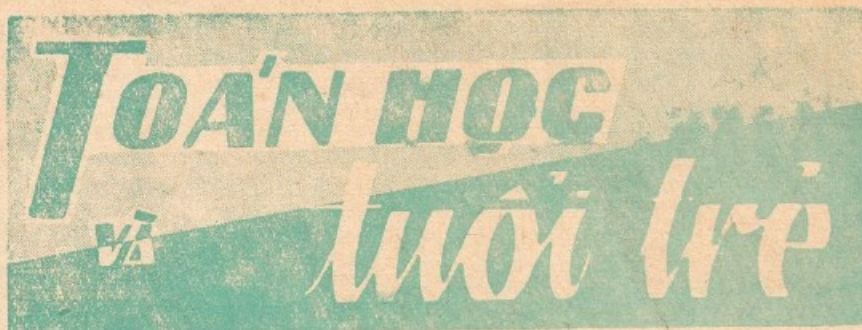


HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

Số 104

5

1978



BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHỪNG
Điện thoại: 52825

Làm quen một chút với

LIÊN PHÂN SỐ

HOÀNG CHỪNG

1. Ở lớp đầu cấp III, bạn đã học về căn số và biết rằng căn bậc hai của các số không chính phương là số vô tỉ và có thể biểu diễn bằng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tất nhiên, đối với số thập phân vô hạn không tuần hoàn ta chỉ có thể biết được một số chữ số thập phân của nó mà thôi. Thí dụ:

$$\sqrt{2} = 1,41421... \quad \pi = 3,141592...$$

Bạn chắc có lúc tự đặt vấn đề: làm thế nào để tìm các chữ số thập phân đó với số lượng mà ta muốn, nói cách khác: làm thế nào tìm một phân số hay một số thập phân hữu hạn biểu diễn gần đúng số vô tỉ đó, với độ chính xác cho trước?

2. Trường hợp đơn giản nhất là với các căn bậc hai của các số, người ta đã tìm ra một thuật toán để giải quyết vấn đề trên (thuật toán khai phương các số). Tuy nhiên nhiều bạn có thể không biết thuật toán này, một số bạn khác có thể biết, nhưng không hiểu cơ sở lý luận của thuật toán và vì không dùng thường xuyên nên có thể không còn nhớ.

Bây giờ, nếu có người nhờ bạn: «viết giúp $\sqrt{3}$ gần đúng dưới dạng một phân số thường

hay một số thập phân, với sai số không quá $1/10^5$ », bạn có thể sử dụng kiến thức của lớp đầu cấp III thôi để trả lời được không?

Sau đây là một cách rất đơn giản giúp bạn trả lời câu hỏi đó.

Chú ý rằng

$$1 < \sqrt{3} < 2 \quad (1)$$

ta có thể đặt:

$$\sqrt{3} = 1 + 1/a_1 \quad (a_1 \text{ nguyên dương})$$

$$\text{do đó} \quad a_1 = 1/(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} + 1)/2$$

Do (1), nên có thể đặt:

$$a_1 = (\sqrt{3} + 1)/2 = 1 + 1/a_2 \quad (a_2 \text{ nguyên dương})$$

hay là

$$a_2 = 2/(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$$

Do (1), nên có thể đặt:

$$a_2 = \sqrt{3} + 1 = 2 + 1/a_3 \quad (a_3 \text{ nguyên dương})$$

$$\text{hay là} \quad a_3 = 1/(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} + 1)/2$$

Ta thấy $a_3 = a_1$, do đó có thể viết $a_3 = 1 + 1/a_4$ (với $a_4 = a_2$), $a_4 = 2 + 1/a_5$ (với $a_5 = a_3$) v.v...

Tóm lại ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 1 + 1/a_1 \\ a_1 &= 1 + 1/a_2 \\ a_2 &= 2 + 1/a_3 \\ a_3 &= 1 + 1/a_4 \\ a_4 &= 2 + 1/a_5 \\ a_5 &= 1 + 1/a_6 \\ &\dots\end{aligned}$$

trong đó tất cả các a_i đều là số nguyên dương.

Từ các kết quả trên đây, ta có thể tìm phân số biểu diễn gần đúng $\sqrt{3}$ với độ chính xác ngày càng cao. Chẳng hạn nếu ta lấy

$$a_1 \approx 1 \text{ thì } \sqrt{3} \approx 1 + 1/1 = 2.$$

Nếu lấy

$$a_2 \approx 2 \text{ thì } \sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}.$$

$$a_3 \approx 1 \text{ thì } \sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{7}{4}$$

$$(\text{tính từ dưới lên: } 2 + \frac{1}{1} = 3, 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}).$$

Nếu lấy $a_4 \approx 2$ thì được

$$\sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{11}$$

$a_5 \approx 1$ thì được

$$\sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15}$$

Các bạn có thể thấy rằng các phân số trên đây cho giá trị ngày càng chính xác của $\sqrt{3}$:

$$2, 5/3, 7/4, 19/11, 26/15, \text{ v.v...}$$

Thực vậy, bình phương các số đó ta có các giá trị gần đúng bằng 3, với sai số ngày càng bé:

$$2^2 = 4, (5/3)^2 = 25/9 = 2,77...$$

$$(7/4)^2 = 49/16 = 3,05...$$

$$(19/11)^2 = 361/121 = 2,98...$$

$$(26/15)^2 = 676/225 = 3,004...$$

3. Các biểu thức như

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}, \text{ v.v...}$$

được gọi là các liên phân số. Một cách tổng quát, liên phân số bậc k là biểu thức dạng

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_k}}}}$$

trong đó a_0 là nguyên, còn $a_1, a_2, \dots, a_k$ là số nguyên dương. Liên phân số bậc k được ký hiệu gọn là

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$$

Qua các thí dụ ở trên, ta đã thấy có thể đổi một liên phân số thành một phân số thường. Người ta chứng minh rằng ngược lại, mỗi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng một liên phân số bậc k nào đó. Thí dụ:

$$\frac{37}{7} = 5 + \frac{2}{7} = 5 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = [5, 3, 2]$$

$$\begin{aligned}\frac{256}{117} &= 2 + \frac{22}{117} = 2 + \frac{1}{\frac{117}{22}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{7}{22}} \\ &= 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{22}{7}}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}} = [2, 5, 3, 7]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{37}{7} &= -6 + \frac{6}{7} = -6 + \frac{1}{\frac{7}{6}} = -6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} \\ &= [-6, 1, 6]\end{aligned}$$

4. Nếu ta kéo dài mãi cách tìm căn bậc hai của $\sqrt{3}$ như đã làm ở trên thì ta đi đến một liên phân số vô hạn:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$$

Người ta đã chứng minh rằng mỗi liên phân số vô hạn biểu diễn một số vô tỉ, và ngược lại mỗi số vô tỉ được biểu diễn bởi một liên phân số vô hạn.

Liên phân số vô hạn biểu diễn $\sqrt{3}$ là một liên phân số vô hạn tuần hoàn, chu kỳ là (1, 2). Ta viết:

$$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}].$$

Các bạn dễ dàng tìm thấy rằng:

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \sqrt{5} = [2, \overline{4}], \sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}].$$

Nhưng không phải bao giờ ta cũng có kết quả « đẹp » như vậy. Từ giữa thế kỷ XVIII, nhà toán học vĩ đại O-le đã chứng minh rằng mọi số vô tỉ dạng $(a + b\sqrt{c})/d$ (a, b, c, d nguyên và $b, c, d \neq 0$) có thể viết dưới dạng liên phân số vô hạn tuần hoàn, và ngược lại mỗi liên phân số vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số vô tỉ có dạng $(a + b\sqrt{c})/d$. Như vậy, liên phân số giúp ta thấy một nét bản chất của các số vô tỉ dạng này. Nói riêng, liên phân số vô hạn tuần hoàn

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [1, \overline{1}]$$

biểu diễn số $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Số φ xuất hiện trong « phép chia vàng »; phép chia một đoạn thẳng thành hai phần x, y được gọi là một « phép chia vàng » (tức là một phép chia rất đẹp), nếu như

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}.$$

$$\text{Lấy } y=1 \text{ thì } \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \text{ hay } x^2 - x - 1 = 0.$$

Nghệ thuật của phương trình này chính là số φ . Từ thời thượng cổ, người ta đã thấy rằng một hình chữ nhật (hình dạng quyền sách, mặt bàn, khung cửa...) có hai cạnh tỉ lệ với x, y như trên thì được nhiều người ưa thích nhất, trông đẹp mắt nhất, do đó « phép chia vàng » được sử dụng rộng rãi trong đời sống.

Đối với số e (cơ số của lô-garit tự nhiên), người ta tìm thấy rằng

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, \dots]$$

Liên phân số vô hạn này không tuần hoàn, nhưng cũng được lập theo một quy luật: 1, 2, hai lần 1, 4, hai lần 1, 6, hai lần 1, 8... Đối với số π , người

ta chưa tìm thấy một quy luật gì trong biểu diễn nó bằng liên phân số: $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 11, \dots]$.

5. Liên phân số là một công cụ có hiệu lực trong nhiều vấn đề toán học. Nói riêng, nó giúp biểu diễn xấp xỉ các số thực rất tiện lợi.

