Trần Việt Hưng

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Số 106

1

1979

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN *Thư ký tòa soạn:* HOÀNG CHÚNG

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội Dây nói: 52825

MỘT CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC NA-SƠ-BIT MỞ RỘNG với n = 4, 5, 6

NGÔ CẢNH HƯNG và TRẦN QUANG

Các bạn thân mến!

Cách đây hơn sáu năm, trên số báo 66, thầy giáo Phan Đức Chính đã nói «câu chuyện không đơn giản về một bài toán đơn giản». Đó là câu chuyện về bất đẳng thức Na-sơ-bit mở rộng. Bất đẳng thức đó như sau:

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, *thì*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2} \quad (1)$$

Suốt 50 năm, nhiều người đã tìm cách chứng minh bất đẳng thức này và mãi đến năm 1958 Mooc-đen mới tìm được một cách chứng minh cho $n=4, 5, 6$, chấm dứt một thời gian dài bài toán chưa có lời giải.

Sau khi được biết «câu chuyện không đơn giản» mà người kể chuyện lại chưa cho biết cách chứng minh của Mooc-đen như thế nào, và sau khi xem cách chứng minh bất đẳng thức nói trên cho trường hợp $n=4$ trong bài viết của anh *Lê Quốc Hán* đăng trên số báo 88, chúng tôi đã lao vào chứng minh bất đẳng thức này với một niềm say mê không biết mệt mỏi. Sau nhiều lần thất bại, chúng tôi đã tìm ra lời giải khá gọn cho các trường hợp $n=4, 5, 6$.

Sau đây là cách chứng minh của chúng tôi.

Từ bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki *

$$(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots y_n^2)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2$$

trong đó các x_i, y_i (i = 1, 2, ... n) là số thực tùy ý, đặt

$$x_1 = a_1/\sqrt{a_1(a_2+a_3)},\ x_2 = a_2/\sqrt{a_2(a_3+a_4)},$$
$$\dots,\ x_n = a_n/\sqrt{a_n(a_1+a_2)};$$
$$y_1 = \sqrt{a_1(a_2+a_3)},\quad y_2 = \sqrt{a_2(a_3+a_4)},$$
$$\dots,\ y_n = \sqrt{a_n(a_1+a_2)}$$

ta được

$$\left[\frac{a_1^2}{a_1(a_2+a_3)} + \frac{a_2^2}{a_2(a_3+a_4)} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n(a_1+a_2)}\right] \times$$
$$\times \left[a_1(a_2+a_3) + a_2(a_3+a_4) + \dots + a_n(a_1+a_2)\right]$$
$$\geqslant (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

hay

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{a_1(a_2+a_3) + \dots + a_n(a_1+a_2)}.$$

Để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh vế phải của bất đẳng thức trên không nhỏ hơn $n/2$, tức là chứng minh bất đẳng thức (2) sau đây

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \geqslant \frac{n}{2} \times$$
$$\times \left[a_1(a_2+a_3) + \dots + a_n(a_1+a_2)\right] \qquad (2)$$

1. Với $n = 4$. Bất đẳng thức cần chứng minh là

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \geqslant 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 +$$
$$+ a_2a_4 + a_3a_4 + a_3a_1 + a_4a_1 + a_4a_2)$$
$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geqslant 2a_1a_3 + 2a_2a_4$$
$$\Leftrightarrow (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên. Vậy (2) đúng và do đó (1) đúng với $n = 4$.

2. Với $n = 5$. Bất đẳng thức cần chứng minh là

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$
$$\geqslant \frac{5}{2}\left[a_1(a_2+a_3) + \dots + a_5(a_1+a_2)\right]$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + \dots + a_5)^2 \geqslant \frac{5}{4}\left[(a_1 + \dots + a_5)^2 - (a_1^2 + \dots + a_5^2)\right]$$
$$\Leftrightarrow 5\,(a_1^2 + \dots + a_5^2) \geqslant (a_1 + \dots + a_5)^2$$
$$\Leftrightarrow (1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)\,(a_1^2 + \dots + a_5^2) \geqslant (a_1 + \dots + a_5)^2.$$

Đây chính là bất đẳng thức Bu-nhia-cộp-xki. Vậy (2) đúng và do đó (1) đúng với $n = 5$.

3. Với $n = 6$. Bất đẳng thức cần chứng minh là
$(a_1 + \dots + a_6)^2 \geqslant 3\left[a_1(a_2+a_3) + \dots + a_6(a_1+a_2)\right]$

Sau khi khai triển và rút gọn ta có bất đẳng thức tương đương:

$$a_1^2 + \dots + a_6^2 + 2a_1a_4 + 2a_2a_5 + 2a_3a_6$$
$$\geqslant a_1(a_2+a_3) + \dots + a_6(a_1+a_2)$$
$$\Leftrightarrow \left[a_1 + a_4 - \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + a_5 + a_6)\right]^2 +$$
$$+ \frac{3}{4}(a_2 - a_3 + a_5 - a_6)^2 \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng này là hiển nhiên, trường hợp $n = 6$ được chứng minh xong.

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức Na-sơ-bit chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (2). Vấn đề đặt ra là bất đẳng thức (2) còn đúng với $n > 6$ hay không? Mời các bạn tiếp tục suy nghĩ về vấn đề đó. Chúc các bạn đạt nhiều kết quả.

(n>6 thì (2) ø còn đúng) ($a_i = i$; $a_j = 6$)

L.T.S. Sau khi nhận được bài này, tòa soạn lại nhận tiếp được **hai** bài nữa có cùng nội dung với bài này:

— Một bài của hai bạn học sinh ở Huế không ghi họ tên.

— Một bài của bạn *Lê Thống Nhất*, cán bộ khoa Toán trường Đại học Sư phạm Vinh.

(Ngoài ra trước đó một số bạn đã gửi bài về việc chứng minh bất đẳng thức Na-sơ-bit mở rộng đến Tòa soạn, song các cách chứng minh của các bạn đó đều có chỗ sai).

Dựa vào cách chứng minh của bạn *Lê Thống Nhất*, trong bài này chúng tôi đã thay đổi chút ít cách chứng minh cho trường hợp $n = 6$ của các tác giả cho gọn hơn.

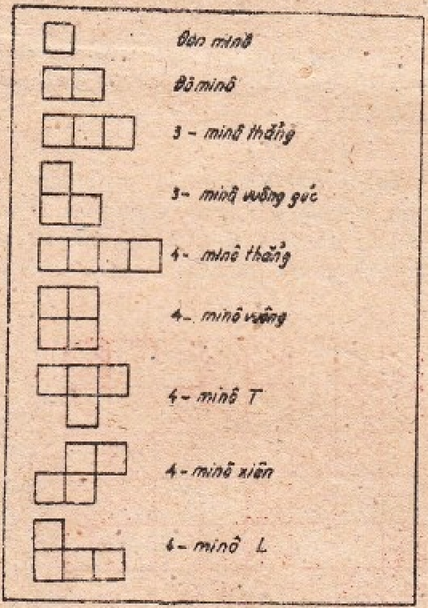
Ngoài cách chứng minh như trên, trong trường hợp $n = 4$ hai bạn học sinh ở Huế còn đưa ra thêm một cách chứng minh khác nữa.

PÔLYMINÔ VÀ CÁC BÀI TOÁN TRÊN BÀN CỜ

LÊ THỐNG NHẤT

TRONG số báo 101 (số 2 năm 1978) tôi đã giới thiệu với các bạn một số bài toán trên bàn cờ. Ở bài báo thứ hai này tôi xin giới thiệu với các bạn một khái niệm mới là pôlyminô và một số bài toán thú vị liên quan giữa pôlyminô và bàn cờ Châu Âu.

Trước hết pôlyminô là gì? Ta hãy xét một bàn cờ châu Âu và coi mỗi ô vuông của bàn cờ là một ô vuông đơn vị. Pôlyminô có thể hiểu là một hình ghép bởi các ô vuông đơn vị sao cho mỗi ô vuông kề ít nhất với một ô vuông khác theo một cạnh chung. Pôlyminô tạo thành bằng cách trên do ghép n ô vuông đơn vị được gọi là n-minô. Hình chỉ gồm một ô vuông đơn vị gọi là đơn minô. Ngoài ra người ta thường gọi 2-minô là đôminô.



