

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC

tuổi trẻ

Số 107

2

1979

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG

Dây số: 52825

SUY NGHĨ VỀ QUÁ TRÌNH TÌM TÌM LỜI GIẢI CỦA MỘT BÀI TOÁN

NGUYỄN THÁI HÒE

T A xét bài toán sau đây:

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $x^2 + y^2$ với điều kiện:

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2 y^2 - x^2 - y^2 = 0. \quad (1)$$

Lời giải:

Điều kiện (1) biến đổi được về dạng

$$(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0 \quad (2)$$

hay:

$$(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -4x^2. \quad (3)$$

Ta đặt:

$$u = x^2 + y^2$$

Khi đó, từ (3) ta có:

$$u^2 - 3u + 1 \leq 0. \quad (4)$$

Từ (2) ta suy ra:

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq u \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

ta ta kết luận:

Giá trị lớn nhất của biểu thức $x^2 + y^2$ là $(3 + \sqrt{5})/2$.

Giá trị bé nhất của biểu thức $x^2 + y^2$ là $(3 - \sqrt{5})/2$.

Có lẽ chúng ta phải thừa nhận rằng, lời giải này hay vì nó đơn giản, chỉ sử dụng « công cụ thô sơ » (chỉ dùng đến kiến thức tam thức bậc hai mà thôi).

Xét về thể loại bài toán thì đây chính là bài toán cực trị có điều kiện của hàm hai biến số $u = x^2 + y^2$.

Với loại bài toán này, các phương pháp thông thường được sử dụng là:

1. Từ điều kiện liên hệ (1), rút biến này theo biến kia và khi đó bài toán cực trị có điều kiện của hàm hai biến chuyển thành bài toán cực trị tự do của hàm một biến.

2. Sử dụng phương pháp hệ số bất định La-gơ-răng.

Nhưng chúng ta có thể thấy rằng, cả hai phương pháp đó đối với bài toán này đều

khó lòng thực hiện. Cái hay chủ yếu của bài toán chính là ở chỗ có thể dùng công cụ sơ cấp đơn giản để giải.

Chắc chúng ta còn nhiều băn khoăn khi nghiên cứu lời giải này. Có lẽ nào lời giải lại có được hình như là kết quả ngẫu nhiên của quá trình mò mẫm. Lời giải có thể mô tả bằng lược đồ đơn giản sau:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$$

$$(3) \Rightarrow (4).$$

Và từ (4) ta có ngay kết quả của bài toán. Ta đặt câu hỏi: bằng quá trình tìm tòi như thế nào mà tác giả lại đề xuất lời giải như vậy?

Chúng tôi xin phép được nêu lên dưới đây một vài phương pháp tìm tòi để dẫn tới lời giải bài toán đó.

Ta hãy trở lại với vấn đề đặt ra. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của $u = x^2 + y^2$ với điều kiện (1).

Theo định nghĩa về giá trị lớn nhất và bé nhất của một hàm số thì bài toán sẽ được giải nếu ta tìm được hai số a và b sao cho:

$$a \leq u \leq b \quad (I)$$

với mọi x, y thỏa mãn (1)

Bây giờ, trong bất đẳng thức (I) ta quan niệm a, b là hai nghiệm của một tam thức bậc hai nào đó. Rõ ràng tam thức đó có dạng:

$$f(u) = u^2 - (a+b)u + ab \quad (II)$$

Khi đó, để có (I) thì:

$$f(u) \leq 0. \quad (III)$$

Dựa vào đường lối đó, ta có thể chỉ ra các bước giải bài toán đã cho:

— Hãy từ điều kiện (1) biến đổi và tạo thành một tam thức bậc hai $f(u)$ với $u = x^2 + y^2$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(u) \leq 0$$

— Từ đó ta suy ra các đại lượng a và b phải tìm.

Thực hiện theo đường lối này, ta có thể thấy:

Với mục đích tạo ra một tam thức bậc hai $f(u)$ có dạng (II) cho nên lời giải mới bắt đầu từ việc biến đổi và nhóm các số hạng của (1) để đưa về dạng (2).

Với mục đích đạt được (III), ta mới chuyển số hạng $4x^2$ từ vế trái sang vế phải để có (3). Từ đó suy ra (4).

Chúng ta cũng có thể bằng một quá trình tìm tòi khác để dẫn tới lời giải bài toán trên.

Coi x, y là hai tọa độ của điểm M trong mặt phẳng tọa độ: $M(x, y)$. Dưới dạng tọa độ cực thì

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \\ y &= R \sin \varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2. \end{aligned}$$

Điều kiện (1) đưa về dạng:

$$R^4 - (1 - 2\cos 2\varphi) R^2 + 1 = 0 \quad (1^*)$$

và bài toán cho được phát biểu lại là:

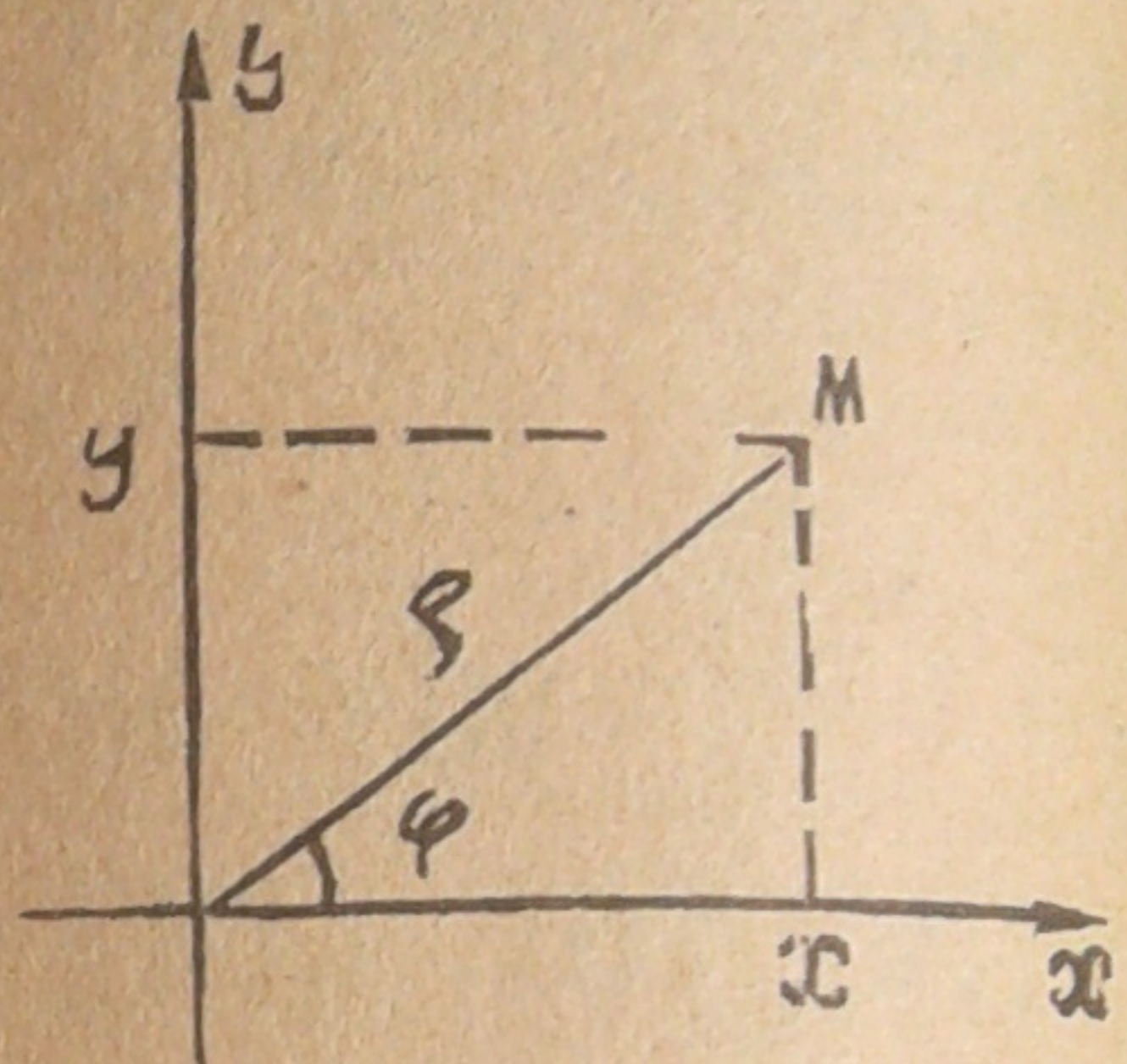
Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của đại lượng R^2 (R là bán kính cực của điểm M) với điều kiện (1^{*}) đối với các tọa độ R và φ .

Đưa bài toán về dạng này, lời giải bao gồm các bước sau:

— Tìm R^2 từ (1^{*}).

— Từ biểu thức R^2 suy ra kết quả của bài toán.

$$R^2 = \frac{1 - 2\cos 2\varphi \pm \sqrt{(1 - 2\cos 2\varphi)^2 - 4}}{2}$$



Suy ra giá trị lớn nhất của R^2 đạt được khi $\varphi = \pi/2$ và trước căn lấy dấu cộng. Giá trị nhỏ nhất của R^2 đạt được khi $\varphi = \pi/2$ và trước căn lấy dấu trừ.

Ta có:

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq R^2 = x^2 + y^2 \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Để kết thúc bài báo này, chúng ta có thể nêu ra một bài học: Bất cứ một bài toán nào mà việc sáng tạo bài toán cũng như đề ra lời giải của bài toán đó, phải được hình thành nên trên cơ sở của một nền tảng lý thuyết của những phương pháp suy luận. Những bài học tập của chúng ta khi giải các bài toán thì không chỉ ở chỗ tìm ra lời giải bài toán mà còn phải suy nghĩ, giải thích về quá trình tìm tòi lời giải bài toán đó và nhiều khi còn có thể nữa, tìm cho được quá trình hình thành bài toán đó.

