

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

Số 108

3

1979

TOÁN HỌC

tuổi trẻ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT LẦN

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHỨNG

Dây nôi: 52825

VỀ BÀI TOÁN ÁC-NÔN

PHAN ĐỨC THÀNH

1. Nhiều bài toán hay không phải bao giờ cũng hình thành ngay một lúc. Có khi nó xuất phát từ một bài toán dễ. Bằng những thay đổi chút ít hay mở rộng thêm những điều kiện của bài toán để đó ta lại thu được những bài toán thú vị.

Trong bài này chúng ta hãy theo dõi quá trình đi tới lời giải của bài toán sau đây do V. K. Ác-nôn đề xuất: «Hãy mô tả bộ n số tự nhiên sao cho tích của bất kỳ $n-1$ số trong chúng cộng thêm 1 chia hết cho số còn lại». Ta gọi tắt là bài toán $A(n)$.

Bài toán $A(n)$ đã có lời giải khi n nhỏ, chẳng hạn khi $n=2, 3, 4$. Đó là các bài toán dễ. Tuy nhiên với n bất kỳ $A(n)$ vẫn còn là bài toán chưa có lời giải.

Cũng như đứng trước nhiều bài toán khó khác, ta thử bằng phương pháp của «nhà nghiên cứu», xuất phát từ việc quan sát, phân tích lời giải của bài toán $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ mà tiếp cận tới lời giải của bài toán trong trường hợp tổng quát.

2. Lời giải của bài toán $A(n)$ khi $n=2, 3, 4$

$A(2)$ là một bài toán khá dễ. Nó có nghiệm là $(1, 1)$, $(1, 2)$ và $(2, 3)$.

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán $A(3)$.

Trước hết ta hãy tạm gác các nghiệm có chứa 1.

Giả sử (x, y, z) là một nghiệm nào đấy của bài toán $A(3)$. Dễ dàng nhận thấy rằng bất kỳ hai số trong bộ ba đó phải nguyên tố cùng nhau. Vậy có thể xem $2 \leq x < y < z$.

Từ điều kiện của bài toán ta có:

$$\begin{cases} xy + 1 = k_1 z \\ xz + 1 = k_2 y \\ yz + 1 = k_3 x \end{cases}$$

trong đó k_1, k_2, k_3 là các số tự nhiên.

Nhân các hệ thức ấy theo vế ta có

$$xyz(xy + x + y + z) + xy + yz + xz + 1 = k_1 k_2 k_3 xyz$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz + 1 : xyz$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz + 1 = Axyz \quad (A \text{ là số tự nhiên})$$

$$\Rightarrow 1/x + 1/y + 1/z + 1/xyz = A.$$

Giá trị lớn nhất của A đạt được khi x, y, z bé nhất, tức là khi $x=2, y=3, z=4$ (trên thực tế $z \geq 5$).

Từ đó

$$A \leq 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/2.3.4 = 27/24$$

$$\Rightarrow A = 1.$$

Vậy (x, y, z) thỏa mãn.

$$1/x + 1/y + 1/z + 1/xyz = 1. \quad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh $x=2$. Thực vậy nếu ngược lại, tức là nếu $x \geq 3$ thì $y \geq 4, z \geq 5$ nên ta có

$$1 = 1/x + 1/y + 1/z + 1/xyz \leq 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/(3.4.5) = 48/60$$

là điều không thể được. Vậy chỉ có thể $x=2$.

$$(1) \Rightarrow 1 = 1/2 + 1/y + 1/z + 1/2yz$$

$$\Rightarrow y = 2 + 5/(z-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=3 \text{ hay } z=7 \Rightarrow y=7 \text{ hay } y=3.$$

Vậy nghiệm không chứa 1 của bài toán A(3) là (2, 3, 7). Nếu kể cả nghiệm chứa 1 ta còn có ba bộ nữa:

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2) \text{ và } (1, 2, 3).$$

Đối với bài toán A(4) cũng giải tương tự.

Đóng vai trò của phương trình (1) là phương trình.

$$1/x + 1/y + 1/z + 1/u + 1/xyz = 1.$$

Từ phương trình đó ta thu được nghiệm không chứa 1 của bài toán là (2, 3, 7, 43). Nếu kể cả nghiệm chứa 1 ta còn có thêm (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2) (1, 1, 2, 3) và (1, 2, 3, 7).

Tương tự đối với bài toán A(n), nghiệm $(x_1, \dots, x_n)$ thỏa mãn phương trình.

$$1/x_1 + \dots + 1/x_n + 1/x_1 \dots x_n = A \quad (2)$$

(A là số tự nhiên)

Mệnh đề ngược cũng đúng: Nếu $x_1, \dots, x_n$ là các số tự nhiên thỏa mãn phương trình (2) với một số tự nhiên A nào đấy thì bộ $(x_1, \dots, x_n)$ là nghiệm của bài toán A(n).

Rất đáng tiếc là trong trường hợp n bất kỳ không phải ta luôn có $A=1$. Trong thực tế $A=1$ chỉ đối với những $n \leq 58$.

3. Bây giờ để dễ quan sát và phân tích ta hãy liệt kê các nghiệm của bài toán A(2), A(3), A(4) dưới dạng một bảng sau:

$$A(2): (1, 1) (1, 2) (2, 3)$$

$$A(3): (1, 1, 1) (1, 1, 2) (1, 2, 3) (2, 3, 7)$$

$$A(4): (1, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 2) (1, 1, 2, 3) (1, 2, 3, 7) (2, 3, 7, 43)$$

Từ bảng trên ta nhận thấy rằng trong mỗi cột nghiệm ở hàng dưới nhận được từ nghiệm ở hàng trên bằng cách thêm vào số 1.

Từ đó ta có bộ đề hiển nhiên sau:

Bổ đề 1. Nếu bộ $(x_1, \dots, x_k)$ là nghiệm của bài toán A(k) thì bộ $(x_1, \dots, x_k, 1)$ là nghiệm của bài toán A(k+1). Ngược lại nếu trong k+1 số là nghiệm của bài toán A(k+1) có chứa 1 thì sau khi bỏ 1 đi ta nhận được nghiệm của bài toán A(k).

Còn dãy (2, 3), (2, 3, 7),... được phản ánh trong bộ đề sau.

Bổ đề 2. Nếu bộ $(x_1, \dots, x_k)$ là nghiệm của bài toán A(k) thì bộ $(x_1, \dots, x_k, x_1 \dots x_k + 1)$ là nghiệm của bài toán A(k+1).

Thực vậy tích của k số đầu tiên cộng thêm 1 chia hết cho x_{k+1} theo định nghĩa của số x_{k+1} . Bây giờ giả sử x_{k+1} có mặt trong tích. Ta gọi X_1 là tích của k-1 số đầu tiên trong đó không chứa x_1 .

Ta cần chứng minh rằng $X_1 x_{k+1} + 1$ chia hết cho x_1 . Điều đó suy ra từ.

$$x_{k+1} = X_1 x_1 + 1 \Rightarrow X_1 x_{k+1} + 1 = X_1 (X_1 x_1 + 1) + 1 = x_1 X_1^2 + (X_1 + 1)$$

số hạng thứ hai chia hết cho x_1 theo điều kiện của bổ đề 2.

Nhờ bổ đề 1 và bổ đề 2 ta nhận thấy rằng xuất phát từ một nghiệm của bài toán A(k) ta thu được hai nghiệm của bài toán A(k+1). Bằng cách ấy xuất phát từ nghiệm của bài toán A(2) ta thu được các nghiệm của bài toán A(3) và kể đó ta thu được các nghiệm của bài toán A(4).

Dễ dàng nhận thấy rằng bằng cách ấy ta thu được tất cả các nghiệm của bài toán A(2), A(3), A(4). Tuy nhiên điều đáng tiếc là xuất phát từ nghiệm của bài toán A(4) bằng cách ấy ta thu được không phải tất cả các nghiệm của bài toán A(5). Chẳng hạn ngoài nghiệm (2, 3, 7, 43, 1807) thu được theo cách của bổ đề 2 lại còn có nghiệm (2, 3, 7, 47, 395).

Chính lý do đó bắt buộc chúng ta phải tiếp tục khai phá con đường xây dựng nghiệm của bài toán đang xét khi n bất kỳ.

4. Giả sử $(x_1, \dots, x_k)$ là nghiệm của bài toán A(k).

$$\text{Đặt } f_k = x_1 \dots x_k. \text{ Ta có}$$

$$1/x_1 + \dots + 1/x_k + 1/f_k = A \quad (3)$$

Hơn nữa giả sử $x_{k+1} \neq 1$ sao cho $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ lập thành nghiệm của bài toán A(k+1).

Ta có

$$1/x_1 + \dots + 1/x_k + 1/x_{k+1} + 1/(f_k x_{k+1}) = A \quad (4)$$

Từ 3) và (4) ta suy ra

$$1/x_{k+1} + 1/(f_k x_{k+1}) = 1/f_k \Rightarrow x_{k+1} = f_k + 1.$$

Ta lại thu được nghiệm theo bổ đề 2.

Như vậy nếu nghiệm của bài toán $A(k+1)$ nhận được bằng cách thêm một số vào nghiệm của bài toán $A(k)$ thì số này được tạo nên hoặc theo bổ đề 1 hoặc theo bổ đề 2.

Từ đó ta nhận thấy rằng việc thêm vào một số không mang lại cho ta điều gì mới ngoài những điều đã biết ở trên.

5. Bây giờ ta giả thiết rằng $(x_1, \dots, x_k)$ là nghiệm của bài toán $A(k)$. Ta có

$$1/x_1 + \dots + 1/x_k + 1/f_k = A \quad (5)$$

Hơn nữa giả sử $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ là nghiệm của bài toán $A(k+2)$ trong đó: $x_{k+1} \neq 1, x_{k+2} \neq 1$. Ta có (với cùng A ở trên)

$$1/x_1 + \dots + 1/x_k + 1/x_{k+1} + 1/x_{k+2} + 1/(f_k x_{k+1} x_{k+2}) = A \quad (6)$$

$$\Rightarrow 1/x_{k+1} + 1/x_{k+2} + 1/(f_k x_{k+1} x_{k+2}) = 1/f_k \quad (7)$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = f_k + (f_k^2 + 1)/(x_{k+1} - f_k) \quad (8)$$

Do x_{k+2} phải nguyên nên $d = x_{k+1} - f_k$ là ước của $f_k^2 + 1$. Vậy

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k + d \\ x_{k+2} = f_k + (f_k^2 + 1)/d \end{cases} \quad (9)$$

Nhờ các hệ thức (5) (6) (7) (8) và (9) ta đi đến

Bổ đề 3. Giả sử $(x_1, \dots, x_k)$ là nghiệm của bài toán $A(k)$, $f_k = x_1 \dots x_k$ và d là ước của $f_k^2 + 1$ khi đó bộ $\left(x_1, \dots, x_k, f_k + d, f_k + \frac{f_k^2 + 1}{d}\right)$ là nghiệm của bài toán $A(k+2)$.

Ngược lại nếu nghiệm của bài toán $A(k+2)$ nhận được từ một nghiệm nào đấy của bài toán $A(k)$ bằng cách thêm vào hai số khác 1 thì các số đã thêm vào thỏa mãn đẳng thức (9).

Chú ý rằng $d = 1$ và $d = f_k^2 + 1$ luôn luôn là ước của $f_k^2 + 1$. Đối với các ước này bổ đề 3 không cho ta điều gì mới so với bổ đề 2. Tuy nhiên nếu $f_k^2 + 1$ không phải là số nguyên tố thì bổ đề 3 cho ta một loạt nghiệm mới. Chẳng hạn đối với nghiệm $(2, 3, 7)$ ta có $f_3^2 + 1 = 1765 = 353 \cdot 5$. Xuất phát từ nghiệm này và từ bổ đề 3 ta thu được nghiệm $(2, 3, 7, 47, 395)$ mà ta đã nói đến trong mục 3. Tương tự xuất phát từ nghiệm $(2, 3, 7, 43)$ nhờ bổ đề 3 ta thu được nghiệm $(2, 3, 7, 43, 1823, 193667)$.

Định nghĩa. Dãy nghiệm thu được từ nghiệm $(2, 3)$ theo bổ đề 2 được gọi là nghiệm cơ sở.

Nếu số $f_k^2 + 1$ là hỗn số thì theo bổ đề 3 ta tách ra được ít nhất là một nhánh nghiệm.

Bảng quy nạp ta chứng minh được rằng f_{2k} có tận cùng bằng 6 và f_{2k+1} có tận cùng bằng 2. Từ đó suy ra rằng trong dãy cơ sở tất cả các số $f_{2k+1} + 1$ đều chia hết cho 5.

Từ tính chất này ta nhận thấy rằng: khi n lẻ nhờ bổ đề 3 từ dãy cơ sở ta tách ra được một nghiệm, nghiệm này nhờ bổ đề 2 sinh ra được một dãy mới các nghiệm.

6. Bây giờ ta đi theo một hướng khác để giải bài toán: Xuất phát từ nghiệm của bài toán $A(n)$ hãy tìm cách thu được một nghiệm khác của bài toán đó. Theo hướng này ta có.

Định lý (Brótsky).

Giả sử $(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ là nghiệm thu được từ nghiệm $(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})$ theo bổ đề 2 và $(f_{n-2} x_n + 1)/x_{n-1} = d_1 d_2$.

Nếu hệ phương trình

$$\begin{cases} f_{n-2} x + 1 = d_1 y \\ f_{n-2} y + 1 = d_2 x \end{cases} \quad (10)$$

có nghiệm nguyên thì

$(x_1, \dots, x_{n-2}, x, y)$ cũng là nghiệm của bài toán.

Chứng minh. Bằng cách nhân các phương trình của hệ (10) ta có

$$f_{n-2}^2 \cdot x \cdot y + f_{n-2} (x + y) + 1 = \frac{f_{n-2} x_n + 1}{x_{n-1}} xy$$

$$\text{hay } 1/x + 1/y + 1/(f_{n-2} xy) = -f_{n-2} + \frac{f_{n-2} x_n + 1}{f_{n-2} x_{n-1}}$$

Chú ý rằng $x_n = f_{n-1} + 1$

và $f_{n-1} = f_{n-2} x_{n-1}$

và nhờ hệ thức $1/x_1 + \dots + 1/x_{n-1} + 1/f_{n-1} = A$ ta đi đến hệ thức

$$1/x_1 + \dots + 1/x_{n-2} + 1/x + 1/y + 1/(f_{n-2} xy) = A.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $(x_1, \dots, x_{n-2}, x, y)$ là nghiệm của bài toán $A(n)$.

Nhờ định lý trên xuất phát từ nghiệm $(2, 3, 7, 47, 395, 779731)$ ta thu được một nghiệm khác $(2, 3, 7, 47, 415, 8111)$ của bài toán đó. Nghiệm này không tạo ra được bằng cách dùng bổ đề 3.

Dễ dàng chứng minh được rằng đối với các nghiệm từ dãy cơ sở hệ (10) luôn luôn có nghiệm nguyên.

Cho đến nay chúng ta vẫn chưa biết được bài toán $A(n)$ có bao nhiêu nghiệm với n cho trước (tùy ý). Chúng ta chỉ mới đi được một vài bước trên con đường còn khá dài để tới lời giải của bài toán. Trên bước đường ngắn ngủi đó đã nảy sinh những vấn đề mới đòi hỏi ta phải suy nghĩ lại các phương pháp cũ và tìm kiếm những phương pháp mới.

Chúc các bạn thành công trên chặng đường còn lại.

TIẾP TỤC SUY LUẬN TRÊN BÀN CỜ

LÊ VIỆT NGÀ

TRONG hai số báo 101 và 105, bạn Lê Thống Nhất đã giới thiệu với các bạn một loạt các bài toán trên bàn cờ, mà chủ yếu là các bài toán phủ và chia bàn cờ. Lần này tôi xin bổ sung một số kiểu suy luận khác trên bàn cờ mà qua đó mong các bạn được làm quen với nhiều bài toán thú vị.

1. Phủ chắc bàn cờ bởi các domino.

Trước hết ta gọi các đường kẻ trên bàn cờ là các đường giới hạn. Bàn cờ $m \times n$ gọi là được phủ chắc chắn bởi các domino nếu nó được phủ kín bởi các domino không chồng lên nhau và nếu chia bàn cờ theo bất cứ đường giới hạn nào cũng sẽ cắt ít nhất một hình domino.

Ta xét bài toán trên bàn cờ 100×4 :

Bài toán 1. Chứng minh rằng bàn cờ 100×4 là bàn cờ không thể phủ chắc chắn bởi các domino.

Lời giải. Ta thấy bàn cờ 100×4 khi được chia đôi bởi bất cứ đường giới hạn nào thì mỗi phần cũng có một số chẵn ô.

Giả sử bàn cờ được phủ kín bởi các domino không chồng lên nhau thì ở mỗi phần có 2 loại ô:

- loại ô bị phủ bởi domino không bị cắt (I)
- loại ô bị phủ bởi domino bị cắt (II)

Ta thấy ngay số ô của loại I là số chẵn, vì mỗi domino không bị cắt sẽ phủ 2 ô của bàn cờ. Do tổng số ô của 2 loại ở mỗi phần là số chẵn, nên suy ra số ô loại II ở mỗi phần cũng là số chẵn. Như vậy số các domino bị cắt là số chẵn. Như vậy nếu tất cả 102 đường giới hạn đường nào cũng cắt domino thì ít nhất trên bàn cờ phải có $102 \times 2 = 204$ domino. Nhưng bàn cờ được phủ kín bởi 200 domino. Vậy ít nhất phải có đường giới hạn không cắt domino nào. Suy ra bàn cờ 100×4 không thể phủ chắc chắn bởi các domino.

Các bạn hãy áp dụng cách lập luận trên cho bàn cờ 6×6 , sau đó các bạn thử xét bàn cờ 8×8 xem sao? Người ta đã chứng minh được:

« Mọi bàn cờ có diện tích chẵn và mỗi chiều lớn hơn 4 (trừ bàn cờ 6×6) đều có thể được phủ chắc chắn ». Các bạn hãy tự chứng minh mệnh đề đó.

2. Vài bài toán về bước đi của con ngựa.

Phải nói rằng con ngựa là con cờ đi lắt léo nhất trên bàn cờ, vậy mà đối với nó lại nảy ra nhiều bài toán thú vị.

Bài toán 2. Trên mỗi ô của một bàn cờ có số 0 là một số lẻ, người ta đặt một con ngựa. Liệu có thể cho mỗi con ngựa cùng đi một bước sao cho mỗi ô lại có đúng một con ngựa hay không?

Lời giải. Trên bàn cờ đó ta cũng có các ô trắng và các ô đen xen kẽ nhau sao cho không có 2 ô trắng hoặc 2 ô đen nào chung cạnh. Như vậy ta sẽ gọi các con ngựa đứng ở ô trắng là ngựa trắng, còn các con ngựa đứng ở ô đen là ngựa đen. Nếu mỗi con ngựa đều đi một bước và ở mỗi ô lại có đúng một con ngựa, thì do cách đi của con ngựa nên các con ngựa trắng sẽ nhảy vào các ô đen và các con ngựa đen sẽ nhảy vào các ô trắng. Suy ra số ngựa trắng và ngựa đen là như nhau. Suy ra số ô bàn cờ là chẵn, mâu thuẫn với giả thiết bàn cờ có số ô lẻ. Vậy không thể cho mỗi con đều đi một bước để sau đó mỗi ô lại có đúng một con.