Hình 1

Hình 1 giới thiệu với các bạn một số dạng pôlyminô và tên gọi của chúng. Các pôlyminô sai khác nhau một phép dời (quay hoặc đối xứng qua một trục) được coi là như nhau. Như vậy đơn minô có 1 kiểu, đôminô có 1 kiểu, 3-minô có 2 kiểu, 4-minô có 5 kiểu. Các bạn sẽ thấy 5-minô có 12 kiểu, 6-minô có 35 kiểu, 7-minô có 108 kiểu, 8-minô có 369 kiểu, 9-minô có 1285 kiểu, 10-minô có 4460 kiểu. Việc xác định một công thức tính số kiểu của n-minô là một vấn đề khó. Cho tới nay với $n > 10$ vấn đề này chưa được giải đáp, ngay trường hợp $n = 9$ và $n = 10$ cũng mới được R.C. Read tìm ra năm 1962. Có nhiều loại toán chung quanh pôlyminô. Rất nhiều nhà toán học trên thế giới đã nghiên cứu về những vấn đề này, chẳng hạn như M. Gardner, S.W. Golomb. J.H.Anderson, J.B. kelly, v.v... Nhiều tạp chí toán học đã công bố cũng như đã giới thiệu về những vấn đề này. Không những thế, nhiều bài toán về pôlyminô đã được lập chương trình cho máy tính điện tử giải. Ở bài báo này, tôi chỉ giới thiệu một số bài toán thuộc loại dùng các pôlyminô phủ kín bàn cờ châu Âu (hoặc nói theo cách hoàn toàn tương đương là chia bàn cờ châu Âu thành những pôlyminô).

Bài toán 3 ở bài báo trước đã giải quyết vấn đề chia bàn cờ châu Âu thành 21 hình 3-minô thẳng và 1 hình đơn minô. Bây giờ ta đặt vấn đề thay 3-minô thẳng bởi 3-minô vuông góc thì sẽ như thế nào?

Ta có bài toán sau:

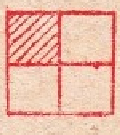
Bài toán 8. *Một bàn cờ châu Âu có thể chia được thành 21 hình 3-minô vuông góc và một đơn minô với vị trí của đơn minô này cho trước tùy ý.*

Lời giải. Để giải bài toán, ta lần lượt xét:

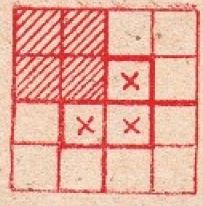
1) Giả sử ta có một hình vuông kích thước 2×2. Rõ ràng dù đơn minô ở vị trí nào thì phần còn lại cũng là một 3-minô vuông góc (hình 2a).

2) Giả sử ta có hình vuông kích thước 4×4, ta chia nó làm 4 phần kích thước 2×2 (hình 2b). Do tính đối xứng ta giả sử vị trí đơn minô ở 1 trong 4 ô vuông ở phần gạch sọc, theo phần 1, thì phần còn lại của phần có gạch sọc là một hình 3-minô vuông góc. Còn ba phần không gạch sọc ta cho đơn minô ở vị trí đánh dấu như

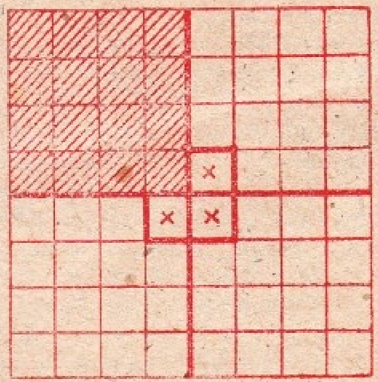
hình 2b và ba đơn minô này tạo thành một hình 3 — minô vuông góc.



Hình 2a



Hình 2b



Hình 2c

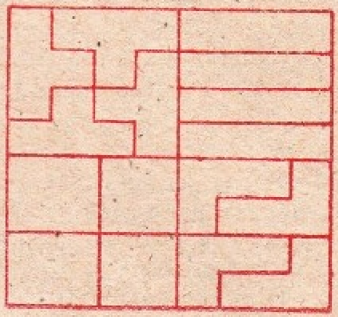
3) Đối với bàn cờ châu Âu (kích thước 8×8) ta chia bàn cờ thành 4 phần kích thước 4 × 4 (hình 2c). Các bạn thấy ngay lập luận tương tự phần 2, ta sẽ đi đến kết quả.

Như vậy dùng phương pháp qui nạp ta có thể chia hình vuông kích thước $2^n \times 2^n$ thành $(2^n \times 2^n - 1) : 3$ hình 3 — minô vuông góc và 1 đơn minô ở vị trí tùy ý.

Đối với các hình 4 — minô ta có các bài toán:

Bài toán 9. *Bàn cờ châu Âu có thể chia được thành 16 hình 4 — minô cùng kiểu, trừ kiểu 4 — minô xiên.*

Các bạn thấy ngay lời giải nhờ hình 3. Còn đối với kiểu 4 — minô xiên các bạn hãy tự chứng minh kết quả mạnh hơn:



Hình 3

Bài toán 10. *Không phủ kín được tất cả các ô vuông kề một cạnh của bàn cờ bằng các hình 4 — minô xiên.*

Bây giờ ta xét bài toán:

Bài toán 11. *Không thể chia bàn cờ châu Âu thành 15 hình 4 — minô T và một hình 4 — minô vuông.*

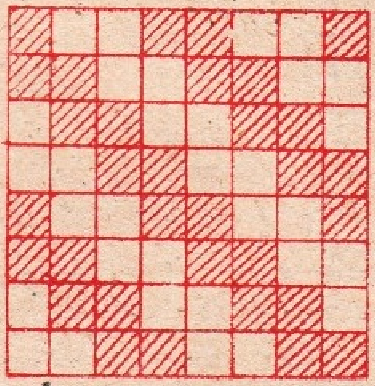
Lời giải: Trên bàn cờ châu Âu, bất cứ một hình 4 - minô T nào đều chứa số lẻ số ô đen và số lẻ số ô trắng. Giả sử chia được bàn cờ châu Âu thành 15 hình 4 — minô T và một hình 4 — minô vuông thì với 15 hình 4 — minô T sẽ chiếm một số lẻ ô đen và một số lẻ ô trắng, còn một hình 4 — minô vuông bao giờ cũng chiếm 2 ô đen và 2 ô trắng, vậy suy ra số ô đen của bàn cờ là lẻ và số ô trắng của bàn cờ cũng lẻ, vô lý.

Bây giờ các bạn hãy nghĩ cách tô màu lại bàn cờ để dùng lập luận tương tự bài toán 11 giải bài toán sau (vẫn tô màu đen 32 ô):

Bài toán 12. *Không thể chia bàn cờ châu Âu thành 15 hình 4 — minô L và một hình 4 — minô vuông.*

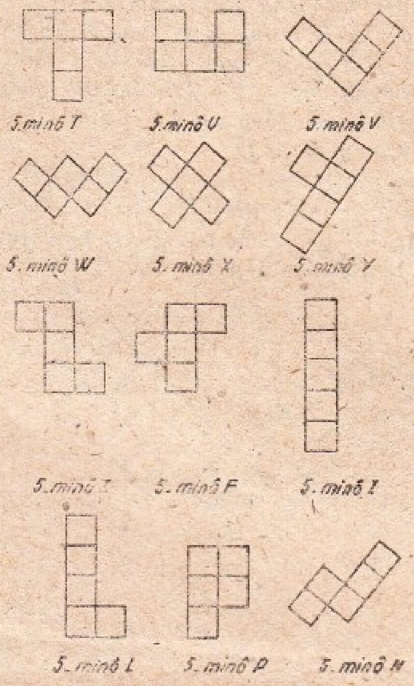
Với lập luận như hai bài trên và tô màu lại bàn cờ như hình 4 các bạn sẽ giải được bài toán sau đây:

Bài toán 13. *Không thể chia bàn cờ châu Âu thành 1 hình 4 — minô vuông và 15 hình 4 — minô, trong đó gồm một số (có thể tất cả) hình 4 — minô thẳng còn lại là các hình 4 — minô xiên.*



Hình 4

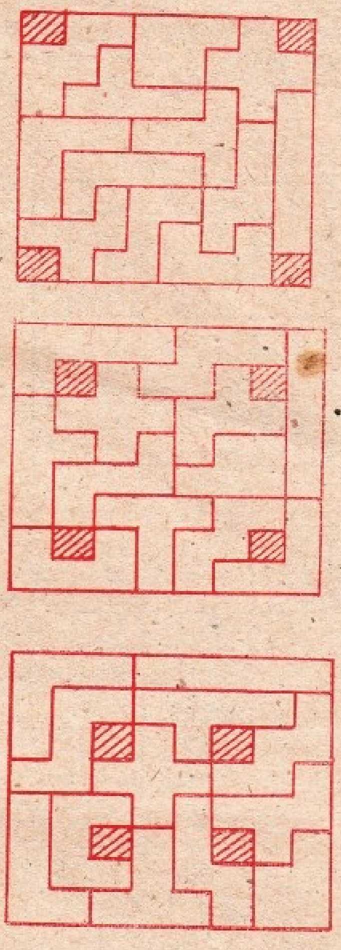
Trước khi xét các bài toán về 5 — minô, xin giới thiệu với các bạn tất cả 12 kiểu 5 – minô và tên gọi chúng (theo hình dáng) ở hình 5.



Hình 5

Bài toán 14. *Một bàn cờ châu Âu có thể chia được thành 12 hình 5 – minô và 4 hình đơn minô, trong đó các hình 5 – minô đều khác kiểu nhau.*

Lời giải bài toán 14 rất đa dạng thể hiện ở bằng rất nhiều phương pháp chia, chỉ xin giới thiệu với các bạn 3 cách chia ở hình 6.

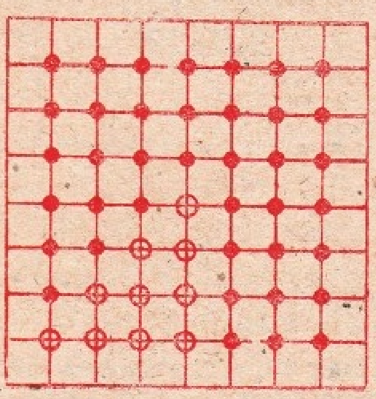


Hình 6

Đặc biệt, 4 hình đơn minô lại có thể nhập lại thành một hình 4 – minô vuông ở vị trí tùy ý:

Bài toán 15. *Một bàn cờ châu Âu có thể chia được thành 12 hình 5 – minô gồm các kiểu khác nhau và một hình 4 – minô vuông, với vị trí của 4 – minô vuông này là tùy ý.*

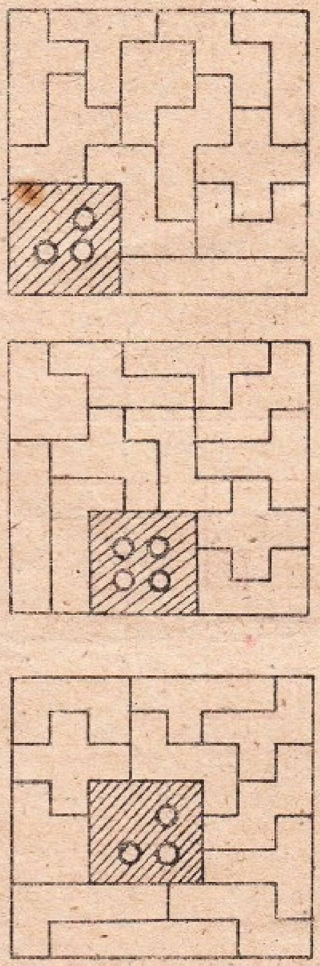
Lời giải. Ta thấy có 49 vị trí có thể có của tâm hình 4 – minô vuông (hình 7); nhưng do tính đối xứng của bàn cờ ta chỉ cần chứng minh cho 10 vị trí (có khoanh tròn ở hình 7).



Hình 7

10 vị trí tâm hình 4 – minô đang xét ta chia làm 3 loại mỗi loại cho nằm trong một hình vuông kích thước 3×3 (hình 8). Trong mỗi hình vuông kích thước 3×3 dù tâm hình 4 – minô vuông ở vị trí khoanh tròn nào thì phần còn lại của hình vuông 3×3 cũng là một hình

5 — minô V. Còn phần bên ngoài hình vuông 3×3 ta chia thành 11 hình 5 — minô gồm các kiểu khác nhau và khác kiểu 5 — minô V như ở hình 8.



Hình 8

Bây giờ các bạn hãy suy nghĩ vấn đề sau đây của 5 — minô không gắn với bàn cờ châu Âu nữa :

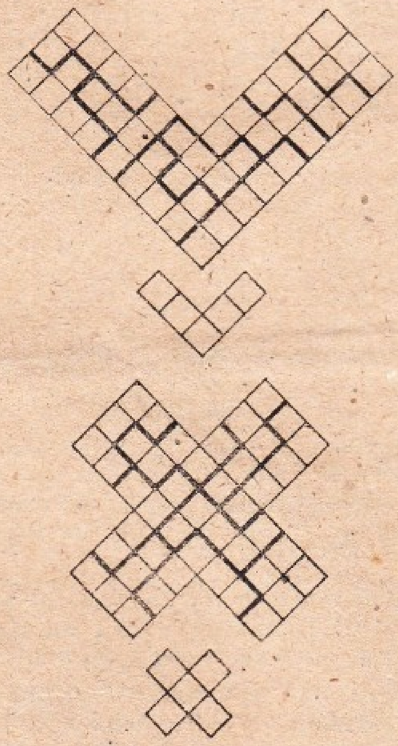
Bài toán 16. *Trong các hình chữ nhật kích thước 6×10, 5×12, 4×15, và 3×20 có hình chữ nhật nào chia được thành 12 hình 5 - minô gồm các kiểu khác nhau?*

Các bạn chú ý kết quả được trả lời là cả 4 loại hình chữ nhật trên đều chia được.

Cuối cùng xin giới thiệu với các bạn bài toán **về sự nhân gấp ba do giáo sư R. M. Rôbinson (Mĩ) nêu ra :**

Bài toán 17. *Hãy chọn một trong 12 kiểu 5 — minô đồ với 9 trong số 11 kiểu 5 — minô còn lại có thể xếp thành một hình đồng dạng với kiểu 5 minô đã chọn. (Tất nhiên hình ghép bởi 9 kiểu 5 — minô sẽ đồng dạng với hình 5 — minô đã chọn theo tỷ số 3 : 1).*

Bài toán được giải với tất cả 12 kiểu 5 — minô ; xin giới thiệu lời giải của 2 kiểu (hình 9), còn các lời giải khác mong các bạn tìm tòi ; chúc các bạn gặp nhiều lý thú.



Hình 9

THÔNG BÁO

Vì nhiều lý do nên cuộc thi giải toán kỷ niệm 15 năm xuất bản báo THvTT không tiến hành được nữa. Mong các bạn thông cảm.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI QUỐC TẾ LẦN THỨ 20

Trong số báo 104 đã giới thiệu về kỳ thi toán Quốc tế lần thứ 20 và các bài toán ra trong kỳ thi. Xin giới thiệu tiếp với các bạn lời giải của các bài toán đó.

Lời giải bài 1 ở đây của bạn *Trần Cao Sơn* (lớp 10 chuyên toán Trường Đại học Sư phạm Vinh) khác chút ít với cách giải trong đội dự thi của ta. Lời giải bài 2 dùng phần thuận của bạn Sơn, còn phần đảo được chứng minh một cách gọn nhất. Lời giải bài 3 của bạn *Lê Thống Nhất* (ĐHSP Vinh) sử dụng công thức mà hai bạn *Nguyễn Thanh Tùng* và *Nguyễn Trung Hà* trong đội dự thi nêu ra. Bài 4 và bài 5 có nhiều cách giải, ở đây chỉ trình bày một cách (cách giải trong bài của hai bạn *Lê Thống Nhất* và *Trần Cao Sơn* gửi Tòa soạn). Lời giải bài 6 của của bạn *Vũ Kim Tuấn* (học sinh dự thi).

Bài 1. Điều kiện để 1978^n và 1978^m có 3 chữ số cuối cùng giống nhau tương đương với

$$1978^n - 1978^m \ \vdots\ 1000$$

$$\Leftrightarrow 1978^m\,(1978^{n-m} - 1) \ \vdots\ 1000$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

a. $1978^m \ \vdots\ 8$ (vì $1000 = 8 \cdot 125$ mà $1978^{n-m} - 1$ là số lẻ nên không chia hết cho 8), và

b. $1978^{n-m} - 1 \ \vdots\ 125$.

Điều kiện a tương đương với

$$2^m \cdot 989^m \ \vdots\ 2^3 \Leftrightarrow m \geqslant 3.$$

Do $1978 \equiv 103 \pmod{125}$ nên điều kiện b tương đương với

$$103^{n-m} - 1 \ \vdots\ 125.$$

Để $103^{n-m} - 1 \ \vdots\ 125$ thì:

1) $103^{n-m} - 1 \ \vdots\ 5 \Leftrightarrow n - m \ \vdots\ 4$. Đặt $n - m = 4^k$.

2) $103^{n-m} - 1 \ \vdots\ 25$, tức $103^{4k} - 1 \ \vdots\ 25$.

Do $103 \equiv 3 \pmod{25}$, nên điều trên tương đương với $3^{4k} - 1 \ \vdots\ 25 \Leftrightarrow 81^k - 1 \ \vdots\ 25 \Leftrightarrow 6^k - 1 \ \vdots\ 25$ (vì $81 \equiv 6 \pmod{25}$)

$$\Leftrightarrow (6-1)(6^{k-1} + 6^{k-2} + \ldots + 1) \ \vdots\ 25$$

$$\Leftrightarrow (6^{k-1} + 6^{k-2} + \ldots + 1) \ \vdots\ 5 \quad (*)$$

Vì bao giờ cũng có $6^t \equiv 1 \pmod 5$, nên $6^{k-1} + 6^{k-2} + \ldots + 1 \equiv k \pmod 5$. Vì vậy (*) tương đương với $k \ \vdots\ 5$. Đặt $k = 5t$, ta có $n - m = 20t$.

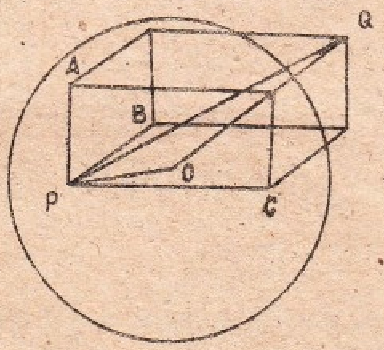
Vậy $103^{n-m} - 1 = 103^{20t} - 1$.

Ta có $103^2 = 10609 \equiv 109 \pmod{125}$
$\equiv -16 \pmod{125}$.

Vậy $103^{20t} - 1 \ \vdots\ 125 \Leftrightarrow 16^{10t} - 1 \ \vdots\ 125$
$\Leftrightarrow (16^2)^{5t} - 1 \ \vdots\ 125 \Leftrightarrow 6^{5t} - 1 \ \vdots\ 125$
$\Leftrightarrow 7776^t - 1 \ \vdots\ 125 \Leftrightarrow 26^t - 1 \ \vdots\ 125$
$\Leftrightarrow 26^{t-1} + 26^{t-2} + \ldots + 1 \ \vdots\ 5$
$\Leftrightarrow t \ \vdots\ 5$. Vậy $n - m \ \vdots\ 100$.

Từ các điều kiện $n - m \ \vdots\ 100$ và $m \geqslant 3$ ta suy ra với $n = 103$, $m = 3$ thì tổng $n + m$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. *Phần thuận.* Giả sử hình cầu đã cho có tâm là O. Ta tính OQ.



Ta có

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

và vì PA, PB, PC đôi một vuông góc nên

$$PQ^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

Như vậy:

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2 + 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$$
$$= OP^2 + PA^2 + PB^2 + PC^2 + 2\overrightarrow{OP}\,(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$
$$= (PA^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PA}) + (PB^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB}) + (PC^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PC}) - 2OP^2$$
$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 - 2OP^2$$
$$= 3R^2 - 2OP^2 \text{ (trong đó } R \text{ là bán kính hình cầu).}$$

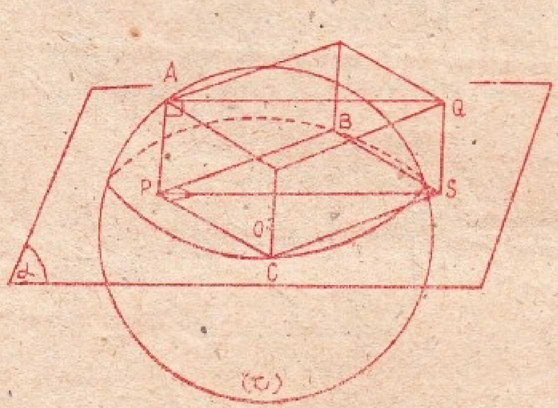
Từ đó ta có:

$$OQ = \sqrt{3R^2 - 2OP^2}$$

Vậy Q nằm trên một mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}$.

Phần đảo. Lấy Q là điểm bất kỳ trên mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}$, ta phải chứng minh tồn tại ba điểm A, B, C trên mặt cầu cho trước sao cho góc tam diện $P.ABC$ có ba mặt vuông và Q là đỉnh đối xứng (qua tâm) của P trong hình hộp chữ nhật có cạnh là PA, PB, PC.

Dựng mặt phẳng qua O, P, Q cắt mặt cầu cho trước theo đường tròn (c). Trên đường tròn (c) lấy điểm A sao cho $\widehat{PAQ} = 90°$. Nối PA. Qua P dựng mặt phẳng α vuông góc với AP. Giả sử PS là hình chiếu vuông góc của AQ xuống α. Trên mặt phẳng α dựng một góc bằng $90°$ có đỉnh là P và phân giác là PS, góc này có các cạnh cắt mặt cầu ở B và C.



Theo cách dựng ta có $P.ABC$ là góc tam diện ba mặt vuông.

Dễ thấy rằng $PB = PC$, do đó hình hộp có cạnh là PA, PB, PC có đỉnh đối xứng với P phải nằm trên mặt phẳng qua PS và vuông góc với α; đồng thời nó phải nằm trên mặt phẳng qua A và vuông góc với AP. Vậy đỉnh đó phải nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Mặt khác theo phần thuận thì đỉnh nói trên phải nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}$. Mặt cầu này cắt giao tuyến nói trên tại duy nhất điểm Q. Vậy Q chính là đỉnh đối xứng của P trong hình hộp có các cạnh PA, PB, PC.

Rõ ràng từ điểm P ta dựng một góc tam diện ba mặt vuông $P.ABC$ có A, B, C trên mặt cầu thì không phải lúc nào cũng có hai trong ba đoạn PA, PB, PC bằng nhau. Từ đó ta suy ra ứng với một điểm Q trên mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}$ có thể có nhiều hơn một bộ ba điểm A, B, C trên mặt cầu cho trước thỏa mãn các điều kiện mà phần đảo phải chứng minh, song ta chỉ cần chỉ ra một bộ ba điểm A, B, C như trên là đủ.

Bài 3. Ta chứng minh bổ đề: Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $g(n) = f(n) + n$.

Ta dùng phương pháp qui nạp:

Với $n = 1$: do $g(1) = f[f(1)] + 1$ nên $g(1) > 1$.

Gọi hai tập cho ban đầu tương ứng là F và G, do $F \cup G$ là tập các số nguyên dương mà

$f(1) < f(2) < \ldots$, $g(1) < g(2) < \ldots$, nên $f(1) = 1$.

Vậy $\quad g(1) = f[f(1)] + 1 = f(1) + 1.$

Giả sử bổ đề đúng với $n = k$, tức là:

$$g(k) = f(k) + k$$

Ta chứng minh bổ đề cũng đúng cho $n = k+1$.

Ta nhận xét: hai số nguyên dương liên tiếp t và $t+1$ không thể cùng thuộc G vì nếu ngược lại phải tồn tại số tự nhiên s sao cho $g(s) = t$ và $g(s+1) = t+1$, nhưng $g(s+1) = f[f(s+1)] + 1$ nên $f[f(s+1)] = t$, suy ra t thuộc $F \cup G$, vô lí.

Bởi vậy $f(k)$ và $f(k+1)$ chỉ có thể xảy ra hai trường hợp.

1) $f(k+1) = f(k) + 1$:

Vì $f[f(k)] + 1 = g(k)$; mà như nhận xét trên, ta có $f[f(k)] + 2 \neq g(k+1) \Rightarrow f[f(k)] + 2 = f[f(k)+1]$.

Do đó:

$$\begin{aligned} g(k+1) &= f[f(k+1)] + 1 = f[f(k)+1] + 1 \\ &= (f[f(k)] + 2) + 1 = g(k) + 2 = f(k) + k + 2 \\ &= f(k+1) + (k+1). \end{aligned}$$

2) $f(k+1) = f(k) + 2$:

Ta chứng tỏ $f[f(k)+2] = f[f(k)] + 3$.

Thật vậy: $f[f(k)] + 1 = g(k)$,

$$f[f(k)] + 2 = f[f(k) + 1].$$

Mà $\quad g(k+1) = f[f(k+1)] + 1 = f[f(k) + 2] + 1.$

Vậy $g(k+1) > f[f(k) + 2]$.

Do đó $f[f(k)] + 3 = f[f(k) + 2]$ (đ.p.c.m).

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } g(k+1) &= f[f(k+1)] + 1 = f[f(k) + 2] + 1 \\ &= f[f(k)] + 3 + 1 = g(k) + 3 \\ &= f(k) + k + 3 = f(k+1) + (k+1) \end{aligned}$$

Tóm lại ta đã chứng minh được bổ đề đúng với $n = k + 1$.

Do đó bổ đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geqslant 1$.

Vì vậy: $g(n) = f[f(n)] + 1 = f(n) + n$.

hay $f[f(n)] = f(n) + n - 1$.

Do $f(1) = 1$ nên $g(1) = f[f(1)] + 1 = 2$.

$$\Rightarrow f(2) = 3.$$

Và: $f(3) = f[f(2)] = f(2) + 2 - 1 = 4$

$f(4) = f[f(3)] = f(3) + 3 - 1 = 6$

$f(6) = f[f(4)] = f(4) + 4 - 1 = 9$

$f(9) = f[f(6)] = f(6) + 6 - 1 = 14$

$f(14) = f[f(9)] = f(9) + 9 - 1 = 22$

$f(22) = f[f(14)] = f(14) + 14 - 1 = 35$

$f(35) = f[f(22)] = f(22) + 22 - 1 = 56$

$f(56) = f[f(35)] = f(35) + 35 - 1 = 90$

$f(90) = f[f(56)] = f(56) + 56 - 1 = 145$.

Do đó $g(56) = f[f(56)] + 1 = f(90) + 1 = 146$

$\Rightarrow 147 = f(91)$, vì g không nhận 2 giá trị liên tiếp.

$\Rightarrow f(147) = f[f(91)] = f(91) + 91 - 1 = 237$

$\Rightarrow g(91) = f[f(91)] + 1 = f(147) + 1 = 238$

$\Rightarrow 239 = f(148)$, vì g không nhận 2 giá trị liên tiếp

$\Rightarrow f(239) = f[f(148)] = f(148) + 148 - 1 = 386$

$\Rightarrow g(148) = f[f(148)] + 1 = f(239) + 1 = 387$

$\Rightarrow 388 = f(240)$, vì g không nhận 2 giá trị liên tiếp

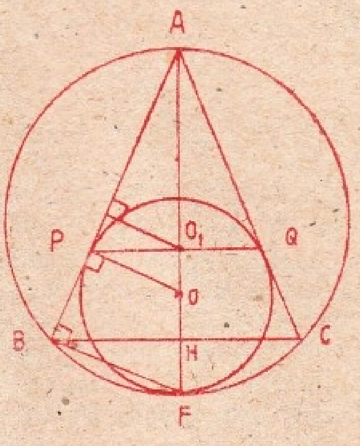
Vậy ta tìm ra $f(240) = 388$.

Bài 4. Gọi O là tâm của đường tròn tiếp xúc với AB, AC nói trong đầu bài. Do tam giác ABC cân ta suy ra AO đi qua trung điểm H của BC và điểm tiếp xúc F của hai đường tròn. AO cũng đi qua trung điểm O_1 của PQ.

Hạ $O_1K \perp AB$, ta chỉ cần chứng minh $O_1K = O_1H$.

Ta nhận thấy rằng

$$O_1K \,//\, OP \,//\, FB \quad \text{và} \quad PO_1 \,//\, BH$$



Do đó ta có

$$O_1K/FB = AO_1/AF$$

hay

$$O_1K = FB\,.\,AO_1/AF \qquad (1)$$

và

$$O_1H/AH = PB/AB = OF/AF = OP/AF$$

$$\Rightarrow O_1H = AH\,.\,OP/AF \qquad (2)$$

Ta lại có $FB/OP = AB/AP = AH/AO_1$

$$\Rightarrow FB\,.\,AO_1 = AH\,.\,OP \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $O_1K = O_1H$ (đ.p.c.m).

Bài 5. Do $\{a_k\}$ là dãy số nguyên dương phân biệt nên

$$\sum_{k=1}^{n} 1/a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1/k.$$

Nhân 2 vế với $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 1/a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\right)^2 \qquad (1)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho các số

$$\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2}/2, \ldots, \sqrt{a_n}/n,$$

$$1/\sqrt{a_1},\ 1/\sqrt{a_2}, \ldots, 1/\sqrt{a_n},$$

Ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Chia cả hai vế cho $\sum_{k=1}^{n} 1/a_k$ ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi: $a_k = k$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Bài 6. Gọi 6 nước là A, B, C, D, E, F. Do số hội viên là 1978 nên tồn tại một nước có số hội viên $\geqslant \left[\dfrac{1978}{6}\right] + 1 = 330$. Giả sử nước đó là A và hội viên của nước đó được đánh số $a_1, a_2, \ldots, a_{330}, \ldots$ với $a_1 < a_2 < \ldots <$

$< a_{330} < \ldots$ Giả sử không có nước nào có hội viên mà số thứ tự bằng tổng các số thứ tự của hai hội viên nước đó hoặc bằng hai lần số thứ tự của một hội viên nước đó. Ta xét 329 hiệu $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{330} - a_1$. Các hiệu này đôi một khác nhau và do giả sử vừa nêu nên chúng không phải là các số thứ tự của hội viên nào ở nước A. Vậy chúng là số thứ tự của 329 hội viên của 5 nước còn lại. Vậy tồn tại ít nhất $\left[\frac{329}{5}\right] + 1 = 66$ hiệu là số thứ tự của các hội viên thuộc một nước nào đó, chẳng hạn đó là nước B; 66 hiệu đó ứng với các số thứ tự $b_1, b_2, \ldots, b_{66}$ và $b_1 < b_2 < \ldots < b_{66}$. Ta lại xét các hiệu $b_{66} - b_1, b_{65} - b_1, \ldots, b_3 - b_1, b_2 - b_1$, thì do giả sử ban đầu, 65 hiệu này không thể là số thứ tự của hội viên nào nước B, cũng như nước A. Vậy 65 hiệu này là số thứ tự của 65 hội viên trong 4 nước còn lại, v.v... Cứ tiếp tục như trên, cuối cùng $f_2 - f_1$ không là thứ tự của hội viên nước nào, vô lý vì hội viên của 6 nước được đánh số thứ tự từ 1 đến 1978. Mâu thuẫn đó bác bỏ giả sử ban đầu. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 1/103. *Chứng minh rằng hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^k + y^k = 15^{1964} & (1) \\ xy = 1979^{15} & (2) \end{cases}$$

không có nghiệm nguyên với mọi số tự nhiên k.

Lời giải. Hệ phương trình trên không có nghiệm nguyên với mọi số tự nhiên k. Thật vậy, giả sử tồn tại cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình (2) thì x và y đều là các số lẻ, x^k và y^k cũng là các số lẻ, vì vậy cặp (x, y) đó không thể là nghiệm của phương trình (1) được.

Bài 2/103. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số*

$$T = 3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5$$

luôn là hợp số.

Lời giải. Ở đây ý của người ra đề bài là chứng minh $T \vdots 11$ và $T > 11$, song lại không chú ý đến T luôn là số chẵn lớn hơn 2 nên tất nhiên là hợp số (lũy thừa của 3 bao giờ cũng là số lẻ, lũy thừa bậc lớn hơn 0 của 2 bao giờ cũng là số chẵn).

Nếu sửa lại đầu bài như sau thì bài toán trở nên không quá dễ:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số

$$T = 3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5$$

luôn chia hết cho 22.

Cách chứng minh như sau (của tác giả):

Ta có $2^{4n+1} = 2.4^{2n} \equiv 2 \pmod 5$ vì $4 \equiv -1 \pmod 5$. Vậy $2^{4n+1} = 2 + 5k$ với k là số tự nhiên. Đặt $N = 3^{2^{4n+1}} + 2$ thì $N = 3^{2+5k} + 2 = 9.243^k + 2 \equiv 0 \pmod{11}$ vì $243 \equiv 1 \pmod{11}$. Như vậy $N \vdots 11$.

Ta lại có $3^{4n+1} = 3.9^{2n} \equiv 3 \pmod{10}$ vì $9 \equiv -1 \pmod{10}$. Vậy $3^{4n+1} = 3 + 10l$ với l là số tự nhiên. Đặt $M = 2^{3^{4n+1}} + 3$ thì

$$M = 2^{3+10l} + 3 = 8.32^{2l} + 3 \equiv 0 \pmod{11}$$

vì $32 \equiv -1 \pmod{11}$. Như vậy $M \vdots 11$.

Từ các kết quả trên ta suy ra $T = N + M$ phải chia hết cho 11. Nhưng dễ thấy rằng T là số chẵn, do đó $T \vdots 22$.

T.S.

Bài 3/103. *Tìm tất cả các số tự nhiên p sao cho $13^p - 1 \vdots 53$.*

Lời giải của *Trần Minh*, lớp 7A trường cấp 2 Trưng Vương Hà Nội và nhiều bạn khác.

Ta dễ dàng thử nghiệm $p = 13$ là số nguyên nhỏ nhất để $13^p - 1$ chia hết cho 53. Từ đó suy ra $13^{13k} - 1$ cũng chia hết cho 53 (k là số nguyên bất kỳ). (Vì $13^{13k} - 1$ có một thừa số bằng $13^{13} - 1$).

Với p là số nguyên bất kỳ bao giờ ta cũng có thể biểu diễn p dưới dạng $p = 13k + r$ trong

đó k là số nguyên và $0 \leq r < 13$. Ta có:
$13^p - 1 = 13^{13k+r} - 1 = 13^r(13^{13k} - 1) + (13^r - 1)$

Ta đã biết $13^{13k} - 1 \vdots 53$, vậy muốn $13^p - 1 \vdots 53$ thì bắt buộc $13^r - 1$ phải chia hết cho 53. Nhưng $r < 13$ nên $r = 0$.