Bài báo này mới đề ra yêu cầu thứ nhất và yêu cầu thứ hai tìm ra quá trình hình thành bài toán, xin nhường lại cho các bạn tiếp tục nghiên cứu.

RÈN LUYỆN PHONG CÁCH HỌC TOÁN

VŨ BẮC

BIẾT in bài toán dưới nhiều khía cạnh khác nhau sẽ có cách giải khác nhau. Phân tích, so sánh các cách giải khác nhau và kết quả tìm được trong nhiều trường hợp sẽ dẫn ta đến những kết quả mới thú vị. Đó là một phong cách học tập toán một cách sáng tạo.

Hãy xét bài toán đơn giản sau đây:

«Cho $F(x) = x^{n+1} - x^2$. Hãy tìm $F''(1) = ?$ »

Đây là một bài toán quá dễ đối với một học sinh cuối trường phổ thông. Ta có ngay:

$$F'(x) = (n+1)x^{n-1} - 2.$$

$$F''(1) = (n+1)n - 2 \quad (1)$$

Nếu ta nhìn nhận:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2(x^{n-1} - 1) = x^2(x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) \\ &= (x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2) \end{aligned}$$

là một tích của hai hàm số thì ta có thể giải bài toán bằng cách sử dụng công thức về đạo hàm của một tích các hàm số.

Ta có:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^n + x^{n-1} + \dots + x^2) + (x-1)(nx^{n-1} + \dots + 2x) \\ F''(x) &= \dots = 2[nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2] + \\ &+ (x-1)[n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + 2] \end{aligned}$$

$$F''(1) = 2[n + (n-1) + \dots + 2]. \quad (2)$$

1. Dem so sánh hai kết quả (1) và (2) ta có:

$$2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n - 2}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n - 2}{2} + 1$$

$$\sum_{m=1}^n m = (n+1)n/2. \quad (a)$$

Một kết quả thật bất ngờ. Đạo hàm $F''(x)$ tại điểm $x=1$ đã giúp ta tìm được công thức tính tổng của n số tự nhiên đầu tiên.

2. Kết quả ấy khiến ta phải đặt vấn đề sau:

«Thế thì liệu rằng đạo hàm bậc ba $F'''(x)$ có giúp ta được ích lợi gì không?»

Ta thử giải quyết xem sao!

$$F'''(x) = \dots = (n+1)(n)(n-1)x^{n-2}$$

$$F'''(1) = (n+1)n(n-1). \quad (3)$$

Mặt khác nếu sử dụng công thức đạo hàm của một tích thì ta có:

$$F'''(x) = \dots = 3[2.1 + 3.2x + \dots + n(n-1)x^{n-2}] + (x-1)[3.2.1 + 4.3.2x + \dots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}]$$

$$F'''(1) = 3[2.1 + 3.2 + \dots + n(n-1)]. \quad (4)$$

Dem so sánh (3) và (4) ta được:

$$2.1 + 3.2 + \dots + n(n-1) = (n+1)n(n-1)/3$$

$$\sum_{m=1}^n (m-1)m = (n+1)n(n-1)/3. \quad (b)$$

Đây cũng là một kết quả khá đẹp: ta tìm được công thức tính tổng $\sum_{m=1}^n (m-1)m$.

Song nếu ta chú ý khai triển:

$$\sum_{m=1}^n (m-1)m = \sum_{m=1}^n m^2 - \sum_{m=1}^n m \text{ thì ta có ngay:}$$

$$\sum_{m=1}^n m^2 = n(n+1)(2n+1)/6. \quad (c)$$

Một kết quả rất hợp với mong muốn của ta: Đạo hàm hạng ba của $F(x)$ đã giúp ta tính được tổng các bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.

3. Từ đó một dự đoán khá chắc chắn của ta sẽ là: «Đạo hàm hạng bốn $F^{(4)}(x)$ sẽ giúp ta

tính được tổng $\sum_{m=1}^n m^3$.

Thật thế:

$$F^{(4)}(1) = (n+1)n(n-1)(n-2). \quad (5)$$

Mặt khác nếu ta sử dụng công thức đạo hàm của một tích thì ta sẽ thu được kết quả như sau:

$$F^{(4)}(1) = 4[3.2.1 + 4.3.2 + \dots + n(n-1)(n-2)]. \quad (6)$$

Dem so sánh (5) và (6) ta có:

$$\begin{aligned} 3.2.1 + 4.3.2 + \dots + n(n-1)(n-2) &= \\ &= (n+1)n(n-1)(n-2)/4. \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^n m(m-1)(m-2) = (n+1)n(n-1)(n-2)/4 \quad (d)$$

Từ (d) ta suy dễ dàng ra kết quả sau:

$$\sum_{m=1}^n m^3 = n^2(n+1)^2/4$$

Điều ta dự đoán đã được chứng minh.

4. Một cách tổng quát bằng qui nạp toán học ta có thể chứng minh được rằng:

$$a) F^{(k+1)}(x) = (k+1) \sum_{m=1}^n m(m-1)\dots(m-(k-1))x^{m-k}$$

$$F^{(k+1)}(1) = (k+1) \sum_{m=1}^n m(m-1)\dots(m-(k-1))$$

b) Mặt khác dễ dàng thấy rằng:

$$F^{(k+1)}(x) = (n+1)n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{n-k}$$

$$F^{(k+1)}(1) = (n+1)n(n-1)\dots(n-(k-1))$$

Do đó:

$$\sum_{m=1}^n m(m-1)\dots(m-(k-1)) = (n+1)n(n-1)\dots(n-(k-1))/(k+1) \quad (f)$$

Ta lưu ý rằng:

$$m(m-1)\dots(m-(k-1)) = m^k - A_1 m^{k-1} + A_2 m^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} A_{k-1} m.$$

Trong đó A_r bằng tổng tất cả các tích gồm r thừa số lấy từ trong tập hợp các số $0, 1, 2, \dots, (k-1)$.

Chẳng hạn với $k=4$ ta có:

$$m(m-1)(m-2)(m-3) = m^4 - A_1 m^3 + A_2 m^2 - A_3 m,$$

trong đó $A_1 = 1+2+3=6$

$$A_2 = 1.2+2.3+1.3=11$$

$$A_3 = 1.2.3=6,$$

Bây giờ ta viết công thức (f) như sau:

$$(e) \quad \sum_{m=1}^n m^k - A_1 \sum_{m=1}^n m^{k-1} + A_2 \sum_{m=1}^n m^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} A_{k-1} \sum_{m=1}^n m =$$

$$= (n+1)n(n-1)\dots(n-(k-1))/k$$

Như vậy là đạo hàm hạng $(k+1)$ tại điểm

của hàm $F(x)$ đã giúp ta tính được tổng

nếu như ta biết được các tổng $\sum_{m=1}^n m^i, i=1, 2, \dots$

Chẳng hạn ta tính tổng $\sum_{m=1}^n m^4$.

Công thức (g) được sử dụng với $k=4$, ta

$$\sum_{m=1}^n m^4 - A_1 \sum_{m=1}^n m^3 + A_2 \sum_{m=1}^n m^2 - A_3 \sum_{m=1}^n m =$$

$$= (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)/5$$

$$\sum_{m=1}^n m^4 = 6 \sum_{m=1}^n m^3 - 11 \sum_{m=1}^n m^2 + 6 \sum_{m=1}^n m +$$

$$+ (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)/5$$

Trong đó $\sum_{m=1}^n m^3, \sum_{m=1}^n m^2, \sum_{m=1}^n m$ ta có

thức tính như phần trên kia đã chỉ ra.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

NĂM HỌC 1978 - 1979

(Lớp 10 hệ PT 10 năm và lớp 12 hệ PT 12 năm)

Bài 1. Chứng tỏ rằng với mọi $x > 1$ tồn tại một tam giác mà số đo các cạnh là những số $P_1(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $P_2(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ và $P_3(x) = x^4 - 1$.

Chứng tỏ rằng trong tất cả tam giác đó góc lớn nhất đều như nhau và tìm giá trị của góc đó.

Bài 2. Cho phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ba nghiệm số thực (không nhất thiết phân biệt) l, u, v . Với những giá trị nào của a, b, c thì số l^3, u^3, v^3 nghiệm đúng phương trình $x^3 + a^3x + b^3x + c^3 = 0$?

(Xem tiếp trang 16)

VẤN ĐỀ TÌM DƯ CỦA PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐA THỨC

ĐÀO DÌNH HẢI

Ở phổ thông, đã nhiều lần các bạn gặp bài toán chia đa thức cho đa thức. Bài toán là đơn giản nếu đa thức bị chia có bậc không lớn lắm. Nhưng nếu đa thức bị chia có bậc khá lớn thì bạn sẽ gặp không ít khó khăn. Bài báo này nhằm trao đổi với các bạn con đường khác, tiện lợi hơn trong những trường hợp như vậy.

Trước hết, các bạn hãy làm quen với định lý « Với mọi đa thức $f(x)$ và $g(x)$ ($g(x) \neq 0$), bao giờ cũng tồn tại duy nhất hai đa thức $q(x)$ và $r(x)$ sao cho

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad (*)$$

Đa thức $f(x)$ là đa thức bị chia, $g(x)$ là đa thức chia, $q(x)$ là đa thức thương và $r(x)$ là đa thức dư.