Bài toán 3. Con ngựa có thể đi từ góc này của bàn cờ thông thường tới góc đối diện sao cho đi qua mỗi ô của bàn cờ đúng một lần được không?

Lời giải. Không thể được, giả sử ở góc con ngựa xuất phát là ô đen thì sau một số lẻ bước con ngựa phải tới ô trắng. Do con ngựa phải đi qua mỗi ô của bàn cờ đúng một lần để cuối cùng tới ô đối diện với ô xuất phát nên nó đến ô này ở bước thứ 63. Số bước đi lẻ nên suy ra ô này là ô trắng. Mâu thuẫn vì nếu ô xuất phát là ô đen thì ô ở góc đối diện cũng phải là ô đen.

Trước khi sang bài toán 4, ta hiểu rằng một bàn cờ gọi là đóng với hành trình của con ngựa nếu con ngựa có thể đi qua mỗi ô đúng một lần và trở về ô xuất phát.

Ta thấy ngay nếu bàn cờ đóng với hành trình con ngựa thì phải có số ô chẵn vì đối với một hành trình kín của con ngựa thì số ô đen mà con ngựa đi qua sẽ bằng số ô trắng mà nó đi qua. Vì vậy bất cứ bàn cờ nào có số ô trắng khác số ô đen thì không đóng với hành trình con ngựa.

Ta xét bài toán:

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì bàn cờ $n \times 4$ không đóng với hành trình con ngựa.

Lời giải. Giả sử với số tự nhiên n nào đó, bàn cờ $n \times 4$ đóng với hành trình con ngựa. Như vậy tại mỗi ô phải có một bước vào và một bước ra của con ngựa, tức là phải có một bước con ngựa đi vào ô ấy và một bước con ngựa từ ô ấy đi ra. Ta hình dung bàn cờ này gồm 4 dải ô, hai dải ô ngoài ta gọi là biên, còn hai dải ô trong ta gọi là giữa.

Ta thấy từ ô ở biên, con ngựa chỉ có thể đi vào ô ở giữa. Do có $2n$ ô ở biên nên phải có $2n$ bước bước vào ô giữa. Do mỗi ô đi qua đúng một lần nên ở mỗi ô giữa chỉ còn có một bước ra. Nhưng bước ra này không thể đi tới một ô ở giữa vì tất cả các ô ở giữa đã có một bước vào, vậy bước ra này phải từ ô ở giữa đó đi tới ô ở biên.

Vậy con ngựa phải lần lượt từ biên vào giữa rồi ra biên, rồi vào giữa, v.v... cứ xen kẽ nhau như vậy trong suốt hành trình. Do mỗi bước thì con ngựa đi từ ô màu này đến ô màu khác, nên suy ra tất cả các ô ở giữa cùng màu và các ô ở biên cùng màu, vô lí. Vậy bàn cờ $n \times 4$ không đóng với hành trình con ngựa với mọi số tự nhiên n .

Các bạn hãy giải bài toán:

Bài toán 5. Con ngựa không thể đi tới tất cả các ô trên bàn cờ 4×4 , mà qua mỗi ô đúng một lần.

Đối với bài toán tổng quát người ta đã tìm được các kết quả hay:

Với bàn cờ $n \times n$, con ngựa có thể đi tới tất cả các ô của bàn cờ mà qua các ô đúng một lần nếu $n \equiv 1 \pmod{4}$, hoặc $n \equiv 2 \pmod{4}$, hoặc $n \equiv 0 \pmod{4}$ nếu $n > 4$. Hai trường hợp sau do N. Nhexetvetaev là một học sinh ở Leningrat Liên xô tìm ra. Ngoài ra Nhexetvetaev còn đưa ra một hành trình tổng quát cho con ngựa với bàn cờ $n \times n$ khi $n \geq 15$.

Người ta cũng tìm được bàn cờ 7×7 , 11×11 cũng thỏa mãn để con ngựa đi hết các ô của bàn cờ mà qua mỗi ô đúng một lần.

Không những thế người ta còn xét các bài toán đối với các bàn cờ trong không gian, chẳng hạn như con ngựa đi hết các ô lập phương của bàn cờ $4 \times 4 \times 4$ và đi hết các ô vuông trên

6 mặt của hình lập phương $8 \times 8 \times 8$, sao cho không đi qua nơi nào quá một lần.

3. Vài bài toán về con xe

Bài toán 6. Trên bàn cờ $n \times n$ xếp k con xe ở vị trí mỗi con không ở cùng hàng với quá 1 con xe khác. Chứng minh $k \leq 4n/3$.

Lời giải. Giả sử có k con xe xếp như điều kiện của bài toán. Ở mỗi ô có con xe đứng bắt đầu ta ghi số 0. Sau đó ta xét trên các hàng ngang:

— Nếu hàng nào có 1 con xe thì ô có con xe ta cộng với 2.

— Nếu hàng nào có 2 con xe thì ô có con xe ta cộng với 1.

Tiếp đó ta lại làm với các hàng dọc tương tự như vậy. Cuối cùng ở các ô có con xe đứng chỉ có thể được ghi số 3 hay số 4.

Vậy tổng S các số ghi ở các ô có con xe đứng phải thỏa mãn: $3k \leq S$.

Mặt khác: ở mỗi hàng ngang ta cộng không quá 2. Vậy sau khi làm các hàng ngang ta cộng vào không quá $2n$

Tương tự với các hàng dọc. Do đó toàn bộ bàn cờ ta cộng vào không quá $4n$. Tức là

$$S \leq 4n$$

$$\text{Suy ra: } 3k \leq 4n \Leftrightarrow k \leq 4n/3.$$

Khi $n=8$ thì số k lớn nhất là 10; các bạn hãy thử xếp 10 con xe thỏa mãn bài toán trên bàn cờ 8×8 .

Các bạn hãy làm hai bài toán sau đây.

Bài toán 7. Trên 64 ô của bàn cờ lần lượt viết các số từ 1 đến 64, theo thứ tự từ trên xuống dưới và mỗi hàng ngang thì từ trái sang phải.

Hãy tìm tổng các số ghi ở 8 ô mà 8 con xe đứng ở vị trí không thể ăn được lẫn nhau.

Bài toán 8. Đánh số các hàng ngang từ trên xuống dưới và đánh số các hàng dọc từ trái sang phải. Ở mỗi ô bàn cờ ta ghi con số là tích của chỉ số hàng ngang và chỉ số hàng dọc. Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng các số ở n ô mà n con xe đứng ở vị trí không ăn được lẫn nhau trên bàn cờ $n \times n$.

Tôi tạm dừng bài viết ở đây, mong các bạn có nhiều tìm tòi mới.



Bài 1/105. Chứng minh rằng với mọi giá trị nguyên của x thì biểu thức

$$f(x) = 1964 \frac{x^3}{3} + 1979 \frac{x^2}{2} + 5 \frac{x}{6}$$

có giá trị nguyên.

Lời giải. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát:

Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ có giá trị nguyên với mọi x nguyên là các số $6a$, $2b$, $a + b + c$ là các số nguyên.

Thật vậy:

$$f(x) = 6a \frac{(x-1)x(x+1)}{6} + 2b \frac{x(x-1)}{2} + (a+b+c)x.$$

— Với mọi x nguyên thì $(x-1)x(x+1)$ luôn chia hết cho 6 và $x(x-1)$ luôn chia hết cho 2. Do đó để $f(x)$ nguyên chỉ cần $6a$, $2b$, $a + b + c$ là các số nguyên.

— Ngược lại cho x lần lượt các giá trị nguyên 1, -1, 2 ta được các số nguyên:

$$a + b + c, -a + b - c, 8a + 4b + 2c.$$

Do đó:

$$a + b + c \text{ là số nguyên}$$

$$2b = (a + b + c) + (-a + b - c) \text{ là số nguyên}$$

$$6a = (8a + 4b + 2c) + 2(-a + b - c) - 3.2b \text{ là số nguyên.}$$

Áp dụng mệnh đề vào bài toán:

$$a = 1964/3 \Rightarrow 6a = 3928 \text{ nguyên,}$$

$$b = 1979/2 \Rightarrow 2b = 1979 \text{ nguyên,}$$

$$c = 5/6 \Rightarrow a + b + c = 1964/3 + 1979/2 + 5/6 = 9870/6 = 1645 \text{ nguyên.}$$

Vậy $f(x)$ có giá trị nguyên với mọi x nguyên.

Nhiều bạn đã giải bài toán bằng cách chứng minh trực tiếp, chẳng hạn chứng minh như sau:

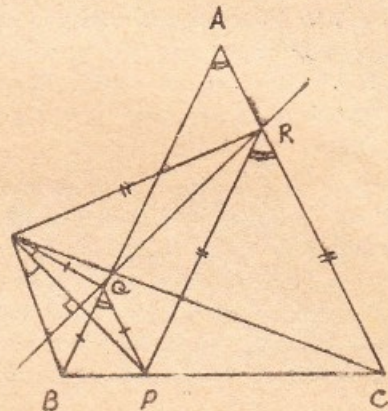
$$\begin{aligned} f(x) &= 1964x^3/3 + 1979x^2/2 + 5x/6 \\ &= 654x^3 + 389x^2 + 2x^3/3 + x^2/2 + 5x/6. \end{aligned}$$

Chỉ cần chứng minh $g(x) = 2x^3/3 + x^2/2 + 5x/6$ có giá trị nguyên với mọi x nguyên.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4x^3 + 3x^2 + 5x}{6} = \frac{(x^3 - x) + (3x^3 + 3x^2) + 6x}{6} \\ &= \frac{x(x-1)(x+1) + 3x^2(x+1) + 6x}{6} \end{aligned}$$

Các số hạng của tử số đều chia hết cho 6 nên $g(x)$ nguyên (đpcm).

