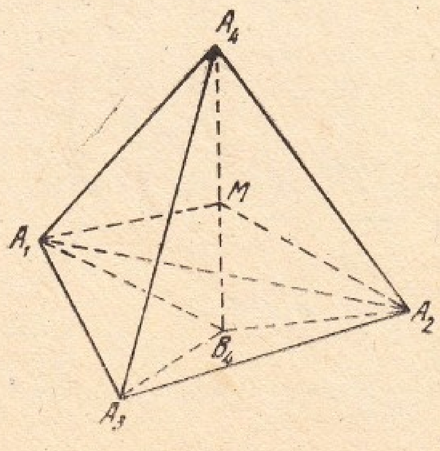
(ký hiệu $\sum$ ở đây về sau sẽ được hiểu là tổng $\sum_{i=1}^{4}$).

Cũng như ở mục trên, ta nhận xét rằng nghiệm của bài toán được xác định sai khác một thừa số khác 0.

Để giải bài toán này ta hãy gọi v_1, v_2, v_3, và v_4 theo thứ tự là thể tích các tứ diện $MA_2A_3A_4$, $MA_3A_4A_1$, $MA_4A_1A_2$ và $MA_1A_2A_3$.

Giả sử đường thẳng nối M với đỉnh A_i cắt mặt đối diện tại B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Ta ký hiệu s_1, s_2, s_3, lần lượt là diện tích các tam giác $B_4A_2A_3$, $B_4A_3A_1$ và $B_4A_1A_2$. Trước hết



Hình 4

ta hãy chứng minh rằng $s_1/s_2 = v_1/v_2$. Thật vậy, với ký hiệu V là thể tích ta có

$$s_1/s_2 = V(A_4B_4A_3A_2)/V(A_4B_4A_3A_1)$$
$$= V(MB_4A_3A_2)/V(MB_4A_3A_1)$$
$$= [V(A_4B_4A_3A_2) - V(MB_4A_3A_2)]/.$$
$$/[V(A_4B_4A_3A_1) - V(MB_4A_3A_1)] = v_1/v_2$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $s_2/s_3 = v_2/v_3$. Từ đó có

$$s_1/v_1 = s_2/v_2 = s_3/v_3. \quad (4)$$

Từ hệ thức (I') ở mục I ta có

$$\vec{B_4} = (s_1\vec{A_1} + s_2\vec{A_2} + s_3\vec{A_3})/(s_1 + s_2 + s_3). \quad (5)$$

Từ các hệ thức (4) và (5) ta suy ra

$\vec{B_4} = (v_1\vec{A_1} + v_2\vec{A_2} + v_3\vec{A_3})/(v_1 + v_2 + v_3)$, từ đó có

$$(v_1 + v_2 + v_3)\vec{B_4} = v_1\vec{A_1} + v_2\vec{A_2} + v_3\vec{A_3}.$$

tức là

$$(v_1 + v_2 + v_3)\overrightarrow{PB_4} = v_1\overrightarrow{PA_1} + v_2\overrightarrow{PA_2} + v_3\overrightarrow{PA_3} \quad (6)$$

trong đó P là một điểm tùy ý trong không gian

Nếu ta chọn P là điểm chia đoạn thẳng A_4B_4 theo tỷ số $-(v_1 + v_2 + v_3)/v_4$ tức là

$$\overrightarrow{PA_4}/\overrightarrow{PB_4} = -(v_1 + v_2 + v_3)/v_4$$

thì ta sẽ có $v_4\overrightarrow{PA_4} + (v_1 + v_2 + v_3)\overrightarrow{PB_4} = 0$, hay, kết hợp với (6).

$$v_1\overrightarrow{PA_1} + v_2\overrightarrow{PA_2} + v_3\overrightarrow{PA_3} + v_4\overrightarrow{PA_4} = 0. \quad (7)$$

Như vậy tức là: nếu điểm P thỏa mãn hệ thức (7) thì nó nằm trên đường thẳng A_4B_4. Nhận xét rằng các chỉ số 1,2,3,4 tham gia vào hệ thức (7) với vai trò ngang nhau nên bằng cách tương tự trên ta cũng chứng minh được rằng điểm P xác định bởi hệ thức (7) nằm trên các đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Nói cách khác điểm P chính là điểm M đã cho.

Như vậy ta đã thấy rằng k_i tỷ lệ với v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, và *với mọi điểm M nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ta có hệ thức*

$$\sum v_i \overrightarrow{MA_i} = 0 \quad (II)$$

Cũng với cách ký hiệu vectơ bán kính như ở mục trên: $\overrightarrow{OM} = \vec{M}$, $\overrightarrow{OA_i} = \vec{A_i}$, ta đưa được (II) về một hệ thức tương đương

$$\vec{M} = \sum v_i \vec{A_i} / V \quad (II')$$

với V là thể tích tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

2. Trường hợp điểm M nằm ngoài tứ diện xin dành cho các bạn nghiên cứu. Nói chung ta thu được những hệ thức tương tự (II) và (II') trong đó một vài số v_i được thay bởi $-v_i$.

3. Ta hãy vận dụng các kết quả trên vào các điểm đặc biệt của tứ diện.

a) Nếu M trùng với trọng tâm G của tứ diện thì $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ và ta đi tới những hệ thức quen thuộc:

$$\Sigma\overrightarrow{GA_i} = 0 \text{ và } \overrightarrow{G} = \Sigma\overrightarrow{A_i}/4$$

b) Nếu M trùng với tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện thì ta có $v_1/S_1 = v_2/S_2 = v_3/S_3 = v_4/S_4$ (với S_i là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i) và $S_1h_1 = S_2h_2 = S_3h_3 = S_4h_4$ (với h_i là đường cao hạ từ đỉnh A_i).

Từ đó các hệ thức (II) và (II') sẽ cho

$$\Sigma S_i\overrightarrow{IA_i} = 0,\ \Sigma \overset{-1}{h_i}\overrightarrow{IA_i} = 0,$$
$$\overrightarrow{I} = \Sigma S_i\overrightarrow{A_i}/S$$

(S là diện tích toàn phần của tứ diện),

$$\overrightarrow{I} = \Sigma \overset{-1}{h_i}\overrightarrow{A_i}/\Sigma \overset{-1}{h_i}.$$

Chúng ta có thể tiếp tục áp dụng các hệ thức (II) và (II') cho các trường hợp điểm M trùng với tâm các mặt cầu bàng tiếp, ngoại tiếp,... của tứ diện như đã khảo sát ở mục trên để thu được các kết quả khác.

Bài 1/107. *Chứng minh rằng tích của 8 số tự nhiên liên tiếp không thể là bình phương của một số tự nhiên.*

Lời giải (của bạn *Nguyễn Anh Tuấn*, 12C trường Lê Quý Đôn, T.P. Hồ Chí Minh).

Giả sử $N = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \times (n+6)(n+7)$, trong đó n là một số tự nhiên bất kỳ. Chúng ta sẽ chứng minh N không phải là số chính phương.

Ta có:

$$N = [n(n+7)].[(n+1)(n+6)] \times$$
$$\times [(n+2)(n+5)].[(n+3)(n+4)]$$
$$= (n^2+7n).(n^2+7n+6).(n^2+7n+10).\times$$
$$\times (n^2+7n+12).$$

Đặt $m = n^2 + 7n$, m nguyên dương, ta được:

$$N = m(m+6)(m+10)(m+12)$$
$$= (m^2+14m)^2 + 56m^2 + 720m.$$

Đặt $K = (m^2+14m)^2 + 2k(m^2+14m) + k^2 = (m^2+14m+k)^2$.

Xét hiệu $N - K = 2m^2(28-k) + 4m(180-7k) - k^2$, ta được:

1) Khi $6 \leqslant m \leqslant 8$, hay $n = 1$ (do $m = n^2+7n$), ta có

$N - K > 0$ với $k = 24$, và $N - K < 0$ với $k = 25$; tức là khi $n = 1$ ta có

$$[(n^2+7n)^2 + 14(n^2+7n) + 24]^2 < N <$$
$$< [(n^2+7n)^2 + 14(n^2+7n) + 25]^2.$$

2) Khi $14 < m \leqslant 30$, hay $n = 2, 3$ ta có $N - K > 0$ với $k = 26$, và $N - K < 0$ với $k = 27$; tức là khi $n = 2, 3$, ta có

$$[(n^2+7n)^2 + 14(n^2+7n) + 26]^2 < N <$$
$$< [(n^2+7n)^2 + 14(n^2+7n) + 27]^2.$$

3) Khi $m > 30$, hay $n > 3$, ta có $N - K > 0$ với $k = 27$, và $N - K < 0$ với $k = 28$; tức là khi $n > 3$ thì

$$[(n^2+7n)^2 + 14(n^2+7n) + 27]^2 < N <$$
$$< [(n^2+7n)^2 + 14(n^2+7n) + 22]^2.$$

Vậy N không phải là một số chính phương với mọi số tự nhiên n.

Nhận xét. Bài này ít bạn có lời giải tốt. Một vài bạn do có những nhận xét sai nên lời giải thiếu chính xác. Chẳng hạn, có bạn nhận xét rằng: tích của 8 số nguyên liên tiếp chỉ chia hết cho 2^7 (mà không chia hết cho 2^8). Điều này không phải bao giờ cũng đúng. Chúng ta có thể lấy rất nhiều phản ví dụ như: khi trong 8 số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho 2^k, $k \geqslant 4$, thì nhận xét trên là sai. Hoặc có bạn lại nói rằng: «tích của hai số chẵn liên tiếp phải chứa một số lẻ số thừa số 2». Điều này cũng không đúng, ví dụ hai số 8 và 10.

C. T.

Bài 2/107. *Tìm một số nguyên tố có 4 chữ số $N = \overline{abcd}$ sao cho các số $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ cũng là các số nguyên tố và a, b, c, d, liên hệ với nhau bởi đẳng thức*

$$b^2 = \overline{cd} + b - c \qquad (*)$$

Lời giải. Theo đề bài thì b, c, d chỉ có thể là các số 1, 3, 7, 9. Đẳng thức (*) có thể viết lại dưới dạng:

$$b(b-1) = \overline{cd} - c \text{ hay } b\ (b-1) = 9c + d.$$

Từ nhận xét trên ta có $9c + d \geqslant 10$, và do đó $b \geqslant 4$.

Vậy b chỉ có thể là 7 hoặc 9.

Nếu $b = 7$ thì từ đẳng thức $42 = 9c + d$ suy ra $42 - d$ chia hết cho 9, và do đó $d = 6$. Điều này không phù hợp với nhận xét đầu tiên trong lời giải.

Khi $b = 9$. Từ đẳng thức $72 = 9c + d$ suy ra d chia hết cho 9. Vì vậy $d = 9$, và tiếp theo đó ta được $c = 7$.

Như vậy $b = d = 9$ và $c = 7$ thỏa mãn các điều kiện của đề ra. Chúng ta còn phải tìm giá trị của a.

Theo đề bài, $\overline{ab}$ và $\overline{ac}$, tức là $\overline{a9}$ và $\overline{a7}$ là hai số nguyên tố. Ta có:

— Để $\overline{a9}$ là một số nguyên tố thì a chỉ có thể là 1, 2, 5, 7, 8.

— Để $\overline{a7}$ là một số nguyên tố thì a chỉ có thể là 1, 3, 4, 6, 9.

Do đó, để $\overline{a9}$ và $\overline{a7}$ là hai số nguyên tố thì a chỉ có thể là 1.

Vậy số nguyên tố phải tìm là 1979.

C.T.

Bài 3/107. *Tìm hai chữ số cuối cùng của số*

$$T = 1979^{1978^{1977^{\cdot^{\cdot^{1964}}}}}$$

Lời giải. Sau đây các chữ $a, b, c, \ldots$ sẽ được ký hiệu là các số tự nhiên.