Điều chú ý là bậc $r(x) <$ bậc $g(x)$ hoặc $r(x) = 0$. Trong trường hợp thứ hai ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Giả sử bậc của $g(x)$ bằng n . Như vậy bậc của $r(x) < n$:

$$r(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n.$$

Ở đây không nhất thiết buộc $a_1 \neq 0$. Xét các trường hợp:

1) Trường hợp $g(x)$ có n nghiệm thực phân biệt.

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm thực phân biệt của $g(x)$. Thay $x_1, x_2, \dots, x_n$ vào (*) ta có hệ:

$$(I) \begin{cases} a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \dots + a_n = f(x_1) & (1) \\ a_1x_2^{n-1} + a_2x_2^{n-2} + \dots + a_n = f(x_2) & (2) \\ \dots \\ a_1x_n^{n-1} + a_2x_n^{n-2} + \dots + a_n = f(x_n) & (n) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được $a_1, a_2, \dots, a_n$ và do đó tìm được $r(x)$.

Ví dụ 1. Tìm dư của phép chia

$$(x^{100} - x^{50} + 2x^{25} - 4) : (x^2 - 1).$$

Giải: Đa thức $x^2 - 1$ có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -1$.

Gọi $ax + b$ là đa thức dư. Thay $x = 1$ và $x = -1$ vào đa thức chia, có -2 và -6 , do đó ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ -a + b = -6 \end{cases}$$

Giải ra ta có $a = 2, b = -4$. Vậy đa thức dư là $2x - 4$.

Ví dụ 2. Tìm α và β sao cho $x^{10} + \alpha x^2 + \beta x + 1$ chia hết cho $x^2 - 1$.

Giải. Giả sử $x^{10} + \alpha x^2 + \beta x + 1$ chia hết cho $x^2 - 1$. Vì $x^2 - 1$ có hai nghiệm là $x_1 = 1, x_2 = -1$ nên ta có

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải ra ta có $\alpha = -2, \beta = 0$. Như vậy, đa thức bị chia là $x^{10} - 2x^2 + 1 = x^2(x^8 - 1) - (x^2 - 1)$ chia hết cho $x^2 - 1$.

2) Trường hợp $g(x)$ có n nghiệm phân biệt trong đó có cả nghiệm phức.

Ta vẫn giải hệ (I) với các hệ số là số phức.

Ví dụ 3. Tìm số dư của phép chia $(x^{101} + 3x^{15} - x - 1) : (x^2 + 1)$.

Giải: Nghiệm của đa thức $x^2 + 1$ là $x = \pm i$. Đa thức dư có dạng $ax + b$. Do đó:

$$\begin{cases} ia + b = -3i - 1 \\ -ia + b = 3i - 1 \end{cases}$$

Giải ra ta có $a = -3, b = -1$. Vậy đa thức dư là $-3x - 1$.

Ví dụ 4. Tìm dư của phép chia

$$(x^{1959} - 1) \text{ cho } (x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$

Giải. Đa thức $x^2 + 1$ có nghiệm là $x = \pm i$, đa thức $x^2 + x + 1$ có nghiệm viết dưới dạng lượng giác là $x_1 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ và $x_2 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$. Gọi đa thức dư là $ax^2 + bx + c$.

Dùng công thức Moavơ, ta có $x_1^2 = x_2, x_2^2 = x_1$

và $x_1^3 = x_2^3 = 1$. Vậy ta có $x_1^{1959} = x_1^{\frac{1959}{3}} = 1$;

$x_2^{1959} = -i, (-i)^{1959} = i$. Như vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} -ia - b + id + e = -i - 1 & (i) \\ ia - b - id + e = i - 1 & (ii) \\ a + bx_2 + dx_1 + e = 0 & (iii) \\ a + bx_1 + dx_2 + e = 0 & (iiii) \end{cases}$$

Cộng, trừ từng vế của (i) và (ii) ta được:

$$e - b = -1 \text{ và } a - d = 1.$$

Cộng, trừ từng vế của (iii) và (iiii) và chú ý rằng $x_1 + x_2 = -$, $x_2 - x_1 = -i\sqrt{3}$, $x_1 - x_2 = i\sqrt{3}$, ta được:

$$2a - b - d + 2e = 0 \text{ và } b - d = 0.$$

Như vậy hệ trên tương ứng với:

$$\begin{cases} e - b = -1 \\ a - d = 1 \\ 2a - b - d + 2e = 0 \\ b - d = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có $a=1$, $b=d=0$, $e=-1$. Vậy đa thức dư là $x^3 - 1$.

3) Trường hợp $g(x)$ có nghiệm bội.

Giả sử $x=x_1$ là nghiệm bội cấp m ($m \leq n$) của đa thức $g(x)$. Đầu tiên ta có $r(x_1) = f(x_1)$.

Bằng việc lấy đạo hàm liên tục từ cấp 1 đến cấp $m-1$ cả hai vế của (*) và với mỗi lần lấy đạo hàm, ta lại thay x_1 vào hai vế, ta thu được.

$$\begin{cases} r'(x_1) = f'(x_1) & (2') \\ r''(x_1) = f''(x_1) & (3') \\ \dots \dots \dots \\ r^{(m-1)}(x_1) = f^{(m-1)}(x_1) & (m') \end{cases}$$

Như vậy, nếu $x_1=x_2=\dots=x_m$ thì trong hệ (1) ta thay các phương trình (2), (3), ..., (m) bằng các phương trình (2'), (3'), ..., (m'). Giải hệ này ta tìm được hệ số của $r(x)$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng

$$[x(a^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n-1)] : (x-a)^2$$

(n là số tự nhiên).

Giải: Gọi đa thức dư là $\alpha x + \beta$. Ta có

$$f(a) = a(a^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n-1) = a^n - na^n + na^n - a^n = 0.$$

$$\alpha a + \beta = 0$$

Vậy $f'(x) = nx^{n-1} - na^{n-1} \Rightarrow f'(a) = 0.$

$$\alpha = 0$$

Vậy

Từ (a) và (b) rút ra $\alpha = \beta = 0$ (đpcm).

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi n ta có

$$[(1-x^n)(x+1) - 2nx^n(1-x) - n^2x^n(1-x)^2] : (1-x)^3$$

Giải. Gọi đa thức dư là $ax^2 + bx + c$. Ta có

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$f'(x) = -n^2(n+2)x^{n+1} - n(n+1)^2x^{n-1} + (n+1)(2n^2+2n-1)x^n + 1$$

$$f'(1) = -n^2(n+2) - n(n+1)^2 + (n+1) \times (2n^2+2n-1) + 1 = 0.$$

$$2a + b = 0$$

Vậy

$$f''(x) = -n^2(n+2)(n+1)x^n + (n+1) \times (2n^2+2n-1)nx^{n-1} - n(n+1)^2(n-1)x^{n-2}$$

$$f''(1) = -n^2(n+2)(n+1) + (n+1)(2n^2+2n-1)n - n(n+1)^2(n-1) = 0$$

$$2a = 0$$

Vậy

Từ (c), (d) và (e) rút ra $a=b=c=0$ (đpcm).

Các bạn làm thêm những bài sau đây thấy cần thiết:

1) Tìm a và b sao cho $(ax^4 + bx^3 + 1) : (x-2)(x-3)$ nếu số dư của phép chia đa thức cho $x-2$ là 5, cho $x-3$ là 7.

2) Tìm dư của phép chia một đa thức $(x-2)(x-3)$ nếu số dư của phép chia đa thức cho $x-2$ là 5, cho $x-3$ là 7.

3) Tìm a và b sao cho $x^3 + ax + 1$ chia hết cho $x-b$.

4) Tìm a sao cho $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ chia cho $(x-1)^2$.



Bài 1/104. Cho 3 số tự nhiên k, l, m đôi một không có cùng số dư trong phép chia cho 5. Chứng minh rằng trong 3 số:

$$A = 3k + l + m,$$

$$B = 3l + k + m,$$

$$C = 2k + 2l + m$$

có một và chỉ một số chia hết cho 5.

Lời giải (của bạn Nguyễn Văn Tiễn, Yên Phong Hà Bắc). Nhận thấy rằng hai số tự nhiên a và b không cùng số dư trong phép chia cho 5 và chỉ khi $a-b$ không chia hết cho 5. (Nhận xét này tương đối đơn giản, bạn đọc tự chứng minh). Theo nhận xét này và từ các điều kiện cho ta có $k-l, m-k, m-l$ đều không chia cho 5.

Cùng với 3 số A, B, C đã cho, ta xét thêm 2 số $D = 4k + m$ và $E = 4l + m$. Ta có:

$$A - B = 2(k-l),$$

$$A - C = k-l,$$

$$A - D = l-k,$$

$$A - E = 3(k-l),$$

$$B - C = l-k,$$

$$B - D = 3(l-k),$$

$$B - E = k-l,$$

$$C - D = 2(l-k),$$

$$C - E = 2(k-l),$$

$$D - E = 4(k-l).$$

Vì $k-1$ không chia hết cho 5, nên các số $A-B$, $A-C$, $D-E$ đều không chia hết cho 5. Từ đây, áp dụng nhận xét trên, suy ra năm số A, B, C, D, E từng đôi một không có cùng số dư trong phép chia cho 5. Tức là, khi chia A, B, C, D, E cho 5 sẽ cho ta những số dư khác nhau. Mặt khác, các số dư trong phép chia cho 5 tự nhiên cho 5 chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4. Vì vậy, trong năm số A, B, C, D, E phải có một và chỉ một số chia hết cho 5. Nhưng hai số $D=4k+m=5k+m-k$ và $E=4l+m=5l+m-l$ không chia hết cho 5 (do $m-k$ và $m-l$ không chia hết cho 5) cho nên, trong ba số A, B, C có một và chỉ một số chia hết cho 5 (đpcm).

