HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 102
3
1978

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: **NGUYỄN CẢNH TOÀN**
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

Thư ký tòa soạn: **HOÀNG CHÚNG**
Dây nói: **52825**

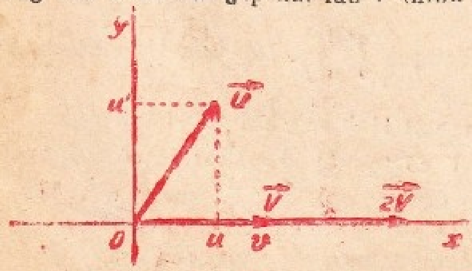
NÓI CHUYỆN VỚI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN

TẦM QUAN TRỌNG CỦA MỘT CÁCH NHÌN

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Các bạn thân mến!

Chúng ta đã quen với các số thực (bao gồm tất cả các số hữu tỷ và các số vô tỷ) và thường nhìn chúng dưới góc độ «số». Bây giờ ta hãy có cách nhìn mới về các số đó. Các số như 2, 3, $\sqrt{2}$, π, v.v... đem đặt trước một cái gì đó đều có ý nghĩa như một lệnh phải thực hành trên cái đó. Ví dụ 2 đem đặt trước 3 có nghĩa là phải lấy $3 + 3$, đem đặt trước x có nghĩa là phải lấy $x + x$, đem đặt trước $\overrightarrow{V}$ (ký hiệu một véc tơ) có nghĩa là phải lấy một vectơ cùng phương, hướng với $\overrightarrow{V}$ và dài gấp hai lần $\overrightarrow{V}$ (hình 1).



Hình 1

Dưới góc độ «lệnh» này thì phép cộng và phép nhân nên hiểu như thế nào? Với hai số thực a, b và với một véc tơ $\overrightarrow{V}$, ta có:

$$(a + b)\overrightarrow{V} = a\overrightarrow{V} + b\overrightarrow{V},\ (ab)\overrightarrow{V} = a(b\overrightarrow{V}) = b(a\overrightarrow{V}).$$

Vậy:

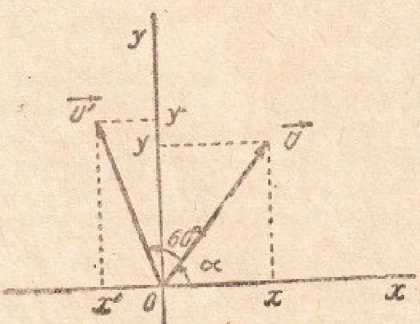
1) Muốn thực hành lệnh $a + b$ thì ta thi hành riêng rẽ từng lệnh a và b (theo một thứ tự nào cũng được) rồi cộng các kết quả lại.

2) Muốn thực hành lệnh **ab** thì ta thực hà[illegible] một trong hai lệnh a, b trước rồi đem lệnh [illegible] lại thi hành đối với kết quả đạt được sau dã thi hành xong lệnh thứ nhất.

Đến đây, chắc có bạn đã sốt ruột muốn [illegible] nhưng nhìn dưới góc độ «lệnh» này thì [illegible] gì? Ta hãy nhìn hình 1. Rõ ràng là lấy [illegible] số thực nào làm lệnh ta cũng không th[illegible] khỏi đường thẳng D, nghĩa là nếu ta xét [illegible] vectơ cùng gốc O và xuất phát từ một [illegible] (3) $\overrightarrow{V}$ nằm trên một đường thẳng D thì đ[illegible] các vectơ $a\overrightarrow{V}$ luôn luôn buộc phải nằ[illegible] Q. đường thẳng D. Chẳng hạn với các số thực [illegible] M ở Q. thế nào tìm ra một cái lệnh để từ vé[illegible] được vectơ $\vec{U}$ trên hình 1.

Ta muốn thoát khỏi thế giới chật hẹp của đường thẳng D để đi vào vùng vẫy trong thế giới rộng lớn của toàn mặt phẳng. Làm sao bây giờ? Một vectơ như $\vec{V}$ buộc phải nằm trên đường thẳng D và một vectơ như $\vec{U}$ có thể có những vị trí tùy ý trong mặt phẳng thì khác nhau cơ bản ở chỗ nào? Nếu như ta định hướng đường thẳng D thì ta có thể xác định $\vec{V}$ chỉ bằng một số thực thôi, đó là hoành độ v của nó. Còn một véctơ như $\vec{U}$ thì không thể xác định chỉ bằng một số thực, mà phải bằng hai số thực, đó là hoành độ u và tung độ u' của nó (hình 1). Đem lệnh a thi hành đối với $\vec{V}$ thì điều đó cũng tương đương với việc đem lệnh đó thi hành đối với hoành độ của nó, tức là: đem số thực a nhân với vectơ $\vec{V}$ thì hoành độ v của $\vec{V}$ sẽ được nhân lên với a, và ngược lại đem hoành độ v nhân với a thì ta được hoành độ của vectơ $a\vec{V}$. Điều này gợi cho ta ý nghĩa tạo nên những lệnh mới đối với các vectơ trong mặt phẳng bằng cách dùng những lệnh cũ đối với hoành độ và tung độ của chúng. Để cho hướng suy nghĩ này được cụ thể, ta hãy xét thử một trường hợp đặc biệt: Ta muốn tạo nên một cái lệnh có tác dụng là khi đem thi hành đối với một vectơ $\vec{U}$ thì quay nó đi 60° thành một vectơ khác $\vec{U'}$ (hình 2). Gọi tọa độ của $\vec{U}$ là x, y và tọa độ của $\vec{U'}$ là x', y'. Nếu góc của trục Ox với $\vec{U}$ là α thì

$$\begin{aligned} x &= OU\cos\alpha \\ y &= OU\sin\alpha \\ x' &= OU'\cos(\alpha + 60°) \\ &= OU'\cos\alpha\,\cos 60° - OU'\sin\alpha\,\sin 60° \\ y' &= OU'\sin(\alpha + 60°) \\ &= OU'\sin\alpha\cos 60° + OU'\cos\alpha\sin 60°. \end{aligned}$$



Hình 2

Vì $OU' = OU$ (phép quay), nên cuối cùng ta có:

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Ví dụ cụ thể này gợi cho ta ý nghĩ tạo nên những lệnh mới bằng bốn lệnh cũ a, b, c, d tác động lên hoành độ và tung độ của các vectơ:

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

(trong ví dụ trên $a = 1/2$, $b = -\sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = 1/2$).

Ta sắp xếp bốn số thực a, b, c, d thành một bảng.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ và viết } \vec{U'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{U}$$

để chỉ rằng lệnh mới cho bởi bảng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biến vectơ $\vec{U}$ thành vectơ $\vec{U'}$.

Người ta gọi một bảng bốn số thực như vậy là một ma trận. Như vậy mỗi số thực cho ta một lệnh cũ còn một ma trận cho ta một lệnh mới. Các lệnh cũ giam hãm chúng ta lại trong thế giới chật hẹp của một đường thẳng còn các lệnh mới thì giải phóng cho chúng ta được vùng vẫy trong cả mặt phẳng rộng lớn. Khi nhìn một ma trận cho ta một lệnh mới như trên thì ta phải ghi nhớ rằng: Muốn có hoành độ của vectơ mới (vectơ $\vec{U'}$) thì dùng hai lệnh cũ ở dòng đầu của ma trận còn muốn có tung độ của vectơ mới thì dùng hai lệnh cũ ở dòng thứ hai của ma trận. Trong cả hai trường hợp, lệnh cũ ở bên trái là để thi hành đối với hoành độ của vectơ cũ (vectơ $\vec{U}$) còn lệnh cũ ở bên phải là để thi hành đối với tung độ của vectơ cũ. Trong các ma trận như trên ta hãy chú ý đến các ma trận dạng $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Một ma trận có dạng này cho ta một lệnh mà khi thi hành đối với một vectơ $\vec{V}$ có tọa độ (x, y) thì sẽ có một vectơ $\vec{V'}$ có tọa độ (ax, ay), tức là vectơ $a\vec{V}$. Vậy lệnh mới cho bởi ma trận nói trên có tác dụng hoàn toàn giống y như tác dụng của lệnh cũ cho bởi số thực a. Như vậy các lệnh cũ chẳng qua chỉ là một trường hợp đặc biệt của các lệnh mới.

Trên cơ sở đó đứng ở góc độ « lệnh » ta có thể viết:

$$\text{lệnh} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \text{lệnh } a$$

hay vắn tắt: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a.$

Ta cũng sẽ xét tổng và tích các lệnh mới giống y như khi xét tổng và tích các lệnh cũ nói ở hai điểm 1) và 2) ở trên.