Bài 2/105. Từ điểm P di động trên cạnh BC của một tam giác cân ABC người ta kẻ các đường song song với các cạnh kia, cắt AB tại Q , AC tại R . Tìm quỹ tích các điểm D đối xứng với P qua QR .



Lời giải. Phần đảo chứng minh không khó khăn. Phần thuận có nhiều cách chứng minh, xin trình bày một cách đơn giản:

Các tam giác QDP , QBP cân nên D , B , P nằm trên đường tròn tâm Q . Tương tự ta cũng có D , P , C nằm trên đường tròn tâm R . Vì góc ở tâm gấp đôi góc nội tiếp chắn cùng một cung nên

$$\widehat{BDP} = \widehat{BQP} / 2 = A/2$$

$$\widehat{PDC} = \widehat{PRC} / 2 = A/2$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{BDP} + \widehat{PDC} = A,$$

nghĩa là D nhìn BC dưới một góc bằng A không đổi. D khác phía với P tức cùng phía với A đối với QR , do đó D cùng phía với A đối với BC . Vậy D nằm trên cung BAC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 3/105. Cho các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Chứng minh bất đẳng thức

$$2^{n-1} > \frac{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)}{1+x_1x_2\dots x_n}.$$

Lời giải. Đặt $x_i = 1 + \delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Theo giả thiết $x_i \geq 1$ nên $\delta_i \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) &= \\ &= (2+\delta_1)(2+\delta_2)\dots(2+\delta_n) \\ &= 2^n + 2^{n-1}(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n) \\ &\quad + 2^{n-2}(\delta_1\delta_2 + \dots + \delta_{n-1}\delta_n) + \dots \\ &\quad + \delta_1\delta_2\dots\delta_n \\ &\leq 2^{n-1}[2 + (\delta_1 + \dots + \delta_n) + \\ &\quad + (\delta_1\delta_2 + \dots + \delta_{n-1}\delta_n) + \dots + \delta_1\dots\delta_n] \\ &= 2^{n-1}[1 + (1+\delta_1)\dots(1+\delta_n)] \\ &= 2^{n-1}(1+x_1x_2\dots x_n). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4/105. Cho những số tự nhiên n và m ($n \geq 2, m \geq 2$). Hãy tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$\underbrace{\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x + \dots + \sqrt[n]{x}}}}_{m \text{ căn}} = y.$$

Lời giải. (của nhiều bạn). Trước hết ta có nhận xét là nếu phương trình có nghiệm âm (x, y) (n lẻ) thì $(-x, -y)$ sẽ là nghiệm dương của phương trình.

Dễ thấy rằng $x=0, y=0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên $x > 0, y > 0$. Rõ ràng $x < y$. Bằng cách lũy thừa bậc n hai vế ta được

$$\underbrace{\sqrt[n]{x + \dots + \sqrt[n]{x}}}_{m-1} = y^n - x:$$

do x, y nguyên dương nên hai vế nguyên dương. Tiếp tục lập luận như thế ta thấy

$$\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}} \text{ và } \sqrt[n]{x}$$

là hai số nguyên dương. Đặt

$$a = \sqrt[n]{x}, b = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}},$$

ta có $b^n = a^n + a$.

Mặt khác do $n \geq 2$ nên ta có

$$(a+1)^n > a^n + a > a^n$$

hay $a+1 > b = \sqrt[n]{a^n + a} > a.$

Điều này không thể xảy ra với a, b là các số nguyên dương. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Từ nhận xét đầu tiên suy ra phương trình cũng không thể có nghiệm nguyên âm.

Tóm lại phương trình chỉ có một cặp nghiệm duy nhất là $x=0, y=0$.

T.T.

Bài 5/105. Giải phương trình

$$\log_3(x^2 - 3x - 13) = \log_2 x$$

Lời giải của Phạm Đức Trung (10D Nguyễn Khuyến, Hà Nam Ninh), Trần Hữu Minh (10 E Nam Lý, Lý Nhân), Trương Quang Viêm (Lý Nhân, Hà Nam Ninh), Đặng Đức Trọng (9 P Bùi Hữu Nghĩa, T.P. Hồ Chí Minh), Vũ Mạnh Hùng (475 Lý Thái Tổ, T.P. Hồ Chí Minh):

Điều kiện phương trình phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 13 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3 + \sqrt{61}}{2}$$

Đặt $\log_2 x = 3y \Leftrightarrow x = 2^{3y}$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \log_3(2^{6y} - 3 \cdot 2^{3y} - 13) &= 3y \\ \Leftrightarrow 3^{3y} &= 2^{6y} - 3 \cdot 2^{3y} - 13 \\ \Leftrightarrow (27/64)^y + 3(8/64)^y + 13(1/34)^y &= 1 \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình có nghiệm $y=1$. Đó là nghiệm duy nhất vì các hàm số mũ ở vế trái đều nghịch biến.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x = 2^3 = 8$$

Hai bạn Ngô Duy Ninh (12 C Quang Trung, Qui Nhơn) và Nguyễn Đình Khiên (10G Nam Đồng Quan, Thái Bình) đặt $\log_2 x = 3 + y$ và đa số các bạn khác đặt $\log_2 x = y$, giải tương tự như cách giải trên.

Bài 6/105 Giải phương trình

$$\log_2(x + |x| - 1) = \sqrt{1-x^2}.$$

Lời giải (của bạn Ngô Duy Ninh - lớp 12C trường cấp 3 Quang Trung, Trần Khắc Châu - lớp 12C trường cấp 3 Trần Quốc Tuấn, thành phố Hồ Chí Minh: Đỗ Đức Môn - 9E Hùng Vương, Vĩnh Phú và nhiều bạn khác):

Phương trình chỉ có nghĩa khi

$$1-x^2 \geq 0 \text{ hay } |x| \leq 1 \text{ và } x^2 + |x| - 1 > 0.$$

Từ đây suy ra

$$0 < x^2 + |x| - 1 \leq 1 + 1 - 1 = 1.$$

Do đó $\log_2 (x^2 + |x| - 1) \leq \log_2 1 = 0$, mặt khác $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ nên phương trình chỉ có nghiệm khi và chỉ khi $\log_2 (x^2 + |x| - 1) = -\sqrt{1-x^2} = 0$, nghĩa là $1-x^2 = 0$ và $x^2 + |x| - 1 = 1$. Khi đó $|x| = 1$ hay $x = \pm 1$.

Thử lại, ta thấy $x = \pm 1$ nghiệm đúng phương trình đã cho. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm 1$.

T.T.

Bài 7/105. Gọi $A = x - 2y + 3z$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của A với x, y, z là những số tự nhiên thỏa mãn đẳng thức:

$$12x^2 + 11y^2 + 34z^2 - 4xy - 8xz - 36yz + 16x + 8y - 24z + 7 = 0.$$

Lời giải. Đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$(4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 12xy + 16xz - 24yz) + 2(4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4 + 4xy - 12xz - 6yz + 8x + 4y - 12z) = 1, \text{ hay gọn hơn}$$

$$(2x - 3y + 4z)^2 + 2(-2x - y + 3z - 2)^2 = 1.$$

Vì x, y, z là những số nguyên dương nên để có đẳng thức trên thì phải có:

$$I \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ -2x - y + 3z = 2 \end{cases} \text{ hoặc } II \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -1 \\ -2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

a) Giải hệ I: Giải y và z theo x ta được

$$y = \frac{14}{5}x + 1, z = \frac{8}{5}x + 1. \text{ Do đó}$$

$$A = x - 2\left(\frac{14}{5}x + 1\right) + 3\left(\frac{8}{5}x + 1\right) = x/5 + 1.$$

Từ đây cho thấy rằng trong trường hợp này A sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi x là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho y và z cũng là số tự nhiên (do đó A sẽ là số nguyên), nghĩa là khi $x = 5$, lúc đó $y = 15$, $z = 9$ và giá trị nhỏ nhất của A là 2.

b) Giải hệ II: Giải y và z theo x ta được $y = (14x + 11)/5$, $z = (8x + 7)/5$. Do đó $A = x - 2(14x + 11)/5 + 3(8x + 7)/5 = (x - 1)/5$. Dễ thấy rằng trong trường hợp này A đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 1$, $y = 5$, $z = 3$ và $A = 0$.

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của A là bằng 0 ứng với $x = 1$, $y = 5$ và $z = 3$.

Các bạn Ngô Hữu Liêm (lớp 12 trường Bùi Thị Xuân, thành phố Hồ Chí Minh), Đoàn Quyết Thắng (3E khoa Toán Đại học sư phạm Hà Nội I) và Nguyễn Văn Tiễn (Yên Phong, Hà Bắc) đã có những lời giải đúng.

T.T.

Bài 8/105. Tìm tất cả các số tự nhiên m sao cho với mọi số tự nhiên n ở trong khoảng $1 < n < [m/2]$ thì phân số $(m-n)/n$ không phải tối giản.

Lời giải của Nguyễn Đăng Quang. (lớp 9 chuyên toán Đại học Tổng hợp Hà Nội) và nhiều bạn khác:

1. Nếu m lẻ: Giả sử $m = 2l + 1$ thì theo đầu bài ta có $1 < n \leq l$. Trong trường hợp này ta thấy ngay rằng khi $n = l$ thì phân số $(m-n)/n = (l+1)/l$ là phân số tối giản. Vậy không tồn tại các số m lẻ thỏa mãn điều kiện của đầu bài.

2. Nếu m chẵn: Giả sử $m = 2l$ và $1 < n \leq l$. Nếu có số m nào đấy thỏa mãn điều kiện đầu bài thì tất cả các phân số sau

$$\frac{l}{l}, \frac{l+1}{l-1}, \frac{l+2}{l-2}, \dots, \frac{m-2}{2}$$

đều phải không tối giản. Nhưng $\frac{l+1}{l-1}$ không

tối giản có nghĩa là $(l+1, l-1) = d > 1$ và $(l+1) - (l-1) = 2 : d$.

Vậy $d = 2$ và ta thấy

$$l \text{ là số lẻ} \quad (1)$$

Mặt khác $\frac{l+2}{l-2}$ không tối giản có nghĩa là

$(l+2, l-2) = q > 1$ và $(l+2) - (l-2) = 4 : q$. Vậy $q : 2$ và như thế $l+2 : 2$ tức

$$l \text{ là số chẵn} \quad (2)$$

(1) và (2) mâu thuẫn. Mâu thuẫn này chỉ được loại bỏ khi không tồn tại các phân số nằm

giữa l/l và $\frac{m-2}{2}$. Vậy nếu m thỏa mãn điều kiện

của đầu bài thì m phải thỏa mãn:

$$\text{hoặc } l+1 = m-2 \quad \text{tức } m = 6,$$

$$\text{hoặc } l = m-2 \quad \text{tức } m = 4.$$

Tóm lại các số m thỏa mãn điều kiện của đầu bài là các số $m = 4$ và $m = 6$.

L.H.

Bài 9/105 Cho đẳng thức

$$[x]^2 - x[x] + x^5 + x = 2x^3 + (x^2 - 1)^2 [x] + \{x\}$$

trong đó $[x]$: phần nguyên của x ,

$\{x\}$: phần lẻ của x .

Tìm tất cả những giá trị thực của x thỏa mãn đẳng thức trên.

Lời giải của bạn Dương Đức Long (9E Hùng Vương, Vĩnh Phú);

Đẳng thức ở đầu bài tương đương với:

$$\begin{aligned} & x(x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - 1)^2 [x] - [x] \times \\ & \times (x - [x]) - \{x\} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^4 - 2x^2 + 1)(x - [x]) - [x] \times \\ & \times (x - [x]) - \{x\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \{x\} (x^4 - 2x^2 - [x]) = 0. \end{aligned}$$

Vậy có các trường hợp sau:

- a) $\{x\} = 0$ tức x nguyên
b) $x^4 - 2x^2 - [x] = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^2 + 1 = 1 + [x] \\ & \text{tức } 1 + [x] \geq 0 \text{ hay } [x] \geq -1. \end{aligned}$$

Với

$$[x] = -1 \text{ thì } x^4 - 2x^2 + 1 = 0, \text{ ta có } x = -1$$

(loại $x = 1$)

$$[x] = 0 \text{ thì } x^4 - 2x^2 = 0, \text{ ta có } x = 0$$

(loại $x = \pm \sqrt{2}$).

$$[x] = 1 \text{ thì } x^4 - 2x^2 - 1 = 0, \text{ ta có } x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

(loại $-\sqrt{1 + \sqrt{2}}$)

$$[x] = m \geq 2: \text{ khi đó } x^2 \geq 4 \text{ hay } x^4 \geq 4x^2.$$

Như thế $x^4 - 2x^2 - [x] \geq 4x^2 - 2x^2 - [x] > x^2 + x - [x] > 0$, tức không thỏa mãn trường hợp b).

Tóm lại nghiệm của bài toán là x nguyên

$$\text{và } x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

L. H.

Bài 10/105. Cho $f(x) = ax^2 + b x + c$ (*); x_1, x_2 là hai số khác nhau và khác không, thỏa mãn

$$f(x_1) = f(x_2) = m$$

và $m(x_1 + x_2 - 1) + c(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0$. (1)
Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất một nghiệm tự nhiên. Tìm nghiệm đó.

Lời giải. Nhiều bạn đã giải theo cách sau:

Theo giả thiết $f(x_1) = f(x_2) = m$ nên x_1, x_2 cũng là nghiệm của phương trình $f(x) - m = 0$. Phương trình có hai nghiệm nên $a \neq 0$ và theo định lý Viet ta có:

$$x_1 + x_2 = -b/a, \quad x_1 x_2 = (c - m)/a,$$

Thay các kết quả này vào (1) ta được

$$m(-b/a - 1) + c[(c - m)/a + 1 + b/a] = 0$$

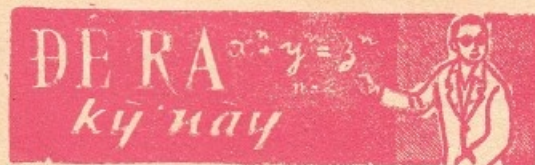
$$\Leftrightarrow (a + b + c)(c - m)/a = 0.$$

Do x_1 và $x_2 \neq 0$ nên $c - m \neq 0$.

Vậy $a + b + c = 0$, suy ra $f(x)$ có ít nhất một nghiệm số tự nhiên và nghiệm đó chính bằng 1.

Nhận xét: Cũng có bạn ngược lại đã từ kết quả của Viet suy ra hệ số a, b rồi thay vào (*) và nhận thấy tổng các hệ số của phương trình bậc 2 mới này đúng bằng (1), nên cũng thu được kết quả cần tìm.

L.H.



Bài 1/108. Các số nguyên a, b, m, n thỏa mãn các tính chất sau đây: Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm nguyên, $m \neq n$ và $(m^2 + am + b)(n^2 + an + b) = 1$.

Chứng minh rằng

$$a + 4b = (m + n)(m + n - 1).$$

Vũ Quang Sửu (ĐHSP Vinh)

Bài 2/108. Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{3.7 \dots (2^n - 1)}{2.4 \dots 2^{n-1}} < \left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\right)^n$$

Trần Xuân Đáng (ĐHTH Huế)

Bài 3/108. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm x của phương trình.

$$22\cos x + 6194 = x$$

đều thỏa mãn

$$1964 < x/\pi < 1979$$

Hãy tính số nghiệm của phương trình trên.

Lê Thống Nhất (ĐHSP Vinh)

Bài 4/108. Cho $0 < \alpha < \pi/2$. Chứng minh rằng

$$(\cos \alpha + \sin \alpha - 1) \sin \frac{\alpha}{2} < 2\sqrt{3}/9.$$

Vũ Văn Thành (Hải Phòng)

Bài 5/108. Giả sử O là tâm và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi R, R_1, R_2, R_3 tương ứng là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB . Chứng minh hệ thức:

$$R_1 R_2 R_3 = 2R^2 r.$$

Lê Quốc Hán (ĐHSP Vinh)

Bài 6/108. Trong tam giác ABC có $\cotg \frac{A}{2}, \cotg \frac{B}{2}, \cotg \frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng.

a. Chứng minh rằng độ dài các cạnh của tam giác lập thành cấp số cộng.

b. Tìm góc lớn nhất của tam giác biết rằng $\cotg \frac{A}{2}, \cotg \frac{B}{2}, \cotg \frac{C}{2}$ là ba số nguyên liên tiếp.

Nguyễn Công Quý
(ĐHSP T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 7/108. Hai mặt cầu S_1, S_2 có các tiếp tuyến chung A_1A_2, B_1B_2 (A_1, B_1 thuộc S_1, A_2, B_2 thuộc S_2). Chứng minh rằng các hình chiếu của các dây A_1B_1 và A_2B_2 trên đường nối tâm hai mặt cầu là những đoạn thẳng bằng nhau.

Nguyễn Công Quý

Bài 8/108. Cho ba số a, b, c khác 0 và khác nhau thỏa mãn

$$2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \right) = \frac{8}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng với n là số tự nhiên lẻ thì

$$\left[\left(\frac{a}{b-c} \right)^n + \left(\frac{b}{c-a} \right)^n + \left(\frac{c}{a-b} \right)^n \right] \times \left[\left(\frac{b-c}{a} \right)^n + \left(\frac{c-a}{b} \right)^n + \left(\frac{a-b}{c} \right)^n \right] = 1.$$

Nam Hà (ĐHTH Huế)

Bài 9/108. Tìm tất cả các số liệt không giảm $x_1, x_2, \dots, x_{1979}$ gồm 1979 số hạng nguyên dương. $x_{1979} \leq 1964$ và

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1979}^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_{1979})^2}$$

đạt giá trị lớn nhất.

Vũ Quang Lãm (Hà Nam Ninh)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/108. Cho tứ diện nửa đều (các cạnh đối bằng nhau) $ABCD$. Độ dài các cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh là a, b, c có $a+b+c=S$ không đổi.

a. Chứng minh rằng nếu qua điểm giữa mỗi cạnh dựng các đường thẳng song song với cạnh đối của cạnh đó thì ta được một tứ diện mới $A'B'C'D'$.

b. Từ một đỉnh của một trong hai tứ diện trên nối với các đỉnh của tứ diện còn lại và gọi d là khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách trên. Tìm hệ thức giữa a, b, c để d đạt giá trị nhỏ nhất.

Cao Mạnh Tường
(40A Kim Động, Hải Hưng)

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

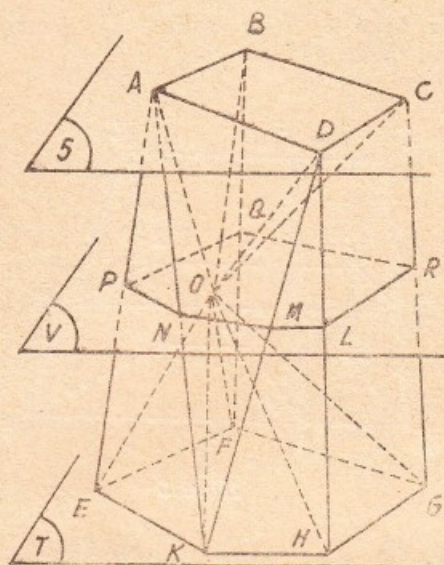
HÌNH PHỎNG LĂNG TRỤ VÀ CÔNG THỨC THỂ TÍCH CỦA NÓ

QUỐC TRINH

TRONG môn hình học không gian ở trường phổ thông hiện nay, các bạn được học về các hình lăng trụ, hình chóp, hình chóp cụt và cách tính thể tích từng hình đó. Nay ta hãy nghiên cứu một loại khối đa diện lồi nữa: hình phỏng lăng trụ mà tính chất của nó và

do đó công thức thể tích của nó rất tổng quát, giúp ta suy lại được công thức thể tích các hình lăng trụ, hình chóp, hình chóp cụt và tìm tiếp thể tích một số loại hình, khối hay gặp trong thực tế: hình cái nêm, hình cái nêm cụt, hình đồng cát...

§ 1. Định nghĩa. Hình phỏng lăng trụ là hình đa diện lồi mà tất cả các đỉnh của nó nằm trong hai mặt phẳng song song.



Hình 1

Trong hình 1 ta có hình phỏng lăng trụ $ABCD.EFGHK$.

Từ định nghĩa ta suy ra :

1. Các mặt bên của hình phỏng lăng trụ là hình tam giác hay hình tứ giác.
2. Mặt bên tứ giác của hình phỏng lăng trụ là hình thang hay đặc biệt là hình bình hành.
3. Hình lăng trụ, hình chóp, hình chóp cụt là những dạng đặc biệt của loại hình phỏng lăng trụ.

§ 2. Vài yếu tố khác của hình phỏng lăng trụ.

Hai mặt của hình phỏng lăng trụ nằm trong hai mặt phẳng song song (S) và (T) chứa các đỉnh của hình phỏng lăng trụ là hai đáy của hình phỏng lăng trụ (h.1).

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đó bằng đường cao của nó.

Mặt phẳng (V) song song và cách đều hai mặt phẳng song song chứa hai đáy của hình phỏng lăng trụ sẽ tạo ra thiết diện trung bình của hình phỏng lăng trụ.

Trong h.1 thiết diện trung bình của hình phỏng lăng trụ $ABCD.EFGHK$ là hình đa giác $LMNPQR$.

§ 3. Tính thể tích của hình phỏng lăng trụ.

Lấy điểm O bất kỳ nằm trong thiết diện trung bình $LMNPQR$ và nối O với tất cả các đỉnh của hình phỏng lăng trụ ta sẽ tạo được các hình chóp có đỉnh chung là O và các đáy là hai đáy và các mặt bên của hình phỏng lăng trụ :

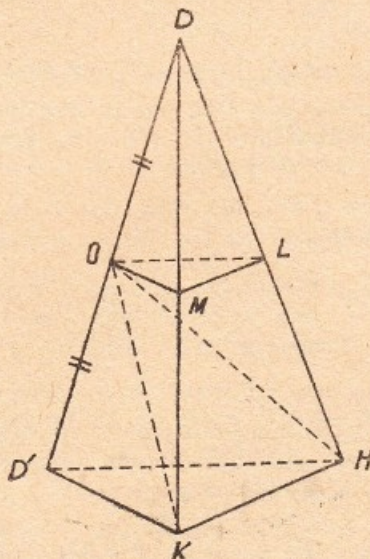
$O.ABCD$, $O.EFGHK$, $O.AEK$, $O.ADK$, $O.DKH$...

Tổng thể tích tất cả các hình chóp này bằng thể tích hình phỏng lăng trụ.

Nếu gọi diện tích đáy trên, diện tích đáy dưới và đường cao của hình phỏng lăng trụ lần lượt là s_1 , s_2 và h thì thể tích hình chóp $O.ABCD$ bằng $s_1 h/6$ và thể tích hình chóp $O.EFGHK$ bằng $s_2 h/6$.

Nay ta hãy tính thể tích của hình chóp $O.DHK$ có đỉnh O và đáy là một mặt bên của hình phỏng lăng trụ (mặt bên DHK (h.2).

Kéo dài DO một đoạn bằng DO thì có D' nằm trong mặt phẳng (T) chứa đáy dưới (vì O nằm trong thiết diện trung bình). Nếu đặt diện tích tam giác OLM nằm trong thiết diện trung bình là s thì diện tích hình tam giác $D'HK$ bằng $4s$ (vì $D'HK$ là hình vị tự của OLM trong phép vị tự tâm D tỷ số là 2).



Hình 2

Thể tích của hình chóp $D.D'HK$ là :

$$V_{D.D'HK} = 4sh/3$$

Thể tích của hình chóp $O.D'HK$ là :

$$V_{O.D'HK} = 2sh/3.$$

Vậy thể tích của hình chóp $O.DHK$ cần tìm là:

$$v_{O.DHK} = 4sh/3 - 2sh/3 = 2sh/3.$$

Từ đó suy ra rằng: tổng thể tích tất cả các hình chóp có chung đỉnh O và có các đáy là các mặt bên của hình phỏng lăng trụ sẽ bằng: $2/3$ diện tích thiết diện trung bình $\times h$.

Nếu đặt diện tích thiết diện trung bình của hình phỏng lăng trụ là s_0 thì cuối cùng thể tích v của hình phỏng lăng trụ bằng:

$$v = s_1h/6 + s_2h/6 + 2s_0h/3$$

$$\text{hay } v = \frac{1}{6}h (s_1 + 4s_0 + s_2) \quad (1)$$

trong đó h là đường cao, s_1, s_0, s_2 lần lượt là diện tích đáy trên, diện tích thiết diện trung bình và diện tích đáy dưới của hình phỏng lăng trụ.

§ 4. Đặc biệt hóa hình phỏng lăng trụ.

1) Khi đáy trên của nó suy biến thành một điểm, ta có hình chóp. Khi ấy $s_1 = 0, s_0 = \frac{1}{4}s_2$

nên thay vào (1) ta có thể tích của hình chóp là:

$$v_{\text{chóp}} = \frac{1}{6}h \left(4 \cdot \frac{1}{4}s_2 + s_2 \right) = \frac{1}{6}h \cdot 2s_2$$

$$v_{\text{chóp}} = \frac{1}{3}hs_2$$

(h : đường cao, s_2 : diện tích đáy hình chóp)

2) Khi hai đáy của hình phỏng lăng trụ bằng nhau và các cạnh bên của nó song song với nhau ta sẽ có hình lăng trụ.

Khi ấy $s_1 = s_2 = s_0$ nên thay vào (1) ta có thể tích của hình lăng trụ là:

$$v_{\text{lăng trụ}} = \frac{1}{6}h (s_1 + 4s_1 + s_1) = \frac{1}{6}h \cdot 6s_1$$

$$v_{\text{lăng trụ}} = hs_1$$

(h : đường cao, s_1 : diện tích đáy lăng trụ).

3) Khi hai đáy của hình phỏng lăng trụ vị tự với nhau (các cạnh bên của nó đồng quy tại tâm vị tự) ta sẽ có hình chóp cụt.

Khi ấy $s_0 = \left(\frac{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}}{2} \right)^2$ nên thay vào (1),

ta có:

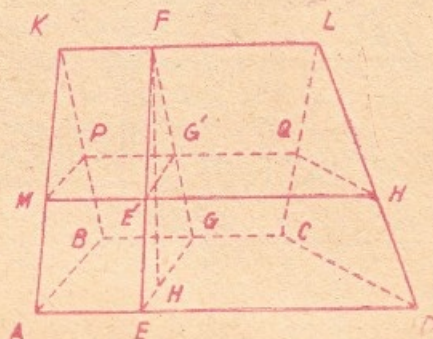
$$v_{\text{chóp cụt}} = \frac{1}{3}h (s_1 + \sqrt{s_1s_2} + s_2)$$

s_1, s_2 là diện tích hai đáy; h : đường cao của hình chóp cụt).

§ 5. Tìm thêm công thức thể tích một vài hình, khối hay gặp.

1) Nếu một trong hai đáy của hình phỏng lăng trụ suy biến thành một đoạn thẳng, đáy còn lại là hình thang thì ta có hình cái nêm (h. 3).

Trong hình 3, đoạn thẳng (KL) song song với hình thang đáy $ABCD$.



Hình 3

Ta hãy vận dụng công thức thể tích hình phỏng lăng trụ để tính thể tích hình cái nêm.

Dựng mặt phẳng vuông góc với các cạnh AD, BC, KL của hình cái nêm ta có thiết diện thẳng EFG và gọi diện tích của thiết diện thẳng này là s , đường cao hình cái nêm $FH = h$. Đặt $AD = a, BC = b, KL = c$.

Vận dụng công thức thể tích hình phỏng lăng trụ (1) thì thể tích hình cái nêm bằng:

$$v = \frac{1}{6}h (0 + 4s_0 + s_2)$$

($MNPQ$ là thiết diện trung bình)

$$v = \frac{1}{6}h \left(4 \cdot \frac{\frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} G'E' + \frac{a+b}{2} GE \right)$$

trong đó GE vuông góc với AD, BC nên là đường cao của hình thang đáy $ABCD$; $G'E'$ là đường cao của thiết diện trung bình (cũng là hình thang) nên $2G'E' = GE$.

Vậy:

$$v = \frac{1}{3} (a + b + c) \frac{h \cdot GE}{2}$$

tức

$$v = \frac{1}{3} (a + b + c) \cdot s$$

2) Nay ta tìm thể tích của hình phỏng lăng trụ mà hai đáy là hai hình chữ nhật có các cạnh

tương ứng song song mà ta gọi là *hình nêm cụt đặc biệt* hoặc *hình đồng cát* (h. 4). Hình $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có các đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$ là hai hình chữ nhật và:

$$AD \parallel A'D', AB \parallel A'B'.$$

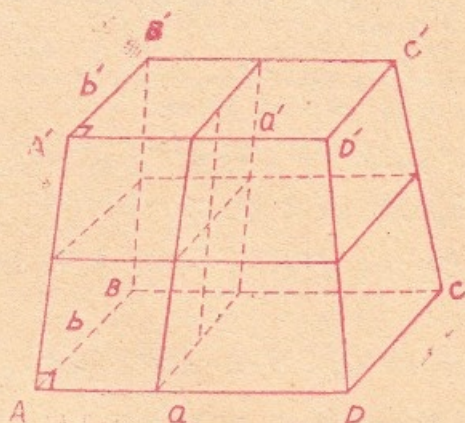
Đặt $AD = a$, $AB = b$, $A'D' = a'$, $A'B' = b'$ và chiều cao của $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là h .

Vận dụng công thức thể tích hình phẳng lăng trụ (1) ta có thể tích của hình nêm cụt hoặc của hình đồng cát là:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{6} h (a'b' + 4 \frac{a+a'}{3} \cdot \frac{b+b'}{2} + ab) \\ &= \frac{1}{6} h (a'b' + ab + a'b + ab' + a'b' + ab) \end{aligned}$$

$$\text{tức } v = \frac{1}{6} h (2a'b' + 2ab + ab' + a'b).$$

Như vậy là sau khi đã nghiên cứu thể tích của hình phẳng lăng trụ (mà các hình lăng trụ, hình chóp, hình chóp cụt là những dạng đặc biệt của nó) ta suy lại được công thức thể tích các hình lăng trụ, hình chóp, hình chóp cụt và tìm thêm được thể tích của hình cái nêm, hình đồng cát (cũng là những dạng đặc biệt của hình phẳng lăng trụ)



Hình 4

Công thức thể tích của hình phẳng lăng trụ:

$$v = \frac{1}{6} h (s_1 + 4s_0 + s_2)$$

được gọi là công thức *Tomát Simson*, tên nhà toán học người Anh (1710 – 1761).

Công thức đó quả có tính chất tổng quát và thực tế.

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÀ ỨNG DỤNG CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ VÔ TỈ

LÊ THỐNG NHẤT

CÁC bạn đã được giới thiệu phương pháp chứng minh số $\sqrt{2}$ là số vô tỉ trong chương trình phổ thông. Áp dụng kiểu lập luận số học đó, các bạn cũng sẽ chứng minh được một loạt các số, chẳng hạn như $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$ là các số vô tỉ.

Ở bài báo này tôi xin giới thiệu với các bạn một phương pháp để có thể làm được việc đó, thông qua việc xét nghiệm hữu tỉ của một phương trình đại số.

Người ta gọi phương trình đại số bậc n là phương trình có dạng:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0 \quad (1)$$

trong đó ẩn số là x , còn $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ là các

số nào đó (riêng $c_n \neq 0$) gọi là các hệ số của phương trình (1).

Ở trường phổ thông các bạn đã xét phương trình đại số bậc 2, bậc 4 trùng phương khá kỹ. Ở đây ta xét các phương trình đại số bậc n mà các hệ số của nó là các số nguyên (nếu các hệ số là số hữu tỉ, các bạn cũng có thể biến đổi tương đương về phương trình có hệ số nguyên).

Bây giờ chúng ta chứng minh một định lý.

Định lý. Nếu phương trình đại số bậc n với các hệ số nguyên

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$$

có nghiệm hữu tỉ là a/b , với a, b là các số nguyên nguyên tố cùng nhau, thì a là ước của c_0 , còn b là ước của c_n .

Chứng minh. Do a/b là nghiệm của (1) nên thay $x = a/b$ ta có:

$$c_n(a/b)^n + c_{n-1}(a/b)^{n-1} + \dots + c_1(a/b) + c_0 = 0 \quad (2)$$

Nhân cả hai vế với b^n ta có:

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \dots + c_1 a b^{n-1} + c_0 b^n = 0 \quad (3)$$

Đẳng thức (3) có thể viết:

$$c_n a^n = -c_{n-1} a^{n-1} b - \dots - c_1 a b^{n-1} - c_0 b^n$$

hay:

$$c_n a^n = b(-c_{n-1} a^{n-1} - \dots - c_1 a b^{n-2} - c_0 b^{n-1}).$$

Do đó b là ước của $c_n a^n$, nhưng a và b là hai số nguyên tố cùng nhau nên b phải là ước của c_n .

Ta lại viết (3) dưới dạng:

$$c_0 b^n = a(-c_n a^{n-1} - \dots - c_1 b^{n-1}).$$

Từ đó a là ước của $c_0 b^n$, do a và b là hai số nguyên tố cùng nhau nên a là ước của c_0 . Định lý được chứng minh.

Từ đó ta rút ra, khi $c_n = 1$ thì:

Hệ quả. Nếu phương trình đại số bậc n với các hệ số nguyên:

$$x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$$

có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải là nghiệm nguyên và là ước của c_0 .

Sau đây ta xét một số thí dụ áp dụng để chứng minh một số là một số vô tỉ.

Thí dụ 1. Chứng minh $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Ta thấy $\sqrt{7}$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 7 = 0 \quad (4)$$

Ở đây $n=2$, $c_2=1$, $c_0=-7$, $c_1=0$

Mặt khác theo hệ quả thì nếu phương trình (4) có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó là số nguyên và là ước của -7 . Ta thử tất cả các ước của -7 là $1, -1, 7, -7$ nhưng không có số nào trong chúng là nghiệm của (4). Vậy phương trình (4) không có nghiệm hữu tỉ, suy ra $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.

Các bạn thử áp dụng chứng minh số $\sqrt[3]{79}$ là số vô tỉ và chứng minh các kết quả sau:

Bài tập 1. Chứng minh rằng số $\sqrt[n]{a}$, với a và n là các số nguyên dương, hoặc là số vô tỉ hoặc là số nguyên.

Bài tập 2. Chứng minh $\frac{4}{16-3\sqrt{15}}$ là số vô tỉ.

Bây giờ ta xét tiếp:

Thí dụ 2. Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Giả sử $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$.

Bình phương hai vế ta có:

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 - 1 = 8x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \quad (5)$$

Như vậy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm của (5).

Áp dụng hệ quả ta thấy ngay (5) không có nghiệm hữu tỉ (các bạn xét lấy) nên $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Các bạn áp dụng làm các bài tập:

Bài tập 3. Chứng minh số $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Bài tập 4. Chứng minh số $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Bây giờ ta xét tới các thí dụ dạng lượng giác:

Thí dụ 3. Chứng minh $\cos 20^\circ$ là số vô tỉ

Lời giải. Giả sử $x = \cos 20^\circ$, ta có:

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\text{nên } \cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$$

$$\text{hay } 1/2 = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.$$

$$\text{Suy ra } 1/2 = 4x^3 - 3x$$

$$\text{hay } 8x^3 - 6x - 1 = 0, \quad (6)$$

Vậy $\cos 20^\circ$ là nghiệm của (6). Nhưng theo định lý ở trên thì (6) nếu có nghiệm hữu tỉ thì chỉ là trong các số:

$$\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 1/8.$$

Nhưng thử các giá trị đó vào (6) đều không thỏa mãn, vậy (6) không có nghiệm hữu tỉ, tức là $\cos 20^\circ$ là số vô tỉ.

Các bạn hãy làm các bài tập:

Bài tập 5. Chứng minh $\sin 10^\circ$ là số vô tỉ.

Bài tập 6. Nếu $\cos 2x$ là số vô tỉ thì các số $\sin x$, $\cos x$ và $\tan x$ cũng là các số vô tỉ.

MỘT HÌNH CHẤT LÝ THỦ CỦA SỐ VÔ TỶ

NGUYỄN THANH

VỪA qua chúng tôi đã gặp một bài toán như sau: Cho α là một số vô tỷ. Hỏi rằng tập hợp các phần thập phân

$$\{k\alpha\} = k\alpha - [k\alpha]; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

có trù mật trên đoạn $[0, 1]$ hay không? Nói cách khác, có phải với bất kỳ điểm x nào thuộc $[0, 1]$ và bất kỳ số $\varepsilon > 0$ nào cũng đều tìm được số tự nhiên k sao cho $x - \varepsilon < \{k\alpha\} < x + \varepsilon$ hay không?

Chúng tôi đã giải được bài toán, cụ thể là đã chứng minh được tập hợp các số $\{k\alpha\}$ trù mật trên đoạn $[0, 1]$. Kết quả đó là một tính chất lý thú của số vô tỷ. Tính chất này không có ở số hữu tỷ, vì nếu $\alpha = p/q$ với p, q là các số tự nhiên thì với bất kỳ số tự nhiên k nào, $\{k\alpha\}$ cũng chỉ nhận một trong q giá trị:

$$0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(q-1)\alpha\}.$$

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu với các bạn cách chứng minh tính chất nêu trên của số vô tỷ. Để cho gọn ta gọi tính chất đó là tính chất T . Trước hết ta chứng minh một mệnh đề:

Mệnh đề. Cho α là một số vô tỷ. Với một số tự nhiên n tùy ý, bao giờ cũng tìm được số tự nhiên k_n sao cho $\{k_n\alpha\} < 1/2^n$.

Chứng minh. Hiển nhiên mệnh đề đúng với $n = 0$ (k_0 là một số tự nhiên lấy tùy ý). Giả sử mệnh đề đã đúng với $n = m$, ta chứng minh mệnh đề cũng sẽ đúng với $n = m + 1$.

Mệnh đề đúng với $n = m$ tức là tồn tại k_m sao cho $\{k_m\alpha\} < 1/2^m$.

Nếu $\{k_m\alpha\} < 1/2^{m+1}$ thì chỉ việc lấy $k_{m+1} = k_m$ là có $\{k_{m+1}\alpha\} < 1/2^{m+1}$.

Ta xét trường hợp $\{k_m\alpha\} > 1/2^{m+1}$. Xét dãy $\{ik_m\alpha\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Chú ý là $\{ik_m\alpha\} = \{i\{k_m\alpha\}\}$, nên dãy này chia được thành từng đoạn sao cho trong mỗi đoạn thì các phần tử lập thành cấp số cộng tiến công sai là $\{k_m\alpha\}$. Phần tử thứ i_1 thỏa mãn

$$(i_1 - 1) \{k_m\alpha\} < 1 < i_1 \{k_m\alpha\}$$

có $\{i_1 k_m\alpha\} = i_1 \{k_m\alpha\} - 1 < i_1 \{k_m\alpha\} - (i_1 - 1) \{k_m\alpha\} = \{k_m\alpha\}$ tức là $\{i_1 k_m\alpha\} < \{k_m\alpha\}$.