Bài 2/104. Giải phương trình

$$\overline{abc} = \sqrt[3]{\overline{abcbeba}}$$

Lời giải (của nhiều bạn). Rõ ràng $a=b=c=0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Chúng ta sẽ chứng minh rằng ngoài nghiệm đó phương trình không có nghiệm nào khác.

Từ phương trình đã cho ta có:

$$\overline{abc}^3 = \overline{abcbeba} \quad (*)$$

Nếu $a \geq 3$, thì $\overline{abc}^3 \geq 27 \cdot 10^6 > \overline{abcbeba}$, với mọi b và c .

Nếu $a = 2$, thì $\overline{abc}^3 \geq 8 \cdot 10^6 > \overline{2bcbeba} = \overline{abcbeba}$, với mọi b, c .

Xét trường hợp $a=1$ khi đó, từ (*) suy ra $c=1$. Ta có phương trình:

$$\overline{1b1}^3 = \overline{1b1b1b1} \quad (**)$$

Với mọi $b \geq 2$, ta được

$$\overline{1b1}^3 \geq 130^3 > 2000\ 000 > \overline{1b1b1b1}.$$

Thay $b=0, 1, 2$ vào (**) ta được $\overline{1b1}^3 \neq \overline{1b1b1b1}$.

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $a=b=c=0$.

C.T.

Bài 3/104. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$8(2-x) + y^2 - z^2 = 0$$

với điều kiện

$$y < x < 10.$$

Lời giải. Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8(2-x) + x^2 - z^2 &= x^2 - y^2 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 - z^2 &= x^2 - y^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Để thấy phương trình có nghiệm $x=2, y=1, z=1$.

Nếu $x=3, 4, 5$ thì vế trái của (1) sẽ ≤ 0 , trong khi đó vế phải > 0 , vậy các giá trị đó không phải là nghiệm; $x \geq 6$.

Ta có $x^2 - y^2 \geq 6^2 - 5^2 = 11$. Như vậy vế trái của (1) cũng phải $\geq 11 \Rightarrow x-4 \geq 3 \Rightarrow x \geq 7$.

— Nếu $x=8$ thì chỉ có $z=1, y=7$ thỏa mãn (1)

— Nếu $x=9$ thì vế trái của (1) < 25 , do đó từ vế phải của (1) suy ra $y \geq 7$. Nhưng thay $x=9, y=8$ vào (1) ta không tìm được giá trị thích hợp cho z .

Tóm lại phương trình có hai bộ nghiệm: $x=2, y=1, z=1$ và $x=8, y=7, z=1$.

Cách 2 (của Trần Anh Tuấn—lớp 11C trường Lê Quý Đôn, T.P. Hồ Chí Minh). Từ điều kiện $y < x$ ta có

$$8(2-y) + y^2 - z^2 > 8(2-x) + y^2 - z^2 = 0$$

hay $(y-4)^2 > z^2$. Từ đó:

$$- \text{Nếu } y-4 > 0 \text{ thì } y-z > 4 \quad (1)$$

$$- \text{Nếu } y-4 < 0 \text{ thì } 4 > y+z \quad (2)$$

Từ phương trình đã cho ta có:

$$y^2 - z^2 = 8(x-2)$$

vì vậy y và z phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Từ điều kiện (1) và điều kiện của đầu bài chỉ có thể $y-z=6$. Từ đây có hai khả năng: $y=8, z=2$, và $y=7, z=1$. Từ (2) chỉ có thể $y=1, z=1$.

Thử lại ta có hai bộ nghiệm của phương trình là $x=8, y=7, z=1$ và $x=2, y=1, z=1$.

Cách 3 (của Nguyễn Duy Quán—10N Hồng Quang, Hải Hưng). Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$y^2 + 16 = z^2 + 8x \quad (1)$$

Vì $x \geq y+1$ và $z \geq 1$ nên từ (1) suy ra

$$y^2 + 16 \geq 1 + 8(y+1) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 8y + 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y-7) \geq 0$$

$$\Rightarrow y \leq 1 \text{ và } y \geq 7$$

Vậy chỉ có thể $y=1, 7, 8$.

— Nếu $y=1$ hay $y=7$ thì do (2) trở thành đẳng thức nên $z=1$; thay vào (1) ta được tương ứng $x=2$ và $x=8$

— Nếu $y=8$ thì $x=9$, thay vào (1) ta không được giá trị của z thỏa mãn.

Cách 4 (của Trần Ngọc Toàn—10CT Thái Phiên, Hải Phòng). Giải tương tự cách 3 bằng cách lập luận $y \leq x-1$ để đi đến điều kiện

$$(x-2)(x-8) \geq 0 \dots$$

Ngoài ra các bạn khác còn giải theo nhiều cách khác nữa.

Bài 4/104. Cho một bảng vuông gồm 16 ô vuông. Điền các số từ 1 đến 15 theo thứ tự vào các ô của bảng: điền từ hàng thứ 1 đến hàng thứ tư, ô cuối cùng trống. Bây giờ thay đổi vị trí các số bằng cách mỗi lần đẩy số ở một ô lân cận (ô có chung cạnh) với ô trống vào ô trống. Hãy chứng minh dù ta thực hiện cách làm đó bao nhiêu lần thì cũng không bao giờ sắp xếp được các số theo thứ tự ngược lại (ô cuối trống).

Lời giải (của Nguyễn Mạnh Hùng (8CT ĐHSPT Hà Nội)). Ta tô màu các ô vuông bằng hai màu xen kẽ nhau. Chú ý là sau một lần dịch chuyển thì số được dịch chuyển sẽ chuyển sang ô khác màu với ô xuất phát. Vì vậy giả sử từ hình 1 chuyển được thành hình 2 thì mỗi số phải dịch chuyển một số lẻ lần. Do vậy tổng số lần dịch chuyển là lẻ. Nhưng như vậy sẽ không khớp với số lần dịch chuyển của ô trống, vì ô trống trở về vị trí cũ chỉ sau một số chẵn lần dịch chuyển. Vậy không bao giờ ta có vị trí các số như hình 2.



Hình 1



Hình 2

Bài 5/104. Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa điều kiện $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 1/a_{n-1}$. Hãy chứng minh

$$125 < a_{1964} + a_{1979} < 155.$$

Lời giải. Theo đầu bài ta có:

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + 1/a_{n-1}^2 + 2, \text{ suy ra:}$$

$$a_{n-1}^2 + 3 > a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2,$$

Do đó ta được:

$$a_1^2 + 3 > a_2^2 > a_1^2 + 2$$

$$a_2^2 + 3 > a_3^2 > a_2^2 + 2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n-1}^2 + 3 > a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2.$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức trên về ta được:

$$a_1^2 + 3(n-1) > a_n^2 > a_1^2 + 2(n-1) > 0$$

hay $\sqrt{a_1^2 + 3(n-1)} > a_n > \sqrt{a_1^2 + 2(n-1)}$

Ta có:

$$77 > \sqrt{1 + 3 \cdot 1963} > a_{1964} > \sqrt{1 + 2 \cdot 1963} > 76$$

$$78 > \sqrt{1 + 3 \cdot 1978} > a_{1979} > \sqrt{1 + 2 \cdot 1978} > 77$$

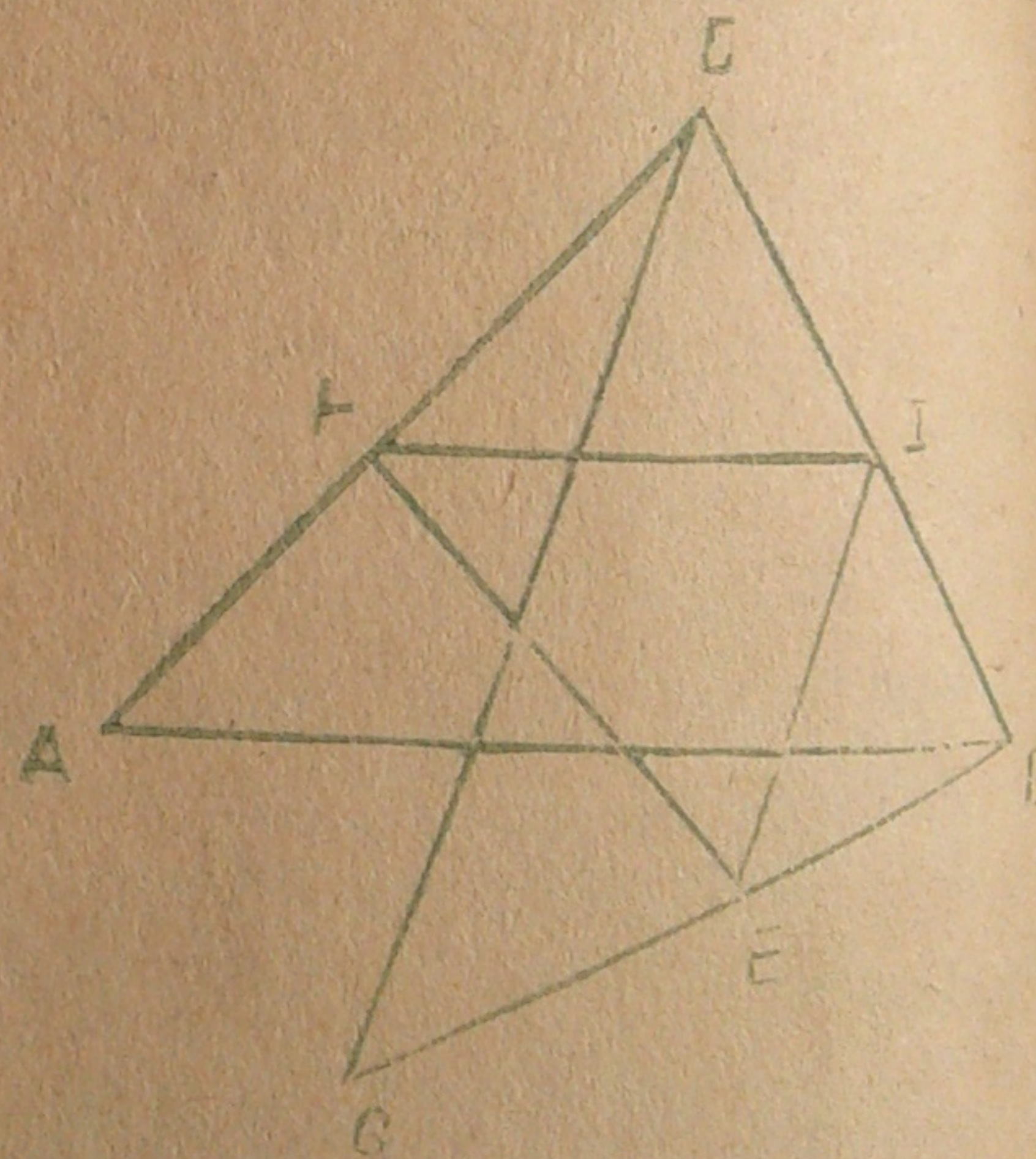
Cộng (*) và (**) lại ta được:

$$125 < a_{1964} + a_{1979} < 155.$$

Bài 6/104. Trong không gian, cho một tứ diện ABCD, điểm E ở trên BC, F ở trên AD cho AB, EF, CD cùng song song với một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng tồn tại một số $k > 0$ cho $EF < kAB + (1-k)CD$.

b) Từ đó suy ra $EF < \max(AB, CD)$.



Hình 3

Lời giải

a) Từ E kẻ $EI \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (EIF) \Rightarrow AB \parallel (EIF)$

Do đó suy ra $AB \parallel FI$.

Nếu gọi $DI/DB = k$ thì ta có:

$$FI/AB = DI/DB = k \Rightarrow FI = k \cdot AB.$$

Đồng thời do $EI \parallel CD$ nên

$$IE/CD = BI/DB = \frac{DB - DI}{DB} = 1 - k$$

$$IE = (1 - k)CD.$$

hay vì $EF < FI + IE$ nên $EF < kAB + (1 - k)CD$.

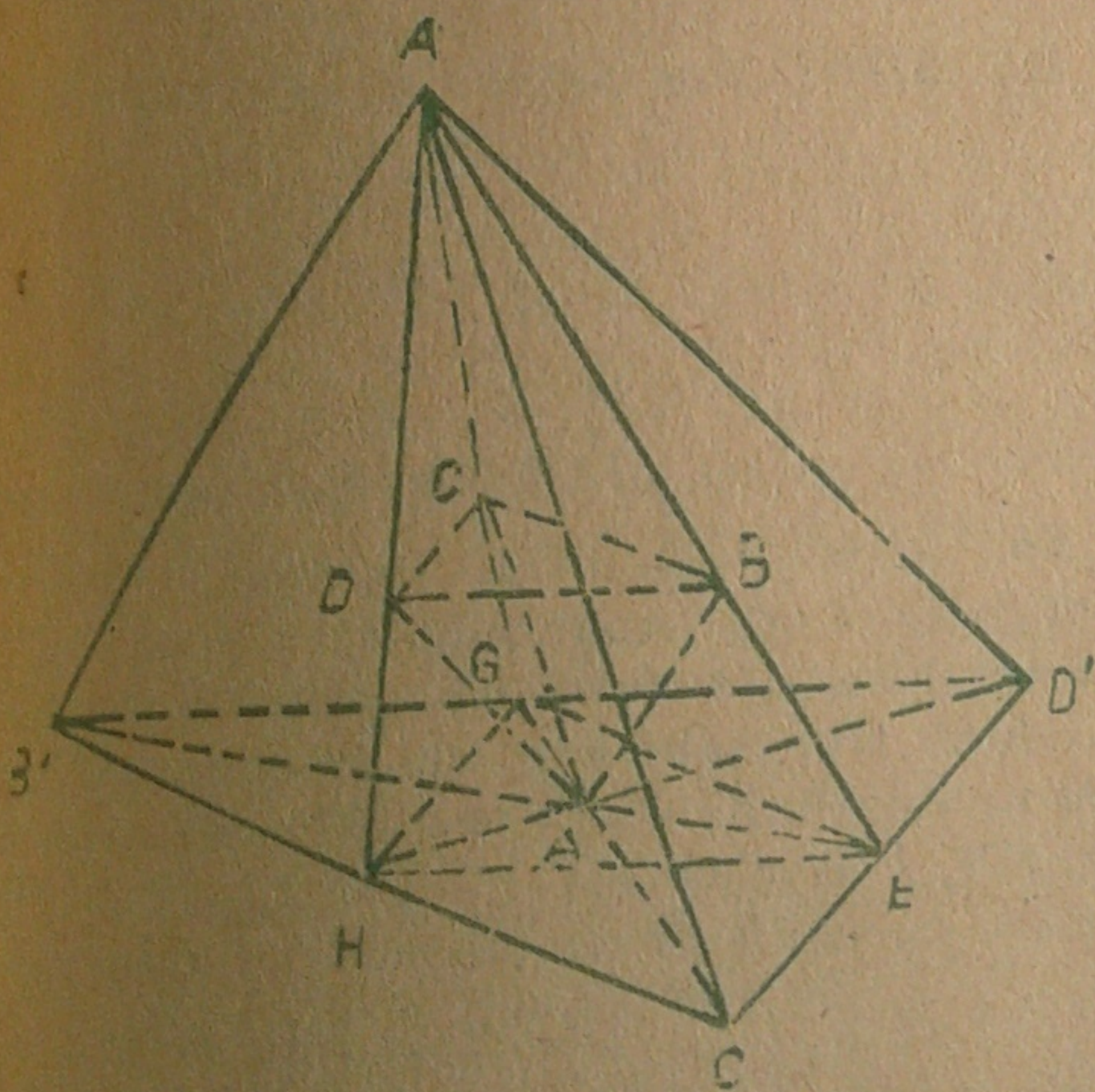
b) Ta có:

$$EF < kAB + (1 - k)CD \leq k \max(AB, CD) + (1 - k) \max(AB, CD) = \max(AB, CD).$$

L.H.

Bài 7/104. Trong không gian cho một số hữu hạn điểm sao cho bốn điểm bất kỳ trong chúng là đỉnh của một tứ diện có thể tích không vượt quá 1. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho đều nằm trong một tứ diện có thể tích không vượt quá 27.

Lời giải. Gọi $ABCD$ là một tứ diện có thể tích lớn nhất trong tất cả các tứ diện tạo thành từ bốn điểm bất kỳ trong các điểm đã cho. Từ các điểm A, B, C, D lần lượt dựng các mặt phẳng $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ song song với các mặt phẳng BCD, CDA, DAB, ABC . Vì các mặt phẳng $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ song song với các mặt của tứ diện $ABCD$ nên các giao tuyến đôi một của chúng (tương ứng song song với các cạnh của tứ diện $ABCD$) cắt nhau và tạo thành tứ diện $A'B'C'D'$ đồng dạng với tứ diện $ABCD$ (hình 4).



Hình 4

Ta chứng minh:

a) Tất cả các điểm đã cho đều nằm trong tứ diện $A'B'C'D'$.

b) Thể tích của tứ diện $A'B'C'D'$ không vượt quá 27.

Thật vậy:

a) Một điểm P bất kỳ trong tập hợp các điểm đã cho có tính chất: đường cao hạ từ P xuống mặt BCD không lớn hơn đường cao hạ từ A xuống mặt đó. Điều này suy ra từ cách chọn tứ diện $ABCD$. Do đó P nằm cùng phía với tứ diện $ABCD$ so với mặt phẳng $B'C'D'$ (qua A và song song với BCD) (P cũng có thể nằm trong mặt phẳng $B'C'D'$). Bằng cách lập luận tương tự ta thấy P cũng nằm cùng phía với tứ diện $ABCD$ so với các mặt phẳng $C'D'A', D'A'B', A'B'C'$. Như thế P nằm trong tứ diện $A'B'C'D'$.

b) Các mặt phẳng $ABA'B', ACA'C', ADA'D'$ cắt tương ứng $C'D', B'D', B'C'$ ở E, G, H thì tam giác EGH có các cạnh song song với các cạnh của tam giác BCD cũng phải song song với các cạnh của tam giác $B'C'D'$. Các điểm E, G, H là các điểm giữa của các cạnh tam giác $B'C'D'$, vì nếu trái lại giả sử chẳng hạn nếu $HC' < HB'$ thì $GD' < GB' \Rightarrow ED' < EC' \Rightarrow HB' < HC'$, mâu thuẫn! Từ đó suy ra A là trọng tâm tam giác $B'C'D'$.

$$\text{Ta có } AB/A'B' = AE/B'E = 1/3.$$

Vậy hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng với nhau theo tỷ số $1/3$. Vì thế thể tích $A'B'C'D'$ bằng $3^3 = 27$ lần thể tích $ABCD$. Theo đầu bài thể tích $ABCD$ không vượt quá 1 nên thể tích $A'B'C'D'$ không vượt quá 27.

T.T.

Bài 8/104. Gọi G là tập hợp các giá trị (x_1, x_2) thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $y = -2x_1 - x_2 + x_1^2$ trên miền G nói trên.

Lời giải của bạn Nguyễn Văn Tiệp (Yên Phong, Hà Bắc) Phi Ngọc Sơn (10E Thạch Thất, Hà Sơn Bình), Nguyễn Duy Quân (10N Hồng Quảng, Hải Hưng), Nguyễn Mạnh Hùng (8CT, ĐHSPT Hà Nội).

Từ bất đẳng thức thứ nhất ở đầu bài ta có

$$x_2 \leq 2 - \frac{2}{3}x_1 \text{ hay } -x_2 \geq \frac{2}{3}x_1 - 2 \quad (1)$$

Như vậy, với mọi cặp (x_1, x_2) thuộc G ta có:

$$y = -2x_1 - x_2 + x_1^2 \geq x_1^2 - 2x_1 + \frac{2}{3}x_1 - 2$$

$$= x_1^2 - \frac{4}{3}x_1 - 2 = (x_1 - 2/3)^2 - 2 - 4/9$$

$$= (x_1 - 2/3)^2 - 22/9 \geq -22/9, \quad (x_1 - 2/3)^2 \geq 0 \quad (2)$$

do

Bất đẳng thức này chứng tỏ giá trị của hàm y trên miền G không nhỏ hơn $-22/9$.

Mặt khác, bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi cả (1) và (2) đều là đẳng thức. Khi đó $x_1 = 2/3$ và $x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$, nghĩa là $x_1 = 2/3$ và $x_2 = 14/9$.

Dễ dàng kiểm tra lại rằng cặp $(x_1 = 2/3, x_2 = 14/9)$ thỏa mãn các điều kiện nêu ở đầu bài, nghĩa là thuộc G .

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm y trên miền G đã cho là $-22/9$ (ứng với $x_1 = 2/3, x_2 = 14/9$).

Ghi chú: Bài toán trên thuộc lớp bài toán cực trị có tên gọi là «bài toán quy hoạch lồi». Các bài toán loại này thường có nhiều ứng dụng trong kinh tế và kỹ thuật. Trong trường hợp đã cho bài toán được giải tương đối đơn giản. Người ta đã nghiên cứu những phương pháp giải riêng cho từng trường hợp của bài toán tổng quát.

T.T.

Bài 9/104. Tìm tất cả các số tự nhiên A sao cho khi ta nâng chữ số hàng đơn vị của A lên lũy thừa bậc 4 thì ta được chính số A .

Lời giải. Để tìm các số thỏa mãn tính chất nêu trong đầu bài ta chỉ việc tìm lũy thừa bậc

4 của các số từ 1 đến 9 và chọn những kết quả có chữ số hàng đơn vị bằng chính cơ số. Kết quả ta tìm được ba số: 1, 625, 1296.

Bài 10/104. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số và $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{2S + a_1}{S + a_1} + \frac{2S + a_2}{S + a_2} + \dots + \frac{2S + a_n}{S + a_n} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải của bạn Nguyễn Văn Tiến (Yên Bái), Hà Bắc), Ngô Duy Ninh (lớp 12C Quang Trung, Quy Nhơn) và nhiều bạn khác.

Nếu $n = 1$ thì ta có đẳng thức đúng. Nếu $n > 1$ thì $S > a_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Từ đó: $1S + a_i > 3S + 3a_i$ hay

$$\frac{2S + a_i}{S + a_i} > \frac{3}{2}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Cộng n bất đẳng thức này với nhau ta được

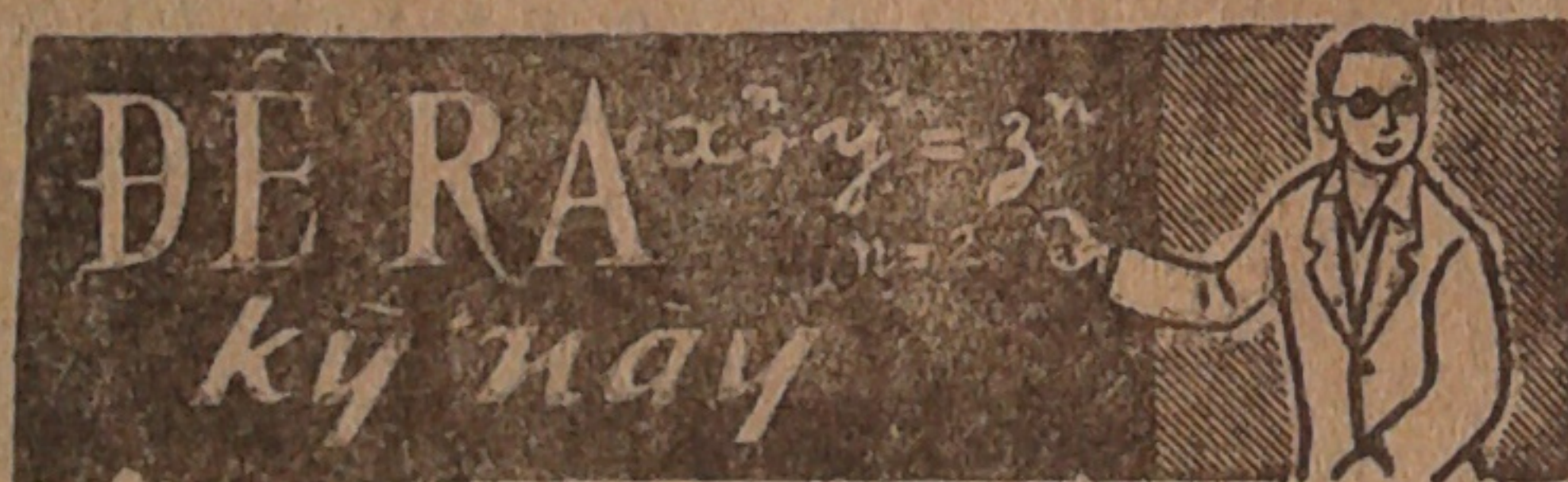
$$\frac{2S + a_1}{S + a_1} + \frac{2S + a_2}{S + a_2} + \dots + \frac{2S + a_n}{S + a_n} > \frac{3n}{2}$$

Đó là điều phải chứng minh.

Như vậy bất đẳng thức cần chứng minh thành đẳng thức khi và chỉ khi $n = 1$.

Nhận xét. Nhiều bạn có lời giải đúng nhưng trong chứng minh phải dùng bất đẳng thức Cauchy nên không gọn.

T.T.



Bài 1/107. Chứng minh rằng tích của 8 số tự nhiên liên tiếp không thể là bình phương của một số tự nhiên.

Trần Xuân Đáng (ĐHTH Huế).

Bài 2/107. Tìm một số nguyên tố có 4 chữ số $N = abcd$ sao cho các số ab, ac cũng là các số nguyên tố và a, b, c, d liên hệ với nhau bởi đẳng thức.

$$b^2 = cd + b - c.$$

Trần Xuân Đáng

Bài 3/107. Tìm hai chữ số cuối cùng của 1964^{1977} .

1977

1978

$T = 1979$

Lê Thống Nhất (ĐHSP Vinh)

Bài 4/107. Cho hình bình hành $ABCD$ một điểm O nằm trong hình bình hành đó. Đường thẳng qua O và song song với các cạnh của hình bình hành cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi E là giao của DM và BN , F là giao của CP và AQ . Tìm điều kiện để các điểm E, O, F thẳng hàng.

Lê Quốc Hán (ĐHSP Vinh)

Bài 5/107. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n có bất đẳng thức

$$\sqrt[n+1]{(n+1)!} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

Vũ Ngọc Thủy (Thái Bình)

Bài 6/107. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Vũ Quang Sửu (ĐHSP Vinh)

$b \perp DB, c \perp DC$. Các đường a, b, c theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA và AB ở A', B' và C' . Chứng minh rằng các điểm A', B', C' nằm trên một đường thẳng.

Nguyễn Công Quý
(ĐHSP T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 7/107. Giải phương trình

$$\log_3(\sqrt[3]{x+5}) = (\log_2 \sqrt{x} - 4).$$

Phạm Hiền Bằng (ĐHSP Việt Bắc)

Bài 8/107. Tìm các nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} xy - x! + y = 1 \\ yz - y! + z = 1 \\ x^2 - 2y^2 + 2x - 4y = 2. \end{cases}$$

Nguyễn Ngọc Khuê (Hà Nội)

Bài 9/107. Qua đỉnh D của một tứ giác phẳng $ABCD$ ta kẻ các đường thẳng $a \perp DA$,

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/107. Cho đa giác lồi n cạnh nằm trong đường tròn bán kính 1. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm A, B, C là đỉnh của đa giác sao cho diện tích tam giác ABC không vượt quá $4\pi^3/n^3$.

Doãn Ngọc Giang
(101 Chu Văn An, Hà Nội)

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

QUỐC TRINH

TRONG chương trình đại số hiện nay ở trường phổ thông, các bạn có học cách giải các phương trình: bậc nhất, bậc hai và bậc bốn (loại phương trình trùng phương) và không được học cách giải phương trình bậc ba.

Tuy thế, gặp các phương trình bậc ba dạng không đầy đủ như $ax^3 + bx^2 + cx = 0$, $ax^3 + bx^2 = 0$, $ax^3 + cx = 0$ và $ax^3 + d = 0$ các bạn cũng có thể giải được. Thật vậy, ta phân tích như sau:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \text{ hay } x(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$ax^3 + bx^2 = 0 \text{ hay } x(ax^2 + bx) = 0$$

$$ax^3 + cx = 0 \text{ hay } x(ax^2 + c) = 0$$

Sau đó, ta giải dễ dàng các phương trình tích này. Ở đây, chúng ta tìm cách giải phương trình bậc ba dạng tổng quát.