Giả sử ta có hai ma trận $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

Chúng cho ta hai lệnh mới mà ta đem thi hành riêng rẽ đối với một vectơ $\vec{V}$ có tọa độ (x, y). Ta được kết quả là hai vectơ $\vec{V_1}(x_1, y_1)$ và $\vec{V'_1}(x'_1, y'_1)$ có tọa độ như sau:

$$\begin{cases} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = a'x + b'y \\ y'_1 = c'x + d'y \end{cases}$$

Tổng $\vec{V_1} + \vec{V'_1}$ của hai vectơ đó là một vectơ $\vec{V'}$ có tọa độ là:

$$x' = x_1 + x'_1 = (a + a')x + (b + b')y$$
$$y' = y_1 + y'_1 = (c + c')x + (d + d')y$$

Vậy kết quả đạt được cũng giống y như khi ta thi hành đối với vectơ $\vec{V}$ chỉ một lệnh

$$\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

Trên cơ sở đó, ta có thể viết:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

và gọi ma trận ở vế sau là tổng của hai ma trận ở vế đầu, và cũng gọi lệnh ở vế sau là tổng của hai lệnh ở vế đầu. Nếu ta thi hành lệnh $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ trước thì ta được vectơ $\vec{V'_1}$ ở trên và tiếp theo đó ta lại thi hành lệnh $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ đối với $\vec{V'_1}$ thì ta được vectơ $\vec{V''}$ có tọa độ là:

$$x'' = ax'_1 + by'_1 = a(a'x + b'y) + b(c'x + d'y)$$
$$= (aa' + bc')x + (ab' + bd')y$$
$$y'' = cx'_1 + dy'_1 = c(a'x + b'y) + d(c'x + d'y)$$
$$= (ca' + dc')x + (cb' + dd')y.$$

Vậy kết quả đạt được cũng giống y như khi ta thi hành đối với $\vec{V}$ chỉ một lệnh

$\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$, tức là:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}\vec{V}$$

vì lẽ đó, ta có thể viết:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \qquad (1)$$

và gọi ma trận (lệnh) ở vế sau là tích của hai ma trận (lệnh) ở vế trước, lấy theo thứ tự đó. Ở đây, khác với trường hợp các số thực, tích này nói chung không giao hoán. Bạn đọc cứ thử xem, nếu ta thi hành lệnh $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ trước thì ta sẽ đi đến kết quả:

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Trong thế giới các lệnh mới này xuất hiện rất nhiều điều kỳ lạ không có trong thế giới các lệnh cũ. Sau đây là một vài hiện tượng kỳ lạ đó:

1) Ta gọi i là lệnh $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Áp dụng công thức (1) hoặc (2) ở trên, ta sẽ có:

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Đẳng thức $i^2 = -1$ có vẻ bí hiểm này thực ra lại rất dễ hiểu. Bạn đọc dễ nhận thấy rằng lệnh $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ chẳng qua là lệnh « quay 90° ngược chiều kim đồng hồ », và đẳng thức $i^2 = -1$ có nghĩa là: quay 90° ngược chiều kim đồng hồ liên tiếp hai lần thì tức là quay 180°. Và bây giờ một phương trình bậc hai không có nghiệm, ví dụ $x^2 + x + 1 = 0$

trở nên có nghiệm: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$ và ý nghĩa các nghiệm đó cũng rất dễ hiểu:

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

và

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

Nếu ta viết phương trình dưới dạng $x^2 + x = -1$ thì ta thấy ngay rằng hai nghiệm trên chính là hai lệnh có tính chất sau đây: đem mỗi lệnh đó thi hành liên tiếp hai lần (x^2) đối với bất cứ vécto nào rồi lấy kết quả cộng với vectơ có được khi chỉ thi hành lệnh đó có một lần thôi (x) thì kết quả cuối cùng là được vectơ đối của vectơ lúc đầu.

2) Ta gọi e là lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ta có

$$e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Như vậy, ta thấy rằng trong thế giới này 1 không phải chỉ có hai căn bậc hai là $+1$ và -1 mà còn có những căn bậc hai khác, ví dụ $+e$ và $-e$.

3) Ta gọi α là lệnh $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha.$$

Do đó, mọi lũy thừa của α đều bằng α. Người ta nói rằng α có tính chất « lũy đẳng ».

4) Ta gọi ε là lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Như vậy ta thấy rằng 0 có những căn bậc hai khác không, ví dụ ε và $-\varepsilon$. Người ta nói rằng ε có tính chất « lũy linh ».

Những điều trên cũng có vẻ bí hiểm nhưng cũng rất dễ hiểu. Bạn đọc tự mình có thể thấy ngay rằng: e là lệnh sau đây « biến đổi vectơ đã cho bằng phép đối xứng qua phân giác thứ nhất »; α là lệnh sau đây « chiếu vuông góc vectơ đã cho xuống trục Ox; còn ε là lệnh gì thì xin giữ bí mật để bạn đọc tự tìm lấy. Rõ ràng là một chân trời mới đã mở ra trước mắt các bạn.

Bài học ta cần rút ra ở đây là: nên cố gắng tìm những cách nhìn mới đối với cái cũ. Từ cách nhìn mới hy vọng sẽ có cái mới ra đời. Giữa cái cũ và cái mới này có một mâu thuẫn (đứng ở góc độ cũ mà nhìn: ví dụ số thực và ma trận là khác nhau) và có mặt thống nhất (đứng ở góc mới mà nhìn: lệnh cho bởi một số thực cũng là lệnh cho bởi một ma trận).

(còn nữa)

Bài 1/99. *Tìm 4 số tự nhiên* $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ *sao cho tất cả các số*

$$d_1 = a_4 - a_3 \qquad d_2 = a_3 - a_2$$
$$d_3 = a_2 - a_1 \qquad d_4 = a_4 - a_2$$
$$d_5 = a_3 - a_1 \qquad d_6 = a_4 - a_1$$

đều là các số nguyên tố, trong đó có thể có những số nguyên tố trùng nhau.

Lời giải (của các bạn *Đỗ Đức Lưu, Vũ Đức Minh*, lớp 9N Hồng Quang, Hải Hưng và nhiều bạn khác).

Từ điều kiện của bài toán ta có:

$d_4 = d_1 + d_2$, $d_5 = d_2 + d_3$, $d_6 = d_1 + d_2 + d_3$

Xét các khả năng:

1) d_1, d_2, d_3 là các số nguyên tố lẻ. Khi đó a_4 và d_5 là các số chẵn lớn hơn 2, khả năng này không thể xảy ra vì d_4, d_5 là các nguyên tố.

2) d_1, d_2, d_3, là các số nguyên tố chẵn (chỉ có thể bằng 2). Khi đó $d_6 = 6$, khả năng này cũng không thể xảy ra vì d_6 là số nguyên tố.

3) Trong 3 số d_1, d_2, d_3 chỉ có một số chẵn, hai số kia lẻ. Khi đó d_6 là một số chẵn lớn hơn 2, trái với d_6 là số nguyên tố.

4) Trong 3 số d_1, d_2, d_3 có một số lẻ và hai số chẵn (bằng 2):

— d_1 lẻ thì $d_2 = d_3 = 2$. Khi đó $d_5 = 4$, trái với d_5 là số nguyên tố.

— d_3 lẻ thì $d_1 = d_2 = 2$. Khi đó $d_4 = 4$, trái với d_4 là số nguyên tố.

— d_2 lẻ thì $d_1 = d_3 = 2$. Khi đó $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ và $d_6 = d_2 + 4$. Mặt khác, trong 3 số d_2, $d_2 + 2$, $d_2 + 4$ luôn luôn có một số chia hết cho 3 và đều là các số nguyên tố. Khả năng này chỉ xảy ra khi $d_2 = 3$, $d_4 = d_5 = 5$ và $d_6 = 7$. Từ đó dễ dàng tìm được:

$$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2,$$
$$a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5,$$
$$a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7.$$

Vậy các số a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa mãn điều kiện của bài toán phải có dạng:

$$a_1 = n,\ a_2 = n+2,\ a_3 = n+5,\ a_4 = n+7,$$

trong đó n là một số tự nhiên nào đó.

T. T.

Bài 2/99. *Các điểm đối xứng với trực tâm của một tam giác qua các cạnh của tam giác ấy tạo thành một tam giác mới. Các cạnh của hai tam giác này cắt nhau tạo thành một lục giác. Chứng minh rằng các đường thẳng nối các đỉnh đối diện của lục giác này cắt nhau tại một điểm.*

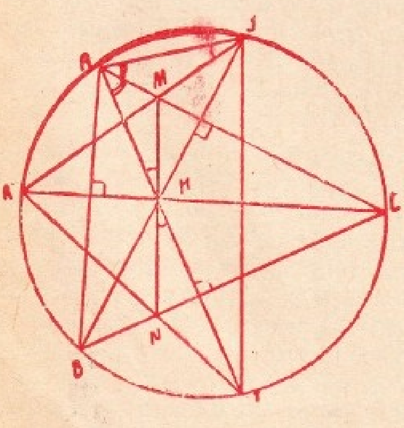
Lời giải (của bạn *Phan Văn Vân*, lớp 9N Hồng Quang, Hải Hưng).

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; I, J, K lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các cạnh BC, CA, AB.

1. Trước hết ta chứng minh I, J, K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Thật vậy:

Do H và J đối xứng nhau qua AC nên $\widehat{CAH} = \widehat{CAJ}$. Ta lại có $\widehat{CAH} = \widehat{CBJ}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), do vậy: $\widehat{CAJ} = \widehat{CBJ}$, nghĩa là 4 điểm A, B, C, J cùng nằm trên một đường tròn hay J nằm trên đường tròn ngoại tiếp ABC. Bằng lập luận tương tự, I và K cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ABC.

2. Gọi M là giao điểm của KJ và AC, N là giao điểm của KI và BC. Ta sẽ chứng minh 3 điểm H, M, N thẳng hàng. Thật vậy. Theo trên ta có $\widehat{AIK} = \widehat{AJK}$ (cùng chắn cung AK). Kết hợp với $\widehat{AIK} = \widehat{IHN}$ (do H và I đối xứng nhau qua BC) và $\widehat{AJK} = \widehat{AHM}$ (do H và J đối xứng nhau qua CA) ta được $\widehat{IHN} = \widehat{AHM}$ điều này chứng tỏ 3 điểm M, H, N thẳng hàng.



Hình 1

Bằng cách lập luận tương tự, ta chứng minh được các đường thẳng nối hai cặp đỉnh đối diện còn lại của lục giác (phần chung của hai tam giác ABC và IJK) đều đi qua trực tâm H của tam giác ABC.

Nhận xét. Nhiều bạn đã có lời giải đúng và theo cùng một lược đồ chứng minh như trên (trước hết chứng tỏ A, B, C, I, J, K, cùng nằm trên một đường tròn, rồi sau đó chứng minh các đường thẳng nối các đỉnh đối diện của lục giác cắt nhau tại H).

Chẳng hạn, để chứng minh M, H, N thẳng hàng có thể lập luận như sau:

Do $\widehat{ABJ} = \widehat{ACK}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), nên $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{AJ}$. Từ đó $\widehat{AIK} = \widehat{AIJ}$. Nhưng $\widehat{AIK} = \widehat{IHN}$ (do I và H đối xứng nhau qua BC) nên $\widehat{AIJ} = \widehat{IHN}$, nghĩa là $HN \parallel IJ$. Tương tự ta cũng có $HM \parallel IJ$. Từ đó suy ra M, H, N thẳng hàng.

T.T.

Bài 3/99. *Cho đa thức bậc hai*

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Biết rằng $|f(0)| \leqslant 1$, $|f(-1)| \leqslant 1$, $|f(1)| \leqslant 1$, hãy chứng minh rằng

$$|f(x)| \leqslant 5/4 \text{ với mọi } |x| \leqslant 1.$$

Lời giải. Trước hết ta hãy lập đa thức bậc hai $g(x) = Ax(x-1) + B(x^2-1) + Cx(x+1)$.

Ta hãy chọn các hệ số A, B, C sao cho $g(-1) = f(-1)$, $g(0) = f(0)$ và $g(1) = f(1)$, tức là

$$f(-1) = g(-1) = 2A,$$
$$f(0) = g(0) = -B,$$
$$f(1) = g(1) = 2C,$$

hay $A = \dfrac{1}{2}f(-1)$, $B = -f(0)$, $C = \dfrac{1}{2}f(1)$.

Với cách chọn A, B, C như vậy, thì đa thức $h(x) = f(x) - g(x)$ có bậc $\leqslant 2$ và có (ít nhất) 3 nghiệm khác nhau là $0, \pm 1$, thành thử ta phải có $h(x) = 0$ hay $f(x) = g(x)$, tức là

$$f(x) = \frac{1}{2}f(-1)\,x(x-1) - f(0)\,(x^2-1) + f(1)\,x\,(x+1).$$

Vì vậy

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(-1)|.|x(x-1)| + |f(0)|.|x^2-1| + \frac{1}{2}|f(1)|.|x(x+1)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|x(x-1)| + |x^2-1| + \frac{1}{2}|x(x+1)|$$

$= |x^2 - 1| + \frac{1}{2}|x|(|x-1| + |x+1|)$.

Nếu $|x| < 1$ thì $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ và $|x-1| + |x+1| = 1 - x + 1 + x = 2$, do đó

$$|f(x)| \leqslant 1 - x^2 + |x| \text{ khi } |x| \leqslant 1$$

tức là

$$|f(x)| \leqslant \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{khi } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x^2 + x + 1 & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Bằng cách tìm giá trị lớn nhất của các tam thức bậc hai ở vế phải, ta được

$$|f(x)| \leqslant 5/4 \text{ khi } |x| \leqslant 1.$$

Các bạn: *Nguyễn Quang Sơn* (9CT ĐHSP Vinh), *Trần Anh Sơn* (10A Thái Phiên, Hải Phòng) và *Lê Ngọc Uyên* (1R 121 Hà Nam Ninh) còn có các cách giải khác; trong đó cách giải của bạn *Nguyễn Quang Sơn* áp dụng công thức nội suy La-giăng-giơ nên ngắn gọn hơn cả.

Bài 4/99. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2 + 1 \\ x_2^2 = x_3 + 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2 = x_n + 1 \\ x_n^2 = x_1 + 1 \end{cases}$$

trong đó n là một số tự nhiên $\geqslant 2$ cho trước.

Lời giải. Nếu $x_1 = x_2$, thì $x_1^2 = x_2^2$ và từ hai phương trình đầu suy ra $x_2 = x_3$. Tiếp tục lập luận, ta thấy rằng $x_1 = x_2 = \dots = x_n$; và hệ phương trình đã cho thu về phương trình

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Như vậy trong trường hợp này, ta suy ra rằng hệ có nghiệm

$$x_1 = x_2 = \dots x_n = (1 + \sqrt{5})/2 \qquad \text{(A)}$$

$$x_1 = x_2 = \dots x_n = (1 - \sqrt{5})/2 \qquad \text{(B)}$$

Ta hãy xét trường hợp $x_1 \neq x_2$. Dĩ nhiên ta cũng phải có $x_2 \neq x_3$, $x_3 \neq x_4, \dots, x_{n-1} \neq x_n$ và $x_n \neq x_1$. Bằng phép hoán vị vòng quanh ta có thể giả thiết rằng

$$x_1 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \qquad (1)$$

Thế thì

$$x_n^2 = x_1 + 1 = \max\{x_1 + 1, x_2 + 1, \dots x_n + 1\} = \max\{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\}$$

hay cũng vậy

$$|x_n| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}. \qquad (2)$$

Nếu $x_n \geqslant 0$ thì $x_1 > x_n \geqslant 0$, nên suy ra $|x_1| > |x_n|$, trái với kết quả trên, thành thử ta phải có $x_n < 0$.

Nếu $x_1 > 0$ thì $x_n^2 = x_1 + 1 > 1$, vậy $|x_n| > 1$, và do $x_n < 0$, ta có $x_n < -1$, từ đó suy ra $x_{n-1}^2 = x_n + 1 < 0$, vô lý. Thành thử $x_1 \leqslant 0$, và do (1) ta có $x_i \leqslant 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Như vậy từ (2) suy ra

$$x_n = \min\{x_i\}.$$

Vì $x_i \leqslant x_1 \leqslant 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ ta có $|x_1| = \min\{|x_i|\}$ hay $x_1^2 = \min\{x_i^2\}$, vậy $x_2 = x_1^2 - 1 = \min\{x_i^2 - 1\} = \min\{x_i\}$. Thành thử $x_2 = x_n$, và $x_3 = x_2^2 - 1 = x_n^2 - 1 = x_1$. Tiếp tục lập luận như vậy ta được.

$$x_1 = x_3 \dots = \max\{x_i\},$$

$$x_2 = x_4 \dots = x_n = \min\{x_i\}.$$

Điều đó chỉ có thể xảy ra khi n chẵn, khi đó hệ phương trình thu về hệ hai phương trình

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2 + 1 \\ x_2^2 = x_1 + 1 \end{cases} \quad \text{với } x_1 > x_2$$

Giải ra ta được $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Ta đi đến kết quả này với giả thiết $x_1 \neq x_2$ và $x_1 = \max\{x_i\}$. Hoán vị vòng quanh các x_i, ta thấy rằng ngoài các nghiệm (A) và (B) thì trong trường hợp n chẵn, ta còn có thêm hai nghiệm (C) và (D) sau đây

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0 \\ x_2 = x_4 = \dots = x_n = -1 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

và

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} = -1 \\ x_2 = x_4 = \dots = x_n = 0 \end{cases} \qquad \text{(D)}$$

Nhận xét. Các bạn *Đặng Ngọc Thủy* (lớp 10 chuyên toán ĐHSP Vinh), *Trần Anh Sơn* (lớp 10A – Ngô Quyền – Hải Phòng) và *Đào Xuân Dũng* (Hà Nội) đã có lời giải đúng, nhưng lập luận chưa rành mạch, chính xác.

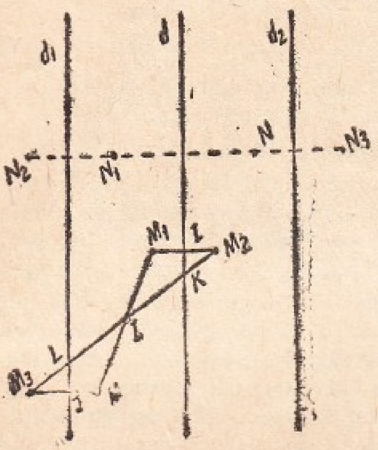
T. T.

Bài 5/99. *Cho biết đường cong (C):*

$y = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, có điểm I là tâm đối xứng và đường thẳng d không qua I là trục đối xứng. Chứng minh rằng (C) có vô vàn trục đối xứng song song với nhau. Tìm một đường cong (C) như trên sao cho không có trục đối xứng nào của (C) đi qua I.

Lời giải. Trước hết ta chứng tỏ rằng đường thẳng d_1 đối xứng với d qua I cũng là trục đối xứng của (C) (hình 2). Muốn vậy ta chứng minh rằng với một điểm M bất kỳ trên (C) thì bao giờ cũng có một điểm trên (C) đối xứng với M qua d_1. Vì I là tâm đối xứng và d là trục đối xứng nên M_1 đối xứng với M qua I phải thuộc (C), M_2 đối xứng với M_1 qua d phải thuộc (C); M_3 đối xứng với M_2 qua I phải thuộc (C). Ta chỉ cần chứng minh hai điểm M và M_3 đối xứng với nhau qua d_1. Ta thấy rằng hai tam giác

IM_1M_2 và IMM_3 bằng nhau (c.g.c). Mặt khác do d và d_1 đối xứng nhau qua I nên $IK = IL$. Suy ra $KM_2 = LM_3$ và do đó hai tam giác EKM_2 và JLM_3 bằng nhau (E là giao của M_1M_2 với d – xin sửa lại hình). Từ các cặp tam giác bằng nhau trên ta suy ra $MM_3 \perp d_1$ và J là điểm giữa của MM_3; tức là M_3 đối xứng với M qua d_1 (đpcm).



Hình 2

Bây giờ ta chứng minh rằng họ các đường thẳng song song nhau, trong đó có d và d_1, cách đều nhau một khoảng bằng khoảng cách giữa d và d_1, đều là các trục đối xứng của đường cong (C).

Thật vậy, ví dụ ta xét đường thẳng d_2 gần d nhất. Lấy điểm N bất kỳ trên (C), bao giờ cũng tìm được N_1 thuộc (C) đối xứng với N qua d, lại tìm được N_2 thuộc (C) đối xứng với N_1 qua d_1; lại tìm được N_3 thuộc (C) đối xứng với N_2 qua d. Dễ thấy chứng minh được N_3 đối xứng với N qua d_2.... Chứng minh tương tự lần lượt cho các đường khác.

Đường cong $y = \sin x$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Chẳng hạn xét tâm đối xứng là gốc tọa độ thì tất cả các trục đối xứng: $x = \pi/2 + k\pi$, $k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ (và chỉ gồm các đường thẳng này) đều không đi qua gốc tọa độ.

Bài 6/99. *Cho đa giác đều n cạnh $A_1 A_2 \ldots A_n$ nội tiếp trong hình tròn bán kính R. I là điểm giữa của cung nhỏ A_nA_1. Gọi S_n là tổng các khoảng cách từ I đến tất cả các cạnh của đa giác Chứng minh rằng*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = R.$$

Lời giải (của *Lê Anh Dũng*, 10CT Thái Phiên, Hải Phòng). Gọi $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ lần lượt là diện tích các tam giác có đỉnh là I và các cạnh đáy lần lượt là $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ và $h_1, h_2, \ldots, h_n$ là các đường cao tương ứng của chúng, các tam giác này có các cạnh đáy bằng nhau, ta đặt bằng a. Như vậy ta có

$$S_n = h_1 + h_2 \ldots + h_{n-1} + h_n$$
$$= 2(B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-1})/a + h_n$$
$$= 2(B + B_n)/a + h_n$$

với B là diện tích của đa giác đều. Gọi d là trung đoạn của đa giác đều thì

$$\frac{S_n}{n} = \frac{2B + 2B_n}{n} + \frac{h_n}{n} = \frac{2B}{na} = \frac{2B_n}{na} + \frac{h_n}{n}$$
$$= d + \frac{h_n}{n} + \frac{h_n}{n} = d + h_n - \frac{n-2}{n} h_n$$
$$R - \frac{n-2}{n} h_n.$$

Khi $n \to \infty$ thì $\frac{n-2}{n} \to 1$, $h_n \to 0$, nên

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = R \text{ (đpcm).}$$

Các bạn *Trần Lê Minh* (9G Yên Định 2, Thanh Hóa); *Nguyễn Duy Quân*, *Phạm Văn Vân* (9N Hồng Quang, Hải Hưng); *Tưởng Duy Nhân* (10N Hồng Quang); *Đặng Ngọc Thủy* (10CT ĐHSP Vinh); *Nguyễn Viết Thành* (Nghệ Tĩnh) và *Đào Xuân Dũng* (Hà Nội) có lời giải tương đối tốt.

Bài 7/99. *Giải và biện luận phương trình*

$$ax^4 + (a+1)x^3 + (a^2+2)x^2 + (a+1)x + a = 0 \qquad (*)$$

với a là tham số.

Lời giải. Khi $a = 0$ thấy ngay rằng phương trình đã cho có một nghiệm đơn $x_1 = 0$ và một nghiệm kép $x_2 = 1$.

Xét trường hợp $a \neq 0$. Trong trường hợp này phương trình đã cho (*) không thể có nghiệm $x = 0$. Biến đổi (*) thành phương trình tương đương sau đây:

$$x^2a^2 + (x+1)(x^3+1)a + x(x+1)^2 = 0 \qquad (x \neq 0).$$

Giải phương trình bậc 2 này đối với a, ta có:

$$\triangle = (x+1)^2 (x^3+1)^2 - 4x^3(x+1)^2$$
$$= (x+1)^2 (x^3-1)^2 \geqslant 0,$$

và hai nghiệm

$$a = [-(x+1)(x^3+1) + (x+1)(x^3-1)]/2x^2$$
$$a = [-x(x+1)(x^3+1) - (x+1)(x^3-1)]/2x^2$$

Biến đổi hai phương trình cuối này, ta được

$$ax^2 + x + 1 = 0 \qquad (**)$$
$$x^2 + x + a = 0 \qquad (***)$$

Khi giải các phương trình (**) và (***) ta thấy chúng có chung biệt thức $\delta = 1 - 4a$. Vì vậy, khi $a > 1/4$ thì $\delta < 0$ và, do đó, cả hai phương trình trên đều vô nghiệm. Với $a = 1/4$ thì $\delta = 0$ và mỗi phương trình (**), (***) có một nghiệm kép: $x_1 = -2$, $x_2 = -1/2$. Trường hợp $a < 1/4$, mỗi phương trình trên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

Nhận thấy rằng phương trình (*) tương đương với hai phương trình (**) và (***). Vì vậy $x_{1,2}$, $x_{3,4}$ là 4 nghiệm của phương trình (*).

Để phân biệt được những nghiệm kép của (*) ta cần phải tìm những giá trị của a ($0 \neq a < 1/4$) sao cho $x_i = x_j$ ($i = 1, 2$, $j = 3, 4$), tức là nghiệm của một trong bốn phương trình sau đây:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \quad (0 \neq a < 1/4).$$

Bạn đọc dễ dàng tìm thấy rằng chỉ có $a = -2$ là thỏa mãn các điều kiện nói trên. Cụ thể ta có

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2a} = 1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2} = x_3$$

(với $a = -2$).

Cuối cùng ta đi đến những kết luận sau:

1) Khi $a = 0$, phương trình đã cho (*) có một nghiệm đơn $x_1 = 0$ và một nghiệm kép $x_2 = -1$.

2) Khi $a = -2$ phương trình (*) có hai nghiệm đơn $x_1 = -1/2$, $x_2 = -2$ và một nghiệm kép $x_3 = 1$.

3) Khi $a = 1/4$ phương trình (*) có hai nghiệm kép $x_1 = -1/2$, $x_2 = -2$.

4) Khi $a < 1/4$ và $-2 \neq a \neq 0$ phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

5) Khi $a > 1/4$ phương trình (*) vô nghiệm.

Nhận xét. Các bạn *Đào Xuân Dũng* (Hà Nội), *Vũ Đức Minh, Nguyễn Duy Quân, Đỗ Đức Lưu* (9N Hồng Quang, Hải Hưng) và một số bạn khác có cách giải tương tự như trên. Tuy vậy nhiều bạn do không chú ý tìm nghiệm kép của phương trình (*) nên đi đến những kết luận thiếu chính xác.

Bạn *Đoàn Kim Bản* (Trường công nhân kỹ thuật, nhà máy cơ khí Hạ long Hải Phòng), *Nguyễn Văn Cường* (2Đ Khoa Toán ĐHSP Việt Bắc) và một vài bạn khác đã giải và biện luận phương trình (*) bằng cách đặt $y = x + 1/x$ và và đưa về phương trình bậc 2 đối với y:

$$ay^2 + (a+1)y + a^2 - 2a + 2 = 0.$$

Sau đó các bạn giải và biện luận phương trình này. Song một số bạn do lập luận không chặt chẽ nên kết luận không rõ ràng: thậm chí có bạn còn kết luận sai là phương trình (*) vô nghiệm với mọi $a > 0$, v.v...

C.T.

Bài 8/99. *Chứng minh rằng mọi đa giác n cạnh đều chia được thành p tứ giác nội tiếp với $p \geqslant 3n$.*

Lời giải. Trước hết ta đưa ra bổ đề:

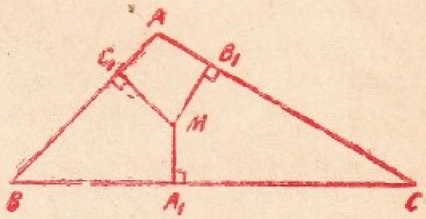
Bổ đề. Một tam giác bất kỳ có thể chia được thành ba tứ giác nội tiếp.

Ta có các nhận xét sau:

— Nếu từ một điểm bất kỳ bên trong một góc nhọn ta kẻ các đường vuông góc xuống các cạnh thì chân các đường vuông góc bao giờ cũng nằm trên các nửa đường thẳng tạo thành góc nhọn đó.

— Nếu từ một điểm bất kỳ trên phần đường phân giác của một góc lồi nằm trong góc lồi đó ta kẻ các đường vuông góc xuống các cạnh của góc thì chân các đường vuông góc bao giờ cũng nằm trên các nửa đường thẳng tạo thành góc đó.

Chứng minh bổ đề: Cho một tam giác ABC bất kỳ. Với các nhận xét trên, bao giờ ta cũng tìm được một điểm M bên trong tam giác sao cho từ M hạ các đường vuông góc MA_1, MB_1, MC_1 xuống các cạnh của tam giác thì tam giác được chia thành ba tứ giác (hình 3).



Hình 3

Rõ ràng ba tứ giác AC_1MB_1, BA_1MC_1, CB_1MA_1 đều nội tiếp được đường tròn vì đều có một cặp góc đối bằng $90°$. Bổ đề được chứng minh.

Chứng minh bài toán: Dễ thấy rằng một đa giác bất kỳ bao giờ cũng chia được thành vô số tam giác. Áp dụng bổ đề trên ta có một đa giác bất kỳ bao giờ cũng chia được thành vô số tứ giác nội tiếp.

Như vậy ta có kết luận mạnh hơn kết luận của bài toán ban đầu.

Bài 9/99. Cho α và β thỏa mãn $\pi/2 \geqslant \alpha \geqslant \beta > 0$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n

$$\sin^n\alpha - \sin^n\beta \geqslant (\sin^{n+1}\alpha - \sin^{n+1}\beta)/2.$$

Lời giải. Theo giả thiết, ta có

$$1 \geqslant (\sin\alpha + \sin\beta)/2 > 0.$$

Vì vậy

$$\sin^n\alpha - \sin^n\beta \geqslant (\sin^n\alpha - \sin^n\beta)\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^{n+1}\alpha - \sin^{n+1}\beta) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta(\sin^{n-1}\alpha - \sin^{n-1}\beta)$$

Do $\pi/2 \geqslant \alpha \geqslant \beta > 0$ nên $\sin\alpha \geqslant \sin\beta > 0$ và $\sin^{n-1}\alpha \geqslant \sin^{n-1}\beta$

suy ra $\frac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta(\sin^{n-1}\alpha - \sin^{n-1}\beta) \geqslant 0$, do đó

$$\sin^n\alpha - \sin^n\beta \geqslant (\sin^{n+1}\alpha - \sin^{n+1}\beta)/2 \quad \text{(đpcm)}$$

Nhận xét. Các bạn *Trần Lê Minh* (9G, Yên Định 2, Thanh Hóa); *Đoàn Kim Bản* (Nhà máy cơ khí Hạ Long, Hải Phòng); *Nguyễn Quang Sơn, Đặng Thanh Hải, Đặng Ngọc Thủy* (CT ĐHSP Vinh); *Vũ Đức Minh, Nguyễn Duy Quân, Bùi Quý Tùng* (9N Hồng Quang, Hải Hưng); *Lê Thị Thu Hà* (9 Trường PTCN Việt Trì, Vĩnh Phú); *Nguyễn Xuân Huy* (6T 2816 Hà Sơn Bình) và nhiều bạn khác có lời giải ngắn gọn dễ hiểu. Ngoài ra có một vài bạn chưa nắm vững các tính chất của bất đẳng thức nên đã mắc những sai lầm. Chẳng hạn, từ những bất đẳng thức $a \geqslant b$, $c \geqslant d$, $b > d$, $a > c$ có bạn suy ra $a - c \geqslant b - d$. Rõ ràng điều này không phải bao giờ cũng đúng.

C. T.

Bài 10/99. *Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a \geqslant b \geqslant c > a - b$ và $a + b + c = 2m$. Chứng minh rằng*

$$[m(a+b-c)-ab]\,[m(b+c-a)-bc]\,[m(c+a-b)-ca] \leqslant \frac{a^2b^2c^2}{8}$$

Lời giải. Ta có

$$m(a+b-c) - ab = \frac{a+b+c}{2}(a+b-c) - ab = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

Tương tự

$$m(b+c-a) - bc = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

$$m(c+a-b) - ca = \frac{c^2+b^2-b^2}{2}$$

Như vậy, điều phải chứng minh tương đương với

$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) \leqslant a^2b^2c^2.$$

Theo giả thiết $a \geqslant b \geqslant c > a - b$ ta có $a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0$ và $c^2 + a^2 - b^2 \geqslant 0$. Nhưng $b^2 + c^2 - a^2$ có thể dương hoặc âm.

Trong trường hợp $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ vế trái của (*) là một số âm, cho nên bất đẳng thức (*) là đúng.

Giả sử $b^2 + c^2 - a^2 \geqslant 0$. Áp dụng bất đẳng thức côsi cho từng cặp các số không âm $a^2 + b^2 - c^2$, $b^2 + c^2 - a^2$, $c^2 + a^2 - b^2$ ta có:

$$\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(a^2+b^2-c^2)+(c^2+a^2-b^2)}{2} = a^2,$$

$$\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)}{2} = b^2,$$

$$\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)}{2} = c^2.$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức đó với nhau ta được (*).

Nhận xét. Bài này có thể giải bằng nhiều cách. Các bạn *Đoàn Kim Bản* (Nhà máy cơ khí Hạ Long, Hải Phòng), *Trần Anh Sơn* (10A7 Ngô Quyền, Hải Phòng), *Nguyễn Duy Quân* (9N Hồng Quang, Hải Hưng), *Nguyễn Quang Sơn* và *Đặng Ngọc Thủy* (CT ĐHSP Vinh) có lời giải tốt, tương tự như cách giải trên.

Một số bạn khác cũng giải bằng cách này, nhưng do không chú ý $b^2 + c^2 - a^2$ có thể âm nên lời giải không đầy đủ.

Ngoài ra, có một số bạn giải bài toán bằng cách chứng minh ba số a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, sau đó áp dụng định lý hàm số côsin cho tam giác đó, ta cũng nhận được bất đẳng thức cần phải chứng minh.

C.T.

Sửa lại: Trong số báo 2 — 1976, hình vẽ ở trang 16: hình nào ở vị trí O ghi số 40 thì sửa lại thành 140.

Bài 1/102 (*lớp 8*). Tìm a và b để $\overline{1980ab}$ là một số chính phương.

Chứng minh rằng không tồn tại số chính phương dạng $\overline{1978cd}$.

Phan Đức Thành (Nghệ Tĩnh)

Bài 2/102 (*lớp 8*). Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho trong dạng thập phân của 5^n có ít nhất 2000 chữ số 0 đứng kề nhau.

Phan Đức Chính (Hà Nội)

Bài 3/102 (*lớp 8*). Cho tam giác ABC có diện tích bằng S. A_1, B_1, C_1 tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Gọi K, L, M là các điểm chạy trên các đoạn AB_1, BC_1, CA_1, tương ứng. Gọi S^* là diện tích phần chung của hai tam giác $A_1B_1C_1$ và KLM. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của S^*.

Bùi Hưng (Hà Nội)

Bài 4/102 (*lớp 9*). Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng có $CA = CB$, đường thẳng d biến thiên đi qua C. Trên d tìm điểm M sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Tìm quỹ tích của M.

Hà Trầm (Bắc Thái)

Bài 5/102 (*lớp 9*). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta đều có

$$\sqrt[n]{n} < 1 + 1/\sqrt{n}$$

Phan Đức Chính

Bài 6/102 (*lớp 10*). Tìm tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2 \cdot y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + 1/2 \geqslant 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \end{cases}$$

Đặng Hải Nam (Hải Hưng)

Bài 7/102 (*lớp 10*). Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm M ở trong nó. Các đường AM, BM, CM, DM cắt các mặt tương ứng của tứ diện tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tổng $MA' + MB' + MC' + MD'$ không lớn hơn cạnh lớn nhất của tứ diện.

Lê Trần Chính (Nghệ Tĩnh)

Bài 8/102 (*lớp 10*) Trong không gian cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi G và G' là hai trọng tâm của hai tứ diện này. Chứng minh rằng

$$GG' \leqslant (AA' + BB' + CC' + DD')/4.$$

Lê Trần Chính

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 9/102 (*lớp 8*) Cho tam giác ABC có các cạnh là a, b, c và các trung tuyến là m_a, m_b, m_c. Chứng minh rằng

$$a + b + c < \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c).$$

Đặng Thanh Hải
(9CT ĐHSP Vinh)

Bài 10/102 (*lớp 10*). Cho một tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ có diện tích không vượt quá 4. Từ một điểm M tùy ý trong tứ giác, hạ các đường vuông góc MA_1, MB_1, MC_1, MD_1 với các cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng

$$\min(MA_1, MB_1, MC_1, MD_1) \leqslant 1.$$

Trần Anh Sơn
(10A7, Ngô Quyền, Hải Phòng)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

DÙNG PHÉP QUAY VECTƠ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

QUỐC TRINH

Trước đây, vài tác giả đã giới thiệu với các bạn một số vấn đề về vectơ và việc ứng dụng vectơ. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu thêm việc dùng phép quay vectơ để giải toán hình học phẳng. Trước hết là nhắc lại vài định nghĩa và định lý sau:

1. Phép quay trong mặt phẳng. Cho điểm O cố định, một góc α có hướng, không đổi. Phép biến hình f mỗi điểm M thành điểm M' (ký hiệu $f(M) = M'$) sao cho

$$|OM| = |OM'|$$

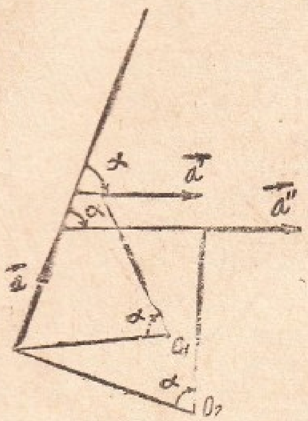
và góc $$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$$

được gọi là phép quay tâm O, góc quay α. Phép quay với góc quay sai khác một bội của 2π được xem là đồng nhất.

2. Vài tính chất. – Phép quay trong mặt phẳng bảo tồn độ dài các đoạn thẳng và độ lớn của các góc.

– Trong phép quay mỗi đường thẳng có hướng tạo với ảnh của nó một góc bằng góc quay.

3. Định lý. Trong phép quay với góc α có hướng và không đổi với tâm quay bất kỳ, vectơ $\vec{a}$ luôn luôn có ảnh bằng vectơ không đổi $(\vec{a'})$. Nói cách khác, ảnh của vectơ $\vec{a}$ trong phép quay với góc quay α có hướng và không đổi luôn luôn bằng vectơ $\vec{a'}$, không phụ thuộc vào vị trí của tâm quay.



Hình 1

Chứng minh. Cho trước vectơ $\vec{a}$ và góc quay α (hình 1). Với tâm quay O_1 ảnh của $\vec{a}$ là

$f(\vec{a}) = \vec{a'}$ và $(\vec{a}, \vec{a'}) = \alpha$.

Với tâm quay khác O_2 bất kỳ và với góc quay α thì

$$f'(\vec{a}) = \vec{a''} \text{ và } (\vec{a}, \vec{a''}) = \alpha.$$

Ngoài ra vì phép quay bảo tồn độ dài các đoạn thẳng nên: $|\vec{a}| = |\vec{a'}| = |\vec{a''}|$. Vậy các vectơ $\vec{a'}$ và $\vec{a''}$ có cùng độ dài và cùng tạo với vectơ $\vec{a}$ góc α nên $\vec{a'} = \vec{a''}$.

Dùng phép quay vectơ ta có thể giải rất nhanh, gọn một số bài toán hình học phẳng.

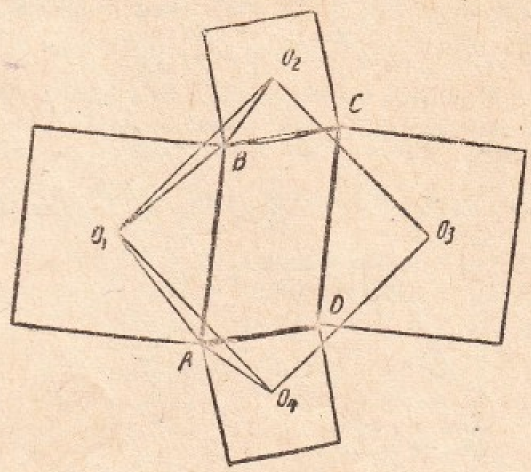
Sau đây, để biểu diễn $\overrightarrow{A'B'}$ là ảnh của $\overrightarrow{AB}$ trong phép quay, ta dùng ký hiệu $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$.

Ví dụ 1. Trên các cạnh của hình bình hành dựng ra phía ngoài hình bình hành ấy các hình vuông. Chứng minh rằng tâm các hình vuông này là các đỉnh của một hình vuông.

Lời giải. Theo hình 2 thì

$$\overrightarrow{O_1O_4} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AO_4} \qquad (1)$$

Quay các vectơ $\overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{AO_4}$ theo góc $+90^\circ$. Ta có ảnh của $\overrightarrow{O_1A}$ là $\overrightarrow{O_1B}$ mà ta ký hiệu:



Hình 2

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{O_1A} \to \overrightarrow{O_1B} \\ \overrightarrow{AO_4} \to \overrightarrow{BO_2}\end{array}\right\} \qquad (2)$$

và tương tự

Từ hình 2, ta lại có:

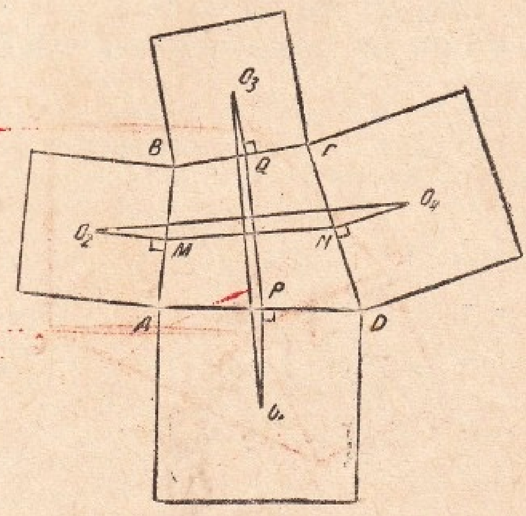
$$\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BO_2} = \overrightarrow{O_1O_2} \qquad (3)$$

Dựa vào (1), (2) và (3) thì:

$\overrightarrow{O_1O_2}$ chính là ảnh của $\overrightarrow{O_1O_4}$ trong phép quay góc $+90^\circ$ nên $\widehat{O_4O_1O_2} = 90^\circ$ và $|O_1O_2| = |O_1O_4|$.

Tương tự $\widehat{O_1O_2O_3} = 90^\circ$ và $|O_1O_2| = |O_2O_3|$.

Vậy: $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.



Hình 3

Ví dụ 2. Trên các cạnh của tứ giác bất kỳ dựng ra phía ngoài tứ giác ấy các hình vuông. Chứng minh rằng tâm các hình vuông này là các đỉnh của một tứ giác mới có các đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

Lời giải. (Hình 3). Ta cần chứng minh rằng $\overrightarrow{O_1O_3}$ là ảnh của $\overrightarrow{O_2O_4}$ trong phép quay $+90°$.

Thật vậy: $\overrightarrow{O_2O_4} = \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO_4}$ hay là

$$\overrightarrow{O_2O_4} = \overrightarrow{O_2M} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{NO_4} \qquad (1)$$

Quay mỗi vectơ ở vế phải của đẳng thức (1) góc $+90°$ thì:

$$\overrightarrow{O_2M} \to \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \to \overrightarrow{QO_3}, \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \to \overrightarrow{O_1P},$$

$$\overrightarrow{NO_4} \to \frac{1}{2}\overrightarrow{DC},$$

và $\overrightarrow{O_2O_4} \to \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QO_3} + \overrightarrow{O_1P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} =$

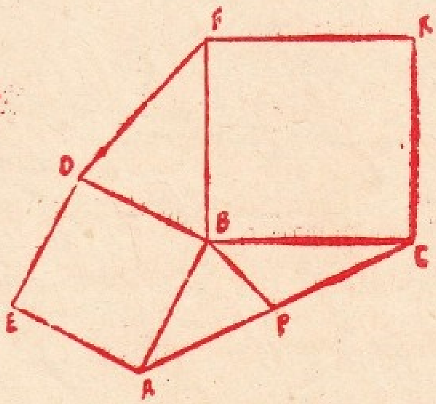
$$= \overrightarrow{O_1P} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{QO_3}$$

$$= \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO_3} = \overrightarrow{O_1O_3}.$$

Vậy $\overrightarrow{O_1O_3}$ là ảnh của $\overrightarrow{O_2O_4}$ trong phép quay $+90°$.

Vậy góc $(O_2O_4, O_1O_3) = 90°$ và $|O_1O_3| = |O_2O_4|$.

Ví dụ 3. Trên các cạnh AB và BC của tam giác ABC dựng ra phía ngoài tam giác ấy các hình vuông $ABDE$ và $BCKF$. Chứng minh rằng đoạn thẳng DF bằng hai lần trung tuyến BP của tam giác ABC vuông góc với trung tuyến ấy.



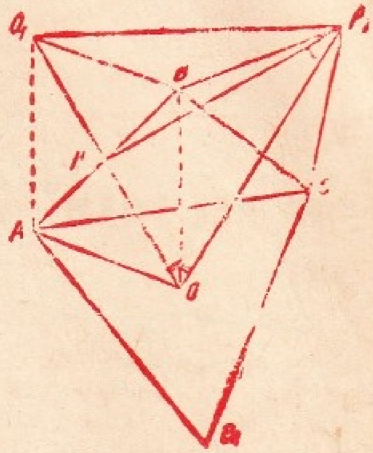
Hình 4

Lời giải. (Hình 4). Trong tam giác ABC: $2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Quay các vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ góc $-90°$ thì $\overrightarrow{BA} \to \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC} \to -\overrightarrow{BF}$, nên

$$2\overrightarrow{BP} \to (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{FD}.$$

Vậy $2|BP| = |FD|$ và góc giữa $\overrightarrow{FD}$ và $\overrightarrow{BP}$ là $90°$.

Ví dụ 4. Trên các cạnh AC và BC của tam giác ABC dựng ra ngoài tam giác ấy các tam giác đều ACB_1 và BCA_1. Hãy tính các góc trong tam giác MA_1O, trong đó M là điểm giữa của cạnh AB, O là tâm của tam giác ACB_1.



Hình 5

Lời giải. (Hình 5). Ta có $\overrightarrow{A_1O} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CO}$.

Quay các vectơ $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CO}$ góc $-60°$ thì

$$\overrightarrow{A_1C} \to \overrightarrow{A_1B}, \quad \overrightarrow{CO} \to \overrightarrow{OA}.$$

Ta dựng $\overrightarrow{BO_1}$ sao cho $\overrightarrow{BO_1} = \overrightarrow{OA}$.

Vậy trong phép quay góc $-60°$ thì

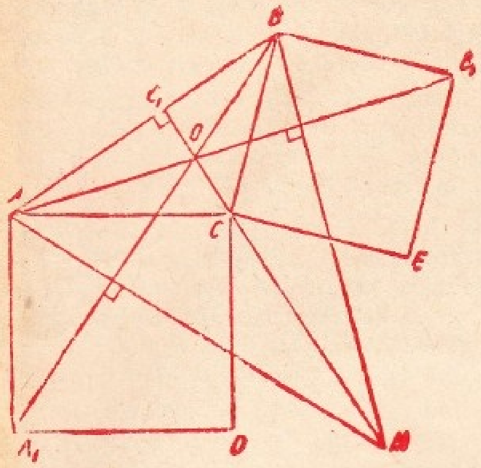
$\overrightarrow{A_1O} \to \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{OA}$ hay $\overrightarrow{A_1O} \to \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BO_1} = \overrightarrow{A_1O_1}$.

Do đó tam giác OA_1O_1 là đều.

Vì $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO_1}$ nên $AOBO_1$ là hình bình hành. M, điểm giữa của AB cũng là điểm giữa của đoạn thẳng OO_1.

Ta suy ra $\widehat{MOA_1} = 60°$, $\widehat{OA_1M} = 30°$ và $\widehat{OMA_1} = 90°$.

Ví dụ 5. Trên các cạnh AC, BC của tam giác ABC, dựng ra ngoài tam giác ấy các hình vuông $ACDA_1$ và $BCEB_1$. Chứng minh rằng các đường thẳng AB_1 và BA_1 cắt nhau tại một điểm nằm trên đường vuông góc hạ từ C xuống cạnh AB của tam giác ABC.



Hình 6

Lời giải. (Hình 6). Ta có $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$ (1)

Kéo dài đường cao CC_1 đoạn CM bằng cạnh AB. Quay các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB_1}$ góc $+90°$ thì $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BB_1} \to \overrightarrow{CB}$ nên $\overrightarrow{AB_1} \to \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MB}$. Vì $\overrightarrow{MB}$ là ảnh của $\overrightarrow{AB_1}$ trong phép quay góc $+90°$ nên: $AB_1 \perp BM$.

Cũng tương tự, sẽ có $BA_1 \perp AM$.

Do đó MC_1, AB_1, BA_1 là các đường thẳng chứa các đường cao của tam giác ABM nên cắt nhau tại một điểm (điểm đó nằm trên đường vuông góc hạ từ C xuống cạnh AB).

Các bạn có thể dùng phép quay vectơ để giải các bài toán khác nữa.

(Theo tài liệu của Д. И. XAH)

NHỮNG BÀI TOÁN VỀ HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

TRẦN THÚC TRÌNH

1. Các bạn đã từng gặp một số bài toán về hai đường thẳng chéo nhau trong «Toán chọn lọc cấp III», tập I, của Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Quốc Trinh, với những bài số 70, 75, 79, 82,... hoặc trong «Tuyển tập những bài toán sơ cấp» tập III của Phan Đức Chính, Phạm Tấn Dương, Lê Đình Thịnh, với những bài số 174, 177, 206, 207, 212, 218, 219, 222, 223, 224, 227, 229, 231, 245, 246, 247, 249,... hoặc trong «Bài giải các đề thi tuyển sinh Đại học môn Toán» của Nguyễn Trọng Bá, Đoàn Văn Báu, với các bài thi về hình học năm 1973 (đề dự trữ) và năm 1975.

So với nhiều loại toán hình học khác, các bạn thấy loại toán này khó, vì để giải được đòi hỏi phải có trí tưởng tượng không gian tốt và đồng thời chưa quen «huy động» những kiến thức cơ bản tương ứng. Những kiến thức cần «huy động» thường là:

(a) Biết tạo mặt phẳng đi qua đường thẳng này và song song với đường thẳng kia, tức đặt hai đường thẳng chéo nhau nằm trong hai mặt phẳng song song với nhau.

(b) Định lý Ta-let (thuận và đảo) trong không gian cùng hệ quả (cho hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau cùng cắt mặt phẳng (P). Những đường thẳng song song với (P) và tựa lên (d), (d') định ra trên hai đường thẳng chéo nhau ấy những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ).

(c) Góc của đường thẳng với mặt phẳng, góc của hai đường thẳng.

(d) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau (tính chất, các bước dựng).

(đ) Nếu một góc vuông có một cạnh song song với một mặt phẳng thì hình chiếu của nó lên mặt phẳng là một góc vuông.

Về phương pháp, khi cần thiết nên chuyển bộ phận của bài toán về bài toán trong hình học phẳng, có khi nên dùng phương pháp vectơ để giải.

2. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu thêm một số bài tập khác về hai đường thẳng chéo nhau để các bạn tham khảo và luyện tập. Trong mục 3 chúng tôi sẽ nêu lên một số hướng dẫn về phương pháp giải (phương pháp tổng hợp hoặc phương pháp vectơ).

Bài 1. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng chéo nhau (d), (d') cắt (P) lần lượt tại A và A'. Gọi (d'') là những đường thẳng chuyển động song song với (P) và tựa lên (d), (d') ở M và M'.

a) Hãy tìm vị trí của (d'') sao cho MM' ngắn nhất.

b) Cho trước một đường thẳng (d_o'') trong họ những đường thẳng (d'') nói trên. Hãy tìm trong những đường thẳng (d''), đường thẳng (d_1'') vuông góc (d_o'').

(Bài thi chọn học sinh giỏi toán lớp 10 miền Bắc năm 1976).

Bài 2. Theo dữ kiện của bài 1, tìm quỹ tích những điểm K chia trong đoạn MM' theo tỷ số p/q cho trước.

Bài 3. Cho ba đường thẳng từng đôi một không cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng (P) cắt ba đường thẳng nói trên lần lượt tại A, B, C. Tìm quỹ tích trọng tâm của các tam giác ABC khi (P) chuyển động song song với vị trí ban đầu.

Bài 4. Cho hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ chéo nhau. Hai điểm C và C' lần lượt chia trong AB và $A'B'$ theo cùng một tỷ số : $CA : CB = C'A' : C'B' = m$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho $MC : MC' = k$ (k là một số cho trước).

Bài 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh AB chung và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

a) Hai động tử M và M' lần lượt chuyển động từ A đến E và từ B đến D cùng một tốc độ và cùng xuất phát ở một thời điểm nào đấy. Chứng minh rằng đoạn thẳng MM' luôn đối xứng với một đường thẳng cố định. Hãy tìm đường thẳng cố định ấy.

b) Tìm vị trí đường vuông góc chung $A'B'$ của AE và BD và độ dài của $A'B'$ theo $AB = a$ (A' trên AE ; B' trên BD).

c) Bây giờ có hai động tử P và P' lần lượt xuất phát từ A' và B' trên tia $A'E$ và tia $B'B$, cùng ở một thời điểm nhưng tốc độ của P gấp đôi tốc độ của P'. Xét vị trí tương đối giữa $B'B$ và PP'.

Gọi O là điểm chia $A'B'$ theo tỷ số $OA' : OB' = -2$. Hãy tìm vị trí của P sao cho $\widehat{POP'} = 90°$. Chứng minh rằng trên $A'B'$ còn có một điểm thứ hai O' nữa sao cho $\widehat{PO'P'} = 90°$. Trong trường hợp đó, tính góc của $A'B'$ và mặt phẳng đi qua P, O, P'.

(Bài thi chọn học sinh giỏi toán lớp 10 miền Bắc, vòng hai, năm 1977).

Bài 6. Cho hai tia Ax và Ay chéo nhau và vuông góc với nhau có AB là đường vuông góc chung. Trên tia Ax và By lần lượt lấy hai điểm M và P sao cho $AM + BP = MP$.

a) Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm giữa O của AB đến MP bằng $AB/2$.

b) Chứng minh rằng MP luôn tiếp xúc với mặt cầu có đường kính là AB.

c) Tìm quỹ tích các tiếp điểm K giữa MP và mặt cầu nói trên.

Bài 7. Gọi OI là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $x'x$, $y'y$ chéo nhau và vuông góc với nhau (O trên $x'x$, I trên $y'y$). $OI = d$.

a) Lấy trên $x'x$ hai điểm A và B khác phía đối với O sao cho $OA = a$, $OB = b$ và $d^2 = ab$. Chứng minh rằng với bất kỳ điểm M nào trên $y'y$ ta đều có $AM \perp BI$. Tính thể tích hình chóp $MIAB$ khi $IM = d$.

b) Bây giờ $d^2 \neq ab$. Gọi B' là hình chiếu của B lên mặt phẳng qua A và $y'y$. Tìm quỹ tích hình chiếu của B lên AM khi M chạy trên $y'y$.

c) Chứng minh rằng với mọi điểm M trên $y'y$ tồn tại điểm N trên $y'y$ sao cho $AM \perp NB$. Hãy dựng điểm N. Chứng minh rằng M là trực tâm của tam giác $AB'N$ và $AN \perp BM$.

Bài 8. Cho hai đường tròn tâm O và O' lần lượt nằm trong hai mặt phẳng song song với nhau, có bán kính $r = 3a$, $r' = 4a$ (a là đoạn thẳng cho trước). Biết rằng $O'O$ vuông góc với hai mặt phẳng nói trên và $O'O = 5a$. Hai điểm A và A' theo thứ tự chạy trên đường tròn O và O' sao cho $OA \perp O'A'$.

a) Tính AA' và góc giữa AA' với OO'.

b) Đường vuông góc chung IK của OO' và AA' (I trên OO' ; K trên AA') đi qua điểm I cố định. Hãy chứng minh điều đó. Tìm quỹ tích của K (gọi là đường γ).

c) Chứng minh rằng qua mỗi điểm M của (γ) tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau và mỗi đường cắt hai đường tròn tâm O, O' lần lượt tại hai điểm B và B' sao cho $OB \perp O'B'$.

Bài 9. Trong mặt phẳng (P) cho hai trục vuông góc với nhau Ox và Oy. Trên trục Oz vuông góc với P tại O lấy điểm H sao cho $OH = 1$ và qua H dựng đường thẳng (d) song song với Oy. Một đường thẳng chuyển động tựa trên Ox ở M, tựa lên (d) ở N. Đặt $OM = x$, $HN = y$. Giả sử $x > 0$, $y > 0$.

a) Xét những đường thẳng MN song song với mặt phẳng (Q) chứa Oz. Chứng tỏ rằng tỷ số $y : x = k$ (k là hằng số). Gọi A là điểm giữa của MN và A' là hình chiếu của A lên (P). Tìm quỹ tích những điểm A và A'. Tìm vị trí của (Q) để quỹ tích những điểm A' là đường phân giác góc xOy.

b) Bây giờ MN không còn song song với (Q) nữa, nhưng chuyển động sao cho $x.y = 1$. Tìm quỹ tích những điểm A'.

c) MN tạo với (P) một góc bằng $30°$. Chứng minh rằng quỹ tích của A' là một phần tư đường tròn. Tìm bán kính của đường tròn đó.

Bài 10. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau (d), (d') và một đường thẳng thứ ba (d'') không song song với (d), (d'). Hãy dựng đường thẳng (l) song song với (d'') và tựa lên (d), (d').

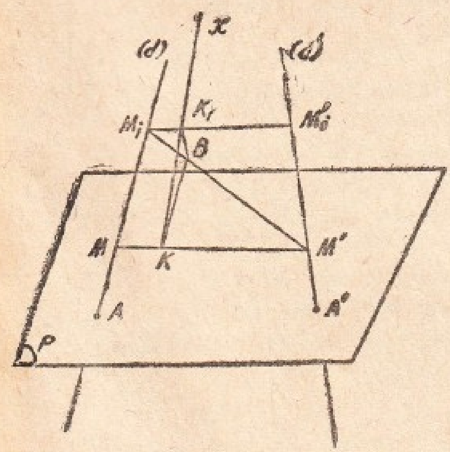
3. Bây giờ các bạn hãy bắt đầu giải những bài tập vừa đề xuất, sau khi ôn lại thật kỹ những kiến thức cơ bản vừa nhắc lại trong (1). Đối với các bạn theo lớp chuyên toán, có thể giải một số bài toán trên bằng phương pháp vectơ.

Chỉ khi nào không giải được mới xem một số chỉ dẫn dưới đây.

Bài 1. a) Dựng mặt phẳng (Q) qua (d') và song song với (d) (Q cắt (P) theo $xA'y$ cố định. Gọi m' là hình chiếu của M' lên (P) theo phương song song với (d): m' nằm trên $xA'y$ và $MM' = Am'$. (MM' song song với Am'). Như vậy mỗi vị trí của MM' được xác định bởi điểm m' trên $xA'y$ và ngược lại. Vậy MM' ngắn nhất khi Am' ngắn nhất, tức m' trùng với chân đường vuông góc H hạ từ A đến $xA'y$. Vì $xA'y$ không đi qua A (nếu qua A thì (d) và (d') đồng phẳng, trái với giả thiết), nên bài toán luôn có một lời giải.

b) Chuyển bài toán về mặt phẳng. (d''_0) được xác định bởi điểm m'_0 trên $xA'y$. Góc của d''_0 và (d''_1) bằng góc $\widehat{m'_0Am'_1}$, trong đó m'_1 xác định vị trí của (d''_1). Do đó trên $xA'y$ phải tìm m_1 sao cho $\widehat{m_0Am'_1} = 90°$. Vậy nếu $m'_0 \neq H$ thì có một lời giải; nếu $m'_0 \equiv H$ thì không có đường thẳng (d''_1) vuông góc với (d''_0).

Bài 2. Xét hai đoạn thẳng MM', $M_1M'_1$ song song với (P), có các đầu mút tựa lên (d) và (d') K và K_1 là hai điểm nằm trong MM' và $M_1M'_1$ sao cho $KM/KM' = K_1M_1/K_1M'_1 = p/q$ (hình 1). Cho M, M' cố định. Từ K kẻ $KB//(d)$, cắt $M'M_1$ tại B. Từ đó suy ra $BK_1//(d')$. Mặt phẳng (Q) đi qua K, B, K_1 là cố định và song song với (d), (d'). Trong mặt phẳng đó, khi K_1 di chuyển, những tam giác KBK_1 luôn đồng dạng với chính nó (vì có góc không đổi nằm giữa hai cặp cạnh tương ứng tỷ lệ: $\widehat{KBK_1}$ bằng góc của (d) và (d'));



Hình 1

$\dfrac{BK}{BK_1}$ không đổi vì $\dfrac{BK}{MM_1} = \dfrac{KM'}{MM'} = \dfrac{q}{p+q}$ và

$\dfrac{BK_1}{M'M'_1} = \dfrac{M_1K_1}{M_1M'_1} = \dfrac{p}{p+q}$ nên $\dfrac{BK}{BK_1} = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{MM_1}{M'M'_1}$

trong đó $MM_1/M'M'_1$ không đổi do $MM'//M'_1M_1//(P)$ theo hệ quả của định lý Ta-lét.

Trong (Q), $\widehat{KBK_1}$ không đổi nên K_1 chạy trên đường thẳng Kx khi M_1 chạy trên (d).

Bài 3. Cho A, B, C cố định. Một mặt phẳng song song với (P) cắt ba đường thẳng đã cho tại a, b, c. Gọi a', A' lần lượt là điểm giữa của bc và BC; g và G theo thứ tự trọng tâm của tam giác abc và ABC. Vì $bc//(P)$ và $a'b/a'c = A'B/A'C$ nên quỹ tích a' là đường thẳng $A't$. (áp dụng kết quả của bài 2). Tương tự, vì $aa'//(P)$ và $ga/ga' = GA/GA'$, nên quỹ tích của g là đường thẳng Gx.

Để dựng đường thẳng đó, chỉ cần nối trọng tâm G của tam giác ABC với trọng tâm g của tam giác abc.

Bài 4. (Phương pháp vectơ). Theo giả thiết $\overrightarrow{CA} = m\overrightarrow{CB}$ tức $\overrightarrow{CA} = \dfrac{m\overrightarrow{AB}}{1-m}$ Tương tự, $\overrightarrow{C'A'} = \dfrac{m\overrightarrow{A'B'}}{1-m}$

Từ $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MC'}$, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A'C'})$ (1)

Thay giá trị của $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'C'}$ vào (1) và sau khi biến đổi, ta được

$$\overrightarrow{AM} = \frac{-k}{1-k}\overrightarrow{AA'} - \frac{m}{1-m} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{A'B'}}{1-k}. \quad (2)$$

Gọi P, Q theo thứ tự là điểm chia trong các đoạn thẳng AA', BB' theo tỷ số k, ta có

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{k}{1-k}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BQ} = -\frac{k}{1-k}\overrightarrow{BB'}$$

Do đó, $\overrightarrow{PA} = