

HỘI TOÁN HỌC  
VIỆT NAM

Số 105

6

1978

# TOÁN HỌC và Tuổi trẻ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHỨNG

Dây nói: 52825

*toán học và Tuổi trẻ*  
*Toán học Tuổi trẻ*

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

## VẬT LÝ HỌC GIÚP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

HOÀNG CHỨNG

TRONG khi học toán, các bạn đã thấy vai trò to lớn của toán học đối với các khoa học khác; mỗi chúng ta đã nhiều lần hứng thú trước những ứng dụng phong phú, bất ngờ của toán học trong việc giải quyết những vấn đề của vật lý học, hóa học, sinh học, v.v... Tuy nhiên, một số bạn thường ít thấy, ít nghĩ đến tác dụng ngược lại của các khoa học khác đối với toán học; các khoa học khác không chỉ đặt ra những vấn đề mà toán học phải giải quyết và qua đó thúc đẩy toán học phát triển, mà các qui luật, các phương pháp của các khoa học khác có khi còn trực tiếp giúp giải quyết những bài toán học búa trong toán học nữa.

Sau đây, xin nêu thí dụ về việc giải một bài toán hình học khó nhờ sử dụng một định luật của vật lý học.

1) Trong các bài toán lý thú về cắt và ghép hình đã được nhiều người quan tâm từ lâu, có bài toán:

Cắt một hình chữ nhật cho trước ra thành một số hữu hạn hình vuông đôi một không bằng nhau.

Trong bài toán này, nếu bỏ điều kiện « các hình vuông được cắt ra phải đôi một không bằng nhau » thì ta có một bài toán rất tầm thường. Hình chữ nhật có cạnh là 5 và 3 đơn vị chẳng hạn, có thể cắt ra thành 15 hình vuông bằng nhau (có cạnh bằng đơn vị), hoặc thành 4 hình vuông: một hình có cạnh bằng 3 đơn vị, một hình có cạnh bằng 2 đơn vị và hai hình vuông bằng nhau, mỗi hình có cạnh bằng đơn vị (hình 1).



Hình 1

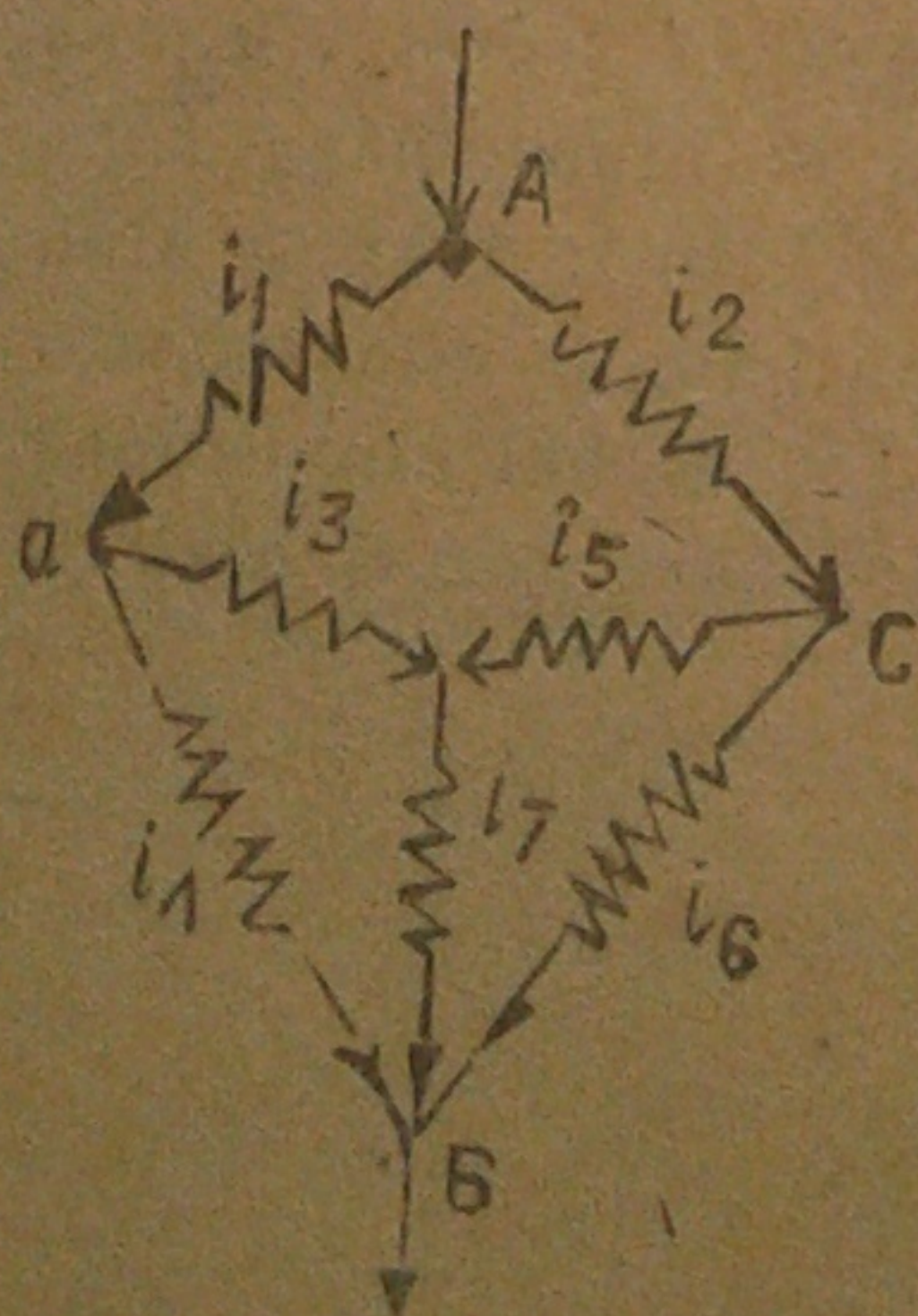


Điều kiện « các hình vuông đôi một không bằng nhau » làm cho bài toán trên đây trở thành một bài toán rất khó. Trong một thời gian, nhiều nhà toán học cho rằng bài toán không có lời giải (nghĩa là không thể cắt bất cứ hình chữ nhật nào ra thành một số hữu hạn hình vuông đôi một không bằng nhau), nhưng không chứng minh được điều đó.

Tuy nhiên, đến năm 1925, người ta nêu được một thí dụ đầu tiên về một hình chữ nhật có thể cắt ra thành một số hữu hạn hình vuông không bằng nhau: hình chữ nhật có các cạnh là 32 và 33 đơn vị, có thể cắt ra thành 9 hình vuông có cạnh là 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 (hình 5). Sau đó, người ta tìm thấy rất nhiều thí dụ khác nữa về những hình chữ nhật có thể cắt ra thành 10, 11, 12, 13 hình vuông đôi một khác nhau. Và bài toán đề ra đã được giải quyết về cơ bản với việc chứng minh được định lý (năm 1940): Một hình chữ nhật có thể cắt được ra thành một số hữu hạn hình vuông đôi một không bằng nhau khi và chỉ khi hình chữ nhật có các cạnh thông ước với nhau (tức là tỉ số giữa các cạnh là một số hữu tỉ).

2) Một điều bất ngờ và lý thú là bài toán trên đây, trong trường hợp số hình vuông được cắt ra không quá lớn, đã được giải một cách khá đơn giản bằng cách sử dụng một định luật của vật lý học: định luật Kia-sốp (Kirchhoff) trong điện học.

Nội dung của định luật Kia-sốp có thể trình bày một cách sơ lược như sau: Xét một mạng điện, gồm một số điện trở, mắc như trong hình 2 chẳng hạn; dòng điện đi vào mạng ở A và đi ra từ B; trên mạng chỉ có điện trở, không có nguồn phát điện phụ. Trên mạng điện như vậy, có các đỉnh (như A, a, b, c...) và các mạch kín (như AabcA). Đối với một mạch kín, ta có thể đi một vòng trên đó bằng cách xuất phát từ một đỉnh và qua tất cả các điện trở của mạch,



Hình 2

mỗi điện trở chỉ một lần, và trở lại được đỉnh xuất phát ban đầu. Với một số điều kiện nhất định, cường độ các dòng điện  $i_1, i_2, i_3, \dots$  đi qua các điện trở trên mạng được xác định bằng hệ thống phương trình Kia-sốp như sau:

a) Tại mỗi đỉnh của mạng điện tổng đại số các cường độ dòng điện

là bằng 0 (ta qui ước coi dòng điện đi đến đỉnh đó là dương và đi ra từ đỉnh đó là âm). Hình 2, ta có:

$$\text{— đối với đỉnh } a: i_1 - i_3 - i_4 = 0$$

$$\text{— đối với đỉnh } b: i_3 - i_5 - i_7 = 0$$

$$\text{— đối với đỉnh } c: i_2 - i_5 - i_6 = 0$$

b) Trên mỗi mạch kín tổng đại số các cường độ dòng điện là bằng 0 (ta qui ước đi một vòng trên mạch kín theo chiều nào đó, và coi dòng điện theo chiều đó là dương và theo chiều ngược lại là âm). Chẳng hạn:

$$\text{— trên mạch } AabcA: i_1 + i_3 - i_5 - i_2 = 0$$

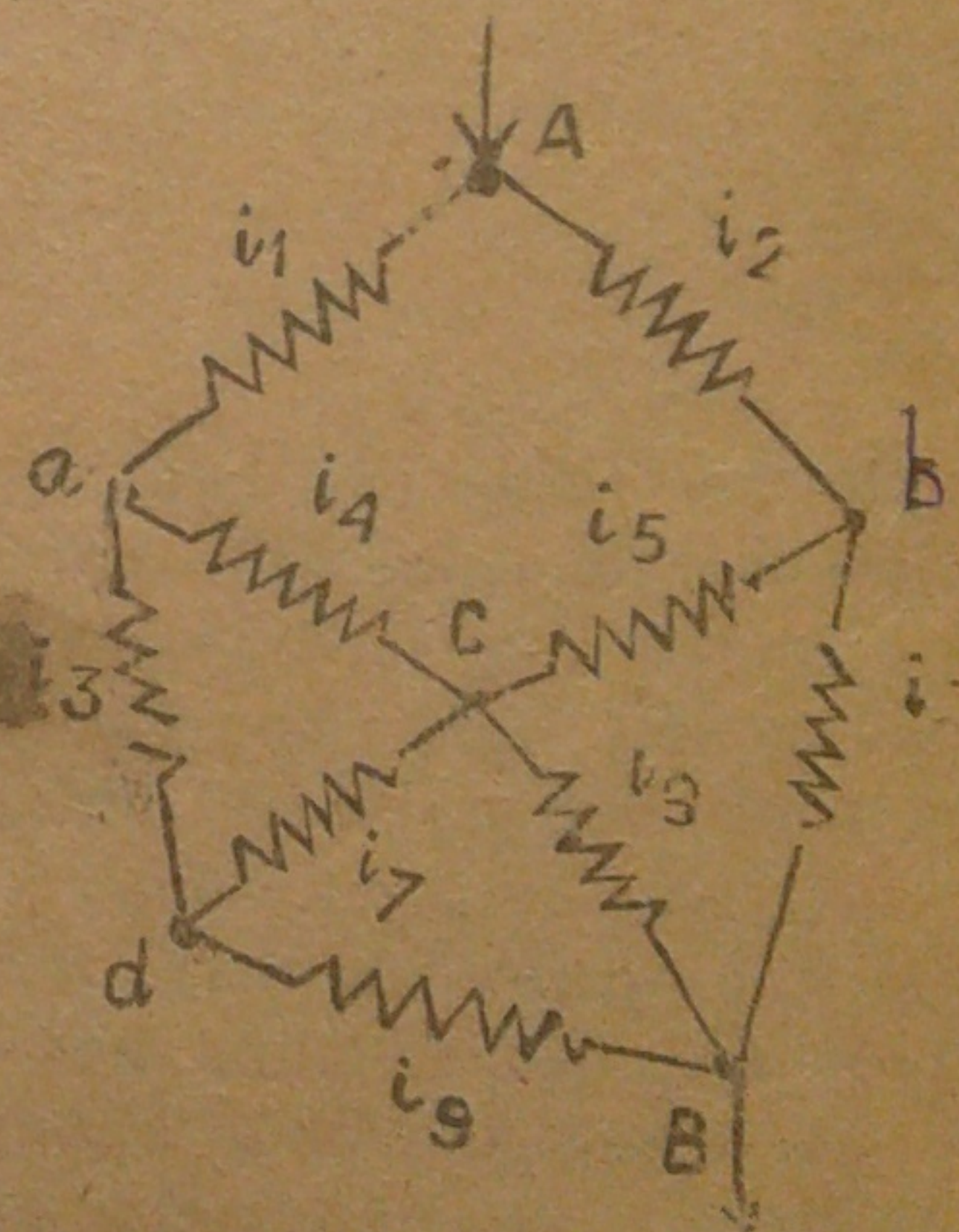
$$\text{— trên mạch } abBa: i_3 + i_7 - i_4 = 0$$

$$\text{— trên mạch } cbBc: i_5 + i_7 - i_6 = 0$$

3 — Người ta chứng minh rằng: mỗi mạng điện như trên đây tương ứng với một cách cắt một hình chữ nhật nào đó ra thành nhiều hình vuông (có thể không phải đôi một khác nhau); cường độ dòng điện qua mỗi điện trở của mạng tương ứng với chiều dài cạnh của hình vuông được cắt ra từ hình chữ nhật.

Ta thử áp dụng kết quả trên đây để giải bài toán: tìm cách cắt một hình chữ nhật ra thành 9 hình vuông.

Ta xây dựng một mạng điện gồm 9 điện trở như trong hình 3 và xác định các cường độ dòng điện  $i_1, i_2, \dots, i_9$  nhờ hệ thống phương trình Kia-sốp. Ta có hệ 8 phương trình:



Hình 3

$$i_1 - i_3 - i_4 = 0 \quad (\text{đỉnh } a)$$

$$i_2 - i_5 - i_6 = 0 \quad (\text{đỉnh } b)$$

$$i_4 + i_5 - i_7 - i_8 = 0 \quad (\text{đỉnh } c)$$

$$i_3 + i_7 - i_9 = 0 \quad (\text{đỉnh } d)$$

$$i_1 + i_4 - i_5 - i_2 = 0 \quad (\text{mạch kín } AabcA)$$

$$i_3 - i_7 - i_4 = 0 \quad (\text{— } adca)$$

$$i_5 + i_8 - i_6 = 0 \quad (\text{— } cBbc)$$

$$i_7 + i_9 - i_8 = 0 \quad (\text{— } cdBc)$$



(ta có thể xét thêm một mạch kín nữa, mạch  $AadebA$  chẳng hạn, để có một phương trình thứ chín, nhưng dễ thấy rằng phương trình này chỉ là hệ quả của các phương trình trong hệ trên mà thôi).

Giải hệ phương trình trên đây, với giả thiết  $i_1$  là đã biết, ta được:

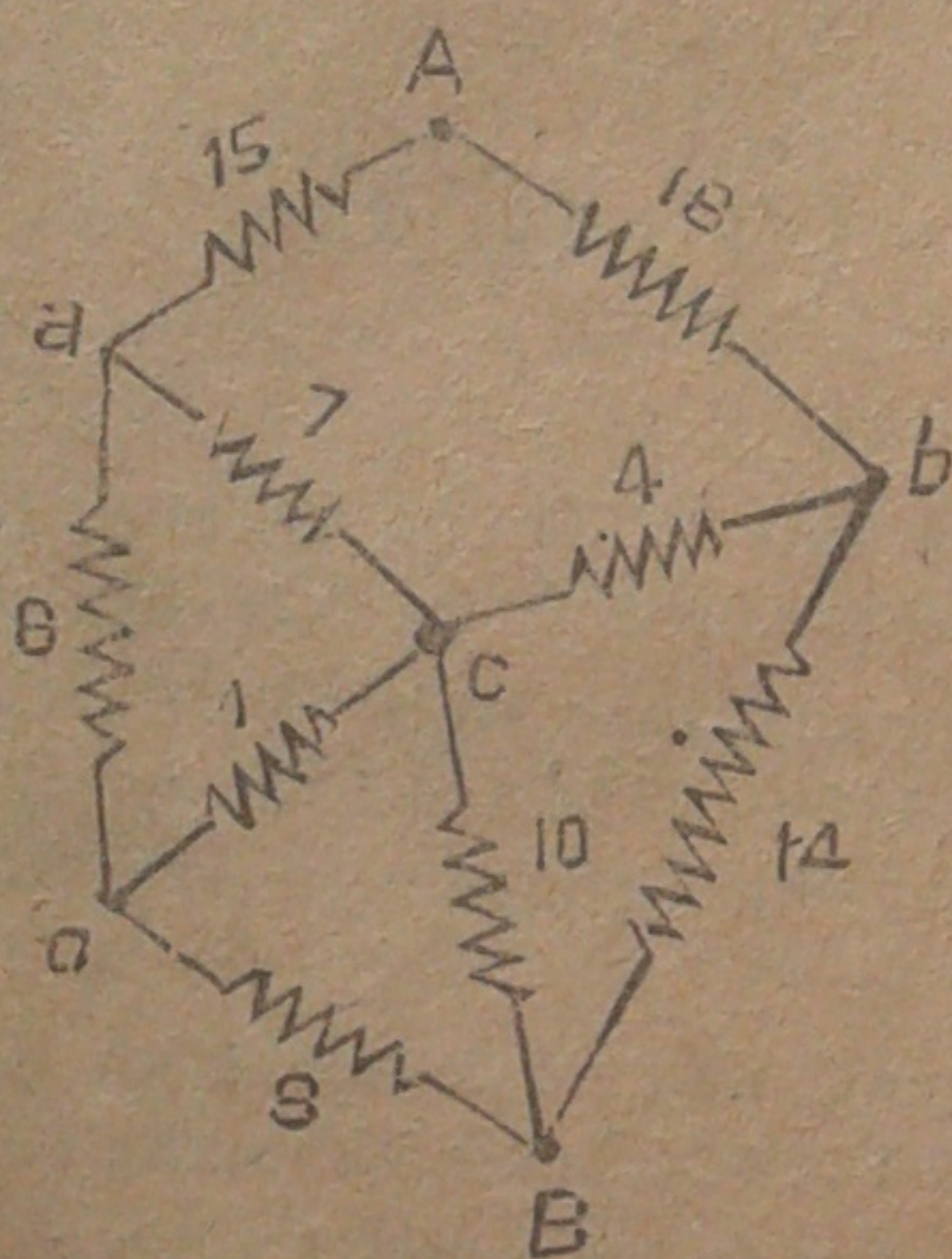
$$i_2 = \frac{18}{15} i_1, i_3 = \frac{8}{15} i_1, i_4 = \frac{7}{15} i_1,$$

$$i_5 = \frac{4}{15} i_1, i_6 = \frac{14}{15} i_1, i_7 = \frac{1}{15} i_1,$$

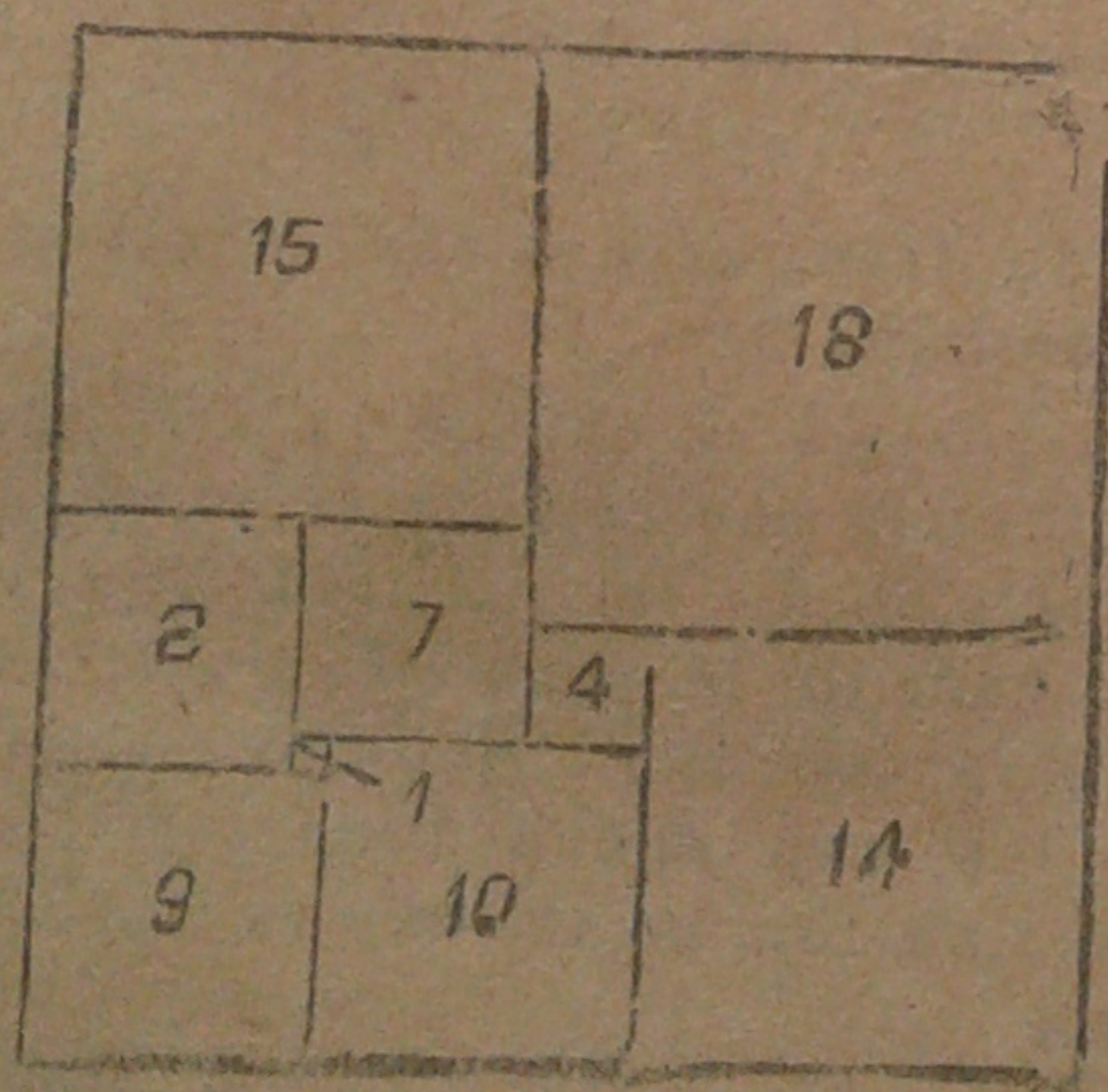
$$i_8 = \frac{10}{15} i_1, i_9 = \frac{9}{15} i_1.$$

Hệ có vô số nghiệm. Lấy  $i_1 = 15$ , ta được một nghiệm của hệ bằng các số nguyên đôi một khác nhau như sau:

$$i_1 = 15, i_2 = 18, i_3 = 8, i_4 = 7, i_5 = 4, \\ i_6 = 14, i_7 = 1, i_8 = 10, i_9 = 9.$$



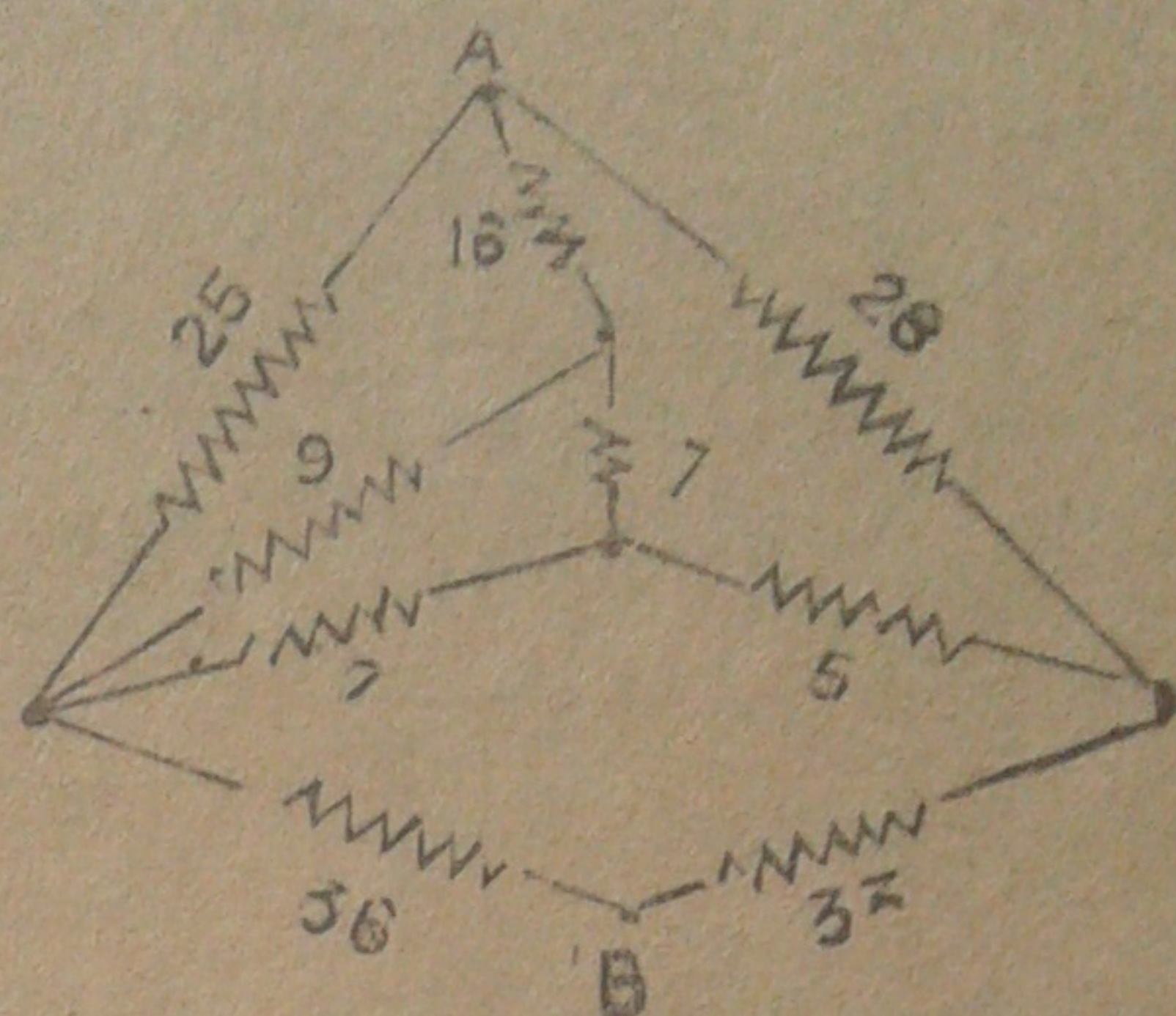
Hình 4



Hình 5

Từ cường độ dòng điện qua các điện trở của mạng điện (hình 4), ta có được một cách cắt hình chữ nhật ra thành 9 hình vuông đôi một

không bằng nhau như trong hình 5. Hình chữ nhật này phải có hai cạnh theo tỉ lệ 32 : 33.



Hình 6

Nếu vẽ một mạng điện khác, cũng gồm có 9 điện trở, như trong hình 6, thì hệ thống phương trình Kirchhoff cho ta một nghiệm với các giá trị nguyên (ghi trên hình 6) và từ đó, ta có một cách cắt hình chữ nhật có cạnh bằng 61 và 69 đơn vị ra thành 9 hình vuông có cạnh là: 2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36 (để nghị bạn đọc căn cứ vào hình 6 để vẽ cách cắt tương ứng).

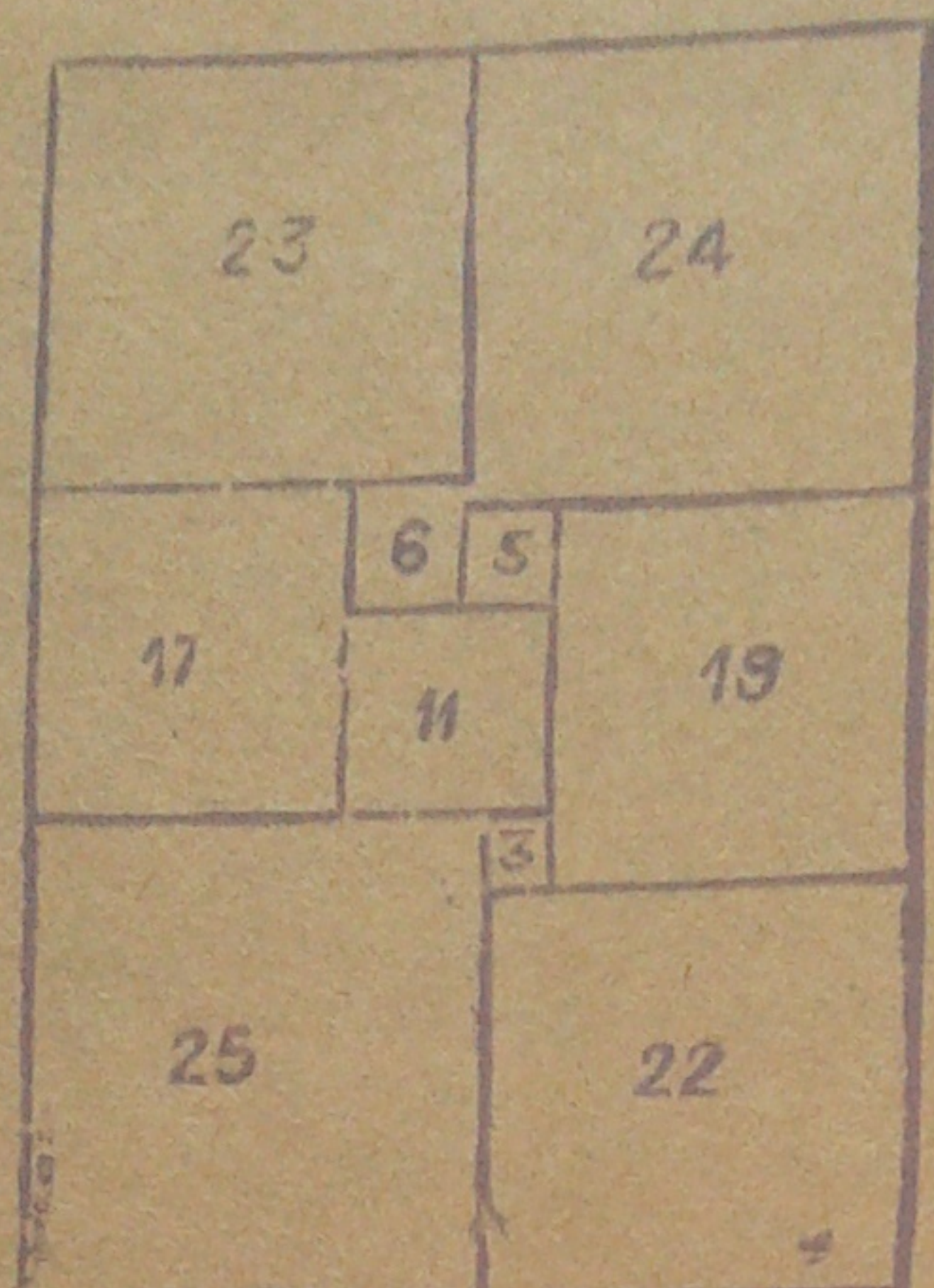
Bằng phương pháp trên đây, có thể chứng minh rằng: ngoài hai cách cắt như trên hình 5 và tương ứng với hình 6, không có cách nào khác nữa để cắt một hình chữ nhật ra thành 9 hình vuông một đôi không bằng nhau. Mặt khác, có thể chứng minh rằng: một hình chữ nhật không thể cắt ra thành một số ít hơn 9 hình vuông đôi một không bằng nhau.

Các bạn hãy vẽ những mạng điện gồm 5, 6, 7, 8, 9 điện trở để kiểm tra lại kết quả trên đây, hoặc vẽ những mạng điện gồm 10, 11, 12... điện trở để tìm



Hình 7





Hình 8

những cách cắt hình chữ nhật ra thành 10, 12... hình vuông đôi một không bằng nhau. Chẳng hạn nếu vẽ mạng điện như trong hình 8, bạn có một cách cắt hình chữ nhật ra thành 10 hình vuông đôi một không bằng nhau trong hình 8.

Qua thí dụ trên, người viết bài này lưu ý các bạn trẻ một điều sau đây: trong việc học tập, các bạn cần quan tâm sử dụng những kiến thức và phương pháp của môn học này vào các môn học khác, luyện tập vận dụng một cách tổng hợp những hiểu biết của mình để giải quyết những vấn đề được đặt ra. Đó là một cách học thông minh sáng tạo.

## GIẢI THỪA VÀ TỔ HỢP

**T**RONG nhiều năm nay, các số giai thừa và tổ hợp được dùng đến trong một số bài toán đăng trên báo Toán học và tuổi trẻ, thường đó là các bài toán thi quốc tế. Những khái niệm về số giai thừa và số tổ hợp không được đề cập đến trong chương trình học ở nhiều trường phổ thông, vì vậy khi gặp các số này nhiều bạn còn bỡ ngỡ. Bài này sẽ giúp các bạn làm quen với các khái niệm đó, thông qua một vài ví dụ thực tế; sau đó nêu thêm vài ứng dụng của tổ hợp.

1. Giả sử có 8 học sinh giỏi toán ngang tài nhau. Có 8 món quà có giá trị khác nhau để tặng cho 8 bạn học sinh đó. Vì vậy phải tổ chức một cuộc thi nhất thời để sắp xếp thứ tự 8 học sinh. Hỏi có tất cả bao nhiêu khả năng có thể xảy ra trong việc sắp xếp thứ tự này? (Ta giả thiết rằng bao giờ cũng có thể đánh giá được kết quả hơn kém trong các bài làm).

Rõ ràng nếu chỉ có hai bạn A và B thi với nhau thì có hai khả năng sắp xếp: AB và BA. (Ký hiệu AB chỉ A xếp trên B).

Nếu có thêm bạn C dự thi thì C có thể thứ nhất, có thể thứ hai, có thể thứ ba; còn đối với A và B vẫn có hai khả năng: hoặc A trên B, hoặc B trên A. Vì vậy có tất cả  $2 \times 3 = 6$  khả năng có thể xảy ra:

CAB, CBA, ACB, BCA, ABC, BAC.

Nếu thêm bạn D dự thi thì D lại có thể được sắp xếp ở một trong bốn vị trí: thứ nhất, thứ

hai, thứ ba, thứ tư. Khi đó có tất cả  $2 \times 3 \times 4 = 24$  khả năng sắp xếp thứ tự bốn bạn A, B, C, D.

Tiếp tục suy luận như vậy, ta tìm được rằng có  $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$  khả năng có thể xảy ra trong việc sắp xếp thứ tự 8 học sinh.

Tổng quát, nếu có  $n$  học sinh dự thi thì tất cả  $2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$  khả năng sắp xếp thứ tự.

Để cho gọn ta ký hiệu  $2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = n!$  và đọc là « $n$  giai thừa».

Như vậy  $n!$  là tích của  $n$  số tự nhiên đầu tiên (thêm số 1 cho đẹp):

$$n! = 1.2.3...n.$$

Ở ví dụ trên, số khả năng sắp xếp thứ tự 8 học sinh bằng  $8!$

2. Bây giờ giả sử chỉ có ba giải thưởng các giải thưởng này có giá trị như nhau để tặng cho 8 học sinh dự thi nói trên. Như vậy mệnh đề của cuộc thi là phân chia 8 học sinh thành hai tập hợp con: tập hợp được giải gồm 3 học sinh và tập hợp không được giải gồm 5 học sinh. Ta tính xem có thể xảy ra bao nhiêu cách phân chia.

Đề ý rằng nếu thứ tự các học sinh ở trong cùng một tập hợp con thay đổi thì cũng không tạo ra cách phân chia mới, vì vậy số khả năng phân chia giảm đi  $3! \cdot 5!$  lần so với số khả năng sắp xếp thứ tự 8 học sinh, số đó bằng

$$8! : (3! \cdot 5!)$$



Ta cũng có thể nói đó là số cách chọn 3 học sinh trong số 8 học sinh và gọi số đó là "tổ hợp chập 3 của 8". Tổ hợp chập 3 của 8 được ký hiệu là  $C_8^3$  (cũng có khi dùng ký hiệu  $\binom{8}{3}$ ).

Tổng quát: "tổ hợp chập  $k$  của  $n$ " là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nhiên nhiên là  $C_n^{n-k} = C_n^k$ . Vì  $C_n^n = 1$  nên ta qui ước  $C_n^0 = 1$ .

Xin đưa ra dưới đây một số bài toán có dùng đến tổ hợp.

1) Có 15 đội bóng thi đấu vòng tròn, mỗi đội đều đấu với mỗi đội khác một trận thì có tất cả bao nhiêu trận đấu?

Thực chất của bài toán là tính xem có bao nhiêu cách chọn hai đội trong số 15 đội. Rõ ràng số cách chọn tức là số trận đấu bằng.

$$C_{15}^2 = 15! : (2! 13!) = 14 \cdot 15 / 2 = 105.$$

2) Có nhiều nhất là bao nhiêu giao điểm các đường chéo trong một đa giác  $n$  cạnh?

Ta thấy số giao điểm sẽ nhiều nhất nếu không có ba đường chéo nào đồng qui, ta tính số giao điểm trong trường hợp đó.

Ta nhận thấy rằng cứ 4 đỉnh bất kỳ của đa giác thì xác định 1 và chỉ một giao điểm các đường chéo. Vậy số giao điểm các đường chéo bằng  $C_n^4$ .

3. Tổ hợp có nhiều ứng dụng trong toán học. Ở đây xin nêu ra một ví dụ rất gần gũi đối với các bạn.

Các bạn đã được học các hằng đẳng thức:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Dùng tổ hợp ta có thể viết

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

Các bạn hãy tự chứng minh công thức khai triển tổng quát:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Công thức khai triển trên được gọi là nhị thức Niu-ton.

Các bạn cũng đã biết các hệ số của các nhị thức Niu-ton lập thành tam giác Pascal:

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
|       | 1 |   |   |   |
| $n=1$ | 1 | 1 |   |   |
| $n=2$ | 1 | 2 | 1 |   |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 |

Các số ở hai bên đều bằng 1. Mỗi số ở trong bằng tổng của hai số ở trên nó cộng với số đứng trước số ở trên đó. Để giải thích được qui tắc này các bạn chỉ cần chứng minh công thức.

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

và chú ý rằng  $C_n^0 = 1, C_n^n = 1$

Cuối cùng các bạn hãy thử áp dụng nhị thức Niu-ton để giải bài toán sau:

Bài toán. Tìm ba chữ số cuối cùng của số  $1979^{1964}$ .

P. H.



Bài 1/102. Tìm  $a$  và  $b$  để  $1980ab$  là một số chính phương. Chứng minh rằng không tồn tại số chính phương dạng  $1978cd$ .

Lời giải.

Rất nhiều bạn giải theo cách sau đây:

Ta nhận thấy  $00 \leq ab \leq 99$

$$\text{hay } 198000 \leq 1980ab \leq 198099.$$

$$\text{Nhưng } (444)^2 = 197136 < 198000 \quad (1)$$

$$(446)^2 = 198916 > 198099 \quad (2)$$

$$\text{Nên } (444)^2 < 1980ab < (446)^2.$$

$$\text{Từ đó có: } 1980ab = (445)^2 = 198025 \quad (3)$$

Nghĩa là để  $1980ab$  là số chính phương thì  $a=2$  và  $b=5$ .

$$\text{Ta cũng thấy } 00 \leq cd \leq 99$$

$$\text{hay } 167800 \leq 1978cd \leq 197899 \quad (4)$$

Kết hợp (4) với (1) và (3) ta có

$$(444)^2 < 1978cd < (445)^2.$$

Nghĩa là  $1978cd$  không thể là số chính phương.

L.H.



**Bài 2/102.** Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên  $n$  sao cho trong dạng thập phân của  $5^n$  có ít nhất 2000 chữ số 0 đứng kề nhau.

Lời giải (của bạn Vũ Đức Hiền và Nguyễn Thế Ninh, Hà Nội). Ta xét tập hợp vô hạn số tự nhiên  $n$  dạng:  $n = p \cdot 2^{8000} + 8000$  ( $p$  tự nhiên).

Ta sẽ chứng minh rằng nếu  $n$  có dạng trên thì  $5^n - 8000 - 1 \div 2^{8000}$ .

Thật vậy:

$$\begin{aligned} 5^n - 8000 - 1 &= 5^{p \cdot 2^{8000} + 8000} - 1 = \\ &= (5^{p \cdot 2^{7999}} + 1)(5^{p \cdot 2^{7999}} - 1) = \dots \\ &= (5^{p \cdot 2^{7999}} + 1)(5^{p \cdot 2^{7998}} + 1) \times \\ &\quad \times (5^{p \cdot 2^{7997}} + 1) \dots (5^p + 1)(5^p - 1). \end{aligned}$$

Tích trên có 8001 thừa số đều là số chẵn do đó  $(5^n - 8000 - 1) \div 2^{8000}$ .

Từ đó suy ra  $5^n - 5^{8000} \div 10^{8000}$ , nghĩa là hiệu  $5^n - 5^{8000}$  tận cùng bằng 10<sup>8000</sup> chữ số 0.

Mặt khác  $5^4 = 625 < 10^3$  nên  $5^{8000} < 10^{6000}$ . Do đó  $5^{8000}$  có không quá 6000 chữ số. Vậy trong dạng thập phân của  $5^n$  có ít nhất 2000 chữ số 0 đứng kề nhau.

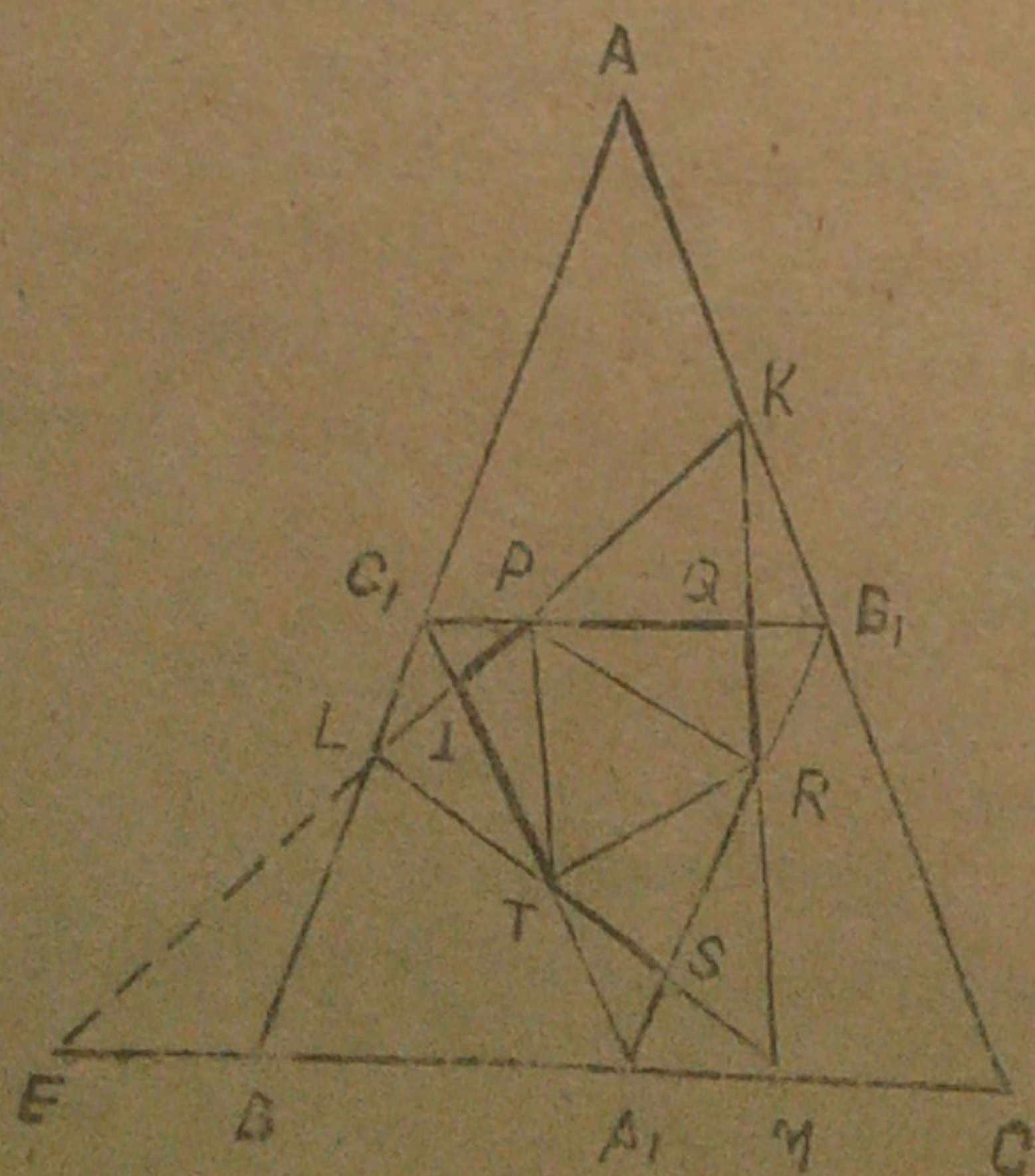
L.H.

**Bài 3/102.** Cho tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $S$ .  $A_1, B_1, C_1$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $BC, CA$ , và  $AB$ . Gọi  $K, L, M$  là các điểm chạy trên các đoạn  $AB_1, BC_1$ , và  $CA_1$  tương ứng. Gọi  $S^*$  là diện tích phần chung của hai tam giác  $A_1B_1C_1$  và  $KLM$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $S^*$ .

Lời giải. Dễ thấy rằng giá trị lớn nhất của  $S^*$  bằng  $S/4$ , khi  $K, L, M$  trùng với ba đỉnh của tam giác  $ABC$  hoặc tam giác  $A_1B_1C_1$ .

Bây giờ ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của  $S^*$ .

Vì  $PB_1 \parallel EC$  và do  $MC \leq EM$  nên ta có  $QB_1 \leq PQ$ . Từ đó suy ra  $S(\triangle RQB_1) \leq S(\triangle RPQ)$  (1) (trong đó  $S$  dùng để chỉ diện tích).



Tương tự ta có

$$S(\triangle TSA_1) \leq S(\triangle TSR)$$

$$S(\triangle PIC_1) \leq S(\triangle PIT)$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức (1), (2), ta được

$$S(\triangle A_1B_1C_1) - S^* \leq S^* - S(\triangle PRT)$$

$$\text{hay } S(\triangle A_1B_1C_1) \leq 2S^*$$

$$S^* \geq S(\triangle A_1B_1C_1)/2 = S/4.$$

Giá trị nhỏ nhất của  $S$  bằng  $S/4$  khi tam giác  $KLM$  trùng với một đỉnh của tam giác  $ABC$  và một đỉnh khác trùng trung điểm cạnh đối diện với đỉnh kể trên của tam giác  $ABC$ .

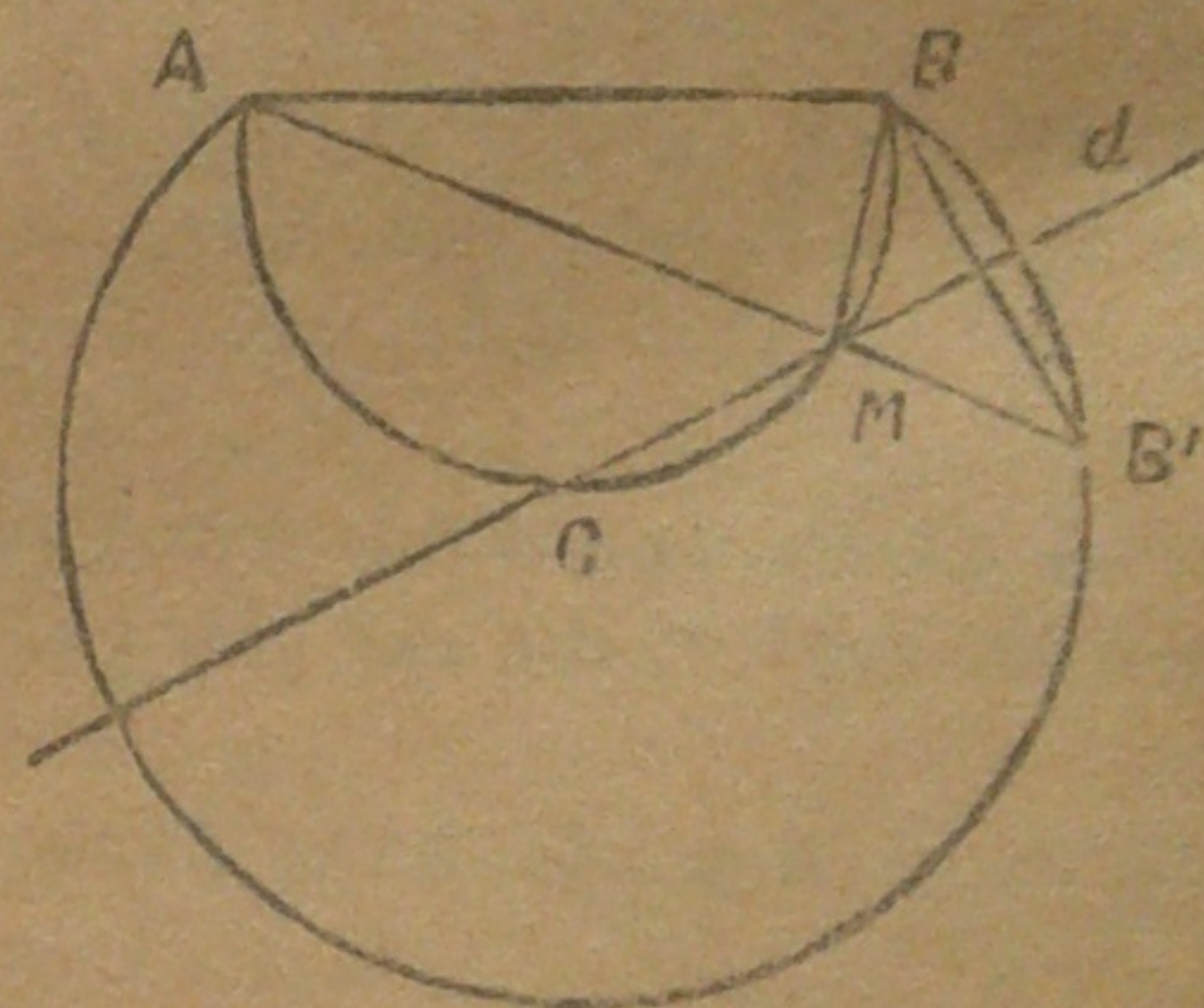
L.H

**Bài 4/102.** Cho ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng có  $CA = CB$ , đường thẳng  $d$  biến thiên qua  $C$ . Trên  $d$  tìm điểm  $M$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất. Tìm quỹ tích của  $M$ .

Lời giải.

1) Phần thuận. Xét hai trường hợp.

a) Khi  $d$  cắt  $AB$ . Trong trường hợp này điểm  $M$ , thỏa mãn điều kiện đã cho, chính là giao điểm của  $d$  và  $AB$ . Vậy  $M$  chạy trên đoạn  $AB$ .



b) Khi  $d$  không cắt  $AB$ . Giả sử  $d$  cố định.  $B'$  đối xứng với  $B$  qua  $d$ . Khi đó  $MA + MB = MA + MB'$  và do  $A$  và  $B'$  nằm về hai phía của  $d$  nên tổng này nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm  $A, M, B'$  thẳng hàng, hay  $M$  là giao điểm của  $d$  với  $AB'$ .

Khi  $d$  thay đổi thì  $B'$  cũng thay đổi. Nhưng do  $CB = CB'$  nên  $B'$  luôn nằm trên đường tròn tâm  $C$  bán kính  $CB$ . Vì ta chỉ xét trường hợp  $d$  không cắt  $AB$ , nên  $B'$  chỉ chạy trên cung  $AB$  của đường tròn. Do đó  $AB'B$  không thay đổi và bằng nửa góc ở tâm  $ACB$ . Mặt khác, tam giác  $MBB'$  là tam giác cân, nên  $AMB = 2MBB' = ACB$ . Vậy  $M$  nằm trên đoạn  $AB$  dưới một góc  $ACB$  không đổi. Do đó  $M$  nằm trên cung  $ACB$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .



Như vậy điểm M chạy trên đoạn AB và cung

2) Phần đảo. Lấy điểm M bất kỳ trên AB hoặc ACB. Gọi d là đường thẳng qua C và M. Ta sẽ chứng minh  $MA + MB$  là nhỏ nhất so với mọi điểm M' khác thuộc d.

Thật vậy, nếu M nằm trên AB, thì  $MA + MB = AB$  là nhỏ nhất, vì đối với mọi điểm M' khác thì  $M'A + M'B > AB$  (tổng độ dài hai cạnh của tam giác M'AB lớn hơn độ dài của cạnh còn lại). Nếu M thuộc ACB. Lấy B' đối xứng với B qua d. Ta có A, M, B' thẳng hàng (vì  $AMB = 2 \angle B'MB$ ). Ta có  $MA + MB (= MA + MB' = AB')$  là nhỏ nhất, bởi vì đối với các điểm M' khác thuộc d,  $M'A + M'B = M'A + M'B' > AB'$  (theo tính chất của tam giác M'AB').

Vậy quỹ tích của điểm M là đoạn AB và cung ACB.

Nhận xét. Trên đây là cách giải của đa số các bạn gửi bài. Trong số đó, các bạn: Ngô Vinh Quang (Thị xã Thanh Hóa), Nguyễn Văn Cường (2Đ Khoa Toán, BHSP Việt Bắc), Nguyễn Thế Đoàn (SCT Thái Phiên Hải Phòng) và một số bạn khác có lời giải tốt.

C.T.

Bài 5/102. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta đều có.

$$\sqrt[n]{n} < 1 + 1/\sqrt[n]{n}$$

Lời giải. Bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta thấy rằng bất đẳng thức đúng khi  $n = 1, 2, 3$ . Chẳng hạn.

$$(1 + 1/\sqrt[3]{3})^3 = 1 + 3/\sqrt[3]{3} + 3/3 + 1/3\sqrt[3]{3} > 3$$

$$\sqrt[3]{3} < 1 + 1/\sqrt[3]{3}$$

Với  $n \geq 4$ , áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số (không bằng nhau) sau đây

$$\sqrt[n]{n}/2, \sqrt[n]{n}/2, 2, 2, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-4 \text{ số}}$$

ta được

$$\sqrt[n]{n} < \frac{\sqrt[n]{n} + 4 + (n-4)}{n} = 1 + 1/\sqrt[n]{n} \text{ (đ.p.c.m.)}$$

Nhận xét. Trên đây là cách giải của đa số các bạn gửi bài cũng như của tác giả. Ngoài ra có một số bạn chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách này hay cách khác, nhưng do thiếu chú ý nên đã đi đến những kết luận không chính xác, có khi sai

C.T.

Bài 6/102. Tìm tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn các điều kiện sau

$$y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \quad (*)$$

$$4xy^3 + y^3 + 1/2 \geq 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \quad (**)$$

Lời giải. Điều kiện:  $xy - x^2y^2 \geq 0$

hay  $0 \leq xy \leq 1$ .

Ta có:

$$xy - x^2y^2 = -(x^2y^2 - xy + 1/4) + 1/4 = -(xy - 1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4$$

$$\text{hay } \sqrt{xy - x^2y^2} \leq 1/2$$

Từ đây và từ (\*) ta suy ra

$$1/2 \geq y^6 + y^3 + 2x^2 \quad (***)$$

Cộng từng vế của (\*\*) và (\*\*\*) ta được

$$4xy^3 + 1 \geq y^6 + 4x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}$$

$$\text{hay } 1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} \geq (y^3 - 2x)^2$$

Nhưng, do  $1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} \leq 0$

và  $(y^3 - 2x)^2 \geq 0$ , nên ta có

$$1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} = (y^3 - 2x)^2 = 0$$

$$\text{hay } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được:  $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = -1$  và tương ứng  $x_1 = 0, x_2 = 1/2, x_3 = -1/2$ . Thử lại ta thấy chỉ có cặp  $(x, y) = (-1/2, -1)$  thỏa mãn điều kiện của bài toán.

C.T.

Bài 7/102. Cho tứ diện ABCD và một điểm M ở trong nó. Gọi A', B', C', D' lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AM, BM, CM, DM, với các mặt tương ứng của tứ diện. Chứng minh rằng tổng  $MA' + MB' + MC' + MD'$  không lớn hơn cạnh lớn nhất của tứ diện.

Lời giải (của Nguyễn Văn Tiễn, Yên Phong, Hà Bắc; Lê Duy Hưng, Thái Thụy, Thái Bình và một số bạn khác).

Gọi thể tích của các tứ diện ABCD, MBCD, MCDA, MDAB, MABC lần lượt là V,  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , ta có  $V_1/V = h_1/h = MA'/AA'$  trong đó  $h_1, h$  là đường cao của các hình chóp MBCD, ABCD tương ứng.

$$\text{Vậy } MA' = AA' \cdot V_1/V$$

Nếu gọi a là độ dài cạnh lớn nhất của tứ diện ABCD thì a chính là khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của tứ diện.

$$\text{Vậy } AA' \leq a, \text{ do đó}$$

$$MA' \leq a \cdot V_1/V$$

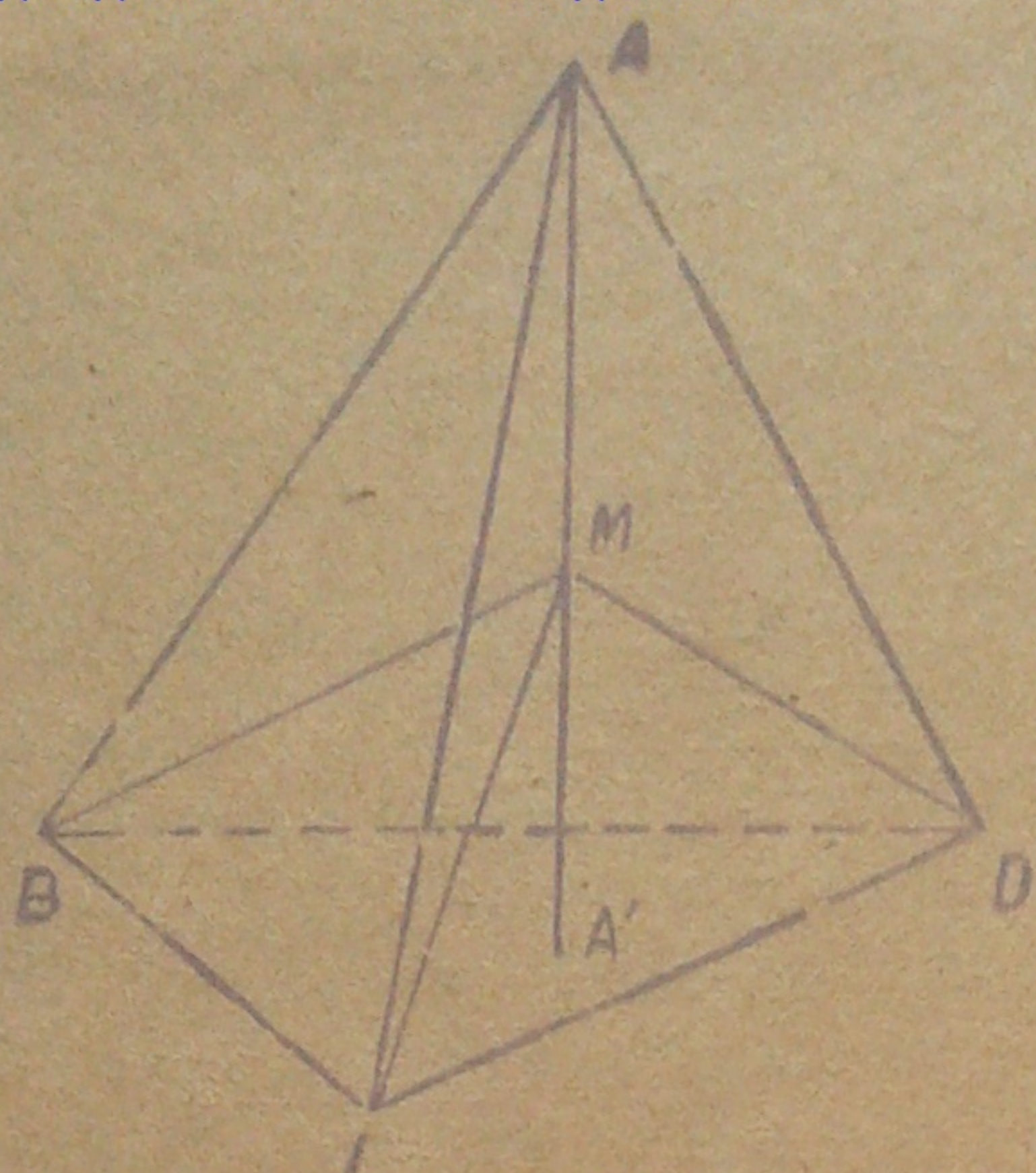
Tương tự ta cũng có.

$$MB' \leq a \cdot V_2/V$$

$$MC' \leq a \cdot V_3/V$$

$$MD' \leq a \cdot V_4/V$$





Cộng các bất đẳng thức trên ta được  
 $MA' + MB' + MC' + MD' \leq a (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)/V = a V/V = a$  (đ.p.c.m.)

T.T.

**Bài 8/102.** Trong không gian cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm hai tứ diện này. Chứng minh rằng:

$$GG' \leq \frac{AA' + BB' + CC' + DD'}{4}$$

Lời giải. Cách 1 (của bạn Hoàng Lộc lớp 8 chuyên toán Hải Hưng và nhiều bạn khác ở lớp 8 trường cấp 3 Hùng Vương, Vĩnh Phú). Theo đầu bài ta có các đẳng thức vector sau:

$$\begin{aligned} \vec{GG'} &= \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{A'G'} \\ \vec{GG'} &= \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{B'G'} \\ \vec{GG'} &= \vec{GC} + \vec{CC'} + \vec{C'G'} \\ \vec{GG'} &= \vec{GD} + \vec{DD'} + \vec{D'G'} \end{aligned}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} \vec{GG'} &= [(\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'}) \\ &\quad + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) \\ &\quad - (\vec{G'A} + \vec{G'B} + \vec{G'C} + \vec{G'D'})] : 4. \end{aligned}$$

Do G và G' lần lượt là trọng tâm tứ diện ABCD và A'B'C'D' nên ta có:

$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} &= \vec{G'A} + \vec{G'B} \\ &\quad + \vec{G'C} + \vec{G'D'} = 0. \end{aligned}$$

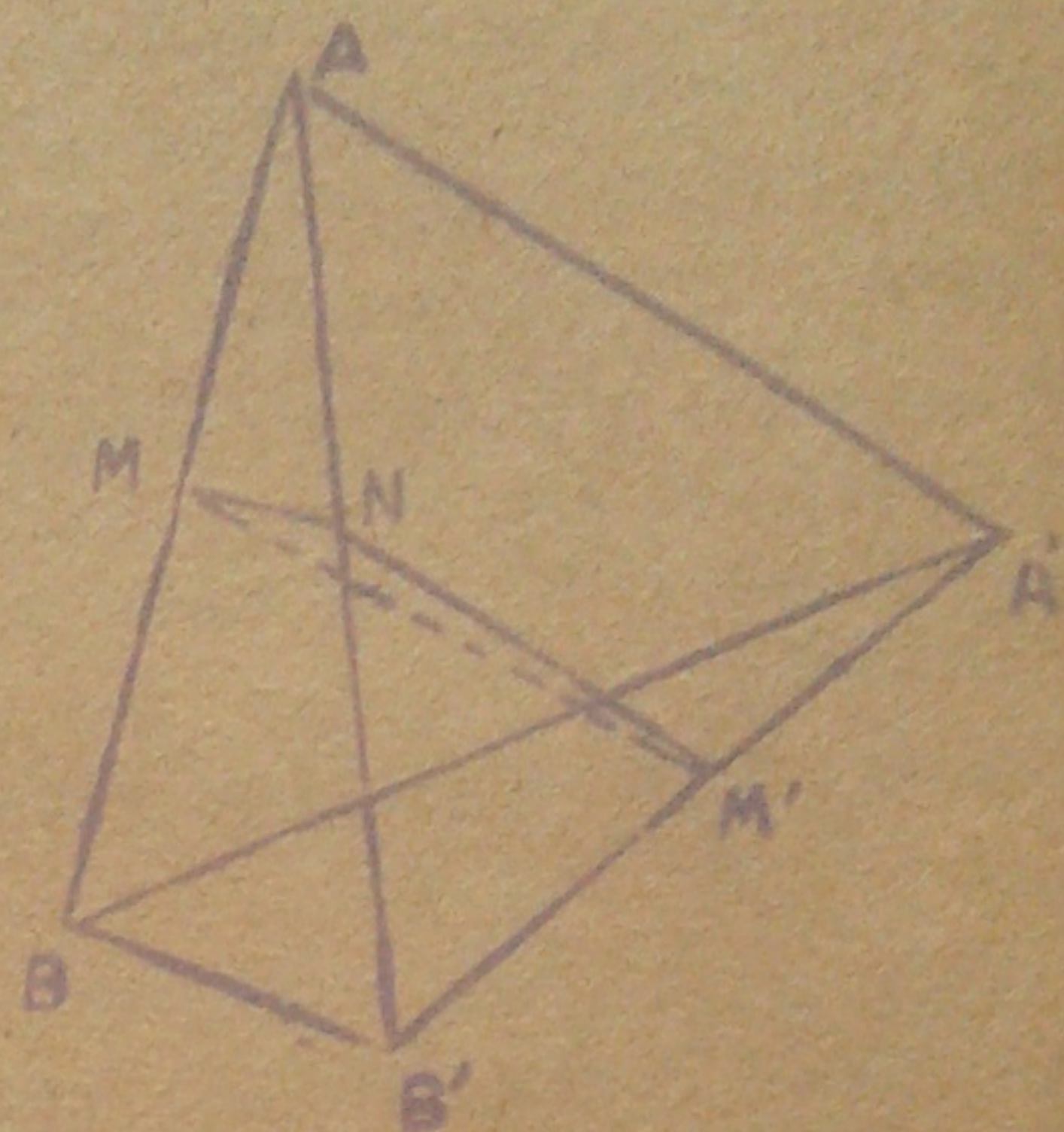
Vì vậy

$$\begin{aligned} \vec{GG'} &= (\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'}) : 4 \\ \text{hay } |\vec{GG'}| &= |\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'}| : 4 \\ &\leq (|\vec{AA'}| + |\vec{BB'}| + |\vec{CC'}| + |\vec{DD'}|) : 4 \\ &\text{(dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các vector } \vec{AA'}, \vec{BB'}, \vec{CC'}, \vec{DD'} \text{ song song và cùng chiều), nghĩa là} \\ &GG' \leq (AA' + BB' + CC' + DD')/4 \text{ (đ.p.c.m.) (có} \\ &\text{dấu bằng khi và chỉ khi } \vec{AA'} // \vec{BB'} // \vec{CC'} // \vec{DD'}). \end{aligned}$$

Cách 2 (của bạn Đỗ Đức Lưu, lớp 9N Hải Quang, Hải Hưng và của một số bạn khác cùng lớp).

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Hai điểm M và M' lần lượt chia hai đoạn thẳng AB và A'B' theo cùng tỉ số k thì

$$MM' \leq (AA' + kBB')/(k+1)$$



Thật vậy, trên đoạn AB' lấy điểm N sao cho  $AN/NB' = AM/MB = A'M'/M'B' = k$ . Khi ấy ta

$$MN/BB' = AM/AB = k/(k+1) \text{ hay}$$

$$MN = k.BB'/(k+1) \text{ và}$$

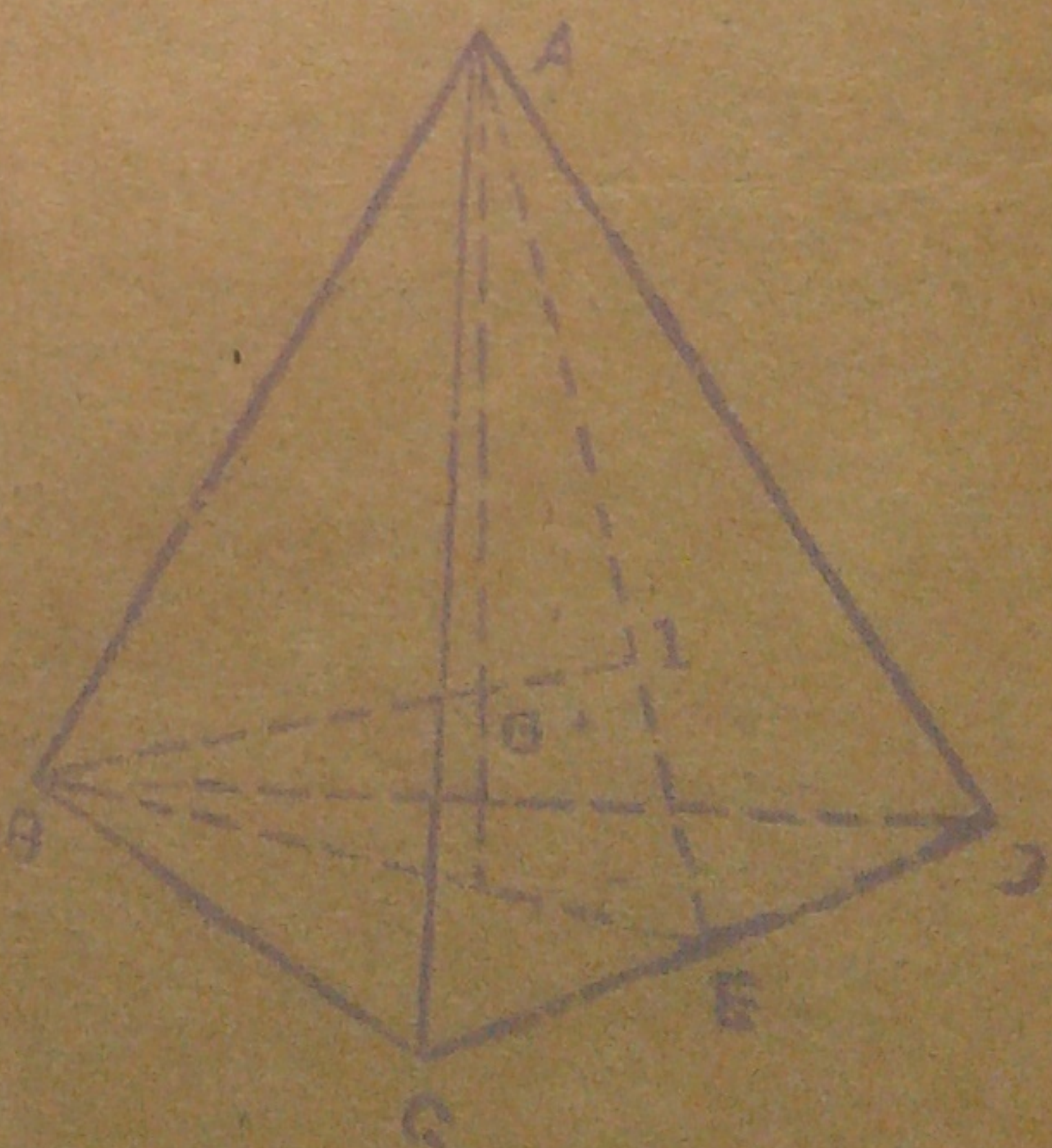
$$NM'/AA' = B'M'/B'A' = 1/(k+1) \text{ hay}$$

$$NM' = AA'/(k+1).$$

Do đó

$$MM' \leq MN + NM' = (AA' + kBB')/(k+1)$$

Trở lại bài toán ban đầu: Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD. BG kéo dài cắt mặt phẳng tại I (I sẽ là trọng tâm tam giác này). AI dài cắt CD tại E (E là điểm giữa của cạnh CD). Ta có các tỉ số:





$$BG/GI = 3, AI/IE = 2 \text{ và } CE/ED = 1.$$

Tương tự đối với tứ diện  $A'B'G'D'$  ta có các điểm  $G', I', E'$  và  $B'G'/G'I' = 3,$

$$A'I'/I'E' = 2 \text{ và } C'E'/E'D' = 1.$$

Lần lượt áp dụng bổ đề trên:

- Với  $E, E'$  trên đoạn  $GD, G'D'$  và  $k = 1$

ta có:

$$EE' \leq (CC' + DD')/2.$$

- Với  $I, I'$  trên đoạn  $AE, A'E'$  và  $k = 2$  ta có:

$$II' \leq (AA' + 2EE')/3 \leq (AA' + CC' + DD')/3$$

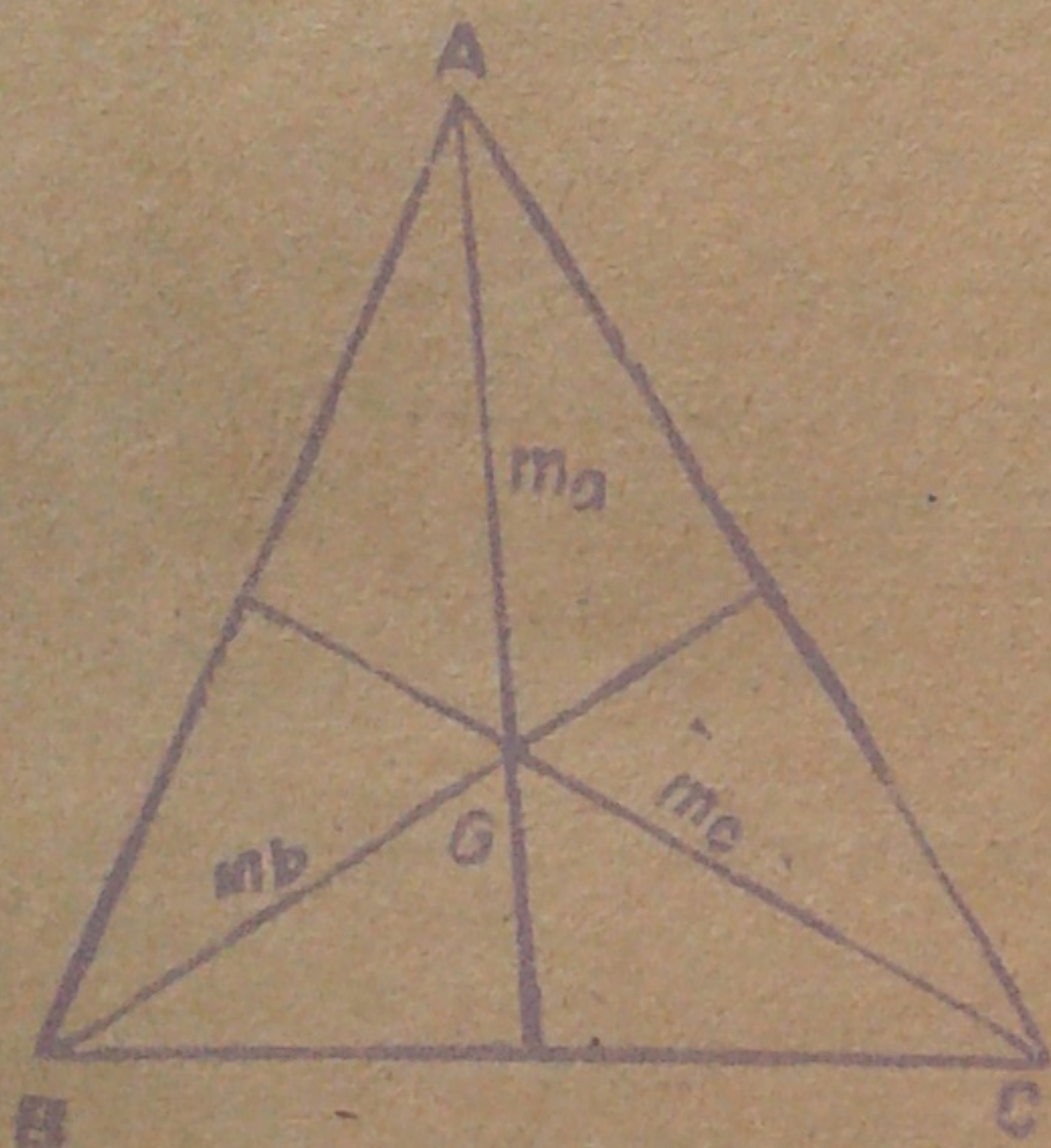
- Với  $G, G'$  trên đoạn  $BI, B'I'$  và  $k = 3$  ta có:

$$GG' \leq (BB' + 3II')/4$$

$$\leq (BB' + AA' + CC' + DD')/4 \text{ (đ.p.c.m.)}$$

T.T.

**Bài 9/102.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$ , và các trung tuyến  $m_a, m_b, m_c$ . Chứng minh rằng  $a + b + c < \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$ .



Lời giải. Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác thì  $GB + GC > BC$  tức là

$$\frac{2}{3}(m_b + m_c) > a. \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{2}{3}(m_c + m_a) > b \quad (2)$$

$$\frac{2}{3}(m_a + m_b) > c \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) về với về ta được

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c \text{ (đ.p.c.m.)}$$

**Bài 10/102.** Cho tứ giác ngoại tiếp  $ABCD$  có diện tích không vượt quá 4. Từ một điểm  $M$  tùy ý trong tứ giác, hạ các đường vuông góc  $MA_1, MB_1, MC_1, MD_1$  lần lượt xuống các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ .

Chứng minh rằng:  $\min(MA_1, MB_1, MC_1, MD_1) \leq 1$ .

Lời giải (của bạn Nguyễn Duy Quân, lớp 9N Hồng Quang, Hải Hưng; Nguyễn Thị Việt Nga, lớp 10H cấp 3 Bình Lục, Hà Nam Ninh và nhiều bạn khác).

Gọi bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác  $ABCD$  là  $r$ , diện tích tứ giác là  $S$ , các cạnh là  $a, b, c, d$  (với  $a + c = b + d$ ). Khi đó ta có:

$$2S = bc \sin C + ad \sin A \leq bc + ad \text{ và}$$

$$2S = ab \sin B + cd \sin D \leq ab + cd$$

$$\text{Do đó } 4S \leq ab + cd + bc + ad$$

$$= (a + c)(b + d) = (a + c)^2.$$

$$\text{Một khác } S = \frac{1}{2} r(a + b + c + d) = r(a + c).$$

Nên  $4r \leq a + c$  hay  $4r^2 \leq r(a + c) = S \leq 4$ . Từ đó suy ra  $r \leq 1$

Ta lại có:

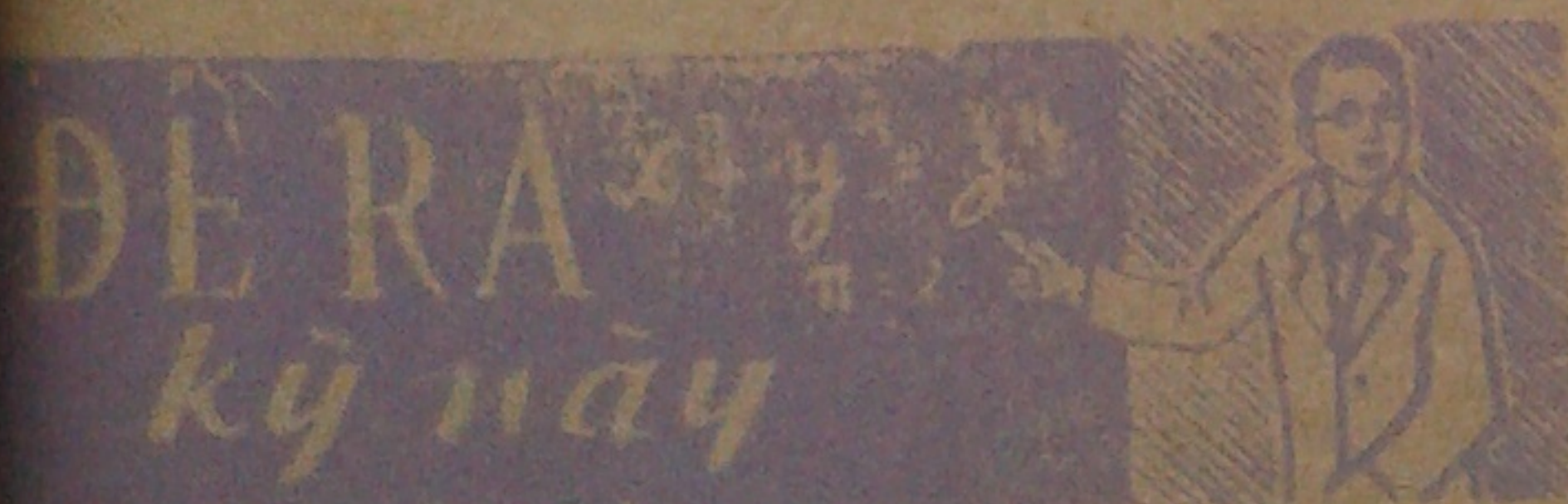
$$S = \frac{1}{2} (MA_1 \cdot a + MB_1 \cdot b + MC_1 \cdot c + MD_1 \cdot d)$$

$$\geq \frac{1}{2} m(a + b + c + d) = m(a + c)$$

$$\text{Với } m = \min(MA_1, MB_1, MC_1, MD_1).$$

Do đó  $S = r(a + c) \geq m(a + c)$ , từ đây ta có  $m \leq r \leq 1$ , đó là điều cần chứng minh.

T.T.



**Bài 1/105.** Chứng minh rằng với mọi giá trị nguyên của  $x$  thì biểu thức

$$1964x^3/3 + 1979x^2/2 + 5x/6$$

có giá trị nguyên.

Đặng Hải Nam (Hải Hưng)

**Bài 2/105.** Từ điểm  $P$  di động trên cạnh  $BC$  của một tam giác cân  $ABC$  ( $AB = AC$ ), người ta kẻ các đường song song với hai cạnh kia, cắt  $AB$  tại  $Q$ ,  $AC$  tại  $R$ . Tìm quỹ tích các điểm  $D$  đối xứng với  $P$  qua  $QR$ .

Đặng Hải Nam



## HỌC SINH TÌM TÔI

Bài 3/105. Cho các số  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn điều kiện  $x_i \geq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Chứng minh bất đẳng thức

$$2^{n-1} \geq (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)/(1+x_1x_2\dots x_n)$$

Nam Hà (ĐHTH Huế)

Bài 4/105. Cho những số tự nhiên  $n$  và  $m$  lớn hơn 1. Hãy tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} = y$$

$m$  dấu căn

Dương Quốc Việt (10 + 3 Tây Bắc)

Bài 5/105. Giải phương trình

$$\log_3(x^2 - 3x - 13) = \log_2 x.$$

Nguyễn Đức Triệu (Hải Hưng)

Bài 6/105. Giải phương trình

$$\log_2(x^2 + |x| - 1) = \sqrt{1 - x^2}$$

Nguyễn Đức Triệu

Bài 7/105. Gọi  $A = x - 2y + 3z$ . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$  với  $x, y, z$  là những số tự nhiên thỏa mãn đẳng thức sau

$$12x^2 + 11y^2 + 34z^2 - 4xy - 8xz - 36yz + 16x + 8y - 24z + 7 = 0$$

Ta Văn Tự (ĐHBK Hà Nội)

Bài 8/105. Tìm tất cả các số tự nhiên  $m$  cho với mọi số tự nhiên  $n$  ở trong khoảng  $1 < n < m$  thì phân số  $(m-n)/n$  không có ước chung với  $m$ .

Trần Lương Nghiệp  
(Lớp 9CT - ĐHSP Vinh)

Bài 9/105. Cho đẳng thức  $[x]^2 - x[x] + x^5 + x = 2x^3 + (x^2 - 1)^2[x]$  trong đó  $[x]$  là số nguyên lớn nhất không quá  $x$ , còn  $\{x\} = x - [x]$ .

Tìm tất cả các giá trị thực của  $x$  thỏa đẳng thức trên.

Đỗ Đức Lưu  
(Lớp 9N - Hồng Quang, Hải Hưng)

Bài 10/105. Cho  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $x_1, x_2$  là hai số khác 0, khác nhau, thỏa mãn

$$f(x_1) = f(x_2) = m$$

$$\text{và } m(x_1 + x_2 - 1) + c(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0.$$

Chứng minh rằng  $f(x)$  có ít nhất một nghiệm tự nhiên. Tìm nghiệm đó.

Nguyễn Quang Sơn  
(10 CT - ĐHSP Vinh)

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

## DÙNG PHƯƠNG PHÁP SƠ CẤP ĐỂ TÌM ĐIỀU KIỆN CHO HÀM SỐ CÓ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT HAY GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT TRÊN MỘT ĐOẠN

QUỐC TRINH

**T**RONG toán học thường chúng ta phải giải những bài toán tìm điều kiện để một hàm nào đó có giá trị nhỏ nhất hay giá trị lớn nhất trên một đoạn cũng như thực tiễn đời sống và sản xuất thường yêu cầu chúng ta, chẳng hạn, tìm điều kiện để dùng ít nguyên vật liệu nhất, để giá thành hàng hóa thấp nhất, để tốn ít công sức nhất, để đạt nhiều sản phẩm nhất với một số nguyên liệu nhất định... khi sản xuất...

Bài báo này nhằm trình bày điều kiện để hàm số có giá trị lớn nhất, có giá trị nhỏ nhất trên một đoạn, mà các bạn học sinh lớp tám cũng hiểu được, và vận dụng phương pháp sơ cấp để giải một số bài toán thực tiễn.

1. Một vài định lý về điều kiện để tích của hai số dương, biến thiên có giá trị lớn nhất khi tổng các thừa số không đổi.

Định lý 1. Trường hợp tích có hai thừa số dương mà tổng của chúng không đổi.



Tích của hai thừa số dương và biến thiên mà tổng của chúng không đổi sẽ lớn nhất khi hai thừa số đó bằng nhau.

**Chứng minh.** Giả sử  $x, y$  là hai số dương và biến thiên nhưng  $x + y = a$  không đổi.

$$\text{Ta có } 4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2 = a^2 - (x - y)^2.$$

Vì  $x$  và  $y$  đều dương nên tích  $xy$  sẽ có giá trị lớn nhất khi  $(x - y)$  nhỏ nhất tức là khi  $x - y = 0$  hay  $x = y$ .

**Bài toán 1.** Người ta có sẵn vật liệu đủ để tạo 1 mét vườn. Đám đất được dùng một phần làm vườn đã sẵn một phía có tường rào rồi. Khi tận dụng bức tường đó thì nên chọn kích thước của cái vườn hình chữ nhật như thế nào để, với vật liệu đã có, rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất.

**Lời giải.** Giả sử mảnh vườn cần rào là hình chữ nhật ABCD. Cạnh AD đã có tường rào sẵn.

Đặt  $AB = DC = y$ ,  $BC = AD = x$  thì chiều dài phải rào là:  $x + 2y = l$ .

$$\text{Diện tích mảnh vườn là: } S = xy = (l - 2y)y.$$

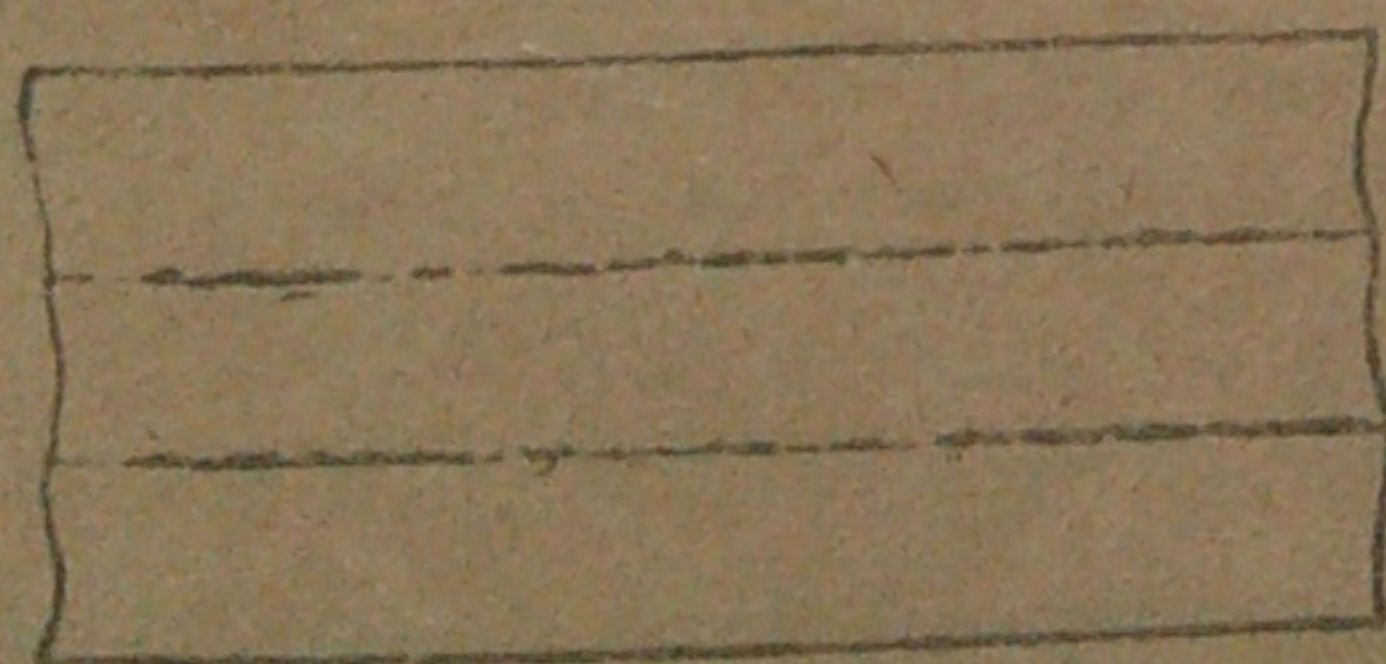
$S$  lớn nhất khi tích  $(l - 2y)y$  lớn nhất tức cũng là khi  $2S = (l - 2y)2y$  lớn nhất, mà  $l - 2y > 0$ ,  $2y > 0$  và  $(l - 2y) + 2y = l$  không đổi, nên theo định lý 1 ta suy ra  $2S$  lớn nhất và  $S$  lớn nhất khi  $2y = l - 2y$  hay  $y = l/4$  và  $x = l - 2y = l/2$  tức khi  $x = 2y$ , nghĩa là chiều dài của vườn phải gấp đôi chiều rộng của vườn.

Dựa vào định lý 1 ta chứng minh thêm được định lý sau đây:

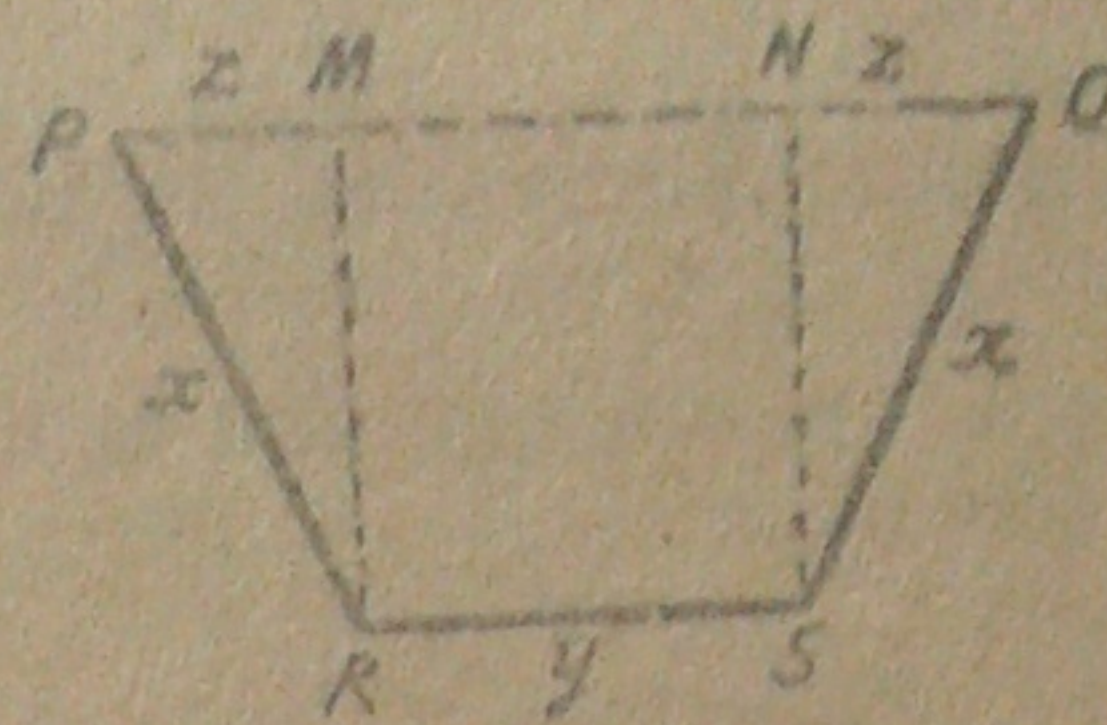
**Định lý 2.** Trường hợp tích có nhiều thừa số dương mà tổng của chúng không đổi.

Tích của nhiều thừa số dương và biến thiên mà tổng của chúng không đổi sẽ lớn nhất khi các thừa số đó bằng nhau.

**Bài toán 2.** Với một miếng tôn hình chữ nhật có chiều rộng 1 mét, người ta muốn làm một máng nước (hở ở trên và gập theo các đường thẳng không liền nét như ở h.1) có thiết diện thẳng là hình thang cân (h. 2). Hỏi phải chọn kích thước của thiết diện thẳng đó như thế nào để thiết diện thẳng đó lớn nhất?



Hình 1



Hình 2

**Lời giải.** Đặt các cạnh bên của thiết diện thẳng PRSQ của máng là  $x$  và đáy nhỏ của hình thang cân ấy là  $y$ , hiệu  $PQ - RS = 2z$  (hình 2).

Theo giả thiết thì  $2x + y = l$ . Thiết diện thẳng có diện tích bằng:

$$S = [(y + 2z) + y] \cdot \sqrt{x^2 - z^2} / 2 \quad (1)$$

$$= \sqrt{(y + z)^2 (x^2 - z^2)}$$

Bài toán quy về việc chọn  $x, y, z$  (đều dương) sao cho  $S$  có giá trị lớn nhất.

Từ (1) ta suy ra:

$$S^2 = (y + z)^2 (x^2 - z^2)$$

$$= (y + z)^2 (x + z) (x - z)$$

$S$  có giá trị lớn nhất khi  $S^2$  có giá trị lớn nhất hay khi  $3S^2$  có giá trị lớn nhất mà

$$3S^2 = (y + z) (y + z) (x + z) (3x - 3z).$$

Các thừa số của vế phải đều dương và có tổng là:

$$y + z + y + z + x + z + 3x - 3z = 2y + 4x = 2l,$$

mà  $l$  không đổi nên  $2l$  không đổi.

Vậy theo định lý 2 thì  $3S^2$  lớn nhất (nên  $S$  cũng lớn nhất) khi

$$y + z = x + z \quad (a)$$

$$x + z = 3x + 3z \quad (b)$$

Từ (a) ta suy ra  $y = x$  mà  $2x + y = l$  theo giả thiết nên  $y = x = l/3$ .

Từ (b) ta suy ra  $z = x/2 = l/6$ .

Vậy  $z$  bằng nửa cạnh huyền trong tam giác vuông PMR nên  $\angle PRM = 30^\circ$ .

Thiết diện thẳng của máng lớn nhất khi hai cạnh bên của thiết diện thẳng và cạnh đáy nhỏ của thiết diện thẳng bằng nhau và cạnh bên tạo thành với cạnh đáy nhỏ góc  $120^\circ$ .

**Định lý 3.** Trường hợp tích gồm các thừa số là các lũy thừa mà tổng các cơ số (đều dương) của các lũy thừa không đổi

Nếu tổng của  $n$  số dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bằng một giá trị dương  $S$  không đổi thì tích

$$P = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

có giá trị lớn nhất khi:

$$x_1/m_1 = x_2/m_2 = \dots = x_n/m_n.$$

trong đó  $m_1, m_2, \dots, m_n$  là những số hữu tỉ dương cho trước.



**Chứng minh.** Trước hết ta chứng minh định lý với trường hợp  $m_1, m_2, \dots, m_n$  là những số tự nhiên.

Tích  $P$  có giá trị lớn nhất khi tích  $Q$  sau đây có giá trị lớn nhất:

$$Q = \left(\frac{x_1}{m_1}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{x_2}{m_2}\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{x_n}{m_n}\right)^{m_n}$$

Ta có tổng các thừa số của  $Q$  bằng  $S$  không đổi nên theo định lý 2 thì  $Q$  lớn nhất khi

$$x_1/m_1 = x_2/m_2 = \dots = x_n/m_n.$$

Đó cũng là điều kiện cho  $P$  lớn nhất khi  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$

Bạn đọc chứng minh tiếp: trường hợp  $m_1, m_2, \dots, m_n$  là những phân số.

**Bài toán 3.** Với một miếng kẽm hình tròn người ta muốn làm một cái phễu mặt nón bằng cách cắt bớt một quạt tròn từ miếng kẽm tròn (hình 3 và 4). Hỏi cung của quạt tròn bị cắt đi phải là bao nhiêu độ để phễu có thể tích lớn nhất.

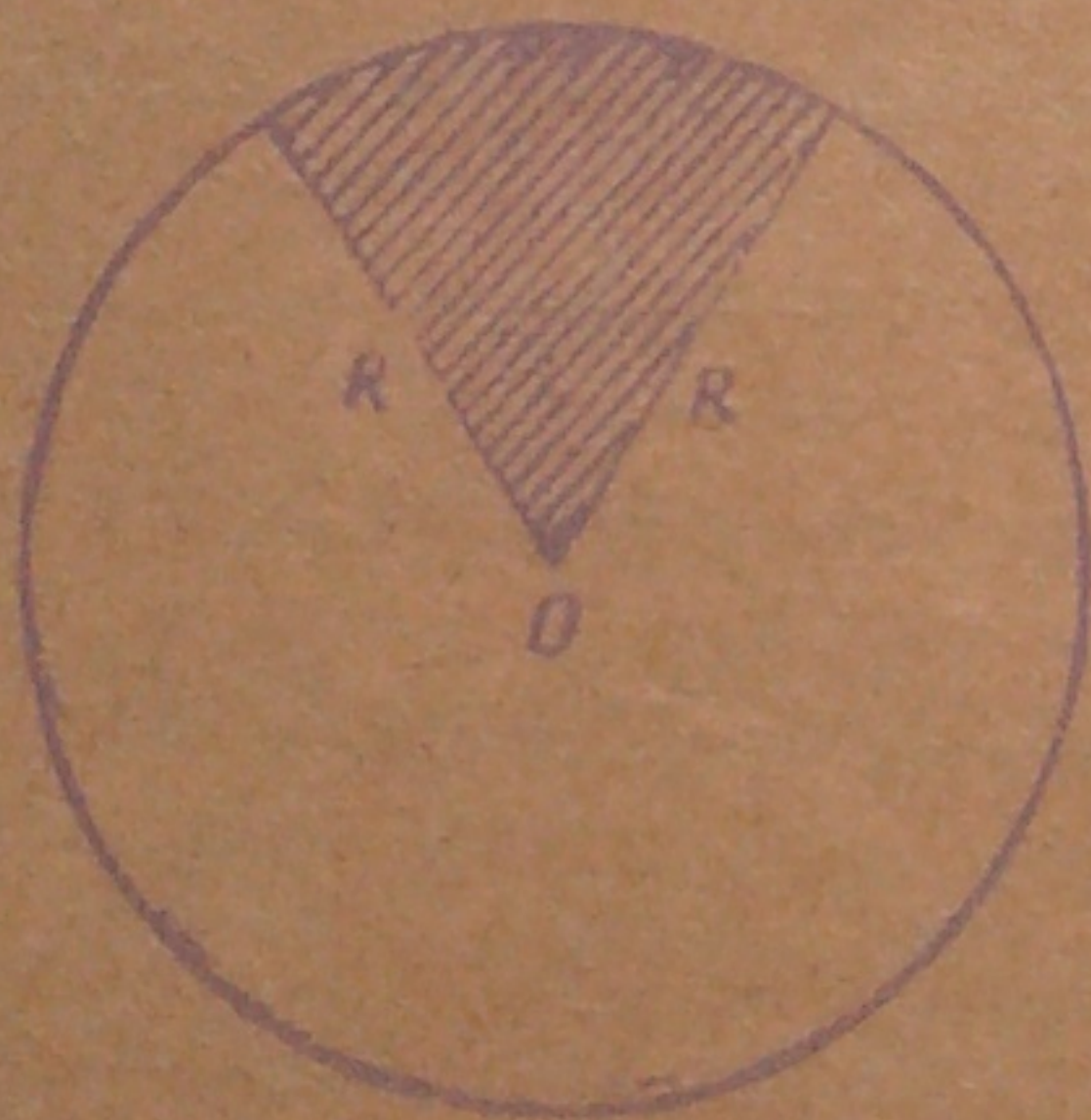
**Lời giải.** Đặt cung quạt tròn giữ lại để làm phễu là  $x$ , bán kính miếng kẽm là  $R$ , bán kính miệng phễu là  $r$  và chiều cao của phễu là  $h$  thì:

$$2\pi r = x$$

nên

$$r = x/2\pi$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - x^2/4\pi^2}$$



Hình 3



Hình 4

Thể tích của phễu là:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Giá trị  $V$  sẽ lớn nhất khi  $(x/2\pi)^2 \sqrt{R^2 - x^2/4\pi^2}$  lớn nhất cũng như khi

$$T = (x/2\pi)^4 (R^2 - x^2/4\pi^2) \text{ lớn nhất.}$$

Hai thừa số ở vế phải trên đều dương và

$$(x/2\pi)^2 + R^2 - (x/2\pi)^2 = R^2 \text{ không đổi.}$$

Nên theo định lý 3 thì  $T$  lớn nhất (nên cũng lớn nhất) khi.

$$(x/2\pi)^2 : [R^2 - (x/2\pi)^2] = 2 : 1$$

Từ đó:

$$(x/2\pi)^2 = 2R^2 - 2(x/2\pi)^2$$

hay

$$3(x/2\pi)^2 = 2R^2$$

tức

$$x \approx 3,15R$$

Tính ra thì góc ở tâm ứng với quạt tròn làm phễu xấp xỉ  $295^\circ$  nên góc ở tâm của quạt tròn cắt đi xấp xỉ  $65^\circ$  thì phễu có thể tích lớn nhất.

2. Một vài định lý về điều kiện để tổng các số hạng biến thiên và dương có giá trị nhỏ nhất khi tích của chúng không đổi.

Đề nghị bạn đọc tự chứng minh các định lý sau đây, và dựa vào đó giải các bài toán đề.

**Định lý 4.** Trường hợp tổng có hai số hạng dương mà tích của chúng không đổi.

Tổng của hai số hạng biến thiên và dương mà tích của chúng không đổi sẽ nhỏ nhất khi hai số hạng đó bằng nhau.

**Bài toán 4.** Một nhà gạch bị đổ còn lại bức tường mà chiều dài là 12 mét. Người ta muốn xây lại nhà mới với diện tích nền trong nhà  $112m^2$  và tận dụng bức tường cũ lại nhưng bức tường cũ cũng phải được sửa (phần thì bị phá để lấy vật liệu xây dựng phần thì được sửa sang thêm).

1) Tiền sửa sang thêm bức tường cũ tính theo mỗi mét dài bằng 25% tiền xây một mét tường mới với vật liệu mới.

2) Tiền phá bức tường cũ cộng với tiền xây tường mới với vật liệu của tường cũ tính theo mỗi mét dài bằng 50% tiền xây dựng một mét tường mới với vật liệu mới.

Trong các điều kiện đó, phải sử dụng bức tường cũ như thế nào để việc xây hoàn thành cả bốn bức tường của nhà là rẻ nhất?

**Định lý 5.** Trường hợp tổng gồm nhiều số hạng dương mà tích của chúng không đổi.

Tổng của nhiều số hạng dương mà tích của chúng không đổi sẽ nhỏ nhất khi các số hạng bằng nhau.



**Định lý 6.** Trường hợp tổng gồm nhiều số hạng dương mà tích các lũy thừa có các cơ số là các số hạng đó không đổi.

Nếu có  $n$  số dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và tích các lũy thừa  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  không đổi, trong đó  $m_1, m_2, \dots, m_n$  là những số hữu tỉ dương cho trước, thì tổng  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  có giá trị nhỏ nhất khi  $x_1/m_1 = x_2/m_2 = \dots = x_n/m_n$ .

Bài toán 5. Người ta muốn sản xuất vung mặt nón dẹt được thể tích  $\pi a^3/3$ . Với điều kiện nào của mặt nón thì việc sản xuất loại vung ấy tốn ít nguyên liệu nhất?

## PHÉP QUAY VÀ MỘT ỨNG DỤNG CỦA NÓ

BUI HƯNG — Lớp 2C Toán  
Đại học Sư phạm 2 Hà Nội

**TRONG** bài "Sử dụng định lý hàm số cosin để giải một dạng bài toán" đăng trong số báo 98, tác giả đã vận dụng định lý hàm số cosin bước đầu giải quyết khá thành công một số bài toán loại: Xác định hình dạng của một tam giác mà đỉnh là ba đỉnh mới của ba tam giác có dạng xác định dựng thêm ở ngoài một tam giác đã cho. Là một độc giả yêu toán tôi đã cố gắng giải quyết câu hỏi tác giả đã đặt ra: Phải chăng sử dụng định lý hàm số cosin là phương pháp chung để giải bài toán cùng dạng? Trong khi giải các bài toán có dạng đã nêu, ngoài việc sử dụng phương pháp ở trên tôi tìm một hướng đi mới: Sử dụng phép quay, đó là ý nghĩ của tôi trong thời gian qua. Với phương pháp này, bài toán nêu ở trên vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn, song nó cho phép ta — với cái nhìn và ý nghĩ đúng đắn táo bạo — giải được một số bài toán khá ngắn gọn. Bây giờ tôi sẽ trình bày cùng các bạn.

Nếu bước đầu làm quen với phép quay thì bạn chỉ cần nhớ rằng khi quay một hình  $M$  quanh điểm  $O$  một góc  $\alpha$  nào đó thì hình dạng và độ lớn của  $M$  được bảo toàn, còn một đường thẳng  $a$  của hình  $M$  sau phép quay biến thành  $a'$ , thì góc giữa  $a$  và  $a'$  là  $\alpha$ . Ta sử dụng phép quay để giải quyết một số bài toán có dạng đã nêu.

**Bài toán 1.** Dựng về phía ngoài tam giác  $ABC$  hai tam giác vuông cân  $ABC_1$  và  $ACB_1$ .  $I$  là trung điểm của đoạn  $BC$ . Chứng minh  $C_1IB_1$  là góc vuông.

**Giải:** Lấy  $BC$  làm cạnh huyền ta dựng tam giác vuông cân  $BCA_1$ . Quay tam giác  $CB_1I$  quanh  $C$  góc  $45^\circ$  thì  $B_1 \rightarrow B_1', I \rightarrow I_1$ . Ta có:

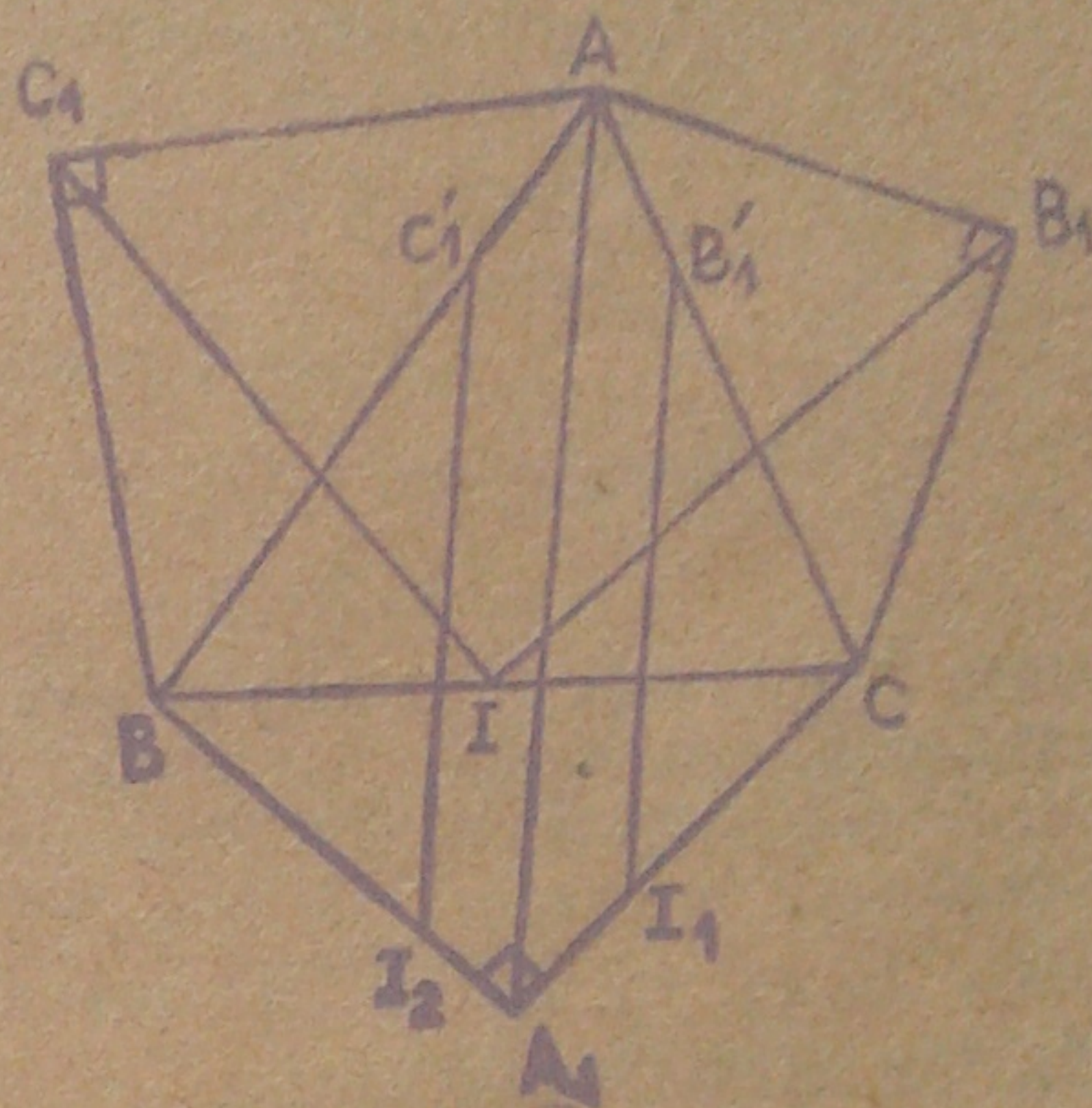
$$CB_1'/CA = CB_1/CA = \sqrt{2}/2;$$

$$CI_1/CA_1 = CI/CA_1 = \sqrt{2}/2.$$

Vậy

$$CB_1'/CA = CI_1/CA_1 = \sqrt{2}/2$$

(1)



Tương tự khi quay tam giác  $BC_1I$  đi một góc  $45^\circ$  thì  $C_1 \rightarrow C_1', I \rightarrow I_2$ , ta cũng sẽ có

$$BC_1'/BA = BI_2/BA_1 = \sqrt{2}/2 \quad (2)$$

kết hợp (1) và (2) ta có  $C_1'I_2/B_1'I_1$ .

Do đó  $IC_1$  và  $IB_1$  vuông góc với nhau tức là  $C_1IB_1$  bằng 1 vuông.

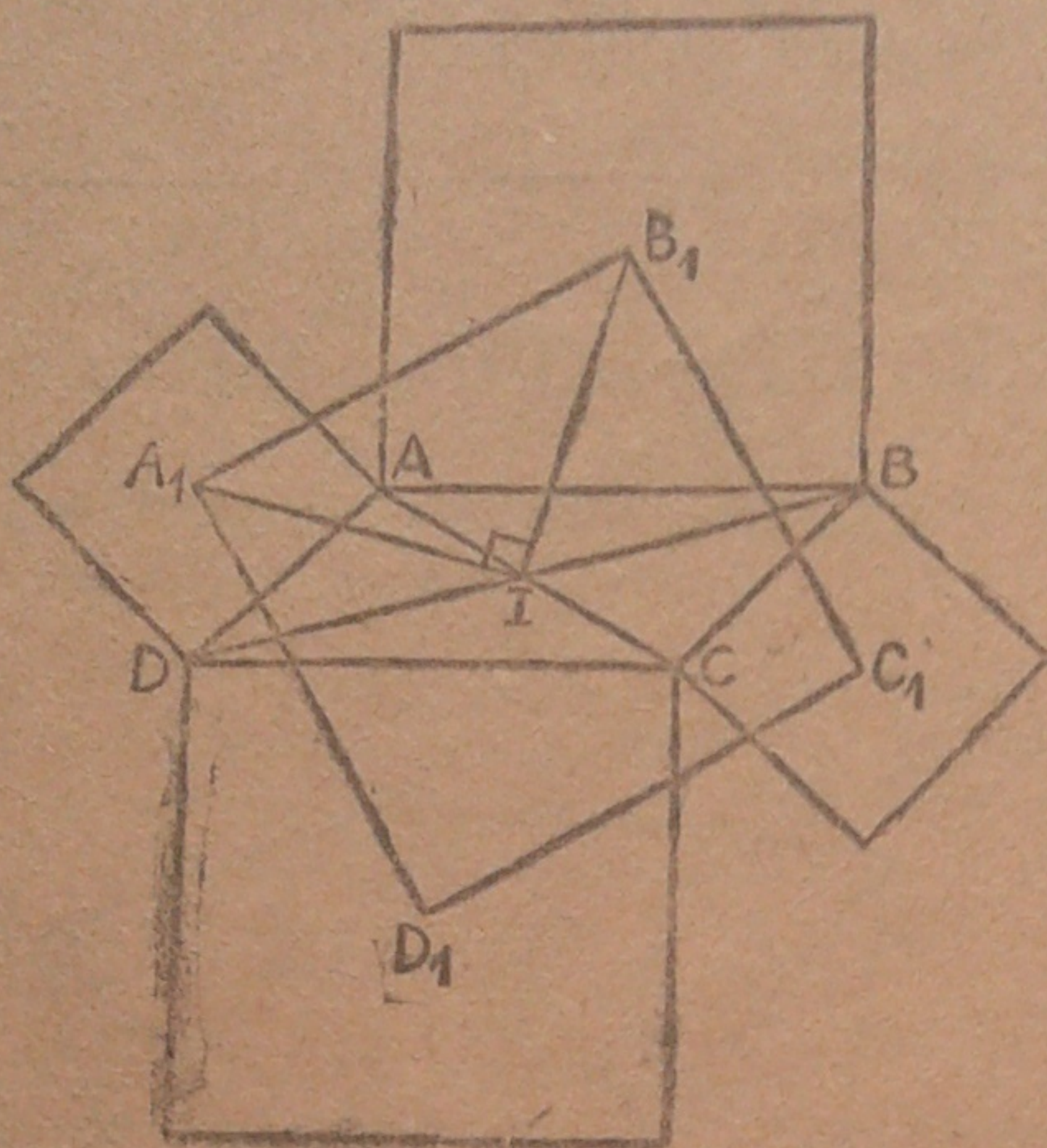
Mặt khác ta cũng thấy  $C_1'I_2 = B_1'I_1 \Rightarrow IC_1 = IB_1$ . Do đó  $IB_1C_1$  là tam giác vuông cân đỉnh là  $I$ .

Rõ ràng cách giải này khá gọn song cần tính ý trong việc dựng thêm tam giác  $BCA_1$  và việc chọn góc quay.

**Bài toán 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , trên các cạnh về phía ngoài của nó ta dựng các hình vuông. Chứng minh tâm của bốn hình vuông này lại là một hình vuông có tâm là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành.



Giải: Có thể nói đây là hệ quả suy ra từ bài toán 1, mời các bạn theo dõi cách giải sau đây. Xét tam giác  $ABD$ ,  $I$  là trung điểm của  $BD$ ,  $AA_1D$  và  $ABB_1$  là hai tam giác vuông cân. Theo



bài toán 1, ta có  $A_1IB_1$  là tam giác vuông cân. Tương tự cho các tam giác  $B_1IC_1$ ,  $C_1ID_1$  và  $D_1IA_1$ . Tổng hợp lại ta có  $A_1B_1C_1D_1$  là hình vuông tâm là  $I$ .

Chú ý  $A_1, B_1, C_1, D_1$  là tâm của bốn hình vuông vừa dựng theo đầu bài.

Với hướng đi đã chọn ta giải tiếp một số bài toán cùng dạng và khó hơn. Để dễ thấy sự ưu việt của phương pháp này ta lấy lại các thí dụ quen thuộc.

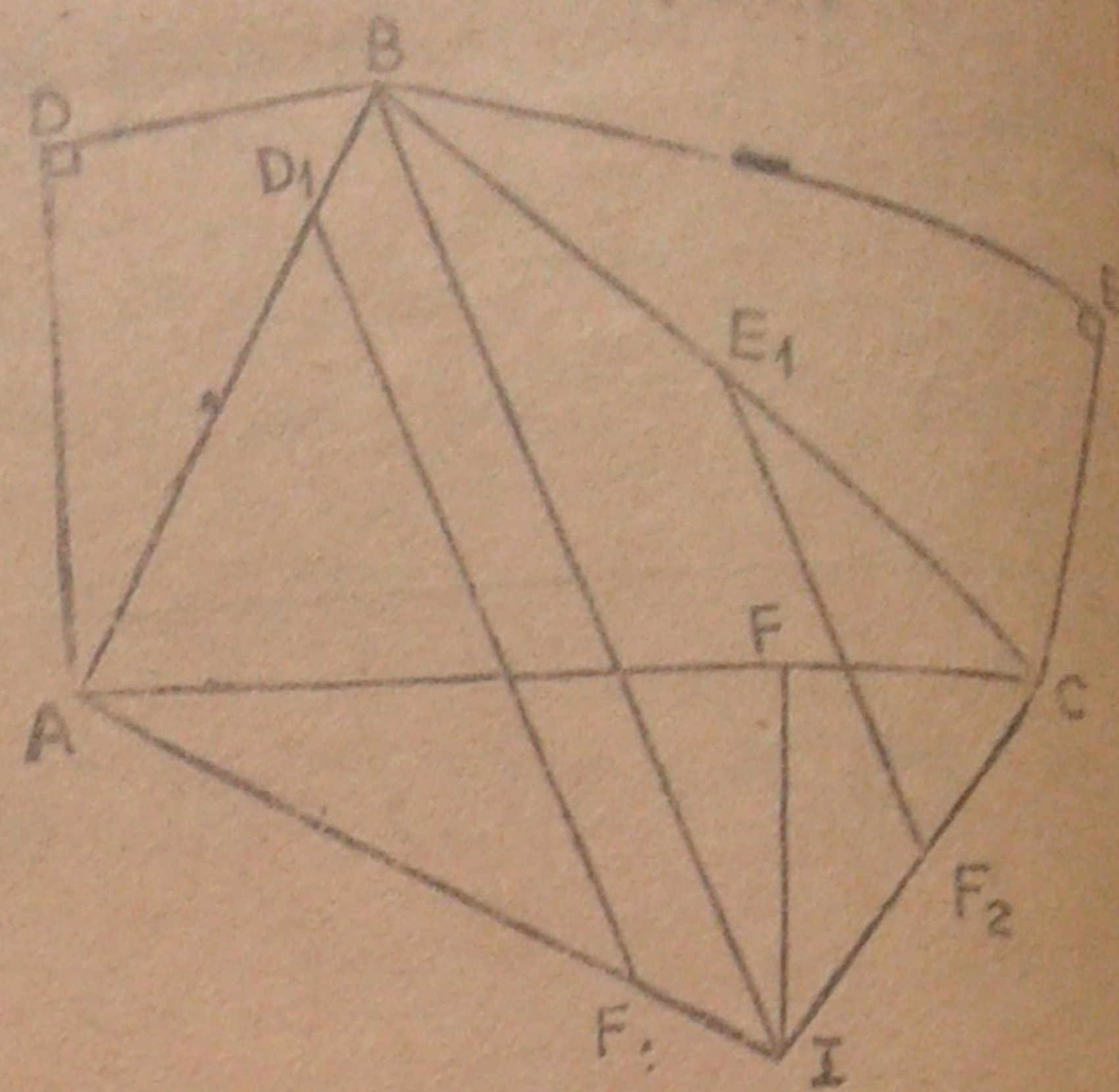
Bài toán 3. (đề thi vòng 1 chọn vào đội tuyển toán quốc tế 1974). Cho tam giác  $ABC$ , dựng ra ngoài trên hai cạnh của tam giác đó hai tam giác vuông  $ABD$  và  $BCE$  sao cho  $\widehat{DAB} = \widehat{EBC} = 30^\circ$ ,  $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ . Lấy  $F$  trên  $AC$  sao cho  $CF = FA/5$ . Tìm ba góc của tam giác  $DEF$ .

Giải: Ta thấy rằng bài toán 3 rất giống bài toán 1 chỉ khác đôi chút như sau:

- Các tam giác dựng thêm là tam giác vuông có các góc nhọn là  $30^\circ$  và  $60^\circ$ .

- Điểm  $F$  chia  $AC$  theo tỉ số  $3:1$ .

Sự khác nhau ấy gợi cho ta thấy rằng việc dựng thêm tam giác phụ phải có những điểm khác trước. Phải chăng cần dựng thêm tam giác đồng dạng với những tam giác đã dựng theo bài ra?



Ta dựng thêm về phía ngoài tam giác một tam giác vuông  $AIC$  sao cho  $\widehat{AIC} = 120^\circ$ ,  $\widehat{ACI} = 60^\circ$ . Khi ấy đoạn  $IF$  chia  $AIC$  thành tam giác đồng dạng với các tam giác  $ABD$ ,  $BCE$  và  $AIC$ . Thực hiện hai phép quay

1 - Quay tam giác  $ABD$  đi góc  $-30^\circ$  quanh  $D \rightarrow D_1, F \rightarrow F_1$ , ta có

$$AD_1/AB = AF_1/AI = \sqrt{3}/2 \Rightarrow D_1F_1/BI$$

$$\text{và } D_1F_1/BI = \sqrt{3}/2$$

2 - Quay tam giác  $CBE$  đi góc  $60^\circ$  quanh  $E \rightarrow E_1, F \rightarrow F_2$ , ta cũng suy ra được  $E_1F_2/BI = 1/2$

$$\text{và } E_1F_2/BI = 1/2$$

Chú ý rằng  $D_1F_1$  là ảnh của  $DF$  qua quay thứ nhất,  $E_1F_2$  là ảnh của  $EF$  qua quay thứ 2, suy ra  $DF \perp FE$ .

Mặt khác  $EF/DF = E_1F_2/D_1F_1 = 1/\sqrt{3}$ .  $\widehat{EDF} = 30^\circ$  còn  $\widehat{DFE} = 60^\circ$ .

Đối với bài toán thi quốc tế lần 17 ta giải khá dễ dàng.

Bài toán 4. Cho tam giác  $ABC$ . Dựng phía ngoài tam giác ấy các tam giác  $BQP$  và  $ABR$  sao cho  $\widehat{PBC} = \widehat{BAQ} = 45^\circ$

$$\widehat{BCP} = \widehat{QBA} = 30^\circ$$

$$\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^\circ.$$

Chứng minh tam giác  $QRP$  vuông cân.

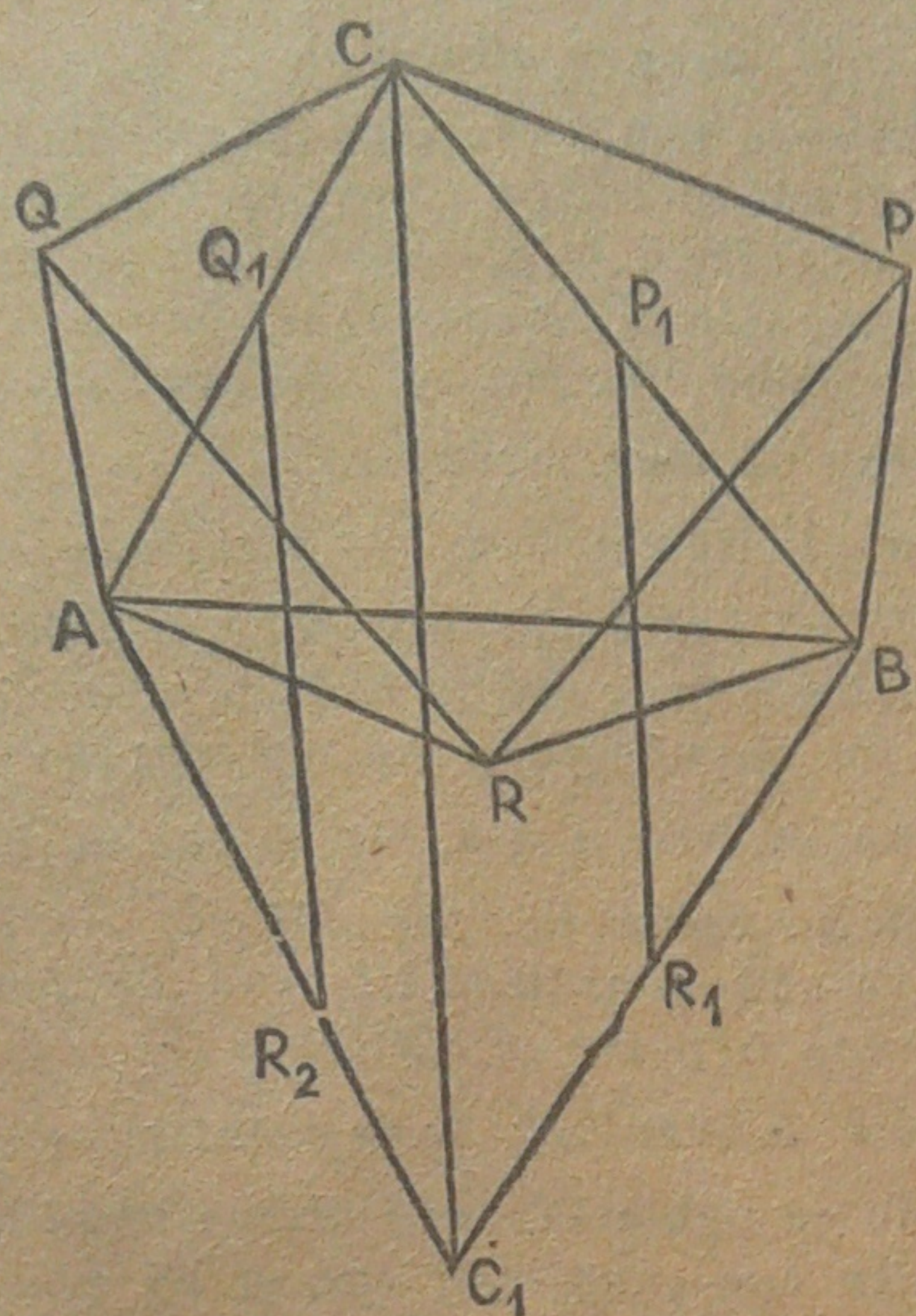
Giải: Bài toán này có nhiều cách giải, cách có một cái hay riêng của nó. Sau đây xin trình bày một cách giải không đòi hỏi thức cao hơn lớp 8 phổ thông.

Dựng ra phía ngoài  $ABC$  một tam giác  $ABC_1$  (xem hình).

Rõ ràng  $\triangle BPC \sim \triangle AQC \sim \triangle ARC_1 \sim \triangle BQC_1$ . Quay  $\triangle BPC$  quanh  $B$  một góc  $45^\circ$  thì  $P \rightarrow R_1$  và có  $BP_1/BC = BR_1/BC_1 = BP/BC$



Tương tự, quay  $\triangle AQR$  đi một góc  $-45^\circ$  thì  $Q \rightarrow Q_1, R \rightarrow R_2$  cũng sẽ có:  
 $AQ_1/AC = AR_2/AC_1 = AQ/AC$  (2)



So sánh (1) và (2) chú ý thêm rằng  $BP/BC = AQ/AC$  do  $\triangle AQC \sim \triangle BPC$ ,  
 từ đó rút ra

$$P_1R_1 \parallel Q_1R_2 \text{ và } P_1R_1 = Q_1R_2.$$

Suy ra  $QR \perp RP$  và  $QR = RP$ .

Tam giác  $QRP$  là tam giác vuông cân.

Nói chung các bài toán nêu ra đã được giải quyết trọn vẹn song ta không dừng ở đây. Nếu để ý đến những điểm giống nhau và khác nhau của các bài toán trên ta thấy rằng: Những tam giác dựng thêm theo đầu bài có dạng khá đặc biệt. Phải chăng chúng chỉ là những trường hợp riêng của bài toán tổng quát nào đây? Bài toán 1 và 3 có những nét khá giống nhau được giải hoàn toàn như nhau. Nếu quan niệm góc suy biến thành đoạn thẳng là góc nhọn  $0^\circ$  thì ta thấy rằng cả ba bài toán 1, 3 và 4 đều rất giống nhau: Các tam giác dựng thêm có ba loại góc nhọn – được xấp đặt không phải là tùy tiện – mà tổng của chúng là  $90^\circ$ . Phải chăng đây là điều kiện phải có, đây là đầu mối của vấn đề chăng? Từ những phát hiện nhỏ ấy cộng với tính tò mò của mình, tôi đã đề ra bài toán 10/97 và lời giải của nó đã được đăng trên số báo 100.

Từ kết quả của bài toán đó ta soi lại các bài toán 1, 3, 4 thì thấy những nhận xét và kết quả đã thu được là đúng.

Tìm và giải bài toán tổng quát của dạng bài toán trên là một ý nghĩ đang dần vật và thời thúc tôi trong thời gian qua.

Các bạn thân mến! Qua bài báo tôi muốn giới thiệu cùng các bạn một phương pháp giải toán; đồng thời vạch ra một thắc mắc, một điều chưa được giải quyết để các bạn suy nghĩ thêm. Hẹn gặp lại các bạn.

## TOÁN HỌC

và

ĐỜI SỐNG



### PHƯƠNG TRÌNH TỰ HỌC

PHAN ĐỨC THÀNH

**T**RONG quá trình học tập và rèn luyện ở nhà trường, người học sinh luôn luôn được thực tiễn cuộc sống phong phú thường xuyên tác động vào mỗi người, nhất là thực tiễn của 3 cuộc cách mạng.

Để rèn luyện thành con người mới xã hội chủ nghĩa, người học sinh phải biết tiếp thu tốt những nhân tố tích cực đồng thời phải biết đấu tranh để loại bỏ những nhân tố tiêu cực của xã hội cũ còn sót lại.

Bài này giới thiệu phương trình tự học, biểu diễn động thái của quá trình mà người học sinh

có được thói quen tiếp thu toàn bộ những tác động nhất định của môi trường bên ngoài.

#### 1 – THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỰ HỌC

Gọi  $u_{n+1}$  là số đo khả năng khách quan sự tiếp thu của người học sinh trước một tác động nào đó của môi trường bên ngoài sau  $n+1$  lần gặp lại.  $u_{n+1}$  được biểu thị bằng một tỉ lệ phần trăm, nên ta luôn luôn có

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

$u_{n+1} \rightarrow 1$  khi khả năng tiếp thu của người học sinh là « chắc chắn » hay « hầu như chắc chắn » trong suốt quá trình học tập.

$u_{n+1} \rightarrow 0$  khi khả năng tiếp thu của người học sinh rất yếu.

Qua thực tiễn người ta nhận thấy rằng  $u_{n+1}$  phụ thuộc vào những tiếp thu trước đó của người học sinh. Khả năng tiếp thu của người học sinh sau tác động thứ  $n$  càng lớn thì  $u_{n+1}$  càng lớn, đồng thời khi tính gần đúng có thể xem sự phụ thuộc này là tuyến tính. Từ đó ta có phương trình



(1)  $u_{n+1} = a + mu_n$   
 trong đó  $a$  và  $m$  là các hằng số  $> 0$  mà ý nghĩa của nó ta sẽ đề cập đến ở sau này.

Phương trình (1) biểu diễn động thái của quá trình mà người học sinh có được thói quen tiếp thu toàn bộ những tác động nhất định của môi trường bên ngoài. Ta gọi (1) là *phương trình tự học* của học sinh.

Bây giờ ta viết (1) dưới dạng khác.

Đặt  $m = 1 - a - b$  ( $b \geq 0$ ).

Do  $m \geq 0$  nên  $a + b \leq 1$ .

Khi đó

$$u_{n+1} = a + (1 - a - b)u_n \quad (2)$$

$$= u_n + a(1 - u_n) - bu_n$$

$$\text{Vậy } u_{n+1} - u_n = a(1 - u_n) - bu_n \quad (3)$$

Phương trình (3) chỉ rõ «sự tiến bộ» trong quá trình «tự học» của người học sinh vì về trái được thể hiện bởi hiệu  $u_{n+1} - u_n$ .

Ta viết vế phải của (3) dưới dạng

$$a(1 - u_n) + b(0 - u_n).$$

Số hạng  $(1 - u_n)$  biểu thị sự tiến bộ cao nhất có thể có vì kết quả tốt nhất đạt được khi  $u_n = 1$ . Số hạng  $(0 - u_n)$  biểu thị sự tiến bộ thấp nhất có thể vì kết quả xấu nhất đạt được khi  $u_n = 0$ .

Hệ số  $a$  tương ứng với số hạng  $(1 - u_n)$  đặc trưng cho cường độ tác động của những nhân tố tích cực. Hệ số  $b$  tương ứng với số hạng  $-u_n$  đặc trưng cho cường độ tác động của những nhân tố tiêu cực.

## 2 - GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TỰ HỌC

Trước hết ta nhận thấy rằng tồn tại một trạng thái cân bằng  $\bar{u}$ . Đó là trạng thái mà

$$u_{n+1} = u_n = \bar{u}$$

làm cho khả năng tiếp thu cố định ở mức không đổi trong cả quá trình học tập. Lúc này ta có

$$\bar{u} = a + (1 - a - b)\bar{u}$$

Từ đó suy ra nếu  $a + b \neq 0$  thì

$$\bar{u} = a/(a + b) \quad (4)$$

Hiệu

$$u_n - \bar{u} = u_n - \bar{u} \quad (5)$$

đặc trưng cho độ lệch sự tiếp thu so với trạng thái cân bằng.

Từ (2), (3), (4), (5) ta đi đến phương trình

$$u_{n+1} - \bar{u} = (1 - a - b)(u_n - \bar{u}) \quad (6)$$

Bằng qui nạp ta suy ra nghiệm của phương trình (6) là

$$u_{n+1} - \bar{u} = (1 - a - b)^{n+1} u_0 \quad (7)$$

trong đó  $u_0$  là khả năng tiếp thu lúc ban đầu.

## 3 - NHỮNG KẾT LUẬN RÚT RA TỪ PHƯƠNG TRÌNH TỰ HỌC

Từ (7) ta đi đến

**Mệnh đề:**

$$\text{Nếu } 0 < 1 - a - b < 1$$

(tức là nếu  $0 < a + b < 1$ ) thì  $u_{n+1} \rightarrow 0$

$$u_{n+1} \rightarrow a/(a + b)$$

hay

Điều này có nghĩa là: Trong suốt quá trình học tập lâu dài số do khả năng tiếp thu của người học sinh dẫn đến một giới hạn bằng tỷ số cường độ tác động tích cực ( $a$ ) và tổng các cường độ của tác động tích cực và tiêu cực ( $a + b$ ).

Từ mệnh đề trên ta suy ra

**Hệ quả 1.** Nếu  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  thì  $u_{n+1} \rightarrow a$

Điều đó có nghĩa là: nếu đối với người học sinh luôn luôn được những nhân tố tích cực tác động vào thì khả năng tiếp thu hầu như chắc chắn

**Hệ quả 2.** Nếu  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  thì  $u_{n+1} \rightarrow 0$

Điều đó có nghĩa là: nếu đối với người học sinh chỉ có những nhân tố tiêu cực tác động thì khả năng tiếp thu sẽ rất kém.

**Hệ quả 3.** Nếu  $a = b \neq 0$  thì  $u_{n+1} \rightarrow 0.5$

Điều đó có nghĩa là: nếu những nhân tố tích cực và tiêu cực cùng một cường độ như nhau tác động vào người học sinh thì khả năng tiếp thu của người học sinh ở trạng thái bấp bênh (không phân biệt rõ đúng, sai...)

**Chú ý.**

1) Từ công thức (8) ta nhận thấy rằng khả năng tiếp thu của người học sinh chỉ phụ thuộc vào tỉ số  $r = a/b$  của các cường độ tác động tích cực và tiêu cực.

Thực vậy

$$u_{n+1} \rightarrow a/(a + b) = r/(r + 1)$$

2) Từ (9) ta có thể xác định được tỉ lệ  $r$  suốt quá trình học tập khả năng tiếp thu của người học sinh đạt tới một tỉ lệ  $z$  định trước ( $0 < z < 1$ ).

Muốn vậy ta giải phương trình

$$r/(r + 1) = z$$

Từ (10) ta nhận thấy rằng muốn cho khả năng tiếp thu khá cao, tức là muốn  $z$  gần bằng 1 thì giá trị  $r$  phải rất lớn.

Với  $b > 0$  cố định, có thể đạt được điều đó bằng cách tăng  $a$  lên khá nhiều. Điều đó có nghĩa là: phải tăng cường những nhân tố tích cực tác động vào người học sinh.

Nhưng cũng có thể đạt được mong muốn khi  $a$  chưa nhiều, bằng cách cho  $b \rightarrow 0$ . Điều đó có nghĩa là: phải loại trừ (xóa bỏ) những nhân tố tiêu cực tác động trong quá trình học tập của người học sinh.