HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Số 109

4

1979

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Dây nói: 52825

NÓI CHUYỆN VỚI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN

PHÁT TRIỂN THÊM BẤT ĐẲNG THỨC ÉC-ĐÔ-SƠ

NGUYỄN CÔNG QUỲ

Bất đẳng thức Éc-đô-sơ đã được giới thiệu trong báo Toán học và tuổi trẻ số 9 – 10 năm 1974. Có thể tóm tắt nội dung bài báo đó như sau. Năm 1935 nhà toán học Hung-ga-ri P. Éc-đô-sơ, trong khi nghiên cứu các tính chất của các hình phẳng đã đề xuất một bất đẳng thức (sau này mang tên ông) như sau:

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2\,(d_a + d_b + d_c) \qquad (1)$$

trong đó R_a, R_b, R_c là khoảng cách từ một điểm M nằm trong mặt phẳng của một tam giác ABC đến các đỉnh của tam giác; d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh của tam giác đó. Ít năm sau người ta đã chứng minh được bất đẳng thức này. (Trong bài báo có cho một chứng minh sơ cấp của bất đẳng thức). Về sau người ta còn chứng minh được những bất đẳng thức có liên quan đến bất đẳng thức (1); đó là

$$R_aR_bR_c \geqslant 8\, d_ad_bd_c, \qquad (2)$$

$$\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \geqslant \sqrt{2}\,(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}), \qquad (3)$$

$$1/R_a + 1/R_b + 1/R_c \leqslant (1/d_a + 1/d_b + 1/d_c)/2. \qquad (4)$$

Các đẳng thức ở (1), (2), (3) và (4) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều và M là tâm của tam giác đó.

Để thấy mối quan hệ giữa các bất đẳng thức trên, ta cần biết thế nào là giá trị trung bình của các số dương. Người ta gọi giá trị trung bình bậc k (k là một số thực) của các số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là số

$$M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[k]{(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k)/n}\,.$$

Với định nghĩa đó ta thấy ngay bất đẳng thức (1) có thể viết dưới dạng

$$M_1(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2\,M_1(d_a, d_b, d_c). \qquad (1)$$

Còn các bất đẳng thức (2), (3), (4) cũng dễ dàng đưa được về dạng

$$M_k(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2\,M_k(d_a, d_b, d_c) \qquad (5)$$

trong đó k lần lượt nhận các giá trị 0,1/2 và

Như vậy, một giả thiết được đặt ra
bất đẳng thức (5) có đúng với mọi số thự

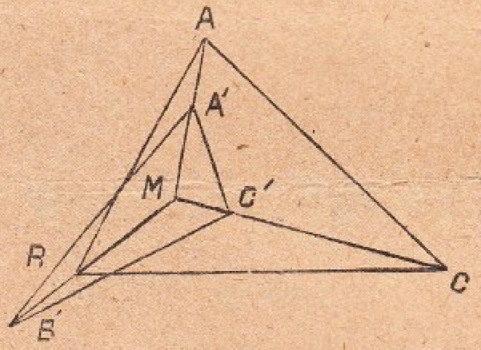
Trải qua những sự tìm tòi nghiên cứu, nhà toán học Áo Florian năm 1958 đã chứng minh rằng bất đẳng thức (5) đúng và chỉ đúng với những giá trị của $k \in [-1, 1]$, và đồng thời cũng chứng minh được rằng với những số thực k không thuộc $[-1, 1]$ thì ta luôn luôn có bất đẳng thức:

$$M_k(R_a, R_b, R_c) > \sqrt[|k|]{2}\; M_k(d_a, d_b, d_c). \qquad (6)$$

Tiếp sau đó bất đẳng thức (1) đã được mở rộng vào đa giác lồi và trong không gian, mà ở đó ta đã tìm được những kết quả thú vị.

Nối tiếp những suy nghĩ trên, sau đây sẽ nêu lên một phương hướng phát triển khác của những bất đẳng thức đã tìm được.

Giả sử đã cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong mặt phẳng của tam giác đó (hình vẽ).



Thực hiện phép nghịch đảo cực M phương tích 1, ta thu được tam giác $A'B'C'$, trong đó A', B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B và C trong phép nghịch đảo. Từ $MB \cdot MB' = MC \cdot MC'$ ta suy ra $MB/MC' = MC/MB'$. Tỷ lệ thức này chứng tỏ rằng hai tam giác MBC và $MC'B'$ (có chung góc ở đỉnh M) là đồng dạng với nhau. Tỷ số của phép đồng dạng biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai là:

$$\frac{MB'}{MC} = \frac{MB \cdot MB'}{MB \cdot MC}\;\frac{1}{MB \cdot MC} = \frac{1}{R_b\, R_c}.$$

Nếu đặt $MA' = R'_a$, $MB' = R_b'$, $MC' = R'_c$ và gọi d'_a, d'_b, d'_c theo thứ tự là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh của tam giác $A'B'C'$ thì tỷ số đồng dạng nói trên sẽ là d'_a/d_a, tức là ta có

$$d'_a/d_a = 1/R_bR_c$$

từ đó $\quad d'_a = d_a/R_bR_c$

ay $\quad d'_a = d_aR_a/R_aR_bR_c$

tự $\quad d'_b = d_bR_b/R_aR_bR_c \qquad (7)$

$\quad d'_c = d_cR_c/R_aR_bR_c$

Mặt khác ta có $MA \cdot MA' = 1$ hay $R_aR'_a = 1$, từ đó có $R'_a = 1/R_a$ hay:

$$R'_a = R_bR_c/R_aR_bR_c$$

Tương tự $\quad R'_b = R_cR_a/R_aR_bR_c \qquad (8)$

$$R'_c = R_aR_b/R_aR_bR_c$$

Bây giờ giả sử trong tam giác ABC ta đã tìm ra được một quan hệ nào đó biểu thị bằng một bất đẳng thức giữa R_a, R_b, R_c, d_a, d_b, d_c, giả sử là $\alpha \geqslant \beta$ (9). Vì ABC là một tam giác bất kỳ nên bất đẳng thức đã tìm ra cũng đúng cho tam giác $A'B'C'$. Bằng cách thay các giá trị của d'_a, d'_b, d'_c và R'_a, R'_b, R'_c ở (7) và (8) vào bất đẳng thức (9) ta sẽ thu được một bất đẳng thức mới. Để đơn giản các phép tính ta nhận xét rằng hai vế α và β của bất đẳng thức (9) bao giờ cũng đẳng cấp và cùng bậc đối với các độ dài R_a, R_b, R_c, d_a, d_b, d_c. Do đó ta có thể giản ước mẫu số chung $R_aR_bR_c$ ở các công thức (7) và (8). Kết quả là ta đi đến nguyên tắc sau đây:

Giả sử trong một tam giác ta có một quan hệ nào đó biểu thị bằng một bất đẳng thức (hay đẳng thức) giữa các độ dài R_a, R_b, R_c, d_a, d_b, d_c. Nếu thực hiện trên bất đẳng thức (hay đẳng thức) đó phép biến đổi f:

$$R_a \to R_bR_c,\; R_b \to R_cR_a,\; R_c \to R_aR_b,$$

$$d_a \to d_aR_a,\; d_b \to d_bR_b,\; d_c \to d_cR_c,$$

thì ta sẽ thu được một bất đẳng thức (hay đẳng thức) biểu thị một quan hệ mới cũng đúng trong tam giác.

Để minh họa nguyên tắc trên ta hãy thực hiện phép biến đổi f trên bất đẳng thức (1). Tức khắc ta thu được bất đẳng thức

$$R_bR_c + R_cR_a + R_aR_b \geqslant 2(d_aR_a + d_bR_b + d_cR_c). \qquad (10)$$

Tương tự, thực hiện phép biến đổi f trên các bất đẳng thức (3) và (4) ta lần lượt thu được:

$$\sqrt{R_bR_c} + \sqrt{R_cR_a} + \sqrt{R_aR_b} \geqslant \geqslant \sqrt{2}(\sqrt{d_aR_a} + \sqrt{d_bR_b} + \sqrt{d_cR_c}), \qquad (11)$$

$$2(1/R_bR_c + 1/R_cR_a + 1/R_aR_b) \leqslant \leqslant 1/d_aR_a + 1/d_bR_b + 1/d_cR_c. \qquad (12)$$

Các bất đẳng thức (10), (11) và (12) chỉ là những trường hợp đặc biệt của một bất đẳng thức tổng quát sau đây thu được từ bất đẳng thức (5) của Florian bằng cách thực hiện trên đó phép biến đổi f:

$$M_k(R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b) \geqslant 2M_k(d_aR_a, d_bR_b, d_cR_c), -1 \leqslant k \leqslant 1. \qquad (13)$$

In 1…
…ố: 1288

Đối với những số thực $k > 1$ hoặc $k < -1$, thực hiện phép biến biến đổi f trên bất đẳng thức (6) của Florian ta có

$$M_k(R_bR_c,\ R_cR_a,\ R_aR_b) > \sqrt[|k|]{2}.M_k(d_aR_a,\ d_bR_b,\ d_cR_c). \quad (14)$$

Chẳng hạn với $k = 2$ và $k = -2$ ta lần lượt có

$$R_b^2R_c^2 + R_c^2R_a^2 + R_a^2R_b^2 > 2(d_a^2R_a^2 + d_b^2R_b^2 + d_c^2R_c^2). \quad (15)$$

$$2\,(1/R_b^2R_c^2 + 1/R_c^2R_a^2 + 1/R_a^2R_b^2) < (1/d_a^2R_a^2 + 1/d_b^2R_b^2 + 1/d_c^2R_c^2). \quad (16)$$

Bất đẳng thức (14) cũng như các trường hợp đặc biệt của nó là các bất đẳng thức (15), (16) không thể « tăng cường » hơn được nữa; nói cách khác, đối với bất đẳng thức (14), tỷ số

$$M_k\,(R_bR_c,\ R_cR_a,\ R_aR_b)\ /\ M_k\,(d_aR_a,\ d_bR_b,\ d_cR_c)$$

có thể tiến dần tới $\sqrt[|k|]{2}$ bao nhiêu cũng được, nhưng không bao giờ bằng được giá trị đó.