Cho số thực α biểu diễn bởi liên phân số

$$d = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

Xét liên phân số

$$d_n = [a_0, a_1, \dots, a_n].$$

Sau khi thực hiện các phép tính trong d_n (từ dưới lên), ta được một phân số P_n/Q_n . Ta gọi $d_n = P_n/Q_n$ là *giản phân bậc n của d* (nếu d có bậc là k thì $n \leq k$).

Trong thí dụ trên đây về tìm giá trị của $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots}]$$

ta đã tính các giản phân

$$d_1 = [1, 1] = 2/1, d_2 = [1, 1, 2] = 7/4,$$

$$d_3 = [1, 1, 2, 1] = 19/11, \dots$$

Gọi $d_n = P_n/Q_n$ và $d_{n+1} = P_{n+1}/Q_{n+1}$ là các giản phân bậc n và bậc $n+1$ của liên phân số d biểu diễn số α . Người ta chứng minh được rằng nếu dùng P_n/Q_n biểu diễn số α thì sai số mắc phải sẽ nhỏ hơn $1/(Q_n \cdot Q_{n+1})$. Thí dụ nếu coi $d_3 = 19/11$ ($Q_3 = 11$) gần đúng bằng $\sqrt{3}$ thì, chú ý rằng $d_4 = 26/15$ ($Q_4 = 15$), ta mắc sai số nhỏ hơn $1/(11 \cdot 15) < 0,007$, tức là nhỏ hơn $1/100$. Tương tự như vậy, các bạn có thể kiểm tra lại rằng nếu ta biểu diễn số $\sqrt{2}$ bằng giản phân $[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = 239/169$, thì sai số sẽ nhỏ hơn $1/10^4$; do đó nếu đổi sang số thập phân thì vì $239/169 = 1,41420\dots$, nên ta có thể viết $\sqrt{2} = 1,414$ cả ba chữ số thập phân đều chính xác).

Đối với số π , ta có $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 11, \dots]$

nên $d_1 = [3, 7] = 22/7$,

$$d_2 = [3, 7, 15] = 133/106,$$

$$d_3 = [3, 7, 15, 1] = 355/113,$$

$$d_4 = [3, 7, 15, 1, 292] = 103993/33102.$$

Do đó, nếu lấy $\pi \approx 22/7$ thì sai số nhỏ hơn $1/(7 \cdot 106) < 0,002$; vì $22/7 = 3,1428\dots$, nên có thể viết $\pi = 3,14$ (cả hai chữ số thập phân đều chính xác). Nếu lấy $\pi = 355/113$ thì sai số sẽ nhỏ hơn $1/(113 \cdot 33102) < 0,0000003$, và vì $355/113 = 3,1415929\dots$ nên có thể viết $\pi = 3,14159$ (cả năm chữ số thập phân đều chính xác).

BẠN ĐỌC TÌM TÔI:

XOAY QUANH MỘT BÀI TOÁN NHỎ

Đã một năm qua, tôi tham gia sản xuất ở hợp tác xã, nhưng những bài toán mà tôi gặp khi còn ngồi trên ghế nhà trường vẫn sống trong tôi như một kỷ niệm không quên. Vì thế, ngoài những giờ lao động, tôi lại đến với các bài toán.

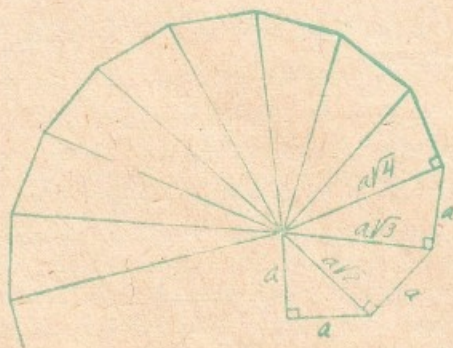
Năm trước, khi học bài: «Dựng hình bằng phương pháp đại số», thầy giáo đã ra cho chúng tôi bài toán sau:

Bài toán 1. Cho trước đoạn thẳng a . Hãy dựng bằng thước và com pa đoạn thẳng $a\sqrt{2}$.

Tôi còn nhớ là khi đó, cả lớp chúng tôi đều chịu bó tay. Tại sao lại dựng được đoạn thẳng $a\sqrt{2}$? Vì chúng tôi mới chỉ học cách dựng đoạn thẳng $a\sqrt{2}$ (khi biết đoạn thẳng a) thôi mà... Thời gian trôi đi, mà bài toán đó vẫn khi ẩn, khi hiện trong trí nhớ của tôi.

Đến nay, sau một thời gian loay hoay, tôi đã khám phá ra sự bí mật của bài toán 1 và thấy rằng cách dựng đoạn thẳng $a\sqrt{2}$ là dựa trên việc có đoạn thẳng $a\sqrt{2}$.

Trước hết tôi cũng muốn nói thêm điều này: Trong lúc dựng đoạn thẳng $a\sqrt{2}$, tôi tìm thấy một điều thú vị là: dựa trên cách dựng đoạn thẳng $a\sqrt{2}$, ta sẽ dựng được đoạn thẳng $a\sqrt{3}$..., dựa trên cách dựng đoạn thẳng $a\sqrt{n-1}$, ta sẽ dựng được đoạn thẳng $a\sqrt{n}$ (hình 1).



Hình 1

Như vậy, từ việc giải bài toán đơn giản là dựng đoạn thẳng $a\sqrt{2}$, tôi đã giải được bài toán sau:

Bài toán 2. Cho trước đoạn thẳng a . Hãy dựng bằng thước và com pa đoạn thẳng $a\sqrt{n}$, với n là số tự nhiên.

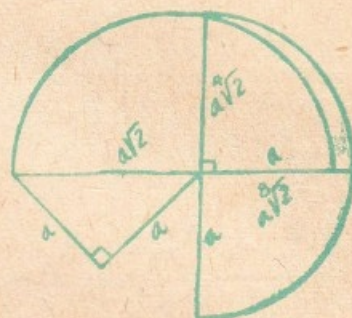
Bây giờ tôi trở lại bài toán 1.

Đề ý rằng $(a\sqrt{2})^2 = a^2 \cdot 2 = a \cdot a\sqrt{2}$, ta thấy $a\sqrt{2}$ là trung bình nhân của hai đoạn a và $a\sqrt{2}$. (Cách dựng chúng ta đều đã biết).

Tôi đi đến bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3. Cho trước đoạn thẳng a . Hãy dựng bằng thước và com pa đoạn thẳng $a^{\frac{k}{2}}\sqrt{2}$.

Đề ý rằng $(a^{\frac{k}{2}}\sqrt{2})^2 = a^k \cdot 2 = a \cdot a^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{2}$, ta sẽ có lời giải của bài toán 3 (hình 2).



Hình 2

Từ các bài toán nói trên tôi tìm ra bài toán tổng quát hơn:

Bài toán 4. Cho trước đoạn thẳng a . Hãy dựng bằng thước và com pa đoạn thẳng $a^{\frac{k}{2}}\sqrt{n}$; với n, k là các số tự nhiên.

NGUYỄN VIỆT THÀNH
(Đông Hà, Phúc Thọ,
Nghệ Tĩnh)



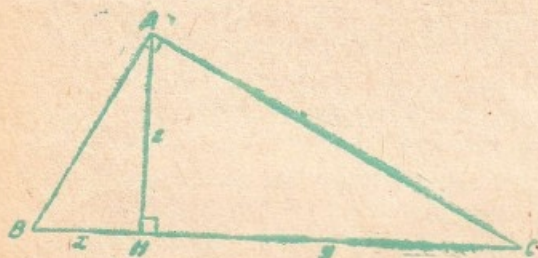
Bài 1/101. Cho tam giác ABC có góc A vuông, đường cao AH có độ dài z. Đặt $HB=x$, $HC=y$. Chứng minh rằng nếu ta có $x+y+z=xyz$ thì $z \geq \sqrt{3}$.

Lời giải. Vì tam giác ABC vuông nên ta có $z^2 = xy$. Từ đó $z^3 = xyz$.

Theo giả thiết, $xyz = x+y+z$ nên ta có

$$z^3 = x+y+z \quad (1)$$

Nếu gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì rõ ràng



$$x+y=R \geq 2z.$$

Vì vậy

$$x+y+z \geq 3z \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$z^3 \geq 3z$$

$$z^2 \geq 3$$

$$z \geq \sqrt{3}$$

(đ.p.c.m).

Bài 2/101. Cho tam giác ABC, O là một điểm trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác tương ứng tại A_1, B_1, C_1 .

Tìm vị trí của O để biểu thức

$$P = OA/OA_1 + OB/OB_1 + OC/OC_1$$

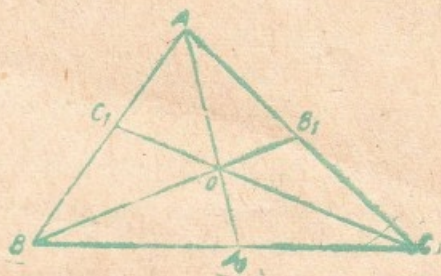
đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. (của nhiều bạn). Gọi S là diện tích tam giác ABC; S_1, S_2, S_3 , tương ứng là diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB. Ta có

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Để tìm giá trị nhỏ nhất của P, ta tìm giá trị nhỏ nhất của $P+3$.

$$\begin{aligned} P+3 &= OA_1/OA + BB_1/OB + CC_1/OC \\ &= S/S_1 + S/S_2 + S/S_3 \\ &\geq 3S/\sqrt[3]{S_1S_2S_3} \\ &= 9S/3\sqrt[3]{S_1S_2S_3} \geq 9S/(S_1 + S_2 + S_3) \\ &= 9S/S = 9. \end{aligned}$$



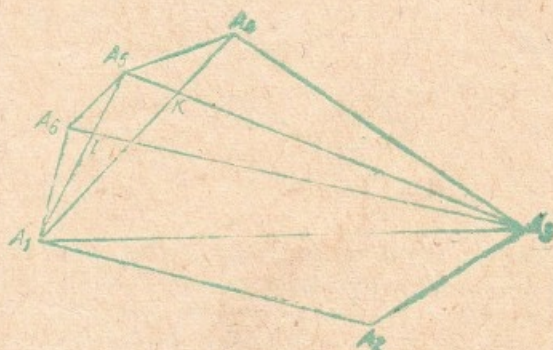
Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi $S_1=S_2=S_3$, tức là khi O là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 3/101. Chứng minh rằng với một lục giác lồi bất kỳ thì bao giờ cũng có thể tìm được một đỉnh của nó sao cho ba đường chéo xuất phát từ đỉnh đó có thể lấy làm ba cạnh của một tam giác. Có thể tìm được hai đỉnh (của lục giác lồi bất kỳ) thỏa mãn điều kiện trên hay không?

Lời giải. Xét đường chéo dài nhất của lục giác. Có hai trường hợp.

1. Trường hợp đường chéo dài nhất chia lục giác thành một tam giác và một ngũ giác.

Chẳng hạn A_1A_3 là đường chéo dài nhất. Nếu giả sử A_1 không thỏa mãn tính chất các đường chéo xuất phát từ nó có thể lấy làm ba cạnh của một tam giác, ta chứng minh A_3 phải thỏa mãn tính chất đó. Tức là nếu



$$A_1A_5 + A_1A_4 < A_1A_3 \quad (*)$$

thì phải có $A_3A_5 + A_3A_6 > A_1A_3$

Thật vậy. Tứ giác $A_1A_3A_5A_6$ lồi nên các đường chéo của nó phải cắt nhau tại I nằm trong tứ

giác. Cũng vậy, các đường chéo của tứ giác $A_1A_2A_4A_5$ phải cắt nhau tại K nằm trong tứ giác đó

Ta có

$$A_1I + A_1K < A_1A_5 + A_1A_4.$$

Kết hợp với (*) ta có

$$A_1I + A_1K < A_1A_3 \quad (1)$$

$$V\text{ì } A_1I + IA_3 + A_1K + KA_3 > 2A_1A_3$$

nên kết hợp với (1) ta có

$$IA_3 + KA_3 > A_1A_3 \quad (2)$$

Do $A_3A_6 + A_3A_5 > IA_3 + KA_3$ nên kết hợp với (2) ta được

$$A_3A_6 + A_3A_5 > A_1A_3 \text{ (đ.p.c.m.)}.$$

2. Trường hợp đường chéo dài nhất chia lức giác thành hai tứ giác.

Chẳng hạn đường chéo dài nhất là A_1A_4 . Nếu giả sử.

$$A_1A_3 + A_1A_5 < A_1A_4 \quad (**)$$

ta phải chứng minh

$$A_2A_4 + A_6A_4 > A_1A_4.$$

Gọi M và N là giao điểm của các đường chéo của các tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ và $A_1A_4A_5A_6$ tương ứng.

Từ (**) suy ra

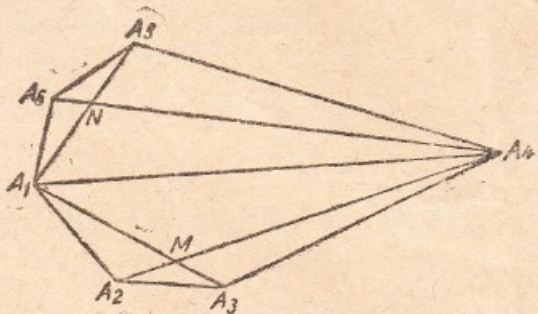
$$A_1M + A_1N < A_1A_4$$

Từ đó suy ra

$$MA_4 + NA_4 > A_1A_4$$

do đó

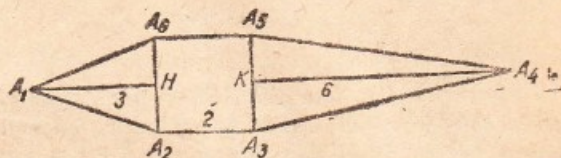
$$A_2A_4 + A_6A_4 > A_1A_4 \text{ (đ.p.c.m.)}.$$



Nói chung đối với một lục giác lồi thì có thể có nhiều đỉnh thỏa mãn tính chất các đường chéo xuất phát từ đó có thể lấy làm ba cạnh của một tam giác. Tuy nhiên không thể kết luận đối với một lục giác lồi bất kỳ, có thể tìm được hai đỉnh thỏa mãn điều kiện trên. Ví dụ lục giác lồi cho dưới đây chỉ có duy nhất đỉnh A_4 thỏa mãn điều kiện nêu ra. Đó là lục giác

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có A_2, A_3, A_5, A_6 lập thành hình vuông có cạnh bằng 2; $A_1A_2A_6$ là tam giác cân có đường cao $A_1H = 3$; $A_4A_5A_3$ là tam giác cân có đường cao $A_4K = 6$.

Bạn Ngô Hữu Liêm (lớp 11 trường Bùi Thị Xuân, T.P. Hồ Chí Minh) có lời giải tốt.



Bài 4/101. Với điều kiện nào của a thì các phương trình

$$6 \sin x = a(7 + \cos 2x) \quad (1)$$

$$3a \sin x - 8 = a(4 + \sin 3x) \quad (2)$$

có nghiệm chung?

Lời giải. Trước tiên ta sẽ tìm những giá trị của a để phương trình (1) và (2) có nghiệm.

Đối với phương trình (1) ta có: Do $|\sin x| \leq 1$ và $|7 + \cos 2x| \geq 6$, nên $|a| \leq 1$. Vì vậy, điều kiện để (1) có thể có nghiệm là $-1 \leq a \leq 1$.

Đối với phương trình (2) ta có:

$$3a \sin x - 8 = a(4 + \sin 3x) \Leftrightarrow a(3 \sin x - \sin 3x) = 4a + 8 \Leftrightarrow 4a \sin^3 x = 4a + 8 \Leftrightarrow a(\sin^3 x - 1) = 2.$$

Do $-2 \leq \sin^3 x - 1 \leq 0$, cho nên để phương trình (2) có nghiệm thì ta phải có $a \leq -1$.

Vậy, để (1) và (2) cùng có nghiệm thì $a = -1$.

Bây giờ để xem với giá trị đó của a , các phương trình đã cho có nghiệm chung hay không, ta cần phải giải hệ hai phương trình (1) và (2) khi $a = -1$:

$$\begin{cases} 6 \sin x = -7 - \cos 2x \\ -3 \sin x - 8 = -4 - \sin 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x - 6 \sin x - 8 = 0 \\ 4 \sin^3 x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + 1)(\sin x - 4) = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta được } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ (k nguyên) là}$$

nghiệm chung của (1) và (2).

Vậy, điều kiện để hai phương trình đã cho có nghiệm chung là $a = -1$.

Nhận xét. Trên đây là cách giải của bạn Đặng Phước Lợi (9CT Quốc học, Huế) và một số bạn khác. Các bạn: Đào Xuân Nghiệp, Đỗ Đức Lưu (9N, Hồng Quang, Hải Hưng); Nguyễn Văn Tiễn (Yên Phong, Hà Bắc);... có cách giải tương tự và tương đối tốt.

C.T.

Bài 5/101. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ là những số dương và

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = B$$

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = C$$

Chứng minh rằng

$$\min \{a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, \dots, a_n b_n c_n\} \leq ABC/n^3.$$

Lời giải (của nhiều bạn). Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta được

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

hay

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq (A/n)^n.$$

Tương tự

$$b_1 b_2 \dots b_n \leq (B/n)^n.$$

$$c_1 c_2 \dots c_n \leq (C/n)^n.$$

Nhân từng vế của ba bất đẳng thức này với nhau và nhóm các số cùng chỉ số lại, ta được

$$(a_1 b_1 c_1) (a_2 b_2 c_2) \dots (a_n b_n c_n) \leq (ABC/n^3)^n \quad (*)$$

Giả sử $m = \min \{a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, \dots, a_n b_n c_n\}$. Khi đó

$$m \leq a_i b_i c_i \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n,$$

vì vậy

$$m^n \leq (a_1 b_1 c_1) (a_2 b_2 c_2) \dots (a_n b_n c_n) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $m^n \leq (ABC/n^3)^n$, hay $m \leq ABC/n^3$ (đpcm).

C.T.

Bài 6/101. Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện:

$$|f(-1)| \leq 1, |f(0)| \leq 1, |f(1)| \leq 1.$$

Chứng minh rằng

$$|f(x)| = |2ax + b| \leq 4 \text{ với mọi } |x| \leq 1.$$

Lời giải. Nhận thấy rằng, trên đoạn $[-1, 1]$ hàm số $|f'(x)| = |2ax + b|$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -1$ hoặc 1 . Vì vậy để chứng tỏ rằng $|f'(x)| \leq 4$ với mọi $x \in [-1, 1]$, ta chỉ cần chứng tỏ rằng $|f'(\pm 1)| \leq 4$, tức là $|\pm 2a + b| \leq 4$.

Từ giả thiết suy ra rằng

$$|a \pm b + c| \leq 1 \text{ và } |c| \leq 1.$$

Ta có

$$2a + b = \frac{3}{2} (a + b + c) + \frac{1}{2} (a - b + c) - 2c.$$

do đó

$$|2a + b| \leq \frac{3}{2} |a + b + c| + \frac{1}{2} |a - b + c| + 2|c| \leq 4.$$

Tương tự ta có

$$-2a + b = -\frac{1}{2} (a + b + c) - \frac{3}{2} (a - b + c) + 2c,$$

do đó

$$|-2a + b| \leq \frac{1}{2} |a + b + c| + \frac{3}{2} |a - b + c| + 2|c| \leq 4.$$

C. T.

Bài 7/101. Với n là số tự nhiên và $0 < (n+1)x < \pi/2$, hãy chứng minh:

$$(1 - \cos^n x) (1 + \cos^n x) < \lg nx \operatorname{tg} x.$$

Lời giải. Cách 1 (của Ngô Hữu Liêm, lớp 11 Bùi Thị Xuân, Hồ Chí Minh; Nguyễn Văn Tiễn, Yên Phong, Hà Bắc và nhiều bạn khác).

Trước hết ta nhận xét rằng từ $0 < (n+1)x < \pi/2$ suy ra $0 < nx < \pi/2$ và $0 < x < \pi/2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $1 - \cos^{2n} x < \frac{\sin nx \sin x}{\cos nx \cos x}$ hay (do $\cos nx \cos x > 0$)

$$\cos(n+1)x < \cos^{2n+1} x \cos nx \quad (1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (1) bằng qui nạp. Với $n=1$ bất đẳng thức (1) trở thành $\cos 2x < \cos^4 x$ hay $\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 > 0$, nghĩa là $\sin^4 x > 0$. Bất đẳng thức này đúng vì $0 < x < \pi/2$.

Giả sử rằng bất đẳng thức (1) đúng với $n = k-1$, tức là với $0 < kx < \pi/2$ ta có

$$\cos kx < \cos^{2k-1} x \cos(k-1)x, \quad (2)$$

ta chứng minh (1) cũng đúng với $n=k$, tức là với $0 < (k+1)x < \pi/2$ thì $\cos(k+1)x < \cos^{2k+1} x \cos kx$.

Thật vậy, theo nhận xét ở trên do $0 < (k+1)x < \pi/2$ nên ta có $0 < x < \pi/2$ và $0 < kx < \pi/2$ nghĩa là có (2). Nhân hai vế của (2) với $\cos x > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \cos x \cos kx &< \cos^{2k} x \cos(k-1)x, \\ \cos(k+1)x + \sin x \sin kx &< \cos^{2k} x (\cos x \cos kx + \sin x \sin kx) \\ \cos^{2k+1} x \cos kx - \cos(k+1)x &> \sin x \sin kx - \cos^{2k} x \sin x \sin kx \\ &= (1 - \cos^{2k} x) \sin x \sin kx > 0 \end{aligned}$$

do $\sin x > 0, \sin kx > 0$ và $\cos^{2k} x < 1$.

Vậy theo nguyên lý qui nạp ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2 (của Đặng Ngọc Thủy, 10 CT ĐHSPT Vinh) Xuân Dũng, Sơn La).

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\operatorname{tg} nx \operatorname{tg} x + \cos^{2n} x > 1$

Ký hiệu $f(n) = \operatorname{tg} nx \operatorname{tg} x + \cos^{2n} x$. Ta chứng minh $f(k+1) > f(k)$ với $k = 0, 1, \dots, n-1$:
 $\operatorname{tg} kx \operatorname{tg} x + \cos^{2k} x < \operatorname{tg}(k+1)x \operatorname{tg} x + \cos^{2k+2} x$
 $\Leftrightarrow \cos^{2k} x - \cos^{2k+2} x < \operatorname{tg} x [\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg} kx]$
 $\Leftrightarrow \cos^{2k} x \sin^2 x < \operatorname{tg} x \sin x / \cos(k+1)x \cos kx$
 $\Leftrightarrow \cos^{2k} x < 1 / \cos x \cos(k+1)x \cos kx$

Do giả thiết $0 < (n+1)x < \pi/2$ nên các hàm số lượng giác ở về phải đều có giá trị dương và nhỏ hơn 1, vậy bất đẳng thức là đúng.

Thay $k=0, 1, \dots, n-1$ ta có
 $f(n) > f(n-1) > \dots > f(0)$. Nhưng $f(0) = 1$,
 vậy $f(n) > 1$ (đ. p. c. m).

Bạn Xuân Dũng có nhận xét đúng rằng có thể mở rộng góc ở thành $0 < nx < \pi/2$. Đồng thời bất đẳng thức cần chứng minh có thể làm giả hơn là

$$(1 - \cos^n x)(1 + \cos^n x) < \tan x \sin x.$$

Chứng minh bất đẳng thức này tương tự cách giải 2 ở trên, chỉ cần thay $\tan x$ bằng $\sin x$.

T. T.

Bài 8/101. Chứng minh rằng hai số 1978^n và $1978^n + 2^n$ có số chữ số bằng nhau với mọi số tự nhiên n .

Lời giải của Nguyễn Kim Giang, SCT ĐH Tổng hợp Hà Nội).

Giả sử số chữ số của 1978^n là k , khi đó $10^{k-1} < 1978^n < 10^k$. Nếu giả sử số chữ số của $1978^n + 2^n$ lớn hơn k thì phải có.

$$1978^n + 2^n \geq 10^k. \quad (*)$$

Ta có $1978^n = 2^n \cdot 989^n$; $1978^n + 2^n = 2^n(989^n + 1)$; $10^k = 2^k \cdot 5^k$; nên từ các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$989^n + 1 \geq 2^{k-n} \cdot 5^k > 989^n$$

Vì $10^k > 1978^n > 1000^n = 10^{3n}$, nên $k > 3n$.
 Vì vậy $2^{k-n} \cdot 5^k$ nguyên, suy ra

$$2^{k-n} \cdot 5^k = 989^n + 1.$$

Cũng do $k > 3n$ nên $2^{k-n} \cdot 5^k : 2^2$, vậy $2^{k-n} \cdot 5^k : 4$. Trong khi đó $989^n + 1 = (4 \cdot 247 + 1)^n + 1 = 4p + 2$ không chia hết cho 4.

Vậy đẳng thức (*) không thể xảy ra, tức là số chữ số của $1978^n + 2^n$ cũng phải bằng k .

Một vài bạn mắc sai lầm khi giả sử số chữ số của $1978^n + 2^n$ lớn hơn k lại suy ra ngay

$$1978^n + 2^n > 10^k.$$

Nếu có bất đẳng thức chặt đó thì những suy luận tiếp theo rất dễ dàng. Tiếc thay, việc chứng minh đầu đẳng thức không xảy ra lại là việc rất khó.

Bài 9/101. Tìm tất cả các số x, y, z để đẳng thức

$$\sqrt[n]{\underbrace{xx \dots x}_{2n \text{ chữ số}} - \underbrace{yy \dots y}_{n \text{ chữ số}}} = \underbrace{zz \dots z}_{n \text{ chữ số}} \quad (1)$$

là đúng với mọi n tự nhiên

Lời giải (của bạn Nguyễn Anh Minh lớp 9 chuyên toán ĐHSPT Vinh và nhiều bạn khác).

Ta đề ý rằng $x = y = z = 0$ là một nghiệm tầm thường của (1); còn với $x \neq 0$ và $y = 0$ thì như bài 9/83 đã cho thấy $x, x \dots x$ không chính phương. Vì thế ta có thể xem như x, y, z nguyên và nhận một trong các giá trị từ 1 đến 9.

Từ (1) ta có

$$\underbrace{x \cdot 1 \cdot 1 \dots 1}_{2n \text{ chữ số}} - \underbrace{y \cdot 1 \cdot 1 \dots 1}_{n \text{ chữ số}} = \underbrace{(z \cdot z \dots z)}_{n \text{ chữ số}}^2 \quad (2)$$

$$\text{Vi } 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 01 + 1 = \frac{10^k - 1}{10 - 1} = \frac{10^k - 1}{9}$$

(tổng các số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu tiên là 1 và công bội là 10) nên (2) có thể viết thành.

$$x \frac{10^{2n} - 1}{9} - y \frac{10^n - 1}{9} = z^2 \frac{(10^n - 1)^2}{9^2},$$

$$\text{hay } 9x(10^n + 1) - 9y = z^2(10^n - 1),$$

$$10^n(9x - z^2) = 9y - 9x - z^2 \quad (3)$$

Do giả thiết, (3) đúng với mọi n tự nhiên cho nên với a, b là hai số tự nhiên, $a \neq b$ ta có:

$$10^a(9x - z^2) = 9y - 9x - z^2,$$

$$10^b(9x - z^2) = 9y - 9x - z^2.$$

Trừ 2 đẳng thức về với về

$$(10^a - 10^b)(9x - z^2) = 0$$

Do $a \neq b$ nên $10^a - 10^b \neq 0$, ta có:

$$9x - z^2 = 0 \quad (4)$$

thay (4) vào (3) ta có

$$9y - 9x - z^2 = 0 \quad (5)$$

(4) cho thấy x là số chính phương, đặt $x = k^2$, từ (4) và (5) suy ra $y = 2k^2$, $z = 3k$, với k nguyên dương. Vì x, y, z nhận các giá trị từ 1 đến 9 nên k chỉ có thể là 1 hay 2.

Với $k=1$ ta có $x=1, y=2, z=3$.

Với $k=2$ ta có $x=4, y=8, z=6$.

Với mỗi cặp nghiệm trên thì đẳng thức (3) được thỏa mãn với mọi n , nên đẳng thức (1) đúng với mọi n tự nhiên.

T.T.

Bài 10/101. Cho các số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ nằm ngoài khoảng (a, b) và $y_1, y_2, \dots, y_n$ nằm trong khoảng (a, b) sao cho

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Chứng minh rằng:

$$x_1 x_2 \dots x_n < y_1 y_2 \dots y_n \quad (1)$$

Lời giải. Bằng cách đánh số lại các số nếu cần ta có thể giả sử

$$x_1, x_2, \dots, x_k < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n < x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$$

Đặt

$$m_i = y_i - x_i \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, k;$$

$$m_j = x_j - y_j \quad \text{với } j = k+1, \dots, n.$$

Từ giả thiết

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \text{ suy ra } \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{j=k+1}^n m_j$$

Với cách đặt như trên, bất đẳng thức (1) cần chứng minh trở thành

$$(y_1 - m_1) \dots (y_k - m_k) (y_{k+1} + m_{k+1}) \dots (y_n + m_n) < y_1 y_2 \dots y_n \Leftrightarrow \left(1 - \frac{m_1}{y_1}\right) \dots \left(1 - \frac{m_k}{y_k}\right) \times \left(1 + \frac{m_{k+1}}{y_{k+1}}\right) \dots \left(1 + \frac{m_n}{y_n}\right) < 1 \quad (2)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (2).

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho n số dương ta có

$$\left(1 - \frac{m_1}{y_1}\right) \dots \left(1 - \frac{m_k}{y_k}\right) \left(1 + \frac{m_{k+1}}{y_{k+1}}\right) \dots \left(1 + \frac{m_n}{y_n}\right) \dots$$

$$< \frac{1}{n} \left(n - \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{y_i} + \sum_{j=k+1}^n \frac{m_j}{y_j} \right) n$$

$$\leq \frac{1}{n} \left(n - \sum_{i=1}^k m_i/y_k + \sum_{j=k+1}^n m_j/y_k \right) = 1$$

$$\left(\text{vì } \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{j=k+1}^n m_j \right).$$

Vậy (2) được chứng minh và tức là (1) được chứng minh.

Chú ý: Khi áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương, ta thấy trong các số dương này có số lớn hơn 1 và có số nhỏ hơn 1, vì vậy dấu đẳng thức không xảy ra.

Các bạn: Ngô Hữu Liêm (lớp 11 trường Bùi Thị Xuân, Hồ Chí Minh), Nguyễn Quang Chi (lớp 8A trường Yên Thọ, Quảng Ninh) và Xuân Dũng (Sơn La) đã giải bài toán bằng phương pháp qui nạp. Cách giải đó muốn thật chặt chẽ thì lời giải hơi phức tạp và dài hơn lời giải trên đây.

T.T.



Bài 1/104. Cho ba số tự nhiên k, l, m đôi một không có cùng số dư trong phép chia cho 5. Chứng minh rằng trong ba số: $A = 3k + l + m$, $B = 3l + k + m$, $C = 2k + 2l + m$ có một và chỉ một số chia hết cho 5.

Nguyễn Bá Thành (Thuận Hải)

Bài 2/104. Giải phương trình

$$\frac{abc}{abc} = \sqrt[3]{\frac{abc}{abc}}$$

Đặng Hải Nam (Hải Hưng)

Bài 3/104. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$8(2-x) + y^2 - z^2 = 0$$

với điều kiện $y < x < 10$.

Phạm Hoàng (Hà Nội)

Bài 4/104. Cho một bảng vuông gồm 16 ô vuông (4 hàng). Điền các số từ 1 đến 15 theo thứ tự vào các ô của bảng: điền từ hàng thứ nhất đến hàng thứ tư, ô cuối trống.

Bây giờ thay đổi vị trí các số bằng cách mỗi lần đẩy số ở một ô lân cận (ô có chung cạnh) với ô trống vào ô trống.

Hãy chứng minh rằng dù ta thực hiện cách làm đó bao nhiêu lần đi chăng nữa thì cũng không bao giờ sắp xếp được các số theo thứ tự ngược lại (ô cuối trống).

Bài 5/104. Dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 1/a_{n-1}.$$

hãy chứng minh:

$$125 < a_{1964} + a_{1979} < 155.$$

Đặng Hải Nam

Bài 6/104. Trong không gian, cho một tứ giác ghênh $ABCD$; điểm E ở trên BC , F ở trên AD sao cho AB, EF, CD cùng song song với một mặt phẳng.

a. Chứng minh rằng tồn tại một số $k > 0$ sao cho

$$EF < kAB + (1-k)CD.$$

b. Từ đó suy ra $EF < \max(AB, CD)$.

Lê Trần Chính (ĐHSP Vinh)

Bài 7/104. Trong không gian cho một số hữu hạn điểm sao cho 4 điểm bất kỳ trong chúng là đỉnh của một tứ diện có thể tích không vượt quá 1. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho đều nằm trong một tứ diện có thể tích không vượt quá 27.

Lê Trần Chính

Bài 3/104. Gọi G là tập hợp các giá trị (x_1, x_2) thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm:

$$y = -2x_1 - x_2 + x_1^2$$

trên miền G nói trên.

Tạ Văn Tự (ĐH Bách khoa HN)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 9/104. Tìm tất cả các số tự nhiên A sao cho khi ta nâng chữ số hàng đơn vị của A lên lũy thừa bậc 4 thì ta được chính số A .

Nguyễn Thanh Nhã

(10C Lê Hồng Phong, Hồ Chí Minh)

Bài 10/104. $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số dương và $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng

$$(2S + a_1)/(S + a_1) + (2S + a_2)/(S + a_2) + \dots + (2S + a_n)/(S + a_n) \geq (3/2)n.$$

Nguyễn Thanh Nhã

Chú thích: Bài 4/104 do Phạm Hoàng sưu tầm

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

PHƯƠNG PHÁP CHUNG KHẢO SÁT TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG CONG

NGUYỄN VĂN CHÂN

TRONG chương trình Đại số lớp 10, muốn tìm tâm hoặc trục đối xứng của đường cong, ta thường phải phức tạp đồ thị để đoán nhận (dựa vào các nhận xét: giao của hai đường tiệm cận có thể là tâm đối xứng, trục đối xứng thường đi qua điểm cực trị,...) và sau đó chứng minh bằng cách chuyển gốc tọa độ đến vị trí thích hợp để nhận được những hàm lẻ hoặc chẵn. Vấn đề này có thể khảo sát chặt chẽ và dưới một dạng chung hơn như sau đây.

ĐỊNH NGHĨA. Điểm I (đường thẳng l) gọi là tâm (trục) đối xứng (viết tắt là t.d.x hoặc tr.đ.x) của đường cong (c) khi và chỉ khi với mỗi điểm M thuộc (c) ta đều có điểm N đối xứng với M qua I (qua l) cũng thuộc (c) .

TÂM ĐỐI XỨNG. Giả sử phương trình của (c) là $y = f(x)$, $x \in D_f$ (miền xác định của hàm $f(x)$). Như vậy điểm $I(x_0, y_0)$ là t.d.x của (c) khi và chỉ khi với mọi điểm (x, y) mà $y = f(x)$, ta đều có điểm (x, y) đối xứng với (x, y) qua

I cũng thỏa mãn $\overline{y} = f(\overline{x})$, Nhưng $\overline{x} + x = 2x_0$, $y + y = 2y_0$. Do đó ta có $2y_0 - y = f(2x_0 - x)$ hay

$$2y_0 - f(x) = f(2x_0 - x) \text{ với mọi } x \in D_f \quad (1)$$

Đây chính là điều kiện cần và đủ để điểm (x_0, y_0) là t.d.x của đường cong $y = f(x)$

Ví dụ với $f(x) = P(x)/Q(x)$, trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức, (1) sẽ có dạng:

$$2y_0 Q(x) Q(2x_0 - x) - P(x) Q(2x_0 - x) - Q(x) \times P(2x_0 - x) = 0 \quad (2)$$

với mọi x sao cho $Q(x) \neq 0$.

Vế trái của (2) là một đa thức với các hệ số nói chung phụ thuộc vào x_0, y_0 . Cho tất cả các hệ số này bằng không, ta sẽ biết được đường cong đã cho có t.d.x hay không và nếu có thì sẽ tìm được tọa độ các t.d.x đó.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng t.d.x của đường cong phải nằm trên các đường tiệm cận xiên và ngang của nó.