Tóm lại các số nguyên p để cho $13^p - 1 \vdots 53$ phải có dạng $p = 13k$ (k nguyên bất kỳ).

L.H.

Bài 4/103. *Xem tất cả các dãy số (gồm một số hữu hạn số hạng) có tính chất sau đây: Tổng của 11 số hạng liên tiếp tùy ý là một số dương, và tổng của 7 số hạng liên tiếp tùy ý là một số âm. Hỏi một dãy số với tính chất trên và dài nhất gồm bao nhiêu số hạng?*

Lời giải. Dãy số phải tìm gồm 16 số hạng.

Quả vậy, dãy số sau đây gồm 16 số hạng có tính chất đã nêu: 5, 5, −13, 5, 5, 5, −13, 5, 5, −13, 5, 5, 5, −13, 5, 5. (Bạn đọc hãy phát hiện quy luật dựng dãy số này để giải bài toán tổng quát) ta chỉ còn phải chứng tỏ rằng nếu một dãy số gồm từ 17 số hạng trở lên không thể có tính chất đã nêu.

Giả thiết trái lại rằng dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_{16}, a_{17} \ldots$ có tính chất đã nêu. Ta có:

$$S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} + a_{11}) +$$
$$+ (a_2 + a_3 + \ldots + a_{11} + a_{12}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (a_7 + a_8 + \ldots + a_{16} + a_{17}) > 0$$ (tổng của 7 số hạng dương).

Và: $$S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_7) +$$
$$+ (a_2 + a_3 + \ldots + a_8) +$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{17}) < 0$$ (tổng của 11 số hạng âm).

Do đó gặp mâu thuẫn.

Một cách tổng quát, cho m và n là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, $m < n$, khi đó trong tất cả các dãy số với tính chất: tổng của n số hạng liên tiếp tùy ý là một số dương và tổng của m số hạng liên tiếp tùy ý là một số âm, thì dãy số dài nhất gồm đúng $n + m - 2$ số hạng.

Các bạn: *Quỳnh Nguyễn* (83 Cầu Đất Hải Phòng), *Trần Việt Hà* (10E C3 Nguyễn Huệ Hà Sơn Bình), *Đặng Thái Minh* (8A trường C3 Vinh), ***Đặng Thanh Hải*** (10 CT ĐH Sư phạm Vinh), ***Nguyễn Hoàng Minh*** và *Bùi Minh Hải* (A_09 ĐHTH), *Dương Đức Long* (9E, Hùng Vương, Vĩnh Phú) có lời giải tốt.

L.H.

Bài 5/103. Cho dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *theo quy luật sau:*

$$x_1 = \sin\alpha_1$$
$$x_2 = \cos\alpha_1 \sin\alpha_2$$
$$x_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-2} \sin\alpha_{n-1}$$
$$x_n = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-2} \cos\alpha_{n-1}.$$

Chứng minh rằng $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 \geq 1/n$.

Lời giải (của nhiều bạn).

Theo giả thiết ta có:

$$x_n^2 + x_{n-1}^2 = \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-2} \cos^2\alpha_{n-1} + \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-2} \sin^2\alpha_{n-1}$$
$$= \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-2} (\cos^2\alpha_{n-1} + \sin^2\alpha_{n-1})$$
$$= \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-2}.$$
$$x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 = \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-3} \times (\cos^2\alpha_{n-2} + \sin^2\alpha_{n-2})$$
$$= \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \ldots \cos^2\alpha_{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^2 + x_{n-1}^2 + \ldots + x_2^2 + x_1^2 = 1.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski cho $2n$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Thay $a_i = 1$, $b_i = x_i^2$ vào bất đẳng thức ta được

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_2^2)^2$$
$$\leq (x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4)(1 + 1 + \ldots + 1)$$

hay

$$1 \leq n(x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4)$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 \geq 1/n$$ (đ.p.c.m.)

L.H.

Bài 6/103. Cho hai phương trình

$$x^2 + mx + 1 = 0 \qquad (1)$$

và

$$\frac{x^2 + x + m}{x - m} = 0 \qquad (2)$$

Tìm điều kiện của m để hai phương trình đó tương đương.

Lời giải. 1. Hai phương trình (1) và (2) tương đương nếu chúng có cùng một tập hợp nghiệm rỗng, tức là phương trình (1) và phương trình (2') sau đây cùng vô nghiệm

$$x^2 + x + m = 0 \qquad (2')$$

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\triangle_1 = m^2 - 4 < 0$ hay

$$-2 < m < 2.$$

Phương trình (2') vô nghiệm khi và chỉ khi $\triangle_2 = 1 - 4m < 0$

hay $m > 1/4.$

Vậy (1) và (2) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$1/4 < m < 2$$

2. Hai phương trình (1) và (2) tương đương nếu chúng có cùng một tập hợp nghiệm không rỗng tức là (1) và (2') có cùng một tập hợp nghiệm $x \neq m$. Muốn vậy thì

$$x^2 + mx + 1 = x^2 + x + m = 0$$

$$\Rightarrow x = 1,\ m = -2.$$

Vậy chỉ với $m = -2$ thì (1) và (2') mới có cùng một tập hợp nghiệm: nghiệm chung của chúng là $x = 1 \neq m$ nên (1) và (2) tương đương.

Tóm lại điều kiện của m để (1) và (2) tương đương là

$$1/4 < m < 2 \text{ và } m = -2.$$

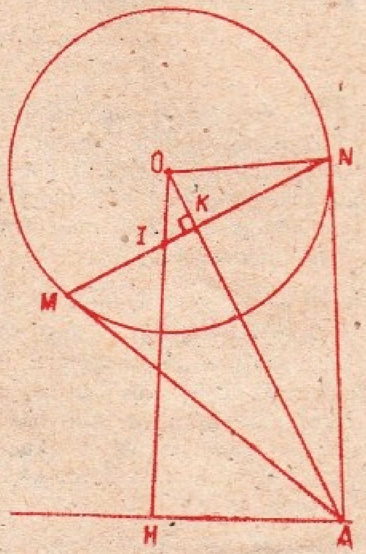
Nhận xét. Rất nhiều bạn không chú ý đến điều kiện để hai phương trình vô nghiệm, do đó lời giải không đầy đủ.

T.S.

Bài 7/103. *Cho mặt cầu (O) và mặt phẳng α cố định. Lấy A là điểm tùy ý trên mặt phẳng α (A nằm ngoài mặt cầu) và gọi c là đường tròn tiếp xúc của mặt cầu (O) và mặt nón ngoại tiếp có đỉnh A.*

Chứng minh rằng mặt phẳng chứa đường tròn c luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. 1. Giả sử α không đi qua tâm O của mặt cầu. Hạ OH vuông góc với α. Mặt phẳng OHA cắt đường tròn c tại M và N thì AM và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn lớn trên mặt phẳng đó. Ta vẽ riêng mặt phẳng OHA như hình 1. Gọi I là giao điểm của MN và OH thì I nằm trên mặt phẳng chứa đường tròn c. Ta chỉ cần chứng minh I cố định là xong.



Hình 1

Hai tam giác vuông OKI và OHA đồng dạng nên

$$OI/OK = OA/OH$$

$$\Rightarrow OI = OA \cdot OK/OH$$

Mặt khác từ tam giác vuông ONA ta có

$$OA \cdot OK = ON^2$$

Do đó $OI = ON^2/OH$ = const. Vậy I là điểm cố định.

Chú ý là lý luận trên đây cũng đúng trong cả các trường hợp α cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu. Riêng trong trường hợp α tiếp xúc với mặt cầu thì thấy ngay mặt phẳng của đường tròn c luôn đi qua tiếp điểm H (I trùng với H).

2. Trường hợp α đi qua tâm O của mặt cầu. Trong trường hợp này kết luận của bài toán không đúng, vì nếu lấy A ở các vị trí khác nhau trên một đường thẳng đi qua O thì các mặt phẳng chứa các đường tròn c sẽ song song với nhau.

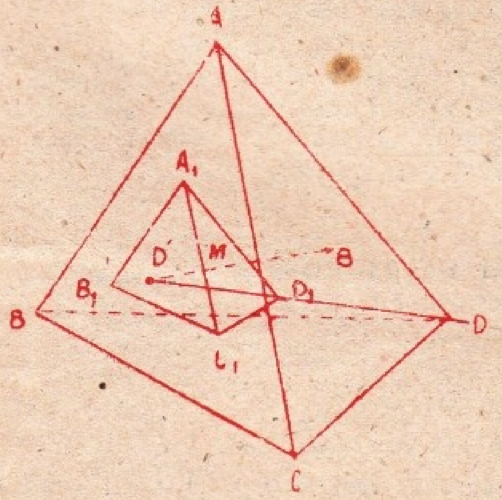
Các bạn: *Đào Xuân Nghiệp* và *Nguyễn Duy Quân* (10N Hồng Quang, Hải Hưng), *Đặng Ngọc Thủy* (10C K_3 ĐHSP Vinh), *Nguyễn Văn Tiến* (Yên Phong, Hà Bắc), *Đào Xuân Dũng* (Mộc Châu, Sơn La) có lời giải tốt.