Dạng tổng quát của phương trình bậc ba là

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

với a, b, c, d là các số thực bất kỳ và $a \neq 0$. Nếu chia cả hai vế của phương trình (1) cho $a \neq 0$ và đặt $b/a = r, c/a = s, d/a = t$ ta có dạng thường của phương trình bậc ba (1)

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0 \quad (2)$$

Đặt $x = y - r/3$ ta có dạng rút gọn của phương trình bậc 3 (1) là

$$y^3 + py + q = 0 \quad (3)$$

trong đó $p = s - r^2/3, q = 2r^3/27 - rs/3 + t$

Ta lại đặt $y = u + v$ và thay y bởi $u + v$ vào (3) thì có:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

hay

$$u^3 + v^3 + q + (u + v)(3uv + p) = 0 \quad (4)$$

Với phương trình này, ta có hai ẩn số mới

là u và v .

Ta chọn u, v sao cho $3uv+p=0$ thì số hạng cuối cùng của phương trình (4) cũng triệt tiêu và u, v phải thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3 \end{cases} \quad (5)$$

Giải hệ này ta tìm được u, v rồi sẽ tìm được nghiệm $y = u + v$ của phương trình (3).

$$\text{Từ (5) ta có: } u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 \quad (7)$$

$$\text{Từ (6) ta có: } 4u^3v^3 = -4(p/3)^3 \quad (8)$$

Từ (7) và (8) ta có:

$$(u^3 - v^3)^2 = q^2 + 4(p/3)^3$$

$$\text{nên } u^3 - v^3 = \pm \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3} \quad (9)$$

Kết hợp (5) và (9) ta có hệ sau:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 - v^3 = \pm \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } u^3 = -q/2 \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} \quad (10)$$

$$v^3 = -q/2 \mp \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} \quad (11)$$

Ta lại biết rằng: trong trường số phức khai căn bậc ba của 1 ta được ba giá trị:

1 và hai số phức liên hợp $(-1/2 + i\sqrt{3}/2)$ và $(-1/2 - i\sqrt{3}/2)$.

Tổng quát, khai căn bậc ba một số phức A , ta được ba giá trị: ngoài giá trị x_1 còn có hai giá trị nữa dạng e_2x_1 và e_3x_1 , mà $e_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ và $e_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$

Do đó, từ (10) là có ba giá trị của u là:

$$u_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}, u_2 = u_1e_2 \text{ và } u_3 = u_1e_3.$$

Từ (11), ta có ba giá trị của v là:

$$v_1 = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}, v_2 = v_1e_2 \text{ và } v_3 = v_1e_3.$$

Trên kia ta đã đặt $y = u + v$.

Với $y = u_i + v_j$ (mà $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) thì có đến 9 giá trị của y . Nhưng u_i và v_j còn phải thỏa mãn điều kiện $u_iv_j = -p/3$ nữa nên y chỉ lấy được ba giá trị thôi. Đó là các giá trị:

$$y_1 = u_1 + v_1, y_2 = u_2 + v_3 \text{ và } y_3 = u_3 + v_2$$

(do $u_iv_j = -p/3$ nên ngoài u_1v_1 chỉ có u_2v_3 và u_3v_2 thỏa mãn nó, vì

$$e_2e_3 = (-1/2 + i\sqrt{3}/2) \times (-1/2 - i\sqrt{3}/2) = 1/4 + 3/4 = 1)$$

Vậy với điều kiện $(q/2)^2 + (p/3)^3 > 0$ phương trình $y^3 + py + q = 0$ có một nghiệm thực:

$$y_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} \quad (*)$$

và hai nghiệm ảo liên hợp là:

$$y_2 = u_1e_2 + v_1e_3 = -\frac{u_1 + v_1}{3} + \frac{u_1 - v_1}{2}i\sqrt{3}$$

$$y_3 = u_1e_3 + v_1e_2 = -\frac{u_1 + v_1}{3} - \frac{u_1 - v_1}{2}i\sqrt{3}$$

Khi $(q/2)^2 + (p/3)^3 = 0$ thì $u_1 = v_1$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-q/2}$$

và

còn y_2 và y_3 thì bằng nhau và ta có kép là

$$y_2 = y_3 = -\frac{u_1 + v_1}{3} = -\frac{2\sqrt[3]{-q/2}}{3}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0$$

Ở đây là có phương trình bậc ba dạng thường

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

mà $r = -9, s = 36, t = -80$.

Ta đặt $x = y - r/3$ để đưa (1) về dạng rút

$$y^3 + py + q = 0$$

với $p = s - r^2/3, q = 2r^3/27 - rs/3 + t$.

Thay các giá trị của s, r, t và ta có:

$$p = 9, \quad q = -26.$$

Vậy (1) tương đương với

$$y^3 + 9y - 26 = 0$$

$$\text{Lập } (q/2)^2 + (p/3)^3 = 196 = 14^2 > 0.$$

Vậy (2) có nghiệm thực là:

$$y_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{13 + 14} + \sqrt[3]{13 - 14}$$

$$= 3 + (-1) = 2.$$

Nếu muốn lấy cả hai nghiệm ảo nữa thì dựa vào (**), (***) mà tính tiếp.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$y^3 - 15y - 126 = 0$$

Phương trình bậc ba này thuộc dạng rút

$$y^3 + py + q = 0$$

trong đó $p = -15, q = -126. (q/2)^2 + (p/3)^3 >$

Thay giá trị của p và q vào các công thức (*), (**), (***) ta tính được ba nghiệm của phương trình (1):

Nghiệm thực là:

$$y_1 = \sqrt[3]{63 + \sqrt{63^2 - 5^2}} + \sqrt[3]{63 - \sqrt{63^2 - 5^2}} \\ = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{1} \\ = 5 + 1 = 6.$$

Hai nghiệm ảo là:

$$y_2 = -\frac{5+1}{2} + \frac{5-1}{2}i\sqrt{3} = -3 + 2i\sqrt{3} \\ y_3 = -\frac{5+1}{2} - \frac{5-1}{2}i\sqrt{3} = -3 - 2i\sqrt{3}.$$

3) Nếu $(q/2)^2 + (p/3)^3 < 0$ ta sử dụng phương pháp giải mà nhà toán học F. Viét đã dùng năm 1600. Vì $(q/2)^2 + (p/3)^3 > 0$ nên $p < 0$. Ta đặt $p = -p'$ thì $p' > 0$, nên phương trình bậc ba dạng rút gọn $y^3 + py + q = 0$ trở thành

$$y^3 - p'y + q = 0 \text{ (mà } p'^3/27 - q^2/4 > 0).$$

Lấy thừa bậc ba của u_1 (và tương tự của v_1) là

$$u_1^3 = -q/2 \pm \sqrt{-p'^3/27 + q^2/4} \\ = -q/2 \pm i\sqrt{p'^3/27 - q^2/4}$$

Đó là giá trị ảo mà ta có thể biến đổi ra dạng lượng giác

$$-q/2 \pm i\sqrt{p'^3/27 - q^2/4} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

trong đó $r = \sqrt{p'^3/27},$

$$\cos\varphi = \frac{-q}{2} : \sqrt{p'^3/27}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{p'^3/27 - q^2/4} : \sqrt{p'^3/27}$$

Nhờ công thức Moavơ ta tính được u_1 :

$$u_1 = \sqrt[3]{r} [\cos(\varphi/3 + k360^\circ/3) \pm i\sin(\varphi/3 + k360^\circ/3)] \\ = \sqrt[3]{r} [\cos(\varphi/3 + k120^\circ) \pm i\sin(\varphi/3 + k120^\circ)]$$

nên với $k=0$ thì

$$u_1 = \sqrt[3]{r} (\cos \frac{\varphi}{3} \pm i \sin \frac{\varphi}{3})$$

$$v_1 = \sqrt[3]{r} (\cos \frac{\varphi}{3} \mp i \sin \frac{\varphi}{3}).$$

Do đó

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3}.$$

Ta tính tiếp được:

$$\text{với } k=1, y_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos(\varphi/3 + 120^\circ)$$

$$\text{với } k=2, y_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos(\varphi/3 + 240^\circ).$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$y^3 - 981y - 11340 = 0.$$

Phương trình này thuộc dạng phương trình bậc ba rút gọn

$$y^3 + py + q = 0 \quad (2)$$

$$\text{mà } p = -981, q = -1134 \quad (3)$$

$$\text{Lập } (q/2)^2 + (p/3)^3 = (-5670)^2 + (-327)^3 \text{ ta có thể}$$

mũ cao

Phương trình có ba nghiệm thực y_1 được tính theo các công thức Y_1 là

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3} \quad (1)$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right) \quad (2)$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos (\varphi/3 + 240^\circ) \quad (3)$$

(Ở đây ta tính φ theo độ).

Ta tính r và $\cos\varphi$:

$$r = \sqrt{p'^3/27} \text{ mà } p' = -p = 981$$

$$\text{nên } r = \sqrt{981^3/27} = \sqrt{327^3},$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{p'^3/27} = 5670/\sqrt{327^3}$$

$$\text{Ta được: } \varphi = 16^\circ 30' \text{ (số đã làm tròn)}$$

$$\text{Vậy } \varphi/3 = 5^\circ 30'.$$

Lôgarit hóa các biểu thức (1), (2), (3) ta tính được $y_1 \approx 36, y_2 \approx -21, y_3 \approx -15$.