Các bạn thân mến! Trên đây chúng ta đã nêu lên một phương hướng phát triển thêm bất đẳng thức Ec-đô-sơ. Mong rằng chúng ta tiếp sức nhau suy nghĩ, nêu lên được những phương hướng khác của việc nghiên cứu và thu được những kết quả phong phú hơn nữa. Hoặc có thể tìm thêm những quan hệ trong tam giác và thực hiện nguyên tắc đã nêu trên để phát hiện thêm những quan hệ mới. Chẳng hạn có thể nêu lên bất đẳng thức sau đây:

$$d_aR_a + d_bR_b + d_cR_c \geqslant 2\,(d_bd_c + d_cd_a + d_ad_b).$$

Các bạn hãy chứng minh bất đẳng thức trên sau đó áp dụng nguyên tắc đã nêu để tìm ra một bất đẳng thức mới.

Một câu hỏi được đặt ra: Nếu ta thực hiện phép biến đổi f trên một bất đẳng thức nào đó liên tiếp hai hoặc nhiều lần thì liệu chúng ta có thu được kết quả gì mới nữa không? Câu trả lời là: không. Thực hiện phép biến đổi f liên tiếp hai lần thì ta sẽ trở về bất đẳng thức ban đầu. Nguyên nhân của điều đó được tìm thấy ở tính chất đối hợp của phép nghịch đảo; nói rõ hơn là: nếu ta thực hiện liên tiếp hai lần một phép nghịch đảo nào đó trên một hình thì ta lại trở về hình đó.

Cuối cùng xin nêu một gợi ý khác. Cũng thực hiện phép nghịch đảo cực M, phương tích 1. Giả sử qua phép nghịch đảo đó các hình chiếu A_1, B_1, C_1 của điểm M trên các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự biến thành các điểm A_1', B_1', C_1'. Bây giờ lại xét tam giác $A_1'B_1'C_1'$ cùng với điểm M. Ta hãy tìm quan hệ giữa các khoảng cách từ M đến các đỉnh và các cạnh trong hai tam giác ABC và $A_1'B_1'C_1'$. Ta đi đến một phép biến đổi mới và cho « tác động » vào các bất đẳng thức đã biết. Việc thực hiện cụ thể xin dành cho bạn đọc.

NHỮNG BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU

TRẦN THÚC TRÌNH

QUA các đề thi vào Đại học khối A và trong tuyển tập « Những bài toán sơ cấp, Tập 3, Hình học » (Nhà xuất bản ĐH và THCN, 1976), các bạn đã gặp một số bài toán có liên quan đến mặt cầu. Chúng tôi muốn giới thiệu thêm một số bài khác để các bạn luyện tập, nhất là đối với các bạn ở xa Thủ đô, những nơi mà tài liệu về toán không có nhiều.

1. Trước tiên, cần phải nắm vững số điều kiện xác định một mặt cầu là 4, chẳng hạn cần phải xác định tâm (3 điều kiện) và bán kính (1 điều kiện). Nếu biết mặt cầu đi qua một điểm tức là biết được 1 điều kiện ($OM = R$); nếu biết mặt cầu tiếp xúc với một mặt phẳng tức là biết 1 điều kiện ($d = R$); nếu biết mặt cầu tiếp xúc với một mặt cầu tức biết được 1 điều kiện ($d = R + R'$)... Tâm của mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng có thể xác định như sau: lấy giao điểm của trục của tam giác ABC (tức là đường vuông góc với mặt phẳng ABC và đi qua tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC) và mặt phẳng trung trực của AD (hoặc của BD, CD).

2. Sau đây, chúng tôi giới thiệu cùng các bạn một số bài tập bổ ích về mặt cầu. Các bạn hãy bắt tay vào nghiên cứu việc giải quyết đề lu[illegible] tập. Chỉ khi nào không giải được, h[illegible] c[illegible] những chỉ dẫn ở phần 3. điề[illegible]

Bài 1. Dựng mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và tiếp xúc với một mặt cầu (O) cho trước.

Bài 2. Một mặt cầu bán kính r tiếp xúc với các mặt bên của hình chóp tam giác tại trực tâm của các mặt ấy. Tổng 3 góc ở đỉnh của các mặt bên bằng α. Hãy tính cạnh bên của hình chóp.

Bài 3. Diện tích xung quanh của một hình chóp tam giác bằng S, chu vi đáy bằng $3c$. Một mặt cầu tiếp xúc với 3 cạnh của đáy tại trung điểm mỗi cạnh và cắt các cạnh bên tại trung điểm mỗi cạnh. Chứng minh rằng hình chóp là đều và tìm bán kính mặt cầu.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác $P.ABCD$ và hình cầu nội tiếp. Đáy $ABCD$ là hình thang cân (AB là đáy nhỏ) có cạnh bên bằng l và góc nhọn bằng φ. Hai mặt bên APD và BPC là hai tam giác cân ($AP = PD$; $BP = PC$) tạo với đáy cùng một góc α. Tính bán kính r của hình cầu nội tiếp.

Bài 5. Một hình cầu (S) tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Từ một điểm bất kỳ M trên (S), dựng hai tiếp tuyến cắt (P) tại A và B.

a) So sánh hai góc AMB và AIB

b) Gọi I' là điểm đối xứng của I qua AB. Chứng minh rằng bốn điểm O, I, I', M cùng nằm trong một mặt phẳng và MI' luôn luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên (S).

Bài 6. Cho đường tròn (C) tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi (S) là mặt cầu nhận (C) làm đường tròn lớn; (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại B; đường thẳng (d) nằm trong (P), cách B một đoạn bằng a.

a) Gọi M là một điểm di chuyển trên (d). Tìm quỹ tích giao điểm M' của AM và mặt cầu.

b) Quỹ tích của M' là một đường tròn. Hãy tính bán kính r của nó và tìm tâm I của đường tròn ấy.

c) Tìm quỹ tích tâm I khi (d) di chuyển sao cho nó vẫn tiếp xúc với đường tròn tâm B bán kính a.

Bài 7. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện (T): $ABCD$; G, G_a, G_b, G_c, G_d lần lượt là trọng tâm của (T) và của các mặt đối diện đỉnh A, B, C, D, ω là tâm mặt cầu đi qua $G_aG_bG_cG_d$; các hình chiếu vuông góc của O, G, ω, D lên mặt phẳng ABC lần lượt là O_d, G'_d, ω_d, H_d; giao điểm của DH_d với mặt cầu là D'.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{\omega\omega_d} = (1/6)\overrightarrow{DD'}$.

b) Chứng minh rằng nếu (ω) tiếp xúc với một mặt của (T) thì đỉnh thứ tư cách đều 3 đỉnh của mặt tiếp xúc. Nếu (ω) tiếp xúc với 2 mặt của (T) thì (T) có 5 cạnh bằng nhau; nếu (ω) tiếp xúc 3 mặt thì (T) là tứ diện đều.

c) Chứng minh rằng tỷ số R/r bé nhất $(=3)$ khi (T) là đều, trong đó R, r lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp.

Hãy thu hẹp bài toán trên về mặt phẳng.

Bài 8. Góc tam diện đỉnh D trong tứ diện $ABCD$ là vuông. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ấy và R là bán kính của nó.

a) Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà 3 cạnh bằng các khoảng cách từ D, C, B xuống đường kính qua A.

b) Gọi S là diện tích của tam giác ấy, $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$. Chứng minh rằng $abc = 4RS$.

Bài 9. Lấy hai đỉnh đối nhau trong hình lập phương, rồi nối các trung điểm của các cạnh không đi qua hai đỉnh ấy, tạo thành một hình lục giác đều: thiết diện này chia hình lập phương ra làm hai phần. Tìm bán kính mặt cầu nội tiếp trong mỗi phần theo cạnh a của hình lập phương.

Bài 10. Ba mặt cầu có chung điểm A. Biết rằng không có đường thẳng nào qua A lại tiếp xúc với cả 3 mặt cầu ấy, hãy chứng minh rằng 3 mặt cầu đã cho còn có một điểm chung thứ hai nữa, khác A.

Bài 11. Từ mỗi đỉnh của một tứ diện dựng mặt phẳng chứa tâm đường tròn ngoại tiếp của mặt đối diện và vuông góc với mặt ấy. Chứng minh rằng 4 mặt phẳng như trên giao nhau tại tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bài 12. Trong tam giác vuông, ta có $r = p - a$, với r là bán kính đường tròn nội tiếp, a là đường huyền, p là nửa chu vi. Hãy tìm hệ thức tương tự trong không gian.

Bài 13. a) Trong tam giác ABC, chứng minh rằng nếu tâm đường tròn nội tiếp trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp thì $AB = BC = CA$ và trọng tâm của tam giác cũng trùng với hai tâm nói trên.

b) Mở rộng cho trường hợp tứ diện: nếu tâm mặt cầu nội tiếp trùng với tâm của mặt cầu ngoại tiếp thì các mặt của tứ diện bằng nhau và trọng tâm của tứ diện trùng với hai tâm nói trên.

c) Dựng tứ diện nhận mặt cầu (s) với bán kính r làm mặt cầu nội tiếp và nhận mặt cầu (S) với bán kính R làm mặt cầu ngoại tiếp, trong đó $R \geqslant 3r$.

Bài 14. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Chứng minh rằng các cạnh A_1A_4, A_2A_3 và đường thẳng nối trọng tâm G với tâm mặt cầu nội tiếp cùng song song với một mặt phẳng.

3. Hướng dẫn giải một số bài (Các bạn hãy tự vẽ hình).

Bài 1. Tâm I nằm trên trục (d) của tam giác ABC; tiếp điểm D nằm trên OI. Mặt phẳng (O, d)

là mặt phẳng đối xứng, cắt mặt cầu đã cho theo đường tròn lớn (C) và cắt mặt cầu cần dựng theo đường tròn lớn (D). Gọi M, N là giao điểm giữa mặt phẳng (O, d) với đường tròn đi qua ABC; bài toán trở về dạng: dựng đường tròn (D) đi qua M, N và tiếp xúc với (C).

Bài 2. Gọi H_1, H_2, H_3 là trực tâm các mặt DAB, DBC, DAC; $DE_1 \perp AB$, $DE_2 \perp BC$, $BF_1 \perp DA$; $BF_2 \perp DC$. Chú ý rằng $DH_1 = DH_2 = DH_3$, $BH_1 = BH_2 = BH_3$. Xét các tam giác bằng nhau DBH_1, DBH_2; DBE_1, DBE_2; DBF_1, DBF_2; DBA, DBC để có $AB = BC$, $DA = DC$. Tương tự, $BC = CA$, $DB = DA$, tức tam giác ABC là đều và $DA = DB = DC = x$, $\widehat{CDE_2} = \alpha/6$. Tâm O của mặt cầu nội tiếp nằm trên đường cao DD'. Hai tam giác OH_2D, $E_2D'D$ đồng dạng nên $OH_2/E_2D' = H_2D/D'D$. Tính $E_2D' = x\sqrt{3}/3 . \sin\alpha/6$, $D'D = (x/3) \times \times \sqrt{4\cos^2(\alpha/6) - 1}$, $H_2D = x\cos(\alpha/2)/\cos(\alpha/6)$ (áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác DBH_2. Đáp:

$$x = \frac{r\cot g(\alpha/2)}{\cos(\alpha/3)} \quad \sqrt{4\cos^2(\alpha/6) - 1}.$$

Bài 3. Trước hết chứng minh rằng tam giác đáy ABC là đều. Tâm I của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp trùng nhau. Gọi A', B', C' là điểm giữa các cạnh DA, DB, DC. Đường tròn qua $A'B'C'$ là ảnh của đường tròn ABC trong phép vị tự tâm D, tỷ số $1/2$, nên hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (ABC) song song. Tâm I' của đường tròn $A'B'C'$, I và D thẳng hàng. Tâm mặt cầu nằm trên II' vuông góc với hai mặt phẳng nói trên. Vậy $D.ABC$ là hình chóp tam giác đều. Gọi E là điểm tiếp xúc trên CB; xét thiết diện SAE để tính r.

$$\text{Đáp}: x = \sqrt{\frac{16S^2 + 45c^4}{24c}}.$$

Bài 4. Gọi L và K là trung điểm của BC và AD. Trước hết chứng minh rằng $\widehat{LPK}$ là góc phẳng của nhị diện (PBC, PAD). Tam giác PLK cân, nên đường cao PH cũng là đường phân giác. Vậy PH nằm trong mặt phẳng phân giác của góc nhị diện nói trên. Tiếp đó chứng minh rằng PH cũng nằm trong mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (PAB, PCD) bằng cách chứng minh rằng bất kỳ điểm M nào nằm trong mặt phẳng LPK cũng cách đều hai mặt phẳng (PAB), (PCD). Từ đó để tính r. Đáp: $r = KH \operatorname{tg}(\alpha/2) = (l/2)\sin\varphi \operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Bài 6. Chú ý $AM' . AM = 4R^2$. Khi cát tuyến AM' lớn nhất thì biến thành đường kính. AM' lớn nhất khi AM ngắn nhất, tức khi BM ngắn nhất (M trùng với chân đường vuông góc hạ từ B xuống (d)): $AM' = 4R^2/\sqrt{4R^2 + a^2}$, $r = 2R^2/\sqrt{4R^2 + a^2}$. Ta luôn có $AI/AM = 2R^2/\sqrt{4R^2 + a^2} = k$, tức I là ảnh của M trong phép vị tự tâm A tỷ số k. Vậy quỹ tích của I là đường tròn ảnh của M trong phép vị tự tâm A tỷ số k.

Bài 7. Trọng tâm G của tứ diện cách đỉnh bằng 3/4 trung tuyến tương ứng. Từ đó, ta có $3\,\overrightarrow{\omega\omega_d} + \overrightarrow{OO_d} = 4\overrightarrow{GG'_d} = \overrightarrow{DH_d} = (1/2)\,\overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{OO_d}$. Vậy $\overrightarrow{\omega\omega_d} = (1/6)\,\overrightarrow{DD'}$. Thu hẹp trong mặt phẳng: $\overrightarrow{\omega\omega_d} = (1/4)\,\overrightarrow{AA'}$ (chiếu lên BC).

Bài 8. Gọi K, H, L lần lượt là chân các đường cao hạ từ D, C, B xuống đường kính AB'.

Cách 1: Kẻ BB' song song và bằng DC. Tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là điểm giữa của AB'. Kẻ AA' song song và bằng DC, nên $AA'BB'$ là hình bình hành. Kẻ $KN \perp AB'$, vậy $KN = LB$. Sẽ chứng minh tiếp $DN = CH$, tức tồn tại tam giác DKN thỏa mãn đầu bài (xét hai tam giác CAB' và $DA'B$); $V(KDA'B) = (1/3)S.2R$; $V(A'DAB) = (1/6)\ abc$. Nhưng $V(K.DA'B) = = V(A.DA'B)$, vậy $abc = 4RS$,

Cách 2. Đặt $DK = l$, $CH = m$, $BL = n$; trong tam giác DAB' có: $l . \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a\sqrt{b^2 + c^2}$ do đó $l = a\sqrt{b^2 + c^2} / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $m = b\sqrt{c^2 + a^2} / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $n = c\sqrt{a^2 + b^2} / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dễ thấy rằng $(m - n)^2 < l^2 < (m + n)^2$ tức $|m - n| < l\,|m + n|$. Gọi S là diện tích của tam giác DKN thì $16S^2 = (l + m + n) \times (-l + m + n) . (l - m + n) . (l + m - n) = a^2b^2c^2/(a^2 + b^2 + c^2) = a^2b^2c^2/R^2$ tức $abc = 4RS$.

Bài 10. Trước tiên, chứng minh rằng trong ba mặt cầu đã cho không có 2 mặt cầu tiếp xúc với nhau. Thật vậy, giả sử có 2 mặt cầu tiếp xúc với nhau tại A thì tiếp điểm chung qua A cắt mặt cầu theo một đường tròn. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ấy tiếp xúc với cả 3 mặt cầu, trái với giả thiết. Vậy 2 trong 3 mặt cầu phải cắt nhau theo một đường tròn đi qua A. Đường tròn này không thể chỉ có một điểm A chung với mặt cầu thứ 3, vì nếu vậy thì tiếp tuyến tại A của đường tròn ấy tiếp xúc với cả ba mặt cầu, trái với giả thiết. Giao điểm (khác A) giữa đường tròn ấy với mặt cầu thứ 3 nằm trên 3 mặt cầu đã cho.

Bài 12. Đáp: $r = \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 - S}{a + b + c}$, trong đó S là diện tích mặt huyền; S_i $(i = 1, 2, 3)$ là diện tích các mặt bên; a, b, c là ba cạnh của góc tam diện vuông.

Bài 13. b) Từ giả thiết suy ra rằng các đường tròn ngoại tiếp các mặt đều bằng nhau. Cứ từng cặp 2 đường tròn lại có dây cung chung nên trong 12 góc của các mặt có từng đôi bằng nhau. Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \hat{1}$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} =$

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{3}$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \widehat{1'}$, $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \widehat{2'}$, $\widehat{CBD} = \widehat{BAD} = \widehat{3'}$. Trong các tam giác ABC, ABD BCD, ACD ta có lần lượt: $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} = 2v$, (1); $\widehat{1'} + \widehat{2'} + \widehat{3} = 2v$, (2); $\widehat{1} + \widehat{2'} + \widehat{3'} = 2v$ (3), $\widehat{1'} + \widehat{2} + \widehat{3'} = 2v$, (4). Từ (1) và (2) ta được: $\widehat{1} + \widehat{2} = \widehat{1'} + \widehat{2'}$ (5): từ (3) và (4) ta có: $\widehat{1} - \widehat{2} = \widehat{1'} - \widehat{2'}$ (6). Cuối cùng từ (5) và 6 suy ra: $\widehat{1} = \widehat{1'}$, $\widehat{2} = \widehat{2'}$, $\widehat{3} = \widehat{3'}$, tức các mặt bằng nhau; khi đó trọng tâm G trùng với tâm mặt cầu nội tiếp và tâm mặt cầu ngoại tiếp. c) *Phân tích:* Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu ngoại tiếp theo đường tròn (C_1) có tâm O_1, bán kính $R_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$. Qua D dựng mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), cắt mặt cầu ngoại tiếp theo đường tròn (C_2), có tâm O_2, bán kính R_2. Chú ý rằng O_1, O_2, O_3 thẳng hàng. Trung tuyến DO cắt mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G_1 của tam giác ABC nên hai tam giác OO_1G_1 và OO_2D đồng dạng theo tỷ số 3. Do đó, $OO_2 = 3r$, $R_2 = \sqrt{R^2 - (3r)^2}$ và $O_1G_1 = R_2/3 = \sqrt{R^2 - 9r^2}/3 < R_1$, tức G_1 nằm trong đường tròn (C_1).

Cách dựng: Dựng mặt phẳng tiếp xúc với (s) tại O_1 bất kỳ, mặt này cắt (S) theo (C_1). Trên (C_1), lấy điểm C bất kỳ rồi lấy G_1 trong (C_1) sao cho $O_1G_1 = \sqrt{R^2 - 9r^2}/3$. Sau đó, lấy H sao cho $CH = (3/2)\,CG_1 < (3/2)\,(CO_1 + O_1G_1) = (3/2) \times [R_1 + (1/3)\sqrt{R^2 - (3r)^2}] < 2R_1$. Từ H dựng $AB \perp O_1H$. Nối G_1 với O' cắt (S) tại D. Bài toán có vô số nghiệm hình.