T.S.

Bài 8/103. *Cho khối tứ diện ABCD; các đường phân giác ứng với các đỉnh B, C, D (các đường cách đều ba mặt mỗi góc tam diện B, C, D) cắt các mặt đối diện tương ứng tại B', C', D'. Chứng minh rằng một điểm M bất kỳ thuộc tam giác B'C'D' có khoảng cách tới mặt BCD bằng nửa tổng các khoảng cách từ đó tới ba mặt còn lại.*

Lời giải. Cách 1 (của tác giả). Gọi khoảng cách từ M tới các mặt đối diện với A, B, C, D tương ứng là d_A, d_B, d_C, d_D. Ta cần chứng minh

$$d_A = \frac{d_B + d_C + d_D}{2} \quad (1)$$



Hình 2

Xét ba trường hợp:

a) $M \equiv B'$ (hoặc C', D') thì $d_B = 0$, $d_A = d_C = d_D$. Rõ ràng (1) thỏa mãn.

b) M thuộc cạnh của $B'C'D'$, ví dụ M thuộc $D'B'$ (hình 2). Dùng phép vị tự tâm D', tỉ số $D'M : D'B'$; lúc đó $ABCD$ trở thành $A_1B_1C_1D_1$, B' trở thành M; nên B_1M là đường phân giác góc tam diện đỉnh B_1. Áp dụng trường hợp a), gọi khoảng cách từ M tới các mặt tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ là $d_{A_1}, d_{B_1}, d_{C_1}, d_{D_1}$, ta có

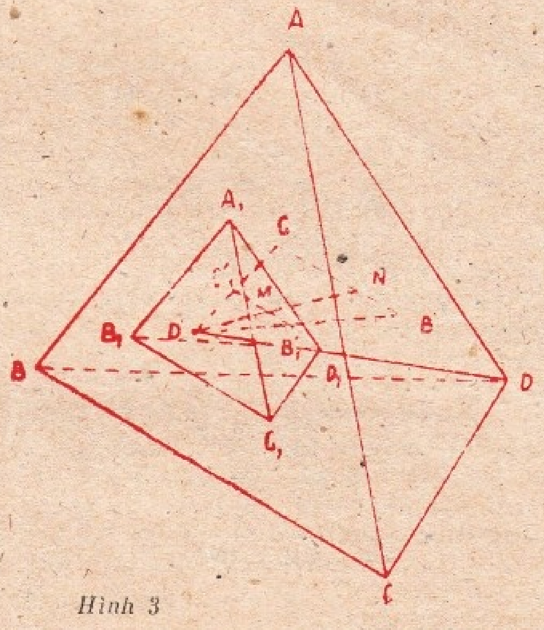
$$d_{A_1} = \frac{d_{B_1} + d_{C_1} + d_{D_1}}{2} \quad (2)$$

Gọi khoảng cách từ D_1 tới ba mặt của tứ diện chứa D, đối diện A, B, C là x_A, x_B, x_C, ta có

$$x_A = x_B = x_C = \frac{x_B + x_C}{2}$$

là khoảng cách giữa các mặt tương ứng của hai tứ diện. Cộng từng vế biểu thức này với (2) ta có

$$d_A = d_{A_1} + x_A = \frac{(d_{B_1} + x_B) + (d_{C_1} + x_C) + d_D}{2} = \frac{d_B + d_C + d_D}{2} \text{ (đ.p.c.m.)}$$



Hình 3

c) M trong tam giác $B'C'D'$ (hình 3). Cũng các kí hiệu như trên. Áp dụng b) ta có

$$d_{A_1} = \frac{d_{B_1} + d_{C_1} + d_D}{2} \quad (3)$$

Đồng thời ta lại có

$x_A = x_B = x_C = \dfrac{x_B + x_C}{2}$. Cộng từng vế với (3) ta được đ.p.c.m

Cách 2. Nhiều bạn gửi bài đã giải bài toán theo trình tự sau đây. Trước tiên chứng minh một điều đơn giản và dễ nhận thấy như sau:

Giả sử P, Q là hai điểm nằm trong khối tứ diện $ABCD$ và mỗi điểm đều có khoảng cách tới mặt BCD bằng nửa tổng các khoảng cách từ điểm đó tới ba mặt còn lại. Khi đó mọi điểm thuộc đoạn PQ đều có tính chất như P và Q.

Tiếp đó ta nhận thấy rằng (như ở cách 1) các điểm B', C' D' có tính chất cần phải chứng minh. Bây giờ giả sử M là một điểm bất kỳ thuộc tam giác $B'C'D'$ nhưng khác B', C' D'. Giả sử N là giao điểm của $B'M$ và $C'D'$ (M có thể trùng với N). Khi đó, áp dụng điều khẳng định trên, suy ra điểm N có tính chất cần phải chứng minh và do đó, điểm M thuộc NB' cũng có tính chất đó (đ.p.c.m).

C.T.

Bài 9/103. *Hãy tìm giá trị của các chữ cái V, M, I, A, N, T, E thỏa mãn các đẳng thức:*

$$\overline{VM} + \overline{IA} = \overline{NI} \qquad (1)$$

$$\overline{AN} - \overline{TI} = \overline{VI} \qquad (2)$$

$$\overline{AN} - \overline{VM} = \overline{EM} \qquad (3)$$

Với điều kiện mỗi chữ cái có một giá trị khác nhau.

Lời giải. Các đẳng thức (1), (2), (3) tương đương với:

$$\overline{VM} + \overline{IA} = \overline{NI}$$

$$\overline{VI} + \overline{TI} = \overline{AN}$$

$$\overline{VM} + \overline{EM} = \overline{AN}$$

hay

$$10(V+I) + M + A = 10N + T \qquad (1')$$

$$10(V+T) + 2I = 10A + N \qquad (2')$$

$$10(V+E) + 2M = 10A + N \qquad (3')$$

Từ đẳng thức (1'), chú ý hàng chục, suy ra $N > I$. Từ (2') và (3'), chú ý hàng đơn vị, ta nhận thấy rằng trong hai số $2I$ và $2M$ có một số bằng N và số kia bằng $10 + N$ (vì $I \neq M$).

Do $N > I$, nên chỉ có thể $2I = N$ và $2M = 10 + N$. Từ hai đẳng thức này suy ra

$$M = 5 + I \qquad (4)$$

Từ (2') và từ đẳng thức $2I = N$, ta có

$$A = V + T \qquad (5)$$

Trong đẳng thức (1') ta nhận thấy $V + I \leqslant N$. Nhưng vì $V \neq I$ và $2I = N$, cho nên

$$M + A = 10 + T, \qquad (6)$$

$$V + I + 1 = N. \qquad (7)$$

Thay $N = 2I$ vào (7) ta được

$$V + 1 = I \qquad (8)$$

Kết hợp (4), (5) với (6) suy ra

$$V + I = 5 \qquad (9)$$

Từ (8) và (9) ta có: $V = 2$, $I = 3$. Khi đó, từ (4) ta được $M = 8$, từ đẳng thức $2I = N$ ta được $N = 6$.

Bây giờ thay $2M = 10 + N$ vào (3') ta có $V + E + 1 = A$. Từ đây và từ (5) suy ra $E + 1 = T$, tức là, E và T là hai số liên tiếp (khác 2, 3, 6, 8). Vậy $E = 4$, $T = 5$. Thay giá trị của V và T vào (5) ta được $A = 7$.

Vậy nghiệm của bài toán tìm được là: $V = 2$, $M = 8$, $I = 3$, $A = 7$, $N = 6$, $T = 5$, $E = 4$. Nếu xếp các chữ cái này theo thứ tự các giá trị tương ứng của chúng tăng dần, ta thấy một điều thú vị: $VIETNAM = 2345678$.

C.T.

Bài 10/103. *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có*

$$\frac{1!\,2! + 2!\,3! + \dots + n!\,(n+1)!}{n\sqrt[n]{(1!)^2\,(2!)^2 \dots (n!)^2}} \geqslant 2\sqrt[2n]{n!} \qquad (1)$$

Lời giải (của nhiều bạn).

Nhận thấy rằng $k!\,(k+1)! = (k!)^2 + k(k!)^2$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Áp dụng đẳng thức này để biến đổi tử số ở vế trái của (1) thành tổng của $2n$ số, sau đó áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $2n$ số đó, ta được:

$$1!\,2! + 2!\,3! + \dots + n!\,(n+1)! = (1!)^2 + (2!)^2 + \dots$$
$$\dots + (n!)^2 + 1(1!)^2 + 2.(2!)^2 + \dots + n(n!)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 2n\sqrt[2n]{(1!)^4.(2!)^4 \dots (n!)^4.n!}$$

hay

$$\frac{1!\,2! + 2!\,3! + \dots + n!\,(n+1)!}{n\sqrt[n]{(1!)^2\,(2!)^2 \dots (n!)^2}} \geqslant 2\sqrt[2n]{n!}$$

(dấu «=» xảy ra khi và chỉ khi $n = 1$), đ.p.c.m.

C.T.

$\overline{xa} = 8\overline{ax}$.

Bài 1/106. Tìm các số tự nhiên có tính chất: khi chuyển chữ số đầu tiên của nó vào vị trí sau cùng thì ta được một số kém 8 lần số ban đầu.

Bùi Quang Trường (Hà Nội)

Bài 2/106. Cho $p_n = n^4 + 4^n$. Hãy tìm tất cả các giá trị của n để p_n là số nguyên tố.

Tài Rất Ngoong
(ĐH kĩ thuật công nghiệp Việt Bắc)

Bài 3/106. Cho trước ba số dương a, b, c. Người ta thành lập các dãy số u_n, v_n, w_n như sau:

$$u_1 = a,\ v_1 = b,\ w_1 = c;$$

với $n \geqslant 2$ thì $u_n = \sqrt{v_{n-1} w_{n-1}}$, $v_n = \sqrt{w_{n-1} u_{n-1}}$,

$$w_n = \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}}.$$

Tìm giới hạn của các dãy số đó. (Chú ý: $\lim\limits_{x \to 0} A^x = 1$ với A là hằng số dương).

Vũ Văn Thỏa (ĐHSP Vinh)

Bài 4/106. Giải phương trình

$$27^{\log_6 x} - 6.64^{\log_6 x} = 6x^2, - 11x.8^{\log_6 x}$$

Đào Quang Điện
(Trường BTVH trung ương, Hải Hưng)

Bài 5/106. Chứng minh rằng

$$1498 < \sum_{i=1}^{15^4} \frac{1}{\sqrt[4]{i}} < 1500$$

trong đó

$$\left(\sum_{i=1}^{15^4} \frac{1}{\sqrt[4]{i}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{15^4}} \right)$$

Lê Thống Nhất (ĐHSP Vinh)

Bài 6/106. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta luôn có

$$\sqrt[n]{(n+1)!} \geqslant 1 + \sqrt[n]{n!}$$

Nguyễn Hữu Hoan
(ĐH Kinh tế, T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 7/106. Chứng minh rằng phương trình sau đây không có nghiệm nguyên dương với mọi số tự nhiên m, n

$$(9 + \sqrt{61})^x + (9 - \sqrt{61})^x = n \cdot 2^{x+n+1}$$

Nguyễn Ngọc Khuê (Hà Nội)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 8/106. Chứng minh rằng nếu hình hộp chữ nhật có ba cạnh là a, b, c, thể tích là V, ba góc tạo bởi đường chéo và ba cạnh a, b, c, tương ứng là α, β, γ thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^6}{\cos^{12}\alpha} + \frac{b^6}{\cos^{12}\beta} + \frac{c^6}{\cos^{12}\gamma} \geqslant 2187\, V^2$$

Hoàng Văn Phương
(10E Kim Sơn, Hà Nam Ninh)

Bài 9/106. Chứng minh rằng

$$2\sqrt[k]{n} \geqslant \sqrt[k]{n + \sqrt[n]{k}} + \sqrt[k]{n - \sqrt[n]{k}}$$

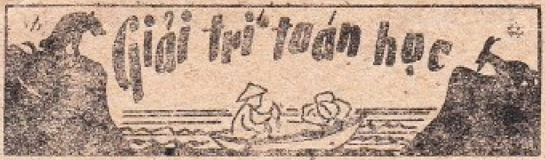
với n và k là số tự nhiên.

Nguyễn Vinh Công
(9CT ĐHSP Vinh)

Bài 10/106. Có tồn tại hay không một đa thức $f(x)$ hệ số nguyên không đồng nhất bằng 0 có giá trị tuyệt đối các hệ số nhỏ hơn 8 mà chia hết cho đa thức

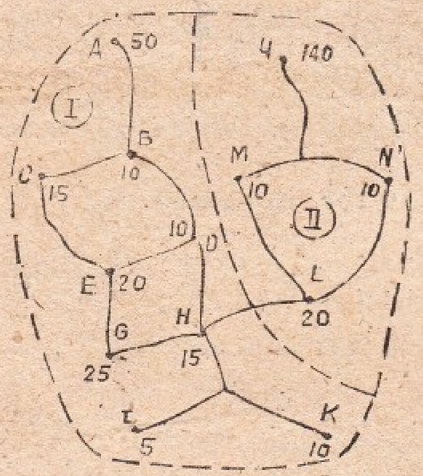
$$g(x) = 4x^3 - 4x^2 - 1979$$

Dương Tấn Thành
(9CT ĐHTH Hà Nội)



GIẢI ĐÁP BÀI « XÂY NHÀ MÁY Ở ĐÂU ? »

Nói chung để giải bài toán thuộc loại này ta phải biết được chi phí vận chuyển một tấn hàng hóa trên từng đoạn đường. Trên cơ sở đó mới có thể tính toán tại từng địa điểm, so sánh với nhau sẽ tìm được địa điểm lợi nhất (địa điểm mà xây nhà máy tại đó sẽ có chi phí vận chuyển hàng tháng là ít nhất). Bài toán này là một trường hợp đặc biệt: trong khu vực dân cư có đoạn đường HL giống như một cái cầu (bỏ đoạn đường HL đi thì khu vực bị tách hẳn làm hai), đồng thời hàng hóa mỗi bên cầu xấp xỉ một nửa tổng khối lượng hàng hóa. Ta đi vào việc giải bài toán.



Với điều kiện đã cho: xét một đoạn đường nào đó thì chi phí vận chuyển một tấn hàng hóa bất kỳ theo chiều bất kỳ là như nhau, do đó, để dễ lý luận, *ta có thể coi tất cả hàng hóa đều được vận chuyển theo chiều về nhà máy*.

Ta chia khu dân cư thành hai khu vực như hình vẽ.

1) Chứng minh nếu địa điểm lợi nhất nằm ở khu vực II thì nó phải là địa điểm L; nếu địa điểm lợi nhất nằm ở khu vực I thì nó phải là địa điểm H.

Thật vậy, tổng hàng hóa ở khu vực I là 160 tấn cộng với hàng ở L 20 tấn thành 180 tấn, lớn hơn nửa tổng hàng hóa (340 tấn). Như vậy nếu nhà máy đặt ở địa điểm khác, chẳng hạn địa điểm M, thì khi chuyển nhà máy về L sẽ bớt được chi phí vận chuyển 180 tấn hàng hóa từ L đến M trong khi đó tăng thêm cùng lắm là chi phí vận chuyển 160 tấn hàng hóa từ M đến L (nếu hàng ở N và O chuyển đến L không qua M tốn chi phí ít hơn khi chuyển qua M thì còn lợi nhiều hơn nữa). Như vậy rõ ràng L là địa điểm lợi nhất của khu vực II.

Chứng minh tương tự ta có H là địa điểm lợi nhất của khu vực I.

2) Chỉ còn phải so sánh H và L.

Ta nhận thấy rằng dù nhà máy đặt ở H hay ở L thì tất cả hàng hóa cũng đều phải qua hai địa điểm này. Vì vậy dù nhà máy đặt ở H hay ở L thì việc vận chuyển hàng hóa trên tất cả các đoạn đường trừ đoạn HL là hoàn toàn không thay đổi. Như vậy chỉ còn phải xét trên đoạn đường HL là so sánh được.

Nếu nhà máy đặt ở H thì trên đoạn HL hàng tháng phải có 180 tấn hàng hóa (của khu vực II) chuyển qua. Nếu nhà máy đặt ở L thì trên đoạn HL hàng tháng chỉ có 160 tấn hàng hóa (của khu vực I) chuyển qua.

Vậy L là địa điểm lợi nhất, tức là nếu xây nhà máy tại L thì tổng chi phí vận chuyển hàng hóa hàng tháng là ít nhất.

In 18.000 cuốn tại Xí nghiệp in 75 — 77 Hàng Bồ Hà Nội. Số in 36/79. Xong ngày 15-4-1979. Gửi lưu chiểu tháng 4-1979. Chỉ số: 12884 Giá: 0,10đ