Sau đây là lập bảng tổng kết:

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Dạng tổng quát	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$	
Dạng thường	$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$	$r = b/a, s = c/a, t = d/a$
Dạng rút gọn	$y^3 + py + q = 0$	$p = s - r^2/3, q = 2r^3/27 - rs/3 + t$
	Các nghiệm là y_1, y_2, y_3 .	
	$u_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}, v_1 = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$	
$(q/2)^2 + (p/3)^3 > 0$	$y_1 = u_1 + v_1$ (nghiệm thực) $y_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{3} \pm \frac{u_1 - v_1}{3} i\sqrt{3}$ (hai nghiệm ảo liên hợp)	
Kể từ đó	$y_1 = 2\sqrt[3]{-q/2}$ $y_{2,3} = -2\sqrt[3]{-q/2} : 3$	$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ nghiệm thực} \\ (\text{có nghiệm kép}) \end{array} \right\}$
Ta lại căn bậc 1	$r = \sqrt[3]{-p^3/27}, \cos\varphi = \frac{-q/2}{\sqrt[3]{-p^3/27}}$	
$(q/2)^2 + (p/3)^3 < 0$	$y_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3}$ $y_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right)$ $y_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ \right)$	$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ nghiệm thực} \end{array} \right\}$

Chú ý rằng với phương trình bậc ba dạng thường ta có công thức Viét để kiểm tra lại các nghiệm x_1, x_2, x_3 :

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -r \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= s \\ x_1x_2x_3 &= -t. \end{aligned}$$

BẠN ĐỌC TÌM TÔI

MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

KHÍ giải phương trình $16x^4 - 32x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$ bằng cách chia cho x^2 và đặt $y = 4x - 1/x$, ta đưa được nó về một phương trình bậc hai đối với y . Phương pháp này có vai trò quan trọng khi giải toán vì nó đưa việc giải phương

trình bậc cao về giải phương trình bậc hai đơn giản hơn. Tuy nhiên cũng có phương trình không giải được bằng phương pháp đó, ví dụ phương trình

$$x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 42 = 0.$$

Vấn đề được đặt ra là: các phương trình có các hệ số như thế nào thì áp dụng được phương pháp trên? Kết luận sẽ được nêu bằng các mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1. Cho phương trình bậc $2n$

$$f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_nx^n + \dots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0.$$

Nếu có số $t \neq 0$ sao cho

$$a_{n-j} = a_{n+j}t^j \text{ với mọi } j = 1, 2, \dots, n,$$

thì phương trình trên có thể đưa được về một phương trình bậc n .

Chứng minh. Theo giả thiết: $a_0 = a_{2n}t^n$, nên từ $a \neq 0$ và $t \neq 0$ suy ra $a_{2n} \neq 0$. Như vậy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, ta có phương trình tương đương (bằng cách chia cho x^n):

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n + \dots$$

$$\dots + \frac{a_{2n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{2n}}{x^n} = 0$$

hay

$$\left(a_0x^n + \frac{a_{2n}}{x^n}\right) + \dots + \left(a_{n-j}x^j + \frac{a_{n+j}}{x^j}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(a_{n-1}x + \frac{a_{n+1}}{x}\right) + a_n = 0.$$

Theo giả thiết: $a_{n-j} = a_{n+j}t^j$ ($1 \leq j \leq n$), nên phương trình trên tương đương với:

$$a_{2n} \left[(tx)^n + \frac{1}{x^n} \right] + \dots + a_{n+j} \left[(tx)^j + \frac{1}{x^j} \right] + \dots$$

$$\dots + a_{n+1} \left[tx + \frac{1}{x} \right] + a_n = 0$$

hay

$$a_{2n}Y_n + \dots + a_{n+j}Y_j + \dots + a_{n+1}Y_1 + a_n = 0$$

với

$$Y_j = (tx)^j + \frac{1}{x^j} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Theo nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^j = C_j^0 a^j + \dots + C_j^k a^{j-k} b^k + \dots + C_j^j b^j,$$

ta có

$$\left(tx + \frac{1}{x}\right)^j = (tx)^j + tC_j^1 (tx)^{j-2} + t^2 C_j^2 (tx)^{j-4} + \dots$$

$$\dots + t^k C_j^k (tx)^{j-2k} + \dots + t^k C_j^{j-k} \frac{1}{x^{j-2k}} + \dots + \frac{1}{x^j}$$

với k là số tự nhiên và $0 \leq k \leq j$.

Từ đó ta có

$$Y_j = (tx)^j + \frac{1}{x^j} = \left(tx + \frac{1}{x}\right)^j$$

$$- \left[tC_j^1 (tx)^{j-2} + C_j^{j-1} \frac{1}{x^{j-2}} \right] - \dots$$

$$\dots - \left[t^k C_j^k (tx)^{j-2k} + t^k C_j^{j-k} \frac{1}{x^{j-2k}} + \dots \right]$$

hay

$$Y_j = Y_1^j - tC_j^1 Y_{j-2} - \dots - t^k C_j^k Y_{j-2k} - \dots \quad (1)$$

Từ (1) với $j=3$ và $j=2$ ta có

$$Y_3 = Y_1^3 - tC_3^1 Y_1 \quad (2)$$

$$Y_2 = Y_1^2 - tC_2^1 Y_1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) bằng cách truy hồi ta có thể biểu diễn được mọi Y_j qua Y_1 với số mũ cao nhất của Y_1 là n . Vậy phương trình đưa được về dạng $f(Y_1) = 0$ với số mũ cao nhất của Y_1 là n . Đó là điều cần chứng minh.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$16x^8 - 8x^7 - 56x^6 + 16x^5 + 52x^4 - 8x^3 - 14x^2 + x + 1 = 0.$$

Ta thấy với $t = -2 = a_3/a_5$, $a_2/a_6 = (-2)^2$, $a_1/a_7 = (-2)^3$, $a_0/a_8 = (-2)^4$, thỏa mãn giả thiết của mệnh đề 1. Vậy có thể đưa phương trình về một phương trình bậc bốn.

Ta có phương trình tương đương

$$\left(16x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(-8x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 14\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$- 8\left(2x + \frac{1}{x}\right) + 52 = 0$$

Do

$$\left(16x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^4 + 8\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^2 + 8,$$

$$\left(-8x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^3 + 6\left(\frac{1}{x} - 2x\right)$$

$$\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^2 + 4,$$

nên phương trình trên tương đương với

$$\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^4 + \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^3 - 6\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x} - 2x\right) + 4 = 0.$$

Đặt $Y = \frac{1}{x} - 2x$ thì có

$$Y^4 + Y^3 - 6Y^2 - 2Y + 4 = 0.$$

Ta lại có $t = -1/2$ thỏa mãn giả thiết của mệnh đề 1. Vậy ta có phương trình tương đương

$$\left(Y^2 + \frac{4}{Y^2}\right) + \left(Y - \frac{2}{Y}\right) - 6 = 0$$

đưa được về

$$Z^2 + Z - 2 = 0 \text{ với } Z = Y - 2/Y.$$

Phương trình có nghiệm $Z = 1$ và $Z = -2$.

Từ Z tìm ra Y và cuối cùng tìm ra 8 nghiệm của phương trình là

$$x_1 = 1, x_2 = -1/2, x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_{5,6} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 2\sqrt{3}}}{4},$$

$$x_{7,8} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}}{4}.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$96x^4 + 24\sqrt{3}x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Ta thấy $t = 4\sqrt{3}$ thỏa mãn giả thiết của mệnh đề 1, nên đưa được về việc giải phương trình bậc hai.

Đề hoàn thiện phương pháp, các bạn chứng minh mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2. Phương trình bậc $2n$

$$f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{2n} = 0$$

muốn đưa được về một phương trình bằng cách chia cho x^n thì điều kiện cần số $t \neq 0$ sao cho

$$a_{n-j} = a_{n+j}t^j \text{ với mọi } j = 1, 2, \dots, n.$$

Một số chú ý:

1. Cần chú ý dấu của các hệ số: a_{2k} và a_{2k+1} phải cùng dấu thì mới sử dụng được phép nói trên.

2. Nếu có thể thì dùng phép thế dạng u sau đó mới dùng phương pháp trên.

$$16x^{12} - 32x^9 + 8x^6 + 8x^3 + 1 = 0$$

nên đưa về

$$16y^4 - 32y^3 + 8y^2 + 8y + 1 = 0$$

rồi mới áp dụng phương pháp.

Cuối cùng xin đưa ra vài phương trình các bạn áp dụng phương pháp trên:

$$1) x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 10x + 25 = 0.$$

$$2) 5\sqrt{3}x^4 + x^3 - 10\sqrt{7}x^2 - 2x + 4\sqrt{7} = 0.$$

$$3) 5x^{12} + 4x^9 - 18x^6 - 12x^3 + 45 = 0.$$

$$4) 8x^6 - 16x^5 + 2x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 36x + 2 = 0.$$

$$5) 2x^8 + 9x^7 + 20x^6 + 33x^5 + 48x^4 + 66x^3 + 80x^2 + 72x + 32 = 0.$$

TẠ VĂN T

Đề thi chọn học sinh...

(Tiếp theo trang 4)

Bài 3. Hãy chia một mảnh vườn hình tam giác ABC có ba cạnh không bằng nhau bằng đoạn thẳng AM sao cho hai tam giác ABM và ACM có tỉ số diện tích bằng tỉ số chu vi tương ứng.

Bài 4. Chứng tỏ rằng nếu n là số nguyên dương thì $2\cos n\theta$ là một đa thức bậc n của $2\cos\theta$.

Bài 5. Tìm tất cả những số α sao cho phương trình $x^2 - 2x[x] + x - \alpha = 0$ có hai nghiệm số không âm.

(Ký hiệu $[x]$ chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Bài 6. Trong không gian cho hai hình chữ nhật bằng nhau $ABCD$ và $ABEF$ có $AB = BC = BE = m\sqrt{2}$. Xác định vị trí tương đối của hai mặt phẳng chứa hai hình chữ nhật nói trên để sao cho CA vuông góc với BF . Trong trường hợp ấy, hãy xác định vị trí và kích thước của hai hình vuông đều có hai đỉnh nằm trên CA và hai đỉnh còn lại nằm trên BF .

In 15.400c. tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ Hà nội. Số in 81/79.

In xong 30-6-1979. chỉ số: 12884 Gửi lưu chiều tháng 7-1979.

Giá 0,10đ