Bài 14. Đặt $S_1 = s$, $S_2 = s + d$, trong đó d là công sai của cấp số cộng. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, ta có: $4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_4}$. Ta đã biết rằng với 4 điểm A_i mang các hệ số α_i thì tồn tại điểm I duy nhất sao cho $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + \alpha_3\overrightarrow{IA_3} + \alpha_4\overrightarrow{IA_4} = 0$, trong đó khi điểm I trùng với tâm O của mặt cầu nội tiếp thì $\alpha_1/s_1 = \dots = \alpha_4/s_4$. Từ đó sẽ có:

$$4\left(s + \frac{3}{2}d\right)\overrightarrow{OG} + \frac{3}{2}d\,\overrightarrow{A_1A_4} + \frac{1}{2}d\,\overrightarrow{A_2A_3} = 0.$$

Bài 1/106. *Tìm các số tự nhiên có tính chất: khi chuyển chữ số đầu tiên của nó vào vị trí sau cùng thì ta được một số kém 8 lần số ban đầu.*

Lời giải (của *Phạm văn Hiến* – $A_0$8 Đại học Tổng hợp Hà Nội). Gọi số phải tìm là

$$N = \overline{a_1a_2a_3\dots a_n}$$

Theo đầu bài ta có

$$N = 8\,\overline{a_2a_3\dots a_na_1}\,.$$

Ta có nhận xét là a_1 chỉ có thể bằng 8 hoặc bằng 9 còn $a_2 = 1$.

Với $a_1 = 8$ ta có phép tính

$$\begin{array}{r} 1a_3\dots a_n8 \\ \times \qquad 8 \\ \hline 81a_3\dots a_n \end{array}$$

Thực hiện phép tính trên, đầu tiên tìm ra $a_n = 4$, thay a_n ở số bị nhân bằng 4 ta tìm ra $a_{n-1} = 8, \dots$

Cứ tiếp tục làm phép tính cho đến khi con số ở số bị nhân là số 1, và số ở kết quả là số 8. Khi đó ta được kết quả của phép tính nhân là

$$A = 8101265822784.$$

Với $a_1 = 9$ ta thực hiện phép tính

$$\begin{array}{r} 1a_3\dots a_n9 \\ \times \qquad 8 \\ \hline 91a_3\dots a_n \end{array}$$

sẽ được kết quả

$$B = 9113924050632.$$

Rõ ràng là các phép tính trên nếu được tiếp tục thực hiện thì ở kết quả ta lại thu được các con số lặp lại các con số đã thu được. Vậy các số N thỏa mãn đầu bài là các số có các dạng:

$$N_1 = \underbrace{\overline{A\dots A}}_{n} \quad \text{và} \quad N_2 = \underbrace{\overline{B\dots B}}_{n}$$

Với $n = 1, 2, 3, \dots$

Bài 2/106. *Cho* $P_n = n^4 + 4^n$, *Hãy tìm tất cả các giá trị của n để* P_n *là số nguyên tố.*

Lời giải (của *Trương Đình Tâm* – 9E cấp 3 Hùng Vương, Vĩnh Phú). Ta nhận thấy rằng nếu n là số chẵn thì $P_n = n^4 + 4^n$ là số chẵn lớn hơn 2. Vậy ta chỉ xét các n lẻ: $n = 2k + 1$, với k nguyên và không âm.

Ta có: $P_n = n^4 + 4^n = (n^2 + 2^n)^2 - 2^{n+1}n^2$
$$= (n^2 + 2^n)^2 - 2^{2(k+1)}.n^2$$
$$= \underbrace{(n^2 + 2^n + 2^{k+1}n)}_{A_n}\underbrace{(n^2 + 2^n - 2^{k+1}.n)}_{B_n}.$$

1) *Trường hợp* $k > 0$.

Ta dễ dàng nhận thấy $A_n > B_n$.

Mặt khác $B_n = n^2 + 2^n - 2^{k+1}.n = n^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}.n$
$$= n^2 + 2^{2k} - 2.2^k.n + 2^{2k}$$
$$= (n - 2^k)^2 + 2^{2k} > 1.$$

Nghĩa là khi $k > 0$, P_n không thể là số nguyên tố.

2) *Trường hợp* $k = 0$.

Khi đó $n = 1$ và $P_1 = 5$ là số nguyên tố.

Vậy P_n là số nguyên tố khi và chỉ khi $n = 1$.

L.H.

Bài 3/106. *Cho ba số dương a, b, c. Người ta lập các dãy số* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ *như sau:* $u_1 = a$, $v_1 = b$, $w_1 = c$; *với* $n \geq 2$ *thì*
$$u_n = \sqrt{v_{n-1}w_{n-1}}, v_n = \sqrt{u_{n-1}w_{n-1}}, w_n = \sqrt{v_{n-1}u_{n-1}}.$$

Tìm giới hạn của các dãy số đó. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0} A^x = 1$, *với A là hằng số dương.*

Lời giải (của *Nguyễn Thanh Nhã* – lớp 10c, trường cấp 3 Lê Hồng Phong, Thành phố Hồ Chí Minh).

Theo đầu bài ta có:
$$u_nv_nw_n = \sqrt{v_{n-1}w_{n-1}}.\sqrt{u_{n-1}w_{n-1}}.\sqrt{v_{n-1}u_{n-1}}$$
$$= u_{n-1}v_{n-1}w_{n-1}$$

Vậy $u_nv_nw_n = u_{n-1}v_{n-1}w_{n-1} = \ldots = u_1v_1w_1 = abc$ (1)

Mặt khác $v_nw_n = \sqrt{u_{n-1}w_{n-1}}.\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}$
$$= \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}w_{n-1}}.\sqrt{u_{n-1}}$$
$$= \sqrt{abc}\sqrt{u_{n-1}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:
$$u_n = (abc)^{1/2}.u_{n-1}^{-1/2} \quad (3)$$

Theo (3) ta tìm được:
$$u_n = (abc)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}} \times a^{(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Đặt $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}$. Khi $n \to \infty$ thì $p_n \to p$
$$p = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right)$$
$$= \frac{1/2}{1 - 1/2^2} - \frac{1/2^2}{1 - 1/2^2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Mặt khác ta có:
$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(abc)^{p_n}.\lim\limits_{n\to\infty} a^{(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}}$
$$= \sqrt[3]{abc}$$

Một cách hoàn toàn tương tự ta sẽ tìm được
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \sqrt[3]{abc}$$

L. H

Bài 4/106: *Giải phương trình:*
$$27^{\log_6 x} - 6.64^{\log_6 x} = 6x^2 - 11x.8^{\log_6 x}$$

Lời giải (của nhiều bạn).

Điều kiện để lôga có nghĩa là $x > 0$. Do $x = 6^{\log_6 x}$ nên phương trình đã cho có thể viết dưới dạng
$$27^{\log_6 x} - 6.64^{\log_6 x} = 6.36^{\log_6 x} - 11.6^{\log_6 x}.8^{\log_6 x}$$
hay $27^{\log_6 x} - 6.36^{\log_6 x} + 11.48^{\log_6 x} - 6.64^{\log_6 x} = 0.$

Chia hai vế của phương trình cho $64^{\log_6 x}$ ta được phương trình tương đương
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3\log_6 x} - 6\left(\frac{3}{4}\right)^{2\log_6 x} + 11\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_6 x} - 6 = 0$$

Đặt $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_6 x}$ ta có
$$y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0.$$

Giải phương trình này ta được các nghiệm $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$. (Chú ý là tổng các hệ số của phương trình bằng 0 nên nó có nghiệm bằng 1).

Từ $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_6 x} = 1$ ta tìm được $x = 1$.

Từ $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_6 x} = 2$ ta tìm được $x = 6^{\log_{3/4} 2}$.

Từ $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_6 x} = 3$ ta tìm được $x = 6^{\log_{3/4} 3}$.

Vậy các nghiệm của phương trình ban đầu là
$$x_1 = 1, x_2 = 6^{\log_{3/4} 2}, x_3 = 6^{\log_{3/4} 3}.$$

Bài 5/106. *Chứng minh rằng*

$$4498 < \sum_{i=1}^{15^4} 1/\sqrt[4]{i} < 4500$$

Lời giải (của nhiều bạn). Trước hết ta chứng minh bổ đề:

Với mọi số tự nhiên n thì

$$\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{(n+1)^3}-\sqrt[4]{n^3}\right]<\frac{1}{\sqrt[4]{n}}<\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{n^3}-\sqrt[4]{(n-1)^3}\right]$$

Chứng minh:

$$\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{(n+1)^3}-\sqrt[4]{n^3}\right]<\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow (n+1)^{3/4} - n^{3/4} < 3/4n^{1/4}$

$\Leftrightarrow (1+1/n)^{3/4} < 1 + 3/4n$

$\Leftrightarrow (1+1/n)^3 < (1+3/4n)^4$

$\Leftrightarrow 3/8n^2 + 11/16n^3 + 81/256n^4 > 0$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, vậy (1) đúng.

Biến đổi tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}<\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{n^3}-\sqrt[4]{(n-1)^3}\right] \qquad (2)$$

$\Leftrightarrow (1-1/n)^3 < (1-3/4n)^4$

$\Leftrightarrow 3/8n^2 - 11/16n^3+81/266n^4>0$

$\Leftrightarrow (n-11/12)^2+1/288 > 0.$

Bất đẳng thức này cũng hiển nhiên đúng, vậy (2) đúng.

Kết hợp (1) và (2) bổ đề đã được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{2^3}-\sqrt[4]{1}\right)<1/\sqrt[4]{1}<\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{1}-0\right)$$

$$\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{3^3}-\sqrt[4]{2^3}\right)<1/\sqrt[4]{2}<\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{2^3}-\sqrt[4]{1}\right)$$

. . . .

$$\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{(n+1)^3}-\sqrt[4]{n^3}\right)<1/\sqrt[4]{n}<\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{n^3}-\sqrt[4]{(n-1)^3}\right)$$

Cộng n bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{(n+1)^3}-1\right]<\sum_{i=1}^{n} 1/\sqrt[4]{i}<\frac{4}{3}\sqrt[4]{n^3}$$

Thay $n = 15^4$ ta có

$$4498 < \frac{4}{3}(15^3-1)<\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{(15^4+1)^3}-1\right)$$

$$< \sum_{1}^{15^4} 1/\sqrt[4]{i}<\frac{4}{3}\sqrt[4]{15^{4\cdot 3}} = 4500, \text{ tức là}$$

$$4498 < \sum_{i=1}^{15^4} 1/\sqrt[4]{i} < 4500 \text{ (đ.p.c.m).}$$

Bài 6/106. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có*

$$\sqrt[n]{(n+1)!} \geqslant 1 + \sqrt[n]{n!}.$$

Lời giải (của *Trần Duy Liên* – A₀8 Đại học Tổng hợp Hà Nội). Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1 \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)!}} + \sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)!}}$$

Với $n = 1$ ta có đẳng thức $1 = 1$. Với $n > 1$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số dương không bằng nhau ta có:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)!}}<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)!}}<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{n+1}\right).$$

Vậy:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)!}}+\sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)!}}<\frac{1}{n}.n = 1 \text{ (đ.p.cm.).}$$

Nhiều bạn đã chứng minh bất đẳng thức tổng quát hơn: với n số dương bất kỳ $a_1,\ldots,a_n$ thì

$$\sqrt[n]{(1+a_1)\ldots(1+a_n)} \geqslant 1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$$

và đều chứng minh bằng phương pháp qui nạp. Có thể dùng ngay cách chứng minh như trên để chứng minh bất đẳng thức tổng quát.

Bài 7/106. *Chứng minh rằng phương trình sau đây không có nghiệm nguyên dương với mọi số tự nhiên m, n:*

$$(9+\sqrt{61})^x + (9-\sqrt{61})^x = m.2^{x+n+1}$$

Lời giải. Chia hai vế của phương trình cho 2^x ta được phương trình tương đương

$$\left(\frac{9+\sqrt{61}}{2}\right)^x+\left(\frac{9-\sqrt{61}}{2}\right)^x = m.2^{n+1}. \qquad (*)$$

Đặt $y_1 = (9+\sqrt{61})/2$, $y_2 = (9-\sqrt{61})/2$ thì y_1 và y_2 là hai nghiệm của phương trình

$$y^2 - 9y + 5 = 0.$$

Vế phải của phương trình (*) luôn chia hết cho 4. Ta chứng minh vế trái của nó là số nguyên không chia hết cho 4. Thực vậy gọi vế trái là S_x ta có

$S_x = y_1^x + y_2^x$

$= (y_1+y_2)(y_1^{x-1}+y_2^{x-1}) - y_1y_2(y_1^{x-2}+y_2^{x-2})$

$= 9S_{x-1} - 5S_{x-2}$

Tương tự: $S_{x-1} = 9S_{x-2} - 5S_{x-3}$

Suy ra

$S_x = 76S_{x-2} - 45S_{x-3} = 4(19S_{x-2} - 11S_{x-3}) - S_{x-3}$.

Như vậy S_x và S_{x-3} hoặc cùng chia hết cho 4 hoặc cùng không chia hết cho 4.

Nếu S_x chia hết cho 4 thì $S_{x-3}, S_{x-6}, S_{x-9}$... đều chia hết cho 4, do đó một trong các số S_1, S_2, S_3 phải chia hết cho 4. Nhưng

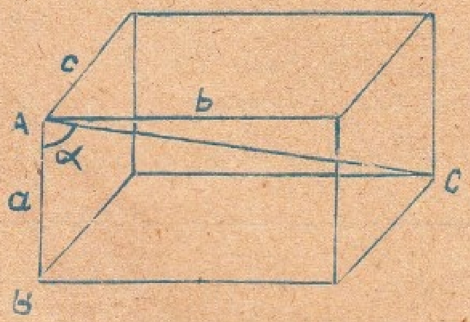
$$S_1 = y_1 + y_2 = 9,$$
$$S_2 = y_1^2 + y_2^2 = (y_1+y_2)^2 - 2y_1y_2 = 9^2 - 2.5 = 71,$$
$$S_3 = 9S_2 - 5S_1 = 9.71 - 5.9 = 594$$

đều là các số không chia hết cho 4. Vậy S_x không chia hết cho 4 với mọi số tự nhiên x. (*Chú ý:* vì S_1, S_2 là các số nguyên nên từ công thức $S_x = 9S_{x-1} - 5S_{x-2}$ suy ra S_x là số nguyên với mọi số tự nhiên x). Vì thế phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

T.T.

Bài 8/106. *Chứng minh rằng nếu hình hộp chữ nhật có ba cạnh là a, b, c, thể tích V, ba góc tạo bởi đường chéo và ba cạnh a, b, c tương ứng là α, β, γ thì ta có bất đẳng thức*

$$a^6/\cos^{12}\alpha + b^6/\cos^{12}\beta + c^6/\cos^{12}\gamma \geq 2187V^2.$$



Lời giải (của nhiều bạn).

Xét tam giác ABC, vì $AB \perp BC$ (do AB vuông góc với mặt phẳng đáy) nên ta có

$$\cos\alpha = a/AC = a/\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

do đó

$$a^6/\cos^{12}\alpha = (a^2+b^2+c^2)^6/a^6.$$

Tương tự ta có:

$$b^6/\cos^{12}\beta = (a^2+b^2+c^2)^6/b^6,$$
$$c^6/\cos^{12}\gamma = (a^2+b^2+c^2)^6/c^6.$$

Cộng ba đẳng thức trên vế với vế, ta được:

$$a^6/\cos^{12}\alpha + b^6/\cos^{12}\beta + c^6/\cos^{12}\gamma =$$
$$= (a^2+b^2+c^2)^6\,(1/a^6+1/b^6+1/c^6). \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với 3 số dương, lần lượt ta có:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$
$$1/a^6+1/b^6+1/c^6 \geq 3/a^2b^2c^2$$

Từ đây suy ra

$$(a^2+b^2+c^2)^6(1/a^6+1/b^6+1/c^6) \geq$$
$$3^7a^2b^2c^2 = 2187\,V^2.$$

Kết hợp với đẳng thức (*) ta suy ra điều cần chứng minh.

T.T.

Bài 9/106. *Chứng minh rằng*

$$2\sqrt[k]{n} \geq \sqrt[k]{n+\sqrt[n]{k}} + \sqrt[k]{n-\sqrt[n]{k}},$$

với n và k là số tự nhiên.

Lời giải (của bạn *Nguyễn Ngọc Khánh* – 8c Đoàn kết III Hà Nội và *Ngô Duy Ninh* – 12c cấp III Quang Trung, Quy Nhơn).

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^k+b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \qquad (*)$$

với k là số tự nhiên và a, b > 0.

Với $k = 1$ bất đẳng thức (*) trở thành một đẳng thức đúng. Giả sử bất đẳng thức (*) đúng với $k = n$, tức là ta có,

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức này với $(a+b)/2$ (dương) ta được:

$$\frac{a^n+b^n}{2}\cdot\frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}$$

Muốn chứng minh $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{n+1}$

ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} \geq \frac{a^n+b^n}{2}\cdot\frac{a+b}{2}$$

hay $2a^{n+1} + 2b^{n+1} - ab^n - a^nb \geq 0$

$a^{n+1} + b^{n+1} + a^n(a-b) - b^n(a-b)$

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta chỉ cần chứng minh:

$$(a-b)(a^n-b^n) \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức này luôn luôn đúng (do $a, b>0$ nên nếu $a \geqslant b$ thì $a^n \geqslant b^n$, còn nếu $a<b$ thì $a^n<b^n$).

Như vậy, bất đẳng thức (*) cũng đúng với $k=n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức (*) đúng với mọi số tự nhiên k.

Bây giờ ta áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh, bằng cách đặt:

$$a=\sqrt[k]{n+\sqrt[n]{k}},\quad b=\sqrt[k]{n-\sqrt[n]{k}},$$

ta có

$$\left(\frac{\sqrt[k]{n+\sqrt[n]{k}}+\sqrt[k]{n-\sqrt[n]{k}}}{2}\right)^k \leqslant \frac{n+\sqrt[n]{k}+n-\sqrt[n]{k}}{2}=n$$

Lấy căn bậc k cả hai vế ta có:

$$\frac{\sqrt[k]{n+\sqrt[n]{k}}+\sqrt[k]{n-\sqrt[n]{k}}}{2} \leqslant \sqrt[k]{n}$$

hay

$$2\sqrt[k]{k} \geqslant \sqrt[k]{n+\sqrt[n]{k}}+\sqrt[k]{n-\sqrt[n]{k}} \quad \text{(đ.p.c.m).}$$

Chú ý: Trong trường hợp k là số chẵn thì ta phải đặt điều kiện để cho căn có nghĩa, cụ thể là

$n \geqslant \sqrt[n]{k}$ hay $n^n \geqslant k$.

T.T.

Bài 10/106. *Có tồn tại hay không một đa thức $f(x)$ hệ số nguyên không đồng nhất bằng 0 có giá trị tuyệt đối các hệ số nhỏ hơn 8 mà chia hết cho đa thức*

$$g(x) = 4x^3 - 4x^2 - 1979$$

Lời giải. Ta chứng minh bổ đề:

Nếu đa thức $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ có một nghiệm là x_1 thì

$$x_1 \leqslant 1+\max|a_i/a_0| \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Chứng minh: Do x_1 là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ nên

$$a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_n = 0 \qquad (1)$$

Nếu $x_1 \leqslant 1$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên là đúng. Giả sử $x_1>1$: chia hai vế của (1) cho a_0 ta được

$$x_1^n = -\left(\frac{a_1}{a_0}x_1^{n-1}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\right)$$
$$\leqslant |a_1/a_0|x_1^{n-1}+\ldots+|a_n/a_0|.$$

Đặt $M=\max|a_i/a_0|$ thì từ bất đẳng thức trên suy ra

$$x_1^n \leqslant M\frac{x_1^n-1}{x_1-1}$$

hay $\quad x_1 \leqslant 1+M-M/x_1^n < 1+M$

Bổ đề được chứng minh.

Giả sử tồn tại đa thức $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_0$ thỏa mãn điều kiện của đầu bài:

$$f(x)=g(x).h(x)$$

($h(x)$ không nhất thiết có hệ số nguyên).

Ta có $g(8)=4.8^3-4.8^2-1979=-187<0$,

$$g(10)=4.10^3-4.10^2-1979=1621>0,$$

nên $g(x)$ có nghiệm x_0 mà $8<x_0<10$.

Rõ ràng x_0 cũng là nghiệm của $f(x)$. Theo bổ đề ta có

$$x_0 \leqslant 1+\max|a_i/a_0|$$

Vậy

$$\max|a_i/a_0| \geqslant x_0-1>8-1=7.$$

Nhưng điều đó không thể có vì $\max|a_i|<8$ và $a_0 \geqslant 1$.

Do đó không tồn tại đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện của đầu bài.

Bài 1/109. Cho phương trình

$$(-1)^{[x]}(x-2[x/2]-1)=\{x\}-1.$$

Người ta lấy 1979 nghiệm không âm $x_1, x_2,\ldots, x_{1979}$ của phương trình đó, thỏa mãn điều kiện

$$x_{n+1}-x_n \geqslant 1/2 \quad (n=1,2,\ldots,1978)$$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của x_{1979}.

b) Khi x_{1979} nhận giá trị nhỏ nhất thì trong số 1979 nghiệm nói trên có thể có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm nguyên và có ít nhất bao nhiêu nghiệm nguyên?

Lê Thống Nhất (Đ.H.S.P. Vinh)

Bài 2/109. Trên một bàn cờ châu Âu ta viết vào các ô các số từ 1 đến 64 (mỗi ô viết một số khác nhau). Chứng minh rằng luôn luôn tìm được một ô trắng và một ô đen sao cho hiệu hai số ở hai ô đó không bé hơn 5.

Vũ Quang Sửu (Đ.H.S.P. Vinh)

Bài 3/109. Cho bốn số tự nhiên a,b,c,d. Biết rằng tổng của bốn số đó chia hết cho cả bốn số và một số bất kỳ trong bốn số nhỏ hơn tổng của ba số còn lại. Chứng minh rằng có ít nhất hai số bằng nhau.

Trần Xuân Đáng (Đ.H.T.H) Huế)

Bài 4/109. Trên đáy lớn AB của hình thang $ABCD$ cho một điểm M. Tìm trên đáy CD một điểm N sao cho diện tích của tứ giác nhận được do các đường thẳng AN, BN, CM, DM cắt nhau tạo thành là lớn nhất.

Nguyễn Văn Lộc (Đ.HS.P. Vinh)

Bài 5/109. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 2^x - |y^2 - y| + 1 > 0 \\ 2^x + |y-1| < 5. \end{cases}$$

Đào Quang Điền (Hải Hưng)

Bài 6/109. Giải phương trình

$$\sin^6 x - 3\sin^8 x - 1/256 = 0$$

với x thỏa mãn điều kiện $|\sin x| < \sqrt{3}/3$.

Đào Quang Điền

Bài 7/109. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo thông số m

$$\frac{2x_1^2 - 4\cos m.x_1 + 1}{x_1 - 2\cos m} = x_2$$

$$\frac{2x_2^2 - 4\cos m.x_2 + 1}{x_2 - 2\cos m} = x_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{2x_{n-1}^2 - 4\cos m.x_{n-1} + 1}{x_{n-1} - 2\cos m} = x_n$$

$$\frac{2x_n^2 - 4\cos m.x_n + 1}{x_n - 2\cos m} = x_1.$$

Dương Quốc Việt (10+3 Tây Bắc)

Bài 8/109. Trong mặt phẳng hãy tìm mọi điểm (x, y) mà các tọa độ x và y của chúng thỏa mãn phương trình

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$$

sao cho biểu thức $\sqrt{x^2 + y^2}$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Nguyễn Thái Hòe (Đ.H.S.P. Vinh)

Bài 9/109. Trong không gian cho một mặt cầu S và các điểm cố định $M_1, M_2, \dots M_n$ (n là một số tự nhiên cho trước lớn hơn 1). Ứng với mỗi điểm M trong không gian ta dựng vectơ

$$\overrightarrow{MK} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MM_i}.$$

Tìm quĩ tích điểm K khi điểm M chạy trên mặt cầu S.

Nguyễn Công Quỳ
(Đ.H.S.P.T.P. Hồ Chí Minh)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/109. Cho một tamgiác đều ABC nội tiếp trong một đường tròn (c). Từ một điểm M tùy ý trên đường tròn (c) kẻ MH, MI, MK vuông góc với AB, BC, CA (H, I, K theo thứ tự nằm trên AB, BC, CA). Tìm vị trí điểm M trên đường tròn sao cho

$$d = MA + MI + MB + MH + MC + MK$$

có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất.

Nguyễn Quốc Quân
(12C) Nguyễn Đình Chiểu, Bến Tre)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

CÔNG THỨC SIN

VŨ HOÀNG THÁI

Ta đã biết trong hình học phẳng, nếu cho một tam giác ABC, gọi các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C lần lượt là a, b, c thì ta có công thức sau:

$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C \qquad (1)$$

Nếu ta ký hiệu các góc A, B, C lần lượt là (b, c), (a, c), (a, b) thì ta có thể viết công thức (1) như sau:

$$a/\sin(b,c) = b/\sin(a,c) = c/\sin(a,b) \qquad (1')$$

Đó là công thức sin cho tam giác.

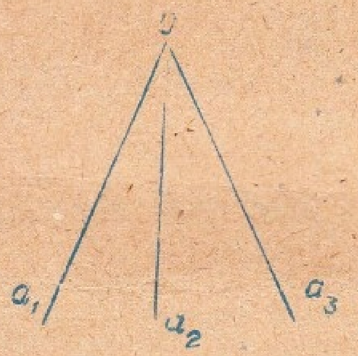
Công thức đó cho ta thấy *mối liên hệ giữa các cạnh và các góc trong một tam giác.*

Như vậy, một vấn đề được đặt ra là: trong hình học không gian hãy tìm mối liên hệ giữa các mặt và các góc nhị diện của một góc tam diện, cũng như mối liên hệ giữa các mặt và các góc của một tứ diện.

Trong không gian, cho một góc tam diện $Oa_1a_2a_3$ (hình 1). Gọi các mặt đối diện với các cạnh a_1, a_2, a_3 lần lượt là (a_2, a_3), (a_1, a_3), (a_1, a_2) và các góc phẳng của các góc nhị diện có các cạnh a_1, a_2, a_3 lần lượt là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ thì như đã biết, ta có công thức sau:

$$\cos(a_2, a_3) = \cos(a_1, a_2)\cos(a_1, a_3) + \sin(a_1, a_2)\sin(a_1, a_3)\cos\alpha_1. \qquad (2)$$

Đó là *công thức cosin cho góc tam diện.*



Từ công thức (2) ta có:

$$\sin(a_1,a_2)\sin(a_1,a_3)\cos\alpha_1 = \cos(a_2,a_3) - \cos(a_1a_2)\cos(a_1a_3)$$

Bình phương hai vế ta có:

$$\sin^2(a_1,a_2)\sin^2(a_1,a_3)\cos^2\alpha_1 = \cos^2(a_2,a_3) + \cos^2(a_1,a_2)\cos^2(a_1,a_3) - 2\cos(a_1a_2)\times \cos(a_1a_3)\cos(a_2a_3) \qquad (3)$$

Thay

$$\cos^2\alpha_1 = 1 - \sin^2\alpha_1,\ \cos^2(a_1,a_2) = 1 - \sin^2(a_1a_2),$$
$$\cos^2(a_1,a_3) = 1 - \sin^2(a_1,a_3),$$

$\cos^2(a_2,a_3) = 1 - \sin^2(a_2,a_3)$ vào (3) ta có:

$$\sin^2(a_1,a_2)\sin^2(a_1,a_3)(1-\sin^2\alpha_1) = 1-\sin^2(a_2,a_3) + [1-\sin^2(a_1,a_2)][1-\sin^2(a_1,a_3)] - 2\cos(a_1a_2)\times \cos(a_1,a_3)\cos(a_2,a_3)$$

Từ đó ta có:

$$\sin^2(a_1,a_2)\sin^2(a_1,a_3)\sin^2\alpha_1 =$$
$$= \sin^2(a_1,a_2) + \sin^2(a_1,a_3) +$$
$${}^2(a_2,a_3)+2\cos(a_1,a_2)\cos(a_1,a_3)\cos(a_2,a_3) - 2$$

Chia cả hai vế cho $\sin^2(a_1,a_2)\sin^2(a_1,a_3)\times \sin^2(a_1,a_3)$ ta có:

$$\sin^2\alpha_1/\sin^2(a_2,a_3) = [\sin^2(a_1,a_2) + \sin^2(a_1,a_3) + \sin^2(a_2,a_3)]/\sin^2(a_1,a_2)\sin^2(a_1,a_3)\sin^2(a_2,a_3) + [2\cos(a_1,a_2)\cos(a_1,a_3)\cos(a_2,a_3) - 2]/\sin^2(a_1,a_2)\times \sin^2(a_1,a_3)\sin(a_2,a_3) \qquad (4)$$

Ta thấy đẳng thức (4) đối xứng đối với các mặt (a_1,a_2), (a_1,a_3) và (a_2,a_3) và vì vai trò bình đẳng giữa các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nên từ đó có thể suy ra công thức sau:

$$\sin\alpha_1/\sin(a_2,a_3) = \sin\alpha_2/\sin(a_1,a_3) = \sin\alpha_3/\sin(a_1a_2) \qquad (5)$$

Ta gọi đó là *công thức sin cho góc tam diện.*

Công thức đó cho ta thấy *mối liên hệ giữa các mặt và các góc nhị diện của một góc tam diện.*

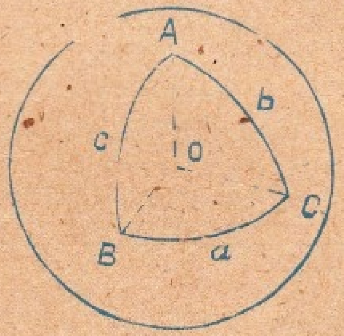
Từ công thức đó ta dễ dàng đưa đến công thức xác định mối liên hệ giữa các cạnh và các góc của một tam giác cầu (tam giác vẽ trên mặt cầu, các cạnh của nó là các cung tròn của các đường tròn lớn của mặt cầu đó).

Giả sử ta có tam giác cầu ABC thuộc mặt cầu tâm O bán kính R (hình 2).

Gọi các cạnh (tức các cung tròn) đối diện với các đỉnh A, B, C lần lượt là a, b, c và các góc $\alpha = \widehat{BOC}$, $\beta = \widehat{AOC}$, $\gamma = \widehat{AOB}$ thì ta có:

$$\alpha = a/R,\ \beta = b/R,\ \gamma = c/R \qquad (6)$$

(α, β, γ đo bằng ra đian)



Còn các góc A, B, C của tam giác cầu ABC là các góc phẳng của các góc nhị diện lần lượt có cạnh là OA, OB, OC của góc tam diện $OABC$ (đỉnh O).

Như vậy, áp dụng công thức (5) cho góc tam diện $OABC$ ta có:

$$\sin A/\sin\alpha = \sin B/\sin\beta = \sin C/\sin\gamma. \qquad (7)$$

Thay (6) vào (7) ta có:

$$\sin A/\sin(a/R) = \sin B/\sin(b/R) = \sin C/\sin(c/R) \qquad (8)$$

Đó là *công thức sin cho tam giác cầu.*

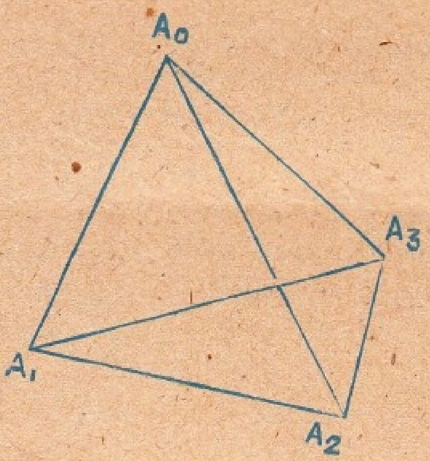
Công thức đó cho ta thấy *mối liên hệ giữa các cạnh và các góc của một tam giác cầu.*

Bây giờ ta tìm một công thức cho thấy mối liên hệ giữa các mặt và các góc của một hình tứ diện.

Giả sử trong không gian, cho hình tứ diện $A_0A_1A_2A_3$. Gọi các cạnh đối diện với các cặp đỉnh A_i, A_j là a_{ij} (hoặc a_{ji}) và các góc phẳng của các góc nhị diện có các cạnh A_iA_j là α_{ij} (hoặc α_{ji}).

Áp dụng công thức (5) cho góc tam diện đỉnh A_1 ta có:

$$\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin(a_{03}a_{23})} = \frac{\sin\alpha_{12}}{\sin(a_{02}, a_{32})} = \frac{\sin\alpha_{02}}{\sin(a_{02}, a_{03})}. \qquad (9)$$



Nhân lần lượt cả tử số và mẫu số của phân số thứ nhất với a_{03} và a_{23}, phân số thứ hai với a_{02} và a_{23}, phân số thứ ba với a_{02} và a_{03} và gọi s_0, s_1, s_2, s_3 lần lượt là các diện tích của các tam giác đối diện với các đỉnh A_0 A_1, A_2, A_3 của hình tứ diện thì từ (9) ta có:

$$\frac{s_3}{a_{30}a_{32}\sin\alpha_{31}} = \frac{s_2}{a_{20}a_{23}\sin\alpha_{21}} = \frac{s_2}{a_{02}a_{03}\sin\alpha_{01}} \qquad (9')$$

Tương tự, áp dụng công thức (5) cho góc tam diện đỉnh A_2 ta có:

$$\frac{s_3}{a_{30}a_{31}\sin\alpha_{32}} = \frac{s_1}{a_{10}a_{13}\sin\alpha_{12}} = \frac{s_0}{a_{01}a_{03}\sin\alpha_{02}} \qquad (10)$$

Cũng áp dụng công thức (5) cho góc tam diện đỉnh A_3 ta có:

$$\frac{s_2}{a_{20}a_{21}\sin\alpha_{23}} = \frac{s_1}{a_{10}a_{12}\sin\alpha_{13}} = \frac{s_0}{a_{01}a_{02}\sin\alpha_{03}}. \qquad (11)$$

Từ (9') và (10) ta có

$$\frac{s_0^2}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_{01}\sin\alpha_{02}} = \frac{s_3^2}{a_{30}a_{31}a_{32}\sin\alpha_{31}\sin\alpha_{32}}.$$

Chia cả hai vế cho $\sin\alpha_{03}$ ta có:

$$\frac{s_0^2}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_{01}\sin\alpha_{02}\sin\alpha_{03}} = \frac{s_3^2}{a_{30}a_{31}a_{32}\sin\alpha_{30}\sin\alpha_{31}\sin\alpha_{32}} \qquad (12)$$

Tương tự, từ (9') và (11) ta có:

$$\frac{s_0^2}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_{01}\sin\alpha_{02}\sin\alpha_{03}} = \frac{s_2^2}{a_{20}a_{21}a_{23}\sin\alpha_{20}\sin\alpha_{21}\sin\alpha_{23}} \qquad (13)$$

Và cũng như vậy, từ (10) và (11) ta có:

$$\frac{s_0^2}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_{01}\sin\alpha_{02}\sin\alpha_{03}} = \frac{s_1^2}{a_{10}a_{12}a_{13}\sin\alpha_{10}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{13}}. \qquad (14)$$

Từ các đẳng thức (12), (13) và (14) ta có:

$$\frac{s_0^2}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_{01}\sin\alpha_{02}\sin\alpha_{03}} = \frac{s_1^2}{a_{10}a_{12}a_{13}\sin\alpha_{10}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{13}} = \frac{s_2^2}{a_{20}a_{21}a_{23}\sin\alpha_{20}\sin\alpha_{21}\sin\alpha_{23}} = \frac{s_3^2}{a_{30}a_{31}a_{32}\sin\alpha_{30}\sin\alpha_{31}\sin\alpha_{32}}. \qquad (15)$$

Ta có thể viết (15) như sau:

$$\frac{s_0^2}{\underset{i=1,2,3}{\pi a_{0i}\sin\alpha_{0i}}} = \frac{s_1^2}{\underset{j=0,2,3}{\pi a_{1j}\sin\alpha_{1j}}} = \frac{s_2^2}{\underset{k=0,1,3}{\pi a_{2k}\sin\alpha_{2k}}} = \frac{s_3^2}{\underset{m=0,1,2}{\pi a_{3m}\sin\alpha_{3m}}}$$

Đó là *công thức sin cho hình tứ diện.* [Công] thức đó cho ta thấy *mối liên hệ giữa c[ác] các cạnh và các góc của một hình tứ diệ[n].*

VÀI VẤN ĐỀ VỀ SO SÁNH CÁC SỐ

NGUYỄN VIẾT THÀNH

So sánh các số, nhất là các số lớn là một việc rất khó khăn và phức tạp. Đặc biệt các số đó lại ở dạng không cố định thì việc tìm các dấu bất đẳng thức giữa chúng lại càng khó khăn. Thế nhưng trong chương trình toán ở trường phổ thông lại rất ít đề cập đến vấn đề này. Qua bài báo này tôi muốn trao đổi với các bạn phương pháp giải một số bài toán dạng đó.

Bài toán 1. Số nào lớn hơn trong hai số

$$2^{3^{100}} \text{ và } 3^{2^{100}}$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng $2^{3^{100}} > 3^{2^{100}}$.

Thật vậy, từ $(3/2)^2 > 2$ ta suy ra

$$(3/2)^{100} > 2 \text{ hay } 3^{100} > 2.2^{100}.$$

Từ đó

$$2^{3^{100}} > 4^{2^{100}} > 3^{2^{100}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài toán 2. Số nào lớn hơn trong hai số

$$5^{10} + 6^{10} \text{ và } 7^{10}$$

Lời giải.

Cách 1: Ta chứng minh rằng

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$$

Thật vậy, ta có $5^{10} + 6^{10} < 2.6^{10}$.

Vậy điều cần chứng minh tương đương với

$$2.6^{10} < 7^{10} \text{ hay } (7/6)^{10} > 2$$

Theo bất đẳng thức Becnuli, ta được

$$(7/6)^{10} = (1 + 1/6)^{10} > 1 + 10.1/6 > 2,$$

đó là điều phải chứng minh

Cách 2: Ta có $5^3 + 6^3 = 341 < 343 = 7^3$

hay $$(5/7)^3 + (6/7)^3 < 1$$

Mặt khác

$$(5/7)^{10} < (5/7)^3 \text{ và } (6/7)^{10} < (6/7)^3$$

Từ đó

$$(5/7)^{10} + (6/7)^{10} < 1$$

nghĩa là

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10}.$$

Bài toán 2 không phải là bài toán quá khó, song lời giải của nó là cơ sở để ta suy nghĩ giải các bài toán tổng quát hơn.

Bài toán 3. Số nào lớn hơn trong hai số

$$1^n + 2^n + \ldots + 9^n \text{ và } 10^n.$$

Lời giải. Trước hết ta nhận thấy rằng nếu có một số n nào đó sao cho

$$1^n + 2^n + \ldots + 9^n < 10^n$$

thì với mọi số $m \geqslant n$ ta đều có

$$1^m + 2^m + \ldots + 9^m < 10^m.$$

Bây giờ, bằng phép thử trực tiếp, ta được

$$1 + 2 \ldots + 9 > 10,\ 1^2 + 2^2 + \ldots + 9^2 > 10^2,$$
$$1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3 > 8^3 + 9^3 = 729 + 512 > 10^3.$$

Như vậy, với n tương đối bé thì bước thử đó làm cho các ước vọng sử dụng các nhận xét của ta mất hiệu quả, song với $n = 7$ ta có:

$$1^7 + 2^7 < 3^7, \text{ vì thế } 1^7 + 2^7 + 3^7 < 2.3^7 < 4^7.$$

Tiếp tục quá trình đó, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Becnuli thì $1^7 + 2^7 + \ldots + 8^7 < 2.8^7$, $2.8^7 < 9^7$ và $2.9^7 < 10^7$, tức là $1^7 + 2^7 + \ldots + 9^7 < 10^7$. Với $n = 5$ thì $1^5 + 2^5 + \ldots + 9^5 > 10^5$ do có bất đẳng thức $0{,}9^5 + 0{,}8^5 + 0{,}7^5 > 1$

Các bạn hãy tìm lấy trường hợp $n = 6$.

(Trả lời: $1^6 + 2^6 + \ldots + 9^6 < 10^6$)

Vậy ta đi đến đáp số là

— Với $1 \leqslant n \leqslant 5$ thì $1^n + 2^n + \ldots + 9^n > 10^n$

— Với $n \geqslant 6$ thì $1^n + 2^n + \ldots + 9^n < 10^n$

Bài toán 4. Số nào lớn hơn trong hai số

$$1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000} \text{ và } 2^{2^{2^{2}}}$$

Lời giải. Ta có

$$2^{2^{2^{2^{2}}}} = 2^{2^{2^{4}}} = 2^{2^{16}}$$

Vì $\qquad 2^{10} = 1024 > 10^3$

và $\qquad 2^6 = 64 \qquad$ nên $2^{16} > 64000$

nghĩa là $\qquad 2^{2^{2^{2^{2}}}} > 2^{64000}$

Mặt khác

$$1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} < 1000 \cdot 1000^{1000}$$

$$= 1000^{1001} < (2^{10})^{1001} = 2^{10010}$$

Do $2^{64000} > 2^{10010}$

Nên $1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} < 2^{2^{2^{2^{2}}}}$

Bài toán 5. Số nào lớn hơn trong hai số

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} n \qquad \text{và} \qquad \underbrace{22 \ldots 2}_{n}{}^{\overbrace{22 \cdots 2}^{n}}$$

Lời giải. Ta hãy đặt

$$a_n = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} n$$

và $$b_n = \underbrace{22 \ldots 2}_{n}{}^{\overbrace{22 \cdots 2}^{n}}$$

Khi đó

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 16$, $a_4 = 65536$; $b_1 = 4$.

Như vậy dễ thấy rằng

$a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$, $a_4 < b_4$

Ta hãy xem a_5 và b_5, ta có:

$$a_5 = 2^{a_4} = 2^{65536}, \quad b_5 = 22222^{22222}$$

Ta chứng minh $a_5 < b_5$.

Thật vậy, vì $22222 > 1024 = 2^{10}$

nên $22222^{22222} > (2^{10})^{22222} = 2^{222220} > 2^{65536}$

tức là $\qquad b_5 > a_5.$

Ta hãy chứng minh rằng với $n \geqslant 6$ thì $a_n > b_n$.

Ta có $\underbrace{22 \ldots 2}_{n} < 10^n$

nên $\qquad b_n < (10^n)^{10^n} = 10^{n10^n} < (2^4)^{n(2^4)^n}$

$$= 2^{4n \cdot 2^{4n}} < 2^{2^{5n}},$$

tức là $\qquad b_n < 2^{2^{5n}}.$

Mặt khác ta luôn có $a_{n-2} > 5n$ với $n \geqslant 6$

do đó $\qquad a_n = 2^{2^{a_{n-2}}} > 2^{2^{5n}} > b_n.$

Vậy ta có kết quả

– Với $1 \leqslant n \leqslant 5$ thì $a_n < b_n$

– Với $6 \leqslant n$ thì $a_n > b_n$.

Bây giờ bạn hãy chọn lấy một dãy số tự nhiên liên tiếp k, $k+1, \ldots, k+n$ với $k > 2$ và lập các số theo quy luật sau:

$$k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}} \qquad \text{và} \qquad (k+1)^{(k+2)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(k+n)^{k}}}}}}$$

Bài toán 6. Hai số vừa lập được thì số nào lớn hơn.

Lời giải. Ta sử dụng bất đẳng thức:

với $\qquad k < n \qquad$ thì $\sqrt[k]{k} > \sqrt[n]{n}$

mà đã có lần chứng minh trên báo Toán học và tuổi trẻ.

Trở lại bài toán, ta hãy đặt

$$a = (k+1)^{(k+2)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}}$$

thì bài toán đưa về so sánh hai số k^a và a^k với k, $a > 1$.

Rõ ràng $k^a > a^k$ (vì nó tương đương với $\sqrt[k]{k} > \sqrt[n]{n}$).

Bây giờ cũng với dãy số đó, song ta lập các số theo một quy luật phức tạp hơn.

Bài toán 7. Số nào lớn hơn trong hai số

$$(k+i)^{k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(k+i-1)^{(k+i+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}}}}}}}} \qquad \text{và} \qquad (k+i+1)^{k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(k+i)^{(k+i+2)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}}}}}}}}$$

trong đó $k > 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Lời giải. Ta hãy đặt

$$a = k^{(k+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+i-1}}}}} \qquad \text{và} \qquad b = (k+i+2)^{(k+i+3)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+n}}}}}$$

thì rõ ràng $a > 2$ và $b > 2$, và bài toán đưa về so sánh hai số

$$(k+i)^{a^{(k+i+1)^b}} \qquad \text{và} \qquad (k+i+1)^{a^{(k+i)^b}}$$

Trước hết ta hãy chứng minh rằng với $k > 1$, $a > 2$, $b > 2$ thì

$$a^{(k+i+1)^b} > 2a^{(k+i)^b}.$$

Thật vậy, do $(k+i+1)^b > (k+i)^b + 1$ nên

$$a^{(k+i+1)^b} > a^{(k+i)^b + 1} = a . a^{(k+i)^b} > 2a^{(k+i)^b}$$

Trở lại bài toán ta thấy:

$$(k+i)^{a^{(k+i+1)^b}} > (k+i)^{2a^{(k+i)^b}} = (k^2+2ki+i^2)^{a^{(k+i)^b}}$$

$$> (k+i+1)^{a^{(k+i)^b}}$$. Bài toán được giải quyết.

Trong dãy số tự nhiên đó, bạn hãy cố gắng tìm tòi, thiết lập các bài toán và giải quyết nó, đó không phải là một việc làm vô ích. Sau đó bạn hãy chọn dãy số $a_1, a_2, \ldots a_n$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ và tiến hành tương tự, chắc bạn sẽ khám phá được nhiều điều bổ ích.

Các bạn hãy giải các bài toán sau đây.

Bài toán 8. Số nào lớn hơn trong hai số

a) $\left.2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\} n$ và $\left.3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\} n$;

b) $5^{5^{5^{5}}}$ và $6^{6^{6^{6}}}$;

c) $300!$ và 100^{300}.

Bài toán 9. Số nào lớn nhất trong những số sau

$\underbrace{11\ldots1}_{1979}{}^{\overbrace{11\ldots1}^{1979}}$, $10^{10^{10^{10}}}$, $5^{5^{5^{5}}}$ và $2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}$

Bài toán 10. Số nào lớn hơn trong hai số sau

a) $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} n+2$ và $\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\right\} n$;

b) $3^{3^{3^{3}}}$ và 1979^{1979}.

MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐÃ ĐƯỢC GIẢI QUYẾT

Trong một bài báo ở số báo 106, để chứng minh bất đẳng thức Na-sơ-bit:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant \frac{n}{2} \qquad (1)$$

cho các trường hợp $n=4, 5, 6$, các tác giả đã đưa ra bất đẳng thức sau:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{n}{2}[a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+\ldots+a_n(a_1+a_2)] \quad (2)$$

Trong bài báo đó bất đẳng thức (2) đã được chứng minh nếu $n=4, 5, 6$ (từ đó chứng minh được (1) với $n=4, 5, 6$). Cuối bài báo các tác giả đặt vấn đề cho bạn đọc là tìm xem với những giá trị nào của n thì bất đẳng thức (2) đúng.

Bạn *Hoàng Đức Tân* (học sinh khoa Toán trường Đại học Tổng hợp Hà Nội) đã giải quyết xong bất đẳng thức (2), chứng minh được rằng với $n > 6$ thì bất đẳng thức (2) không đúng. Cách chứng minh như sau:

Giả sử bất đẳng thức (2) đúng, chọn $a_k = k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) ta có

$$a_1(a_2+a_3)+\ldots+a_n(a_1+a_2) = 1.5+2.7+\ldots$$
$$+(n-2)(2n-1)+(n-1)(n+1)+n.3$$
$$=\sum_{k=1}^{n-2} k(2k+3)+n^2+3n-1$$
$$=2\sum_{k=1}^{n-2} k^2+3\sum_{k=1}^{n-2} k+n^2+3n-1$$
$$=2\,\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}+$$
$$+3\,\frac{(n-2)(n-1)}{2}+n^2+3n-1$$
$$=\frac{n}{6}(4n^2-3n+17)$$

Và $(a_1+\ldots+a_n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Như vậy

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \geqslant \frac{n}{2}\cdot\frac{n}{6}(4n^2-3n+17)$$
$$\Leftrightarrow 4n^2-3n+17 \leqslant 3n^2+6n+3$$
$$\Leftrightarrow n^2-9n+14 \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (n-2)(n-7) \leqslant 0.$$

Với $n > 7$ thì vế trái của bất đẳng thức sẽ lớn hơn 0 nên bất đẳng thức không đúng.

Xét trường hợp $n=7$. Chọn $a_k = k^2$ ($k = 1, 2, \ldots n$) ta có

$$\frac{7}{2}[a_1(a_2+a_3)+\ldots+a_7(a_1+a_2)] =$$
$$=3{,}5\,[1^2(2^2+3^2)+2^2(3^2+4^2)$$
$$+\ldots+7^2(1^2+2^2)] = 19698.$$

Và

$$(a_1+\ldots+a_7)^2 = (1^2+2^2+\ldots+7^2)^2 = 19600.$$

Như vậy với các số đã chọn trên thì

$$(a_1+\ldots+a_7)^2 < \frac{7}{2}[a_1(a_2+a_3)+\ldots+a_7(a_1+a_2)]$$

tức là (2) không đúng với $n=7$.

Tóm lại (2) chỉ đúng với $n = \leqslant 6$ và không đúng với $n > 6$ (dễ chứng minh khi $n=3$).

T. S.

In 15.400c. tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ Hà Nội. Số in 116/79. Gửi lưu chiểu tháng 9-79. Giá 0,10đ

Chỉ số: 12884