Nếu $\{i_1 k_m\alpha\} < 1/2^{m+1}$ thì lấy $k_{m+1} = i_1 k_m$.

Nếu $\{i_1 k_m\alpha\} > 1/2^{m+1}$ thì tiếp tục xét dãy trên.

Để nhận xét thấy rằng:

$$\begin{aligned} \{k_m\alpha\} - \{i_1 k_m\alpha\} &= \{2k_m\alpha\} - \{(i_1 + 1)k_m\alpha\} = \dots \\ &= \{i_1 k_m\alpha\} - \{(2i_1 - 1)k_m\alpha\}. \end{aligned}$$

Đặt $i_1 - 1 = d$ thì đẳng thức trên trở thành $\{k_m\alpha\} - \{(1+d)k_m\alpha\} = \{(1+d)k_m\alpha\} - \{(1+2d)k_m\alpha\}$.

Nhận xét tương tự như vậy, ta có dãy $\{k_m\alpha\}, \{(1+d)k_m\alpha\}, \{(1+2d)k_m\alpha\}, \{(1+3d)k_m\alpha\}, \dots$ là một cấp số cộng lùi (đối của công sai bằng $\{k_m\alpha\} - \{i_1 k_m\alpha\} < 1/2^{m+1}$ vì bằng hiệu của hai số cùng nằm trong khoảng $(1/2^{m+1}, 1/2^m)$). Vì vậy phải có ít nhất một phần tử của dãy nhỏ hơn $1/2^{m+1}$; giả sử đó là phần tử $\{(1+ud)k_m\alpha\}$, ta lấy $k_{m+1} = (1+ud)k_m$.

Vậy bao giờ cũng tìm được k_{m+1} sao cho $\{k_{m+1}\alpha\} < 1/2^{m+1}$, mệnh đề đúng với $n = m + 1$ (đpcm).

Chứng minh tính chất T . Bây giờ giả sử cho trước ε là một số dương nhỏ tùy ý, bao giờ cũng tìm được số tự nhiên n sao cho $1/2^n < \varepsilon$. Với số n như vậy, ta chọn số tự nhiên k_n sao cho $\{k_n\alpha\} < 1/2^n$ (chọn được nhờ kết quả của mệnh đề trên). Chia khoảng $(0, 1)$ thành 2^n khoảng bằng nhau thì trong mỗi khoảng đều có ít nhất một phần tử của dãy $\{ik_n\alpha\}$, $i = 1, 2, \dots$. Với x là điểm bất kỳ thuộc $[0, 1]$ thì khoảng $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ bao giờ cũng bao trong nó ít nhất một khoảng nói trên, tức là bao giờ cũng có trong nó ít nhất một phần tử của dãy $\{ik_n\alpha\}$, giả sử đó là phần tử $\{i_0 k_n\alpha\}$.

Tóm lại là bao giờ cũng tìm được số tự nhiên $k = i_0 k_n$ sao cho

$$x - \varepsilon < \{k\alpha\} < x + \varepsilon.$$

Sau đây là vài ví dụ ứng dụng tính chất T .

Bài toán 1. Chứng minh rằng với bất kỳ x và bất kỳ $\varepsilon > 0$ đều tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho

$$s_{2n} = |\sin x - \sin n| + |\cos x - \cos n| < \varepsilon.$$

Lời giải. Vì x và $\varepsilon > 0$ có thể thay đổi tùy ý nên bài toán 1 tương đương với việc chứng minh rằng với mỗi x và $\varepsilon > 0$ cho trước (bất kỳ) bao giờ cũng tồn tại ít nhất một số tự nhiên n sao cho $s_{2n} < \varepsilon$ (các bạn tự lý giải tại sao!).

Lấy 2π là 1 đơn vị mới. Khi đó 1 radian sẽ là số vô tỷ (theo đơn vị mới). Áp dụng tính chất

T. ta thấy rằng với mỗi x và $\delta > 0$ cho trước, bao giờ cũng tồn tại số tự nhiên n sao cho $|x|' - |n|' < \delta$, trong đó $|a|'$ là phần thập phân của số a tính theo đơn vị mới (tức 2π).

$$\text{Mặt khác ta có } s_{x_n} = |\sin |x|' - \sin |n|'| + |\cos |x|' - \cos |n|'| \leq 4 \left| \sin \frac{|x|' - |n|'}{2} \right|. \text{ Do}$$

đó muốn có $s_{x_n} < \varepsilon$ thì chỉ việc chọn δ sao cho $\left| \sin \frac{|x|' - |n|'}{2} \right| < \varepsilon/4$ (điều này làm được

vì $\sin a \rightarrow 0$ khi $a \rightarrow 0$).

Bài toán 2. Cho $f(x)$ $g(x)$ là hai hàm số liên tục và tuần hoàn trên $(-\infty, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ thì $f(x) = g(x)$ với

mọi x . (Hàm số $\varphi(x)$ gọi là liên tục nếu với mọi x ta đều có $\lim_{y \rightarrow x} \varphi(y) = \varphi(x)$).

$$y \rightarrow x$$

Lời giải. Trước hết xét trường hợp f và g có cùng chu kỳ τ . Rõ ràng khi đó $f(x) = g(x)$ với mọi x vì nếu tồn tại điểm x_0 mà ở đó $f(x_0) - g(x_0) = c \neq 0$ thì lấy $x_n = x_0 + n\tau$, $n = 1, 2, \dots$, ta sẽ có $x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow \infty$ và mặc dù vậy $f(x_n) - g(x_n) = c$ với mọi n , trái với giả thiết.

Giả sử f và g có chu kỳ tương ứng là τ_f, τ_g và tỷ số $\tau_f/\tau_g = p/q$ là một số hữu tỷ (p, q tự nhiên). Khi đó $p\tau_g = q\tau_f = \tau$ sẽ là chu kỳ chung của cả f lẫn g và ta trở lại trường hợp đầu.

Giả sử $\tau_f : \tau_g = \alpha$ là một số vô tỷ và tồn tại điểm $x_0 \in [0, \tau_g]$ mà ở đó $f(x_0) - g(x_0) = c \neq 0$. Lấy τ_g là 1 đơn vị mới. Khi đó τ_f tính theo đơn

vị mới sẽ là một số vô tỷ $\tau_n > 0$ $n = 1, 2, \dots$, $\delta_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Tính chất T, với mỗi n ta có số tự nhiên k_n sao cho $|k_n \tau_f|' < \delta_n$ ($|a|'$ là phần thập phân của số a theo đơn vị mới), tức là tồn tại số tự nhiên l_n để $0 < s_n = k_n \tau_f - l_n \tau_g < \delta_n$. Đặt $x_n = x_0 + l_n \tau_g$, $n = 1, 2, \dots$. Rõ ràng $x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow \infty$. Mặt khác vì $s_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nên $f(x_n) - g(x_n) = f(x_0 + l_n \tau_g) - g(x_0 + f(x_0 + k_n \tau_f - s_n) - g(x_0) = f(x_0 - s_n) - g(x_0) \rightarrow f(x_0) - g(x_0) = c \neq 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Điều này trái với giả thiết $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Do đó ta có $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in [0, \tau_g]$. Vì những lập luận trên vẫn đúng nếu lấy điểm 0 là bất kỳ điểm nào có dạng $l\tau_g$, l là số tự nhiên, nên ta kết luận $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$.

Các bạn thân mến!

Trên đây là một vài ứng dụng của tính chất T. Chúng tôi hy vọng rằng tính chất T sẽ giúp các bạn tìm ra nhiều điều lý thú khác. Để kết thúc bài viết này, chúng tôi xin lưu ý các bạn là không có một tính chất nào « mạnh » hơn tính các chất T, ví dụ không thể chứng minh rằng tập K_α số $|k\alpha|'$ phủ đầy tập K tất cả các số vô tỷ trên đoạn $[0, 1]$ (tức là bất kỳ điểm x vô tỷ nào thuộc đoạn $[0, 1]$ cũng tìm được số tự nhiên k để $|k\alpha|' = x$). Bởi vì, nếu bạn nào đã làm quen với lý thuyết tập hợp, chắc các bạn thấy K_α có lực lượng đếm được, mà K thì có lực lượng continuum (lớn hơn lực lượng đếm được) — hai tập hợp có lực lượng khác nhau sẽ không thể trùng nhau. Các bạn cũng có thể thấy thêm rằng $K_\alpha \cup K_\beta \neq \emptyset$ khi và chỉ khi α/β là hữu tỷ. Ngoài ra $\bigcup_{\alpha \in K} K_\alpha = K$.

THÀNH TÍCH CỦA ĐOÀN HỌC SINH VIỆT NAM TRONG KỲ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 21

ĐOÀN học sinh của ta tham dự kỳ thi vô địch toán quốc tế lần thứ 21 tổ chức tại Luân Đôn tháng 7 năm 1979 đã đạt được thành tích xuất sắc. Cả bốn bạn dự thi đều được giải. **Một giải nhất:**

— Bạn Lê Bá Khánh Trình — học sinh lớp 10 chuyên toán trường Quốc học Huế.

Ba giải nhì:

— Bạn Phạm Hữu Tiệp — học sinh lớp 10 chuyên toán trường cấp 3 Chu Văn An Hà Nội.

— Bạn Phạm Ngọc Anh Cương — học sinh lớp 10 chuyên toán trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

— Bạn Vũ Tá Long — học sinh lớp 10 chuyên toán trường Đại học Sư phạm 1 Hà Nội.

Một giải đặc biệt: Bạn Lê Bá Khánh Trình là học sinh duy nhất trong kỳ thi được tặng một giải đặc biệt về lời giải hay một bài toán.