Giả sử đường cong $y=f(x)$ có tiệm cận (Δ) (xiên hoặc ngang) $y=ax+b$ và t.đ.x. (x_0, y_0) . Từ (1) ta có

$$2y_0 - f(x) + ax + b = f(2x_0 - x) - a(2x_0 - x) - b + 2ax_0 + 2b.$$

Khi $x \rightarrow \infty$ ta có $f(x) - ax - b \rightarrow 0$ và vì khi đó $2x_0 - x \rightarrow \infty$ nên ta cũng có $f(2x_0 - x) - a(2x_0 - x) - b \rightarrow 0$.

Như vậy cho $x \rightarrow \infty$ ta được $y = ax_0 + b$, tức là $(x_0, y_0) \in (\Delta)$ (đpcm).

Chú ý. Tiệm cận ta xét ở đây là tiệm cận hai chiều, tức là khi $x \rightarrow +\infty$ cũng như khi $x \rightarrow -\infty$ ta đều có $f(x) - ax - b \rightarrow 0$. Nếu xét cả tiệm cận một chiều thì kết luận trên có thể không đúng. Ví dụ t.đ.x. $(0, 0)$ của đường cong $y = \arctg x$ không nằm trên các đường tiệm cận ngang một chiều $y = \pm \pi/2$ của nó.

Từ (1) cũng suy ra rằng, nếu (x_0, y_0) là t.đ.x. và $x = x_1$ là tiệm cận (đứng) của (c) thì $x = 2x_0 - x_1$ cũng là tiệm cận (đứng) của (c).

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng giao điểm hai đường tiệm cận của đường cong $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d}$

(với $ad^2 + bd + c \neq 0$) là t.đ.x. duy nhất của nó.

Ở đây (1) có dạng:

$$2y_0 - \frac{ax^2 + bx + c}{x - d} = \frac{a(2x_0 - x)^2 + b(2x_0 - x) + c}{2x_0 - x - d}$$

$$\text{hay } (2y_0x - 2y_0d)(2x_0 - x - d) - (ax^2 + bx + c) \times (2x_0 - x - d) = (x - d)(ax^2 + 4ax_0x + 2bx_0 - bx + c), \forall x \neq d.$$

Sau khi triển khai và đồng nhất các hệ số cùng bậc, ta sẽ đi đến các điều kiện:

$$\begin{cases} y_0 = ax_0 + b + ad \\ (d^2 - 2dx_0)y_0 = cx_0 - cd - bdx_0 - 2adx_0^2 \end{cases}$$

Từ đây (với điều kiện $ad^2 + bd + c \neq 0$) sẽ suy ra

$$x_0 = d, y_0 = 2ad + b.$$

Đây chính là giao điểm hai đường tiệm cận $x = d$ và $y = ax + ad + b$.

CHÚ Ý. Đối với một đường cong bất kỳ, không phải lúc nào giao của hai đường tiệm cận cũng là t.đ.x. Ví dụ muốn cho giao điểm $(1, a)$ hoặc $(-1, a)$ hai đường tiệm cận của

đường cong $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 1}$ là t.đ.x. của nó,

cần và đủ là $a - b + c = 0$ (hoặc $a + b + c = 0$). Các bạn hãy tự kiểm tra điều đó.

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng điểm uốn của đường cong bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, là t.đ.x. duy nhất của nó.

Ở đây (1) sẽ có dạng

$$2y_0 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = a(2x_0 - x)^3 + b(2x_0 - x)^2 + c(2x_0 - x) + d$$

Sau khi khai triển và đồng nhất các số hạng cùng bậc, ta sẽ tìm ra.

$$x_0 = -b/3a$$

$$y_0 = 4ax_0^3 + 2bx_0^2 + cx_0 + d$$

Có thể thử lại rằng như vậy $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$, tức là (x_0, y_0) trùng với điểm uốn.

TRỤC ĐỐI XỨNG. Trước hết ta tìm tọa độ (x_2, y_2) của điểm N đối xứng với điểm M (x_1, y_1) qua đường thẳng (l) $y = ax + b, a \neq 0$.

Phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với (l) là

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$$

đường thẳng này cắt (l) tại điểm có tọa độ

$$x_0 = \frac{x_1 + ay_1 - ab}{a^2 + 1}, y_0 = \frac{ax_1 + ay_1 + b}{a^2 + 1}$$

Đây chính là điểm giữa của đoạn MN. Do đó

$$x_2 = 2x_0 - x_1 = \frac{(1 - a^2)x_1 + 2ay_1 - 2ab}{a^2 + 1} \quad (3)$$

$$y_2 = 2y_0 - y_1 = \frac{(a^3 - 1)y_1 + 2ax_1 + 2b}{a^2 + 1}$$

Theo định nghĩa, (l) là tr.đ.x. của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi với mọi điểm (x_1, y_1) mà $y_1 = f(x_1)$ ta đều có $y_2 = f(x_2)$, mà x_2 và y_2 thì tính theo x_1, y_1 qua các công thức (3). Nói cách khác

$$\begin{aligned} & \frac{(a^2 - 1)f(x) + 2(ax + b)}{a^2 + 1} = \\ & = f\left(\frac{(1 - a^2)x + 2af(x) - 2ab}{a^2 + 1}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

với mọi x thuộc D_f .

Ví dụ đường cong $y = f(x)$ muốn nhận đường thẳng $y = x$ (hoặc $y = -x$) làm tr.đ.x. thì cần và đủ là

$$x = f(f(x)) \text{ hoặc tương ứng } -x = f(-f(x)), \forall x \in D_f.$$

Trong trường hợp tr.đ.x. đứng, ta có công thức đơn giản hơn nhiều: Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $x = x_0$ là tr.đ.x. (đứng) của đường $y = f(x)$ là

$$f(x) = f(2x_0 - x), \forall x \in D_f \quad (5)$$

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng nếu đường cong (c) $y = f(x)$ có tr.đ.x. xiên (l) $y = ax + b$ cắt (c)

ở $P(x_0, y_0)$ thì tiếp tuyến của (c) ở P phải trùng hoặc vuông góc với (l) (giả sử $f'(x_0)$ có).

$$\text{Ta có } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Xét điểm (x, y) đối xứng với (x, y) , $y = f(x)$ qua (l). Vì (l) là tr. đ. x. của (c) nên $y = f(x)$ và do đó $(x \rightarrow x_0 \text{ khi } x \rightarrow x_0)$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nhưng x, y tính qua $x, y = f(x)$ theo các công thức (3). Vì vậy ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{(a^2 - 1)f(x) + 2(ax + b)}{a^2 + 1} - f(x_0)}{\frac{(1 - a^2)x + 2af(x) - 2ab}{a^2 + 1} - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^2[f(x) - f(x_0)] + 2ax + 2b - f(x) - f(x_0)}{x - x_0 - a^2(x + x_0) + 2af(x) - 2ab} \end{aligned}$$

Lưu ý là $f(x_0) = ax_0 + b$, từ đây ta được

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(a^2 - 1)[f(x) - f(x_0)] + 2a(x - x_0)}{(1 - a^2)(x - x_0) + 2a[f(x) - f(x_0)]} \\ &= \frac{(a^2 - 1)f'(x_0) + 2a}{1 - a^2 + 2af'(x_0)} \end{aligned}$$

Từ đây rút ra $f'(x_0) = a$ hoặc $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ (đpcm)

Ví dụ đường thẳng vừa là tr. đ. x. vừa là tiếp tuyến (tại bất cứ điểm nào) của chính nó, đồng thời bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với nó cũng là tr. đ. x. của nó.

Dựa vào (5) các bạn sẽ thấy ngay là: Nếu đường cong $y = f(x)$ có tr. đ. x. đứng cắt nó ở (x_0, y_0) thì $f'(x_0) = 0$. (Thật vậy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(2x_0 - x) - f(x_0)}{(2x_0 - x) - x_0} = -f'(x_0) \end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu $(x_1, 0)$ và $(x_1, 0)$ là hai điểm đối xứng nhau qua $(0, x_0)$ thì vì

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &= \frac{f(x) - f(x_1)}{(2x_0 - x) - (2x_0 - x_1)} \\ &= -\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \end{aligned}$$

$f'(x_1) = -f'(x_1)$, tức là đạo hàm bậc nhất đổi chiều khi qua x_0 . Như vậy ở đây $f(x)$ phải có cực trị.

VÍ DỤ 5. Tìm m, n, p, q ($p, q \neq 0$) để đường (c) $y = \frac{mx + n}{px + q}$ nhận đường thẳng $y = 2x$ làm tr. đ. x.

$$\text{Ở đây } a = 2, b = 0 \text{ nên (4) có dạng } \frac{3f(x) + 4x}{5} = f\left(\frac{4f(x) - 3x}{5}\right).$$

Thay $f(x) = \frac{mx + n}{px + q}$, ta được (chỉ viết các

số hạng với số mũ cao nhất).
$$\frac{4px^2 + \dots}{5px + 5q} = \frac{-3mpx^2 + \dots}{-3p^2x^2 + \dots}$$
 Như vậy
 $-12p^3x^4 + \dots = -15mp^2x^3 + \dots$ Suy ra $p = 0$, tức là (c) phải là đường thẳng $y = mx/q + n/q$. Do đó muốn có đường thẳng $y = 2x$ là tr. đ. x. thì phải có $m/q = 2, n = 0$ hoặc $m/q = -1/2$ (n bất kỳ).

VỀ BIỂU THỨC CHỨA VÔ HẠN PHÉP TÍNH

PHAN ĐỨC THÀNH

TRONG Toán học ta thường gặp những biểu thức chứa một số vô hạn các phép tính.