Nhận thấy rằng $1977 \equiv 1 \pmod 4$. Vì vậy

$$D = 1977^{1976^{\cdot^{\cdot^{1964}}}} \equiv 1 \pmod 4,$$

hay $\qquad D = 4a + 1.$

Ta có:

$$N = 1978^{4a+1} = (1978^4)^a.1978 = (10b + 6)^a.1978$$
$$= (10c + 6).1978 = 10d + 8.$$

Do đó

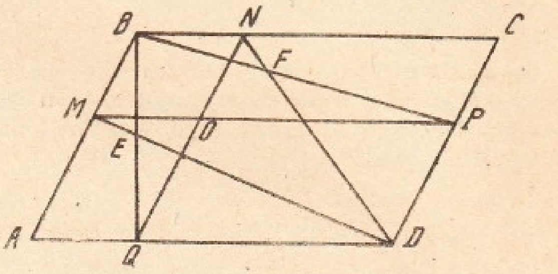
$$T = 1979^N \doteq (1980 - 1)^N =$$
$$= 1980^N - C_N^1 1980^{N-1} + \ldots$$
$$\ldots + C_N^{N-2} 1980^2 - C_N^{N-1} 1980 + 1$$
$$= 100n - N \cdot 1980 + 1$$
$$= 100n - (10d + 8)\, 1980 + 1$$
$$= 100m - 15840 + 1.$$
$$= 100m - 15839$$
$$= 100k - 39$$
$$= 100l + 61.$$

(Các C_N^i là hệ số của nhị thức Niu-tơn).

Vậy T có tận cùng là 61.

Bài 4/107. *Cho hình bình hành ABCD và một điểm O nằm trong hình bình hành đó. Các đường thẳng qua O và song song với các cạnh của hình bình hành cắt AB, BC, CD, DA theo thứ tự tại M, N, P, Q. Gọi E là giao điểm của BQ với DM, F là giao điểm của BP với DN. Tìm điều kiện ắt có và đủ để các điểm E, O, F thẳng hàng.*

Lời giải (của nhiều bạn). Ta chứng minh các điểm E, O, C thẳng hàng:



Thật vậy, áp dụng định lý Mênêlauýt đối với tam giác ABQ (cát tuyến MED), ta có

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{EB}{EQ} \cdot \frac{DQ}{DA} = 1.$$

Nhưng $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{OQ}{ON}$ và $\dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{CN}{CB}$, nên

$$\frac{OQ}{ON} \cdot \frac{EB}{EQ} \cdot \frac{CN}{CB} = 1.$$

Áp dụng định lý Mênêlauýt đảo đối với tam giác BQN ta có E, O, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có F, O, A thẳng hàng.

Vậy điều kiện át có và đủ để E, O, F thẳng hàng là A, O, C thẳng hàng, tức là O nằm trên đường chéo AC của hình bình hành.

Bài 5/107. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có bất đẳng thức:*

$$\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2}} \leqslant \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Lời giải (của bạn *Phạm Hữu Đức*, lớp 12C trường Bùi Thị Xuân, *Nguyễn Anh Tuấn* lớp 12 trường Lê Quí Đôn, thành phố Hồ Chí Minh; *Nguyễn Trọng Thăng*, lớp 9k trường cấp III Lê Quí Đôn, Hà Nội).

Ta có:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{2.1} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Mặt khác

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3n+1}{2n+2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho $n+1$ số dương, trong đó n số bằng 1 và một số bằng $\frac{(n+1)}{2}$, ta có

$$\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2}} \leqslant \frac{n + (n+1)/2}{n+1} = \frac{3n+1}{2n+2}.$$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=1$).

Vậy

$$\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2}} \leqslant \frac{3n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Bất đẳng thức ở đầu bài được chứng minh.

T.T

Bài 6/107. *Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$a_1^{na_1} a_n^{na_2} \dots a_n^{na_n} \geqslant (a_1 a_2 \dots a_n)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Lời giải. Bài này có nhiều cách giải. Dưới đây nêu hai cách giải tương đối gọn.

Cách 1 (của bạn *Vũ Trọng Chính*, Thuận Thành, Hà Bắc).

Vì $a_1, a_2, \dots a_n$ có vai trò như nhau nên ta có thể giả thiết rằng $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n > 0$. Ta có

$$a_1^{a_1 - a_2} \geqslant a_2^{a_1 - a_2}$$

hay

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \geqslant a_1^{a_2} a_2^{a_1}$$

Tương tự ta có

$$a_1^{a_1} a_3^{a_3} \geqslant a_1^{a_3} a_3^{a_1},\ a_2^{a_2} a_3^{a_3} \geqslant a_2^{a_3} a_3^{a_2}, \dots,$$

$$a_1^{a_1} a_n^{a_n} \geqslant a_1^{a_n} a_n^{a_1},\ a_2^{a_2} a_n^{a_n} \geqslant a_2^{a_n} a_n^{a_2}, \dots,$$

$$a_{n-1}^{a_{n-1}} a_n^{a_n} \geqslant a_{n-1}^{a_n} \cdot a_n^{a_{n-1}}.$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên và đẳng thức

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}$$

ta sẽ được bất đẳng thức cần chứng minh. (Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$).

Cách 2 (của bạn *Nguyễn Đức Học*, lớp 9c trường cấp 3 Lê Hồng Phong, Hà Nam Ninh và *Dương Ngọc Tuấn*, lớp 9T Thái Phiên, Hải Phòng).

Giả sử $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n > 0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$\lg (a_1^{na_1} a_2^{na_2} \dots a_n^{na_n}) \geqslant \lg (a_1 a_2 \dots a_n)^{a_1 + \dots + a_n}$$

hay

$$n(a_1 \lg a_1 + a_2 \lg a_2 + \dots + a_n \lg a_n)$$
$$\geqslant (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\lg a_1 + \lg a_2 + \dots + \lg a_n)$$

$$n(a_1 \lg a_1 + \dots + a_n \lg a_n) - (a_1 + \dots + a_n) \times$$
$$\times (\lg a_1 + \dots + \lg a_n) \geqslant 0$$

$$(a_1 - a_2)(\lg a_1 - \lg a_2) + \dots + (a_1 - a_n)(\lg a_1 - \lg a_n) +$$
$$+ (a_2 - a_3)(\lg a_2 - \lg a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) \times$$
$$(\lg a_{n-1} - \lg a_n) \geqslant 0.$$

Từ giả thiết ở trên ta có

$$\lg a_1 \geqslant \lg a_2 \geqslant \dots \geqslant \lg a_n.$$

Vì vậy $(a_i - a_j)(\lg a_i - \lg a_j) \geqslant 0$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

T.T

Bài 7/107. *Giải phương trình*

$$\lg_3(\sqrt[3]{x}+5)=\log_2(\sqrt{x}-4). \qquad (1)$$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Nam*, 9D Hoàn Kiếm, Hà Nội).

Đặt $\lg_2(\sqrt{x}-4)=y \Rightarrow x=(2^y+4)^2 \qquad (*)$

phương trình trở thành

$$\log_3(\sqrt[3]{x}+5)=y$$

$$\Rightarrow 3^y=\sqrt[3]{x}+5=\sqrt[3]{(2^y+4)^2}+5$$

$$=\sqrt[3]{2^{2y}+8.2^y+16}+5$$

$$\Leftrightarrow 1=\sqrt[3]{(2^2/3^3)^y+8(2/3^3)^y+16(1/3^3)^y}+5(1/3)^y. \quad (2)$$

Ta thấy $y=2$ là nghiệm của phương trình (2). Đó là nghiệm duy nhất vì vế phải của (2) là một hàm nghịch biến.

Thay vào (*) ta được $x=64$, thử lại thấy $x=64$ là nghiệm của phương trình (1).

Phương trình (2) có nghiệm duy nhất nên $x=64$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Bài 8/107. *Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình*

$$\begin{cases} xy-x!+y=1\\ yz-y!+z=1\\ x^2-2y^2+2x-4y=2.\end{cases}$$

Lời giải. (của bạn *Vũ Đức Vinh*, lớp 11C Lê Quí Đôn, thành phố Hồ Chí Minh và một số bạn khác).

Vì x nguyên dương nên phương trình thứ nhất tương đương với $y=(x!+1)/(x+1)$. Từ đây suy ra hoặc $x=1$ hoặc x chẵn, vì nếu x lẻ $\geqslant 3$ thì $(x!+1)$ là một số lẻ, còn $x+1$ là một số chẵn nên y không thể nguyên.

Tương tự, từ phương trình thứ hai suy ra hoặc $y=1$ hoặc y chẵn.

Nếu x và y đều chẵn thì vế trái của phương trình thứ ba sẽ là một bội số của 4, nên không thể bằng 2 được. Vậy chỉ còn phải xét hai khả năng: $x=1$, y chẵn, hoặc $y=1$, x chẵn.

Nếu $x=1$ thì phương trình thứ ba trở thành $2y^2+4y-1=0$, phương trình này không có nghiệm nguyên.

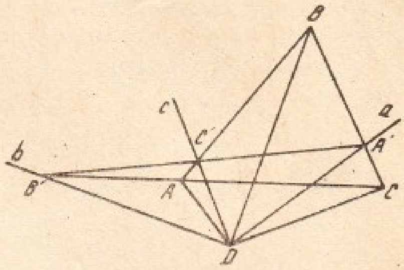
Nếu $y=1$ thì phương trình thứ ba trở thành $x^2+2x-8=0$, phương trình này có nghiệm $x=2$ (không kể nghiệm âm). Thay $y=1$ vào phương trình thứ hai ta được $z=1$. Giá trị $x=2$, $y=1$ đúng là nghiệm của phương trình thứ nhất.

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có một cặp nghiệm (nguyên dương) duy nhất là $x=2$, $y=z=1$. T.T

Bài 9/107. *Qua đỉnh D của một tứ giác phẳng ABCD ta kẻ các đường thẳng $a\perp DA$, $b\perp DB$, $c\perp DC$. Các đường thẳng a,b,c theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB ở A', B', C'. Chứng minh rằng các điểm A', B', C', nằm trên một đường thẳng.*

Lời giải (của *Nguyễn Thu Hương*, 81 Chu Văn An, Hà nội) Ta tính tích:

$$P=\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}$$



Ta dễ chứng minh được:

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{\sin\widehat{BDA'}}{\sin\widehat{CDA'}}\cdot\frac{DB}{DC} \qquad (1)$$

(hai vế đều bằng tỉ số diện tích hai tam giác DBA' và DCA'). Và:

$$\frac{B'C}{B'A}=\frac{\sin\widehat{CDB'}}{\sin\widehat{ADB'}}\cdot\frac{DC}{DA}; \qquad (2)$$

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{\sin\widehat{ADC'}}{\sin\widehat{BDC'}}\cdot\frac{DA}{DB} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$P=\frac{\sin\widehat{BDA'}\cdot\sin\widehat{CDB'}\cdot\sin\widehat{ADC'}}{\sin\widehat{CDA'}\cdot\sin\widehat{ADB'}\cdot\sin\widehat{BDC'}}.$$

Từ tính chất của các góc có các cạnh đôi một vuông góc suy ra:

$$\sin\widehat{BDA'}=\sin\widehat{ADB'},$$
$$\sin\widehat{CDB'}=\sin\widehat{BDC'},$$
$$\sin\widehat{ADC'}=\sin\widehat{CDA'}.$$

Vậy $P=1$. Theo định lý Mênêlauýt đảo ta có A', B' C' thẳng hàng.

Bài 10/107. *Cho đa giác lồi n cạnh nằm trong đường tròn bán kính 1. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm A,B,C là đỉnh của đa giác sao cho diện tích tam giác ABC không vượt quá $4\pi^3/n^3$.*

Lời giải. (của bạn *Quỳnh Nguyễn*, 88 Cầu Đất Hải Phòng). Giả sử đa giác $A_1A_2,\dots A_n$ đã cho có các cạnh là $a_1, a_2, \ldots a_n$; còn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các góc ngoài tương ứng. Giả sử S_i là diện tích tam giác có hai cạnh a_i, a_{i+1} $(i = 1, 2 \ldots n-1)$. Và S_n là diện tích tam giác có hai cạnh a_n, a_1.

Ta có

$2S_i = a_i a_{i+1} \sin \alpha_i, \ (i = 1, 2 \ldots, n-1).$

$2S_n = a_n a_1 \sin \alpha_n.$

Giả sử S là diện tích nhỏ nhất trong các tam giác nói trên, khi đó với mọi $i = 1, 2 \ldots, n-1$, thì $2S \leqslant a_i a_{i+1} \sin\alpha_i$ và $2S \leqslant a_n a_1 \sin\alpha_n$. Vậy

$$2S \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^2 \prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$$

$$\Rightarrow 2S \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{2/n} \left(\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\right)^{1/n}. \qquad (1)$$

Nhưng theo bất đẳng thức Cô-si:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i/n$$

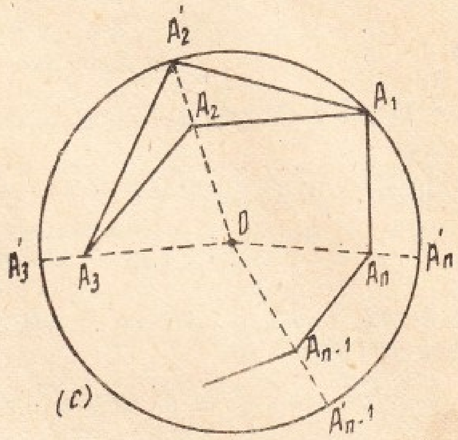
$$\left(\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\right)^{1/n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i/n,$$

nên từ (1) suy ra

$$2S \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i/n\right)^2 . \sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i/n. \qquad (2)$$

Gọi (c) là đường tròn cùng tâm với đường tròn bán kính 1 nhỏ nhất mà có thể chứa trọn đa giác đã cho. Các đường thẳng kẻ qua tâm O và các đỉnh A_i cắt (c) tương ứng tại A'_i (có ít nhất một A'_i trùng với A_i) (hình vẽ). Ta có: Chu vi $A_1A_2 \ldots A_n <$ chu vi đường tròn (c) $\leqslant 2\pi$

tức là $$\sum_{i=1}^{n} a_i < 2\pi \qquad (3)$$



Mặt khác $$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi. \qquad (4)$$

Từ (2), (3), (4) ta có

$$2S < (2\pi/n)^2 (2\pi/n) = 8\pi^3/n^3.$$

Vậy $S < 4\pi^3/n^3$ (đ.p.c.m)

Bài 1/110. Có 1979 học sinh của hai trường xếp thành một hàng ngang trên sân vận động. Biết rằng số học sinh mà bên phải mình là một bạn cùng trường bằng số học sinh mà bên phải mình là một bạn khác trường.

Xác định xem hai học sinh đứng ở hai đầu hàng là cùng trường hay khác trường.

Lê Việt Nga
(ĐHSP Vinh)

Bài 2/110. Cho N là số tự nhiên có hai ước số nguyên tố. Gọi S là tổng tất cả các ước của N. Chứng minh rằng không thể có đẳng thức $S = kN$ với k là số tự nhiên lớn hơn 2.

Nam Hà (ĐHTH Huế)

Bài 3/110. Chứng minh rằng phương trình

$$x^{15} + y^{15} + z^{15} = 19^{1964} + 7^{1964} + 9^{1964}$$

không có nghiệm nguyên.

Nam Hà

Bài 4/110. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^3 + 3z^2 = 1964 \\ x^2 - y^2 - 3z = 1979. \end{cases}$$

Phạm Hoàng (Hà Nội)

Bài 5/110. Chứng minh rằng số

$$k = 64^{19^{15}} + 79^{19^{15}}$$

không thể biểu diễn được dưới dạng tổng các bình phương của ba số hữu tỉ.

Trần Xuân Đáng (ĐHTH Huế)

Bài 6/110. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$7 < (1 + 1/n)^{2n+1} \leqslant 8.$$

Trần Xuân Đáng

Bài 7/110. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \geqslant 8)$. Tính n biết rằng

$$1/A_1A_2 = 1/A_1A_3 + 1/A_1A_5 + 1/A_1A_8.$$

Nguyễn Công Quý
(ĐHSP, T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 8/110. Cho hàm số $f(x)$ và một hằng số a thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = f(x + a).f(x - a)$$

với mọi x.

Chứng minh rằng $f(x)$ là một hàm số tuần hoàn.

Đào Trường Giang (Vĩnh Phú)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 9/110. Gọi B và C là hai điểm cố định của một đường tròn, A là trung điểm cung BC, M là một điểm trên dây BC. AM cắt đường tròn tại D. Tìm quĩ tích trung điểm đoạn nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BDM và CDM khi M chạy trên BC nhưng không trùng với B và C.

Phạm Hữu Đức
(Lớp 12C Bùi Thị Xuân,
T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 10/110. Cho x, y, z là các số khác nhau và a, b, c là những số dương.

Chứng minh rằng nếu

$$(x + y)\lg a = (y + z)\lg b = (z + x)\lg c$$

thì

$$(a/b)^{y^2}(b/c)^{z^2}(c/a)^{x^2} = 1.$$

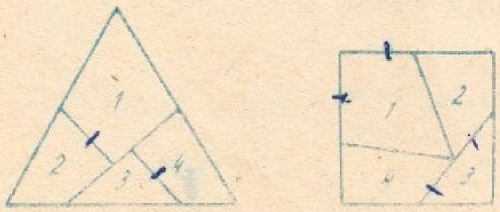
Vũ Quốc Tuấn
(Lớp 9I Chu Văn An,
Hà Nội)

BẠN CÓ BIẾT?

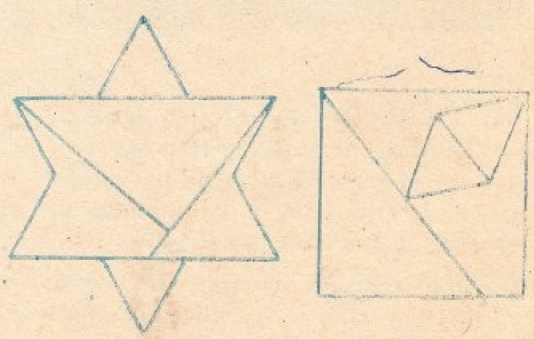
BÀI TOÁN CẮT GHÉP HÌNH

1. Bài toán đặt ra như sau: *Cho hai hình đa giác có diện tích bằng nhau (tương đương); hãy cắt đa giác này ra một số (hữu hạn) mảnh rồi ghép các mảnh này lại để được đa giác kia.* Nếu làm được như vậy thì ta nói rằng *hình đa giác này đã được cắt ghép thành hình đa giác kia* (hay là: *hai hình đa giác đó là đẳng hợp*).

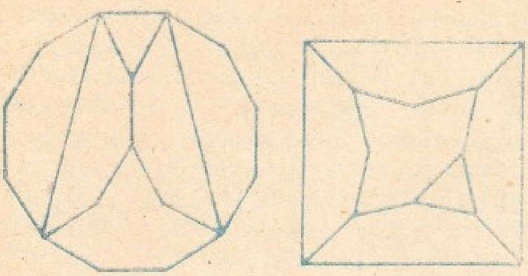
Thí dụ: hình 1 cho thấy hình tam giác đều có thể cắt ra thành 4 mảnh và ghép lại để được một hình vuông. Hình 2 cho thấy một hình sao 6 cánh có thể cắt ghép thành một hình vuông và hình 3 cho thấy một hình đa giác đều 12 cạnh có thể cắt ghép thành một hình vuông.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

	Tam giác	Hình vuông	Ngũ giác	Lục giác
Hình vuông	4		6	5
Ngũ giác	6	6		5
Lục giác	5	5	11	

2. Cuối thế kỷ trước, người ta đã chứng minh được rằng bài toán trên đây *bao giờ cũng giải được*, nghĩa là mọi hình đa giác có thể cắt ghép thành một hình đa giác bất kỳ khác, tương đương với nó, nghĩa là : *hai hình đa giác tương đương thì đẳng hợp.* Cách chứng minh định lý này dựa vào hai điều sau đây :

a) Có thể cắt mọi hình đa giác ra thành một số hữu hạn hình tam giác ;

b) Mọi hình tam giác có thể cắt ghép thành một hình chữ nhật có cạnh dài bằng a cho trước.

Như vậy, mọi hình đa giác có thể cắt ghép thành một hình chữ nhật có một cạnh bằng a cho trước, sau khi thực hiện ba động tác sau đây :

— Cắt đa giác cho trước ra thành các hình tam giác ;

— Cắt ghép mỗi hình tam giác thành một hình chữ nhật có một cạnh bằng a ;

— Cuối cùng, ghép các hình chữ nhật có một cạnh bằng nhau (bằng a) để được một hình chữ nhật lớn có một cạnh bằng a.

Thực hiện ba động tác trên đây theo thứ tự ngược lại, ta có thể cắt ghép hình chữ nhật lớn này thành một hình đa giác cho trước, tương đương với đa giác ban đầu.

3. Phương pháp trên đây bảo đảm để bất kỳ đa giác nào cũng có thể cắt ghép thành một đa giác khác tương đương với nó. Tuy nhiên, theo phương pháp này thì số mảnh được cắt ra có thể rất lớn. Vấn đề được đặt ra là : tìm cách cắt ghép để trong mỗi trường hợp, số mảnh được cắt ra là *ít nhất.* Đây là một bài toán khó và chưa có lời giải.

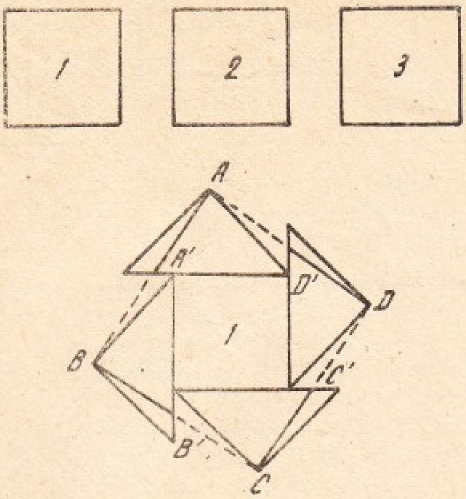
Người ta đã tìm thấy rằng : có thể cắt hình tam giác thành 4 mảnh để ghép thành hình vuông, thành 6 mảnh để ghép thành hình ngũ giác, thành 5 mảnh để ghép thành hình lục giác ; có thể cắt hình vuông thành 6 mảnh để ghép thành hình ngũ giác (hình 4) ; v.v... như trong bảng sau đây :

Hình 4

Hình 5

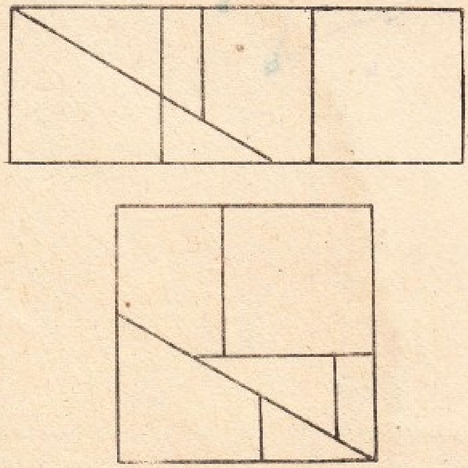
Hình 5 cho thấy rõ một hình bát giác đều có thể cắt ra thành 5 mảnh để ghép thành một hình vuông (*ABCD*). Các bạn thử tìm tòi xem có thể rút các con số trong bảng trên đây xuống nhỏ hơn nữa không ?

4. Một vấn đề tương tự là : hãy cắt *một số hình đa giác* cho trước để ghép lại thành *một hình đa giác* cho trước.



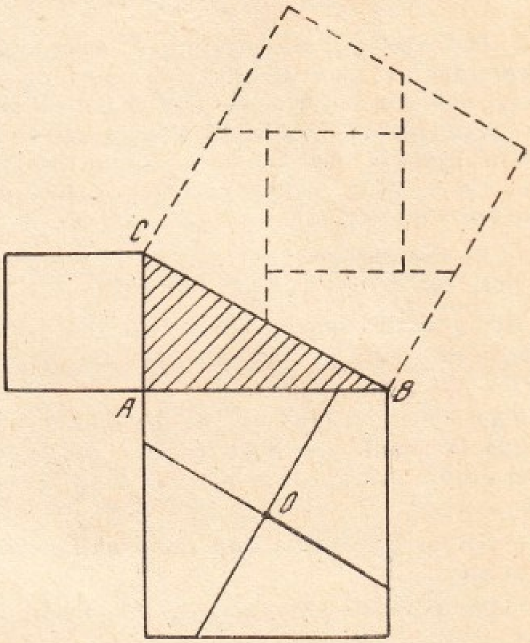
Hình 6

Hình 6 cho thấy một cách cắt ba hình vuông để ghép thành một hình vuông: giữ nguyên hình vuông 1, cắt mỗi hình vuông 2 và 3 thành hai mảnh theo một đường chéo; ghép bốn mảnh này quanh hình vuông 1, sau đó cắt theo các đường AA', BB', CC', DD' rồi ghép lại để được hình vuông $ABCD$. Theo cách cắt ghép này (do một nhà thiên văn học nêu ra ở thế kỷ thứ X), hình vuông mới được ghép thành từ 9 mảnh. Hình 7 cho một cách cắt ghép khác, chỉ gồm có 6 mảnh.



Hình 7

Bằng cách cắt ghép hình, ta có một cách chứng minh hay của định lý Pi-ta-go (chứng minh rằng hình vuông dựng trên cạnh huyền của một tam giác vuông có diện tích bằng tổng các diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh của góc vuông): Giả sử $AB \geqslant AC$ (hình 8); từ tâm O của hình vuông dựng trên AB, ta kẻ đường song song và đường vuông góc với cạnh huyền BC; cắt hình vuông này theo hai đường vừa kẻ, ta có thể ghép 4 mảnh này với hình vuông dựng trên AC, và được hình vuông dựng trên BC (các đường chấm chấm trên hình 8).



Hình 8

5. Một bài toán tương tự được đặt ra với hình đa diện: Có phải mọi hình đa diện có thể cắt ghép thành một hình đa diện bất kỳ tương đương với nó, nói cách khác: có phải mọi hình đa diện tương đương thì đẳng hợp không? Đó là bài toán thứ 3 trong số 23 bài toán nổi tiếng mà nhà toán học Đức Hin-be nêu lên năm 1900, những bài toán khó mà thế kỷ thứ 19 thách thức thế kỷ thứ 20.

Tuy nhiên bài toán này của Hin-be đã được một học trò của ông là Mac-đen giải được ngay trong năm 1901. Điều lý thú là Mac-đen đã chứng minh được rằng *có những hình đa diện tương đương nhưng không đẳng hợp*, thí dụ đơn giản nhất là: *hình lập phương không có thể cắt ghép thành một hình tứ diện đều tương đương với nó.*

H.C.

MỘT SỐ BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ LẦN THỨ 21

NHƯ thường lệ, học sinh dự kỳ thi vô địch toán quốc tế năm nay phải giải 6 bài toán (với số điểm tối đa là 40) trong hai ngày thi, mỗi ngày giải ba bài toán trong 4 giờ. Sau đây là các bài toán thi trong năm nay. Để bài báo khỏi quá dài, đối với mỗi bài toán chúng tôi chỉ đưa ra một cách giải, bạn đọc hãy suy nghĩ để tìm tòi ra các cách giải khác.

Bài 1. *Cho những số tự nhiên p và q thỏa mãn đẳng thức:*

$$p/q = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... - 1/1318 + 1/1319.$$

Chứng minh rằng $p \vdots 1979$.

(CHLB Đức đề nghị, 6 điểm).

Lời giải. Ta có thể viết:

$$p/q = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/1319 - 2(1/2 + 1/4 + ... + 1/1318)$$
$$= 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/1319 - (1 + 1/2 + ... + 1/659)$$
$$= 1/660 + 1/661 + ... + 1/1318 + 1/1319$$
$$= \frac{1979}{660.1319} + \frac{1979}{661.1318} + ... + \frac{1979}{989.990}$$

Khi lấy mẫu số chung cho các phân số ở vế phải là $N = 660.661...1319$ thì ta có

$$p/q = 1979.M/N$$

N là tích của các số nhỏ hơn 1979 mà 1979 là số nguyên tố nên khi đưa vế phải về phân số tối giản ta được $p/q = 1979m/n$.

Vậy $p \vdots 1979$

Bài 2. *Cho một lăng trụ ngũ giác có hai đáy là $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$: Người ta tô màu các cạnh đáy và tất cả các đoạn thẳng A_iB_j ($i, j = 1, 2,...,5$) bằng hai màu xanh và đỏ sao cho trong các tam giác có các cạnh được tô màu không có tam giác nào cả ba cạnh được tô cùng một màu.*

Chứng minh rằng cả mười cạnh đáy phải được tô bằng cùng một màu.

(Bun-ga-ri đề nghị, 7 điểm)

Lời giải. Để dễ trình bày lời giải, ta gọi chung các đoạn thẳng A_iB_j ($i, j = 1, 2,..., 5$) là các *cạnh xiên* của lăng trụ. Nếu đỉnh A_k chẳng hạn được nối với các đỉnh B_j bằng m cạnh xiên tô màu đỏ và $p(=5-m)$ cạnh xiên tô màu xanh thì ta nói *A_k có m cạnh xiên đỏ và p cạnh xiên xanh*.

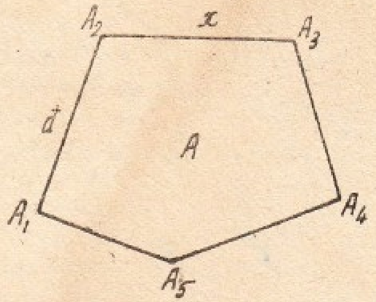
1. Ta chứng minh một *tính chất cơ bản*:

Tính chất. *Trong tổng số 10 cạnh xiên của hai đỉnh kề nhau trong một mặt đáy phải có ít nhất 5 cạnh xiên khác màu với cạnh nối hai đỉnh đó.*

Chứng minh: Nếu hai đỉnh kề nhau A_r, A_s của đáy $A_1A_2A_3A_4A_5$ (gọi là đáy A) chẳng hạn có nhiều hơn 5 cạnh xiên cùng màu với cạnh A_rA_s thì sẽ tìm được (ít nhất một) đỉnh B_k của đáy $B_1B_2B_3B_4B_5$ (gọi là đáy B) sao cho các cạnh xiên B_kA_r và B_kA_s cùng màu với A_rA_s. Tam giác $B_kA_rA_s$ có ba cạnh cùng màu sẽ không thỏa mãn điều kiện tô màu. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2. Ta chứng minh *cả 5 cạnh của một đáy lăng trụ phải được tô cùng một màu.*

Thật vậy, giả sử ngược lại ta dùng hai màu để tô các cạnh của đáy A, thế thì sẽ tìm được hai cạnh kề nhau có màu khác nhau. Vì có thể đánh số lại các đỉnh nên có thể giả sử A_1A_2 đỏ và A_2A_3 xanh (hình 1). Xét các trường hợp sau:



Hình 1

a) Trường hợp A_2 có ít nhất 4 cạnh xiên cùng màu.

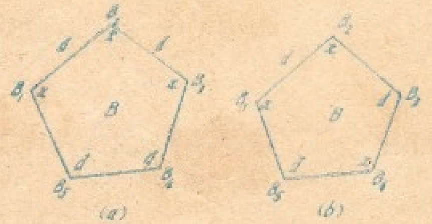
Nếu A_2 có ít nhất 4 cạnh xiên xanh thì B có ít nhất 3 cạnh đỏ. Trong khi đó từ tính chất cơ bản suy ra A_3 có ít nhất 4 cạnh xiên đỏ, do đó B có ít nhất 3 cạnh xanh. B có 5 cạnh mà có ít nhất 3 cạnh đỏ và 3 cạnh xanh, vô lí.

Nếu A_2 có ít nhất 4 cạnh xiên đỏ thì lý luận tương tự bằng cách thay A_3 bằng A_1 cũng đi đến điều vô lí.

Như vậy trường hợp a) không xảy ra.

b) Trường hợp A_2 chỉ có 3 cạnh xiên cùng màu.

Giả sử A_2 có 3 cạnh xiên xanh. Bây giờ xem mỗi cạnh xiên A_2B_j có màu gì thì ta ghi màu đó ở đỉnh B_j tương ứng, chỉ có hai trường hợp như hình 2 (đánh số lại các đỉnh của đáy B nếu cần).



Hình 2

Theo tính chất cơ bản, A_3 có ít nhất 3 cạnh xiên đỏ, ba cạnh đó không thể nối đến cả B_1, B_2, B_3 trong trường hợp (a) và không thể nối đến cả B_1 và B_2 trong trường hợp (b) vì như vậy sẽ tạo ra tam giác có ba cạnh cùng màu đỏ. Như vậy một trong các đỉnh B_1, B_2, B_3 trong trường hợp (a) cũng như một trong các đỉnh B_1, B_2 trong trường hợp (b) được nối với A_3 bằng cạnh màu xanh, và như vậy lại tạo ra tam giác có ba cạnh cùng màu xanh (tam giác có hai đỉnh là A_2, A_3 và một trong các đỉnh nói trên).

Nếu A_2 có 3 cạnh xiên đỏ thì lý luận tương tự bằng cách thay A_3 bằng A_1 ta cũng đi đến điều vô lí.

Tóm lại tất cả các trường hợp đều không thể xảy ra, tức là giả thiết các cạnh của đáy A không tô cùng màu là không được. Vậy đáy A có các cạnh được tô cùng một màu. Cũng vậy, đáy B có các cạnh được tô cùng một màu.

3. Chứng minh *các cạnh của hai đáy A và B phải được tô bằng cùng một màu.*

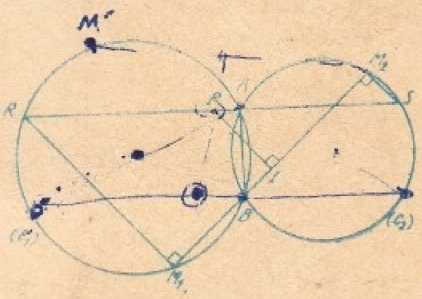
Giả sử các cạnh của đáy A được tô màu đỏ. Xét cạnh A_rA_s bất kỳ của A. Theo tính chất cơ bản, A_r và A_s có tổng số ít nhất 5 cạnh xiên xanh và như vậy một trong A_r hoặc A_s có ít nhất 3 cạnh xiên xanh, chẳng hạn đó là A_r. Ba cạnh xiên xanh đó nối với ba đỉnh của B thì ít nhất với hai đỉnh kề nhau. Vậy cạnh nối hai đỉnh kề này của B phải được tô đỏ. Từ đó ta thấy các cạnh của đáy B cũng phải tô màu đỏ như các cạnh của đáy A.

Bài 3. *Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau và gọi A là một trong các giao điểm của chúng. Hai chất điểm M_1, M_2 chuyển động trên (C_1), (C_2) tương ứng, xuất phát từ A cùng một lúc, theo cùng một chiều và có vận tốc không đổi. Sau một vòng, M_1 và M_2 trở về A cùng một lúc.*

Chứng minh rằng có một điểm P sao cho ở bất kỳ thời điểm nào trong quá trình chuyển động thì hai chất điểm M_1 và M_2 luôn cách đều P.

(Liên Xô đề nghị, 7 điểm)

(Bài này là một trong những bài dễ của kỳ thi. Song vì hội đồng thi đặt nó ở vị trí bài khó nhất của ngày thi thứ nhất, nên có thể nhiều học sinh dự thi chưa làm đến bài này (do mất nhiều thì giờ làm bài 2 là bài khó nhưng người dự thi tưởng là dễ hơn bài 3). Cũng vì vị trí của nó và do cách ra đề, một số học sinh giải bài này cho là một bài toán phức tạp nên đã nghĩ đến hướng giải khá cầu kỳ. Chỉ có bạn *Lê Bá Khánh Trình* trong đoàn học sinh dự thi của nước ta nhận thấy bài này là một bài toán hình học đơn giản, nên đã giải theo cách thông thường rất ngắn gọn. Cách giải của bạn Trình cũng khác với đáp án. Vì vậy bạn Trình đã được tặng một giải đặc biệt về lời giải bài toán này).



Hình 3

Lời giải. Từ đầu bài suy ra (hình 3) ở một thời điểm bất kỳ thì độ lớn của cung mà M_1 đã đi qua bằng độ lớn của cung mà M_2 đã đi qua. Do đó nếu gọi B là giao điểm thứ hai của hai đường tròn, nối AB, M_1B, M_2B thì $\widehat{M_1BA} + \widehat{M_2BA} = 180^\circ$, tức là ba điểm M_1, M_2 và B thẳng hàng.

Từ M_1 kẻ đường vuông góc với M_1M_2, cắt (C_1) ở R, từ M_2 kẻ đường vuông góc với M_1M_2, cắt (C_2) ở S. Từ tứ giác nội tiếp M_1BAR suy ra $\widehat{RAB} = 90^\circ$. Từ tứ giác nội tiếp M_2BAS suy ra $\widehat{BAS} = 90^\circ$. Vậy ba điểm R, S, A nằm trên cùng một đường thẳng vuông góc với AB: do AB cố định nên RS cố định (khi M_1 và M_2 chuyển động). Từ định lý Ta-lét suy ra đường trung trực của đoạn M_1M_2 luôn đi qua trung điểm P của đoạn thẳng cố định RS. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

In tại Xí nghiệp in Hà Nội. Số in 159/79. Xong ngày 20-11-79.
Lưu chiểu tháng 11-79. Chỉ số: 12884 Giá: 0,10đ