Khi gặp các biểu thức như vậy việc trước tiên là cần phải định nghĩa rõ ràng phép toán chứa trong biểu thức đó.

Chẳng hạn cần tìm tổng của một số vô hạn các số hạng

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

Khái niệm giới hạn của dãy cho phép ta xây dựng được khái niệm tổng của chuỗi (1). Cụ thể là: nếu tồn tại giới hạn của dãy các tổng riêng

$$x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

thì ta bảo rằng chuỗi (1) hội tụ và giới hạn tìm được được gọi là tổng của chuỗi đã cho.

Khái niệm giới hạn cũng cho phép ta khả năng tạo nên ý nghĩa của các biểu thức

chứa một số vô hạn các phép tính. Chẳng hạn:

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} \quad (2)$$

$$B = \sqrt[3]{3 \sqrt[3]{3 \sqrt[3]{3 \dots}}} \quad (3)$$

$$C = \sqrt[3]{3 \sqrt[5]{3 \sqrt[3]{3 \sqrt[5]{3 \dots}}} \quad (4)$$

Cụ thể là đối với biểu thức (2) ta hãy xét dãy

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

và chúng ta hiểu biểu thức (2) như giới hạn của dãy x_n :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Dễ dàng chứng minh được rằng (xem bài tập số 391 của *Tuyển tập những bài toán sơ cấp* tập 1 của Phan Đức Chính và các tác giả khác) x_n là một dãy tăng ngặt và bị chặn trên (chẳng hạn bởi $\sqrt{2} + 1$). Do đó dãy x_n có giới hạn khi $n \rightarrow \infty$.

Rõ ràng với $n \geq 1$ ta có

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

$$\text{hay } x_{n+1}^2 = 2 + x_n$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta được $A^2 = 2 + A$

Vì $A \geq 0$ nên ta tìm được $A = 2$.

Tương tự ta hiểu B là giới hạn của dãy x_n trong đó

$$x_n = \underbrace{\sqrt[3]{3 \sqrt[3]{3 \dots \sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ căn}}$$

Ta sẽ chứng minh rằng B thực sự tồn tại. Thực vậy

$$x_n = 3^{1/2} 3^{1/4} \dots 3^{1/2^n} = 3^{1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n}$$

Do tính liên tục của hàm $y = 3^x$ nên

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3^{\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2 + \dots + 1/2^n)} = 3^1 = 3.$$

Cũng tương tự, ta tìm được $C = \sqrt[3]{45}$.

Tóm lại nhờ phép toán giới hạn chúng ta có thể định nghĩa được các biểu thức F_∞ chứa một số vô hạn các phép tính. Khi đó ta hiểu F_∞ như giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ của biểu thức F_n , ở F_n phép toán của chúng ta gặp n lần. Hơn nữa từ đó ta có thể nói đến việc giải các "phương trình" không bình thường chứa các biểu thức F_∞ . Chẳng hạn các phương trình sau;

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2$$

$$\sqrt{x} \sqrt{x \sqrt{x \dots}} = 3$$

$$\begin{aligned} & (x+1) \sqrt{x+1} \sqrt{x+1} \dots \\ & (x+1) \sqrt{x+1} \sqrt{x+1} \dots = 4 \end{aligned}$$

Khi giải các phương trình này trước hết cần định nghĩa rõ ràng phép toán F_∞ và chứng minh sự tồn tại của giới hạn.

Các biểu thức loại F_∞ thường gặp khi tính gần đúng. Chẳng hạn để tính gần đúng căn bậc 3 của một số a ta lấy số gần đúng thứ nhất

$$a_0 = a > 0$$

số gần đúng tiếp theo

$$a_1 = \frac{1}{3} (2a_0 + a/a_0^2)$$

và tổng quát

$$a_n = \frac{1}{3} (2a_{n-1} + a/a_{n-1}^2).$$

Dễ dàng chứng minh được rằng dãy a_n có giới hạn hữu hạn. Gọi $\lim a_n = s$. Khi đó $s > 0$

$$\text{và } s = \frac{1}{3} (2s + a/s^2)$$

hay $s^3 = a$. Suy ra $s = \sqrt[3]{a}$.

Trong thí dụ trên, dãy gần đúng a_n được cho bởi hệ thức

$$a_n = f(a_{n-1})$$

trong đó $f(x) = \frac{1}{3} (2x + a/x^2)$ và giới hạn s

của dãy a_n là nghiệm của phương trình

$$f(x) = x \quad (5)$$

Giả sử ta cần giải phương trình (5) trong đó f là một hàm nào đấy có miền xác định D . Ta lấy một điểm $a_0 \in D$ và xác định dãy theo hệ thức truy hồi

$$a_n = f(a_{n-1}).$$

Giả thiết rằng $a_n \in D$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Định lý 1. Nếu dãy a_n hội tụ về s và hàm f liên tục khi $x = s$ thì s là nghiệm của phương trình (5).

Bây giờ ta hãy xét các biểu thức loại F_∞

$$\sqrt[2]{2} \sqrt[2]{2} \sqrt[2]{2} \dots \quad \text{và} \quad \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots$$

Liên quan đến điều đó ta hãy xét tính hội tụ của dãy

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = a^{x_{n-1}} \end{cases} \quad (n \geq 1) \quad (6)$$

Đi nhiên tính hội tụ của dãy này phụ thuộc vào tham số a . Từ định lý 1 ta nhận thấy rằng nếu $\lim x_n = s$ thì s là nghiệm của phương trình $a^x = x$.

Đối với dãy (6) ta có

Định lý 2. Dãy (6) hội tụ khi và chỉ khi

$$(1/e)^e \leq a \leq e^{1/e}$$

với $(1/e)^e = 0,065988...$

$$e^{1/e} = 1,444668...$$

Theo định lý 2

thì các biểu thức $\sqrt[2]{2}$

$$\sqrt[2]{2}$$

và

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

là có ý nghĩa. Còn các biểu thức sau là không có nghĩa

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{100}, \frac{1}{100}, \frac{1}{100}$$

THỬ TÌM HIỂU VÀI ĐIỀU VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

LÊ THỐNG NHẤT

VIỆC nghiên cứu những tính chất của tập hợp các số nguyên tố đến nay đã có rất nhiều kết quả hay, tuy nhiên vẫn còn nhiều « bí mật » chưa được khám phá. Ở bài này, tôi muốn bước đầu giới thiệu với các bạn một vài tính chất thú vị của số nguyên tố.

Trước hết, chắc nhiều bạn đã biết định lý khá đẹp sau đây về số nguyên tố:

Định lý. Có vô hạn các số nguyên tố.

Chứng minh: Chúng ta giả sử chỉ có hữu hạn các số nguyên tố:

$p_1, p_2, \dots, p_k$. Vậy hãy xét số:

$$N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$$

rõ ràng N không chia hết cho một số nguyên tố p_i ($1 \leq i \leq k$) nào bởi vì khi chia N cho p_i ($1 \leq i \leq k$) đều có số dư là 1.

Bởi vì $N \neq \pm 1$ nên ít nhất N phải chia hết cho một số nguyên tố p nào đó, mà như ta nói ở trên $p \neq p_i$ ($1 \leq i \leq k$). Vậy mâu thuẫn với giả thiết chỉ có k số nguyên tố $p_1, \dots, p_k$.

Vậy số các số nguyên tố là vô hạn.

Sở dĩ tôi muốn giới thiệu với các bạn phép chứng minh trên bởi vì phương pháp đó có

thể sử dụng để giải một số bài toán về số nguyên tố.

Như vậy tập hợp các số tự nhiên chứa vô hạn các số nguyên tố. Ta hãy nhìn tập hợp các số tự nhiên dưới góc độ là một cấp số cộng với $u_1 = 0$ và $d = 1$.

Vậy có phải chỉ có cấp số cộng đó mới chứa vô hạn các số nguyên tố hay sao? Liệu một cấp số cộng bất kỳ có thể chứa vô hạn các số nguyên tố được không?

Năm 1837, nhà Toán học Đê-ric-lê (nhà toán học người Đức đã có nhiều công trình đóng góp cho giải tích toán học và lý thuyết số ở thế kỷ thứ XIX) đã chứng minh được rằng: « Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu và công sai nguyên tố cùng nhau thì cấp số cộng đó chứa vô hạn các số nguyên tố ». Kết quả đó với trường hợp $u_1 = 1$ đã được O-le chứng minh từ năm 1775. Nhà toán học Lơ-giăng-đơ cũng đã chứng minh điều khẳng định của Đê-ric-lê; phép chứng minh dựa vào một mệnh đề phụ, nhưng tiếc thay mệnh đề phụ đó sau này được kiểm tra lại mới biết là sai.

Phép chứng minh của Đê-ric-lê khá phức tạp dựa vào hàm số số học đặc biệt là chuỗi, sau

đó Xebero đã chứng minh được một cách hoàn toàn sơ cấp. (Các bạn thử nghĩ xem).

Ở đây tôi chỉ giới thiệu phép chứng minh đối với vài cấp số cộng đặc biệt và mong các bạn hãy tìm cách chứng minh cho các cấp số cộng đặc biệt khác thỏa mãn điều kiện của Đê-ric-lê.

Bài toán. Có vô hạn các số nguyên tố dạng $4t+3$ (với t là số tự nhiên).

Lời giải: Ở đây ta xét cấp số cộng

3, 7, 11, 15,...

($m_1=3$; $d=4$ thỏa mãn điều kiện Đê-ric-lê) Ta phải chứng minh cấp số cộng này chứa vô hạn các số nguyên tố.

Ta giả sử ngược lại: chỉ tồn tại hữu hạn các số nguyên tố dạng $4t+3$. Xét N là tích của tất cả các số nguyên tố dạng đó.

Ta biết rằng nếu $x \equiv 1 \pmod{4}$ và $y \equiv 1 \pmod{4}$, thì $xy \equiv 1 \pmod{4}$. Vậy tích các số nguyên tố nào đó dạng $4t+1$ không thể là số $4N-1$. Do đó số $4N-1$ phải có ít nhất một ước số nguyên tố dạng $4t+3$, giả sử đó là p . Ta có p là ước của N và p cũng là ước của $4N-1$. Suy ra p là ước của -1 . Nhưng $p \geq 3$, vậy mâu thuẫn, và ta có kết quả cần chứng minh.

Các bạn sẽ có kết quả đối với các số nguyên tố dạng $6t+5$, $10t+1$ nếu dùng phương pháp tương tự.

Nhưng lời giải cho các số nguyên tố dạng $4t+1$, $6t+1$ thì lại phức tạp hơn nhiều.

Xin gợi ý các bạn có thể đi theo con đường thông qua bài toán phụ sau:

> **Bài toán phụ 1.** Chứng minh rằng: nếu tồn tại số nguyên x sao cho x^2+1 chia hết cho số nguyên tố p thì p phải có dạng $4t+1$.

Sau đó xét N là tích các số nguyên tố dạng $4t+1$ (với giả sử số các số nguyên tố dạng $4t+1$ là hữu hạn) và số $4N^2+1$, các bạn sẽ dẫn tới một mâu thuẫn.

Bài toán phụ 2. Chứng minh rằng: nếu tồn tại số nguyên x sao cho x^2+3 chia hết cho số nguyên tố p thì p có dạng $6t+1$.

Từ bài toán phụ 2, các bạn sẽ giải quyết được bài toán cho các số nguyên tố dạng $6t+1$, bằng phương pháp như đối với những số nguyên tố dạng $4t+1$.

Bây giờ các bạn hãy phát triển suy nghĩ theo một khía cạnh khác. Chúng ta hãy nhìn cấp số cộng:

$$u_1, u_1+d, u_1+2d, \dots, u_1+kd; \dots$$

như là dãy các giá trị của hàm số $f(k) = u_1+kd$ tại lần lượt các giá trị của đối số $k=0, 1, 2, \dots$. Hàm số $f(k)$ là hàm số bậc nhất. Nếu thay hàm số đó bởi một hàm số bất kỳ khác $g(x)$ thì ta hãy xét dãy số:

$$g(0), g(1), \dots, g(k), \dots$$

Liệu nó có chứa vô hạn các số nguyên tố hay không?

Thí dụ: $g(x) = x^2+1$ ta có dãy số:

$$1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

liệu có vô hạn các số nguyên tố trong đó hay không? Nếu xét 3000 số hạng đầu tiên các bạn sẽ có 300 số nguyên tố. Còn câu trả lời cho câu hỏi đã đặt ra thì đến nay vẫn chưa được giải quyết. Chỉ riêng xét với $g(x)$ là một đa thức bậc n nào đó thì vấn đề cũng đã khá hắc búa rồi. Mong rằng các bạn hãy tìm tòi và sáng tạo để có những kết quả tốt dù chỉ là còn bé nhỏ so với bài toán tổng quát.

Cuối cùng xin gửi tới các bạn 6 bài toán về số nguyên tố (mà theo tôi biết) đến nay vẫn chưa có lời giải để các bạn thử suy nghĩ một cách mạnh dạn:

Bài toán 1. Chứng minh tồn tại hằng số k sao cho có vô hạn các số nguyên tố p và p' thỏa mãn $p'-p < k$.

Bài toán 2. Tìm hằng số k sao cho tồn tại vô số cặp số nguyên tố p và p' thỏa mãn $p'-p = k$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên chẵn đều có thể biểu diễn thành hiệu của 2 số nguyên tố nào đó.

Bài toán 4. Chứng minh rằng có vô số các số nguyên tố p sao cho $p' = \frac{p-1}{2}$ cũng là số nguyên tố.

Bài toán 5. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên để dãy

$$f(1), f(2), \dots, f(k), \dots$$

chứa vô hạn các số nguyên tố.

Bài toán 6. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên tố biểu diễn được dưới dạng tổng các lập phương của ba số tự nhiên.

KỠ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 20

KỠ thi toán quốc tế lần thứ 20 đã được tiến hành vào tháng 7 vừa qua tại Bu-ca-rét.

Có 17 nước dự thi là: Việt Nam, Ru-ma-ni, Bun-ga-ri, Tiệp Khắc, Ba Lan, Cu Ba, Mông Cổ, Mỹ, Anh, Pháp, Cộng hòa liên bang Đức, Áo, Nam Tư, Hà Lan, Thụy Điển, Phần Lan, Thổ Nhĩ Kỳ (dự thi lần đầu tiên). Trừ Cu Ba chỉ cử bốn học sinh các nước còn lại đều cử đủ tám học sinh dự thi. Trong số 132 học sinh dự thi có bốn học sinh gái (Bun-ga-ri hai, Mông Cổ và Nam Tư mỗi nước một).

Cũng như các kỳ thi trước, học sinh dự thi phải giải sáu bài toán với số điểm tối đa là 40.

Sau khi chấm bài, hội đồng chấm thi đã quyết định và trao tặng năm giải nhất cho các thí sinh đạt được từ 35 đến 40 điểm (hai học sinh Ru-ma-ni, một học sinh Mỹ, một học sinh Anh và một học sinh Cộng hòa liên bang Đức); hai mươi giải nhì cho các thí sinh đạt được từ 27 đến 34 điểm; ba mươi tám giải ba cho các thí sinh đạt được từ 22 đến 26 điểm.

Đoàn học sinh nước ta đạt được kết quả như sau. Hai giải nhì là: Vũ Kim Tuấn 30 điểm và Nguyễn Thanh Tùng 29 điểm; sáu giải ba là: Đỗ Đức Thái 25 điểm, Hồ Đình Duân 24 điểm, Lê Như Dương 24 điểm, Nguyễn Tuấn Hùng 23 điểm, Nguyễn Hồng Thái 23 điểm và Nguyễn Trung Hà 22 điểm.

Bộ Giáo dục và Trung ương Đoàn Thanh niên Cộng sản Ru-ma-ni còn tổ chức một cuộc họp đặc biệt mời trưởng đoàn các nước và tất cả các học sinh đạt giải dự để tặng một số giải thưởng ngoài thể lệ của cuộc thi. Đoàn học sinh nước ta được tặng một giải đồng đội đặc biệt «là đoàn duy nhất có cả tám học sinh đạt giải». Em Nguyễn Hồng Thái được một giải cá nhân đặc biệt «là học sinh đạt giải ít tuổi nhất».

Sau đây là đề thi năm nay.

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. Cho m và n là những số tự nhiên với $n > m > 1$. Trong cách viết thập phân, ba chữ số cuối cùng của 1978^m theo thứ tự bằng ba chữ số cuối cùng của 1978^n .

Tìm các số m và n sao cho tổng $m + n$ có giá trị nhỏ nhất.

(Cu Ba đề nghị, 6 điểm)

Bài 2. Cho P là một điểm cố định nằm bên trong một hình cầu cho trước. Ba đoạn thẳng PA, PB, PC vuông góc đôi một có ba đầu mút A, B, C nằm trên mặt cầu. Gọi Q là đầu mút thứ hai của đường chéo PQ của hình hộp chữ nhật có các cạnh là PA, PB, PC .

Tìm quỹ tích của điểm Q khi ba điểm A, B, C chạy trên mặt cầu.

(Mỹ đề nghị, 7 điểm)

Bài 3. Cho tập hợp tất cả các số nguyên dương là hợp của hai tập hợp con không giao nhau $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ và $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$ trong đó

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots$$
$$g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots$$

và $g(n) = f(f(n)) + 1$ với mọi $n \geq 1$.

Tìm $f(240)$.

(Anh đề nghị, 8 điểm)

NGÀY THỨ HAI

Bài 4. Cho tam giác ABC trong đó $AB = AC$. Một đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác và cũng tiếp xúc với các cạnh AB, AC theo thứ tự tại P, Q .

Chứng minh rằng trung điểm của PQ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

(Mỹ đề nghị, 5 điểm)

Bài 5. Cho $\{a_k\}$ là một dãy số nguyên dương phân biệt ($k = 1, 2, 3, \dots$). Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k/k^2 \geq \sum_{k=1}^n 1/k$$

(Pháp đề nghị, 6 điểm)

Bài 6. Một hội quốc tế có hội viên thuộc 6 nước khác nhau. Danh sách các hội viên gồm 1978 người được đánh số thứ tự từ 1 đến 1978.

Chứng minh rằng có ít nhất một hội viên mà số thứ tự bằng tổng các số thứ tự của hai hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó hoặc bằng hai lần số thứ tự của một hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó.

(Hà Lan đề nghị, 8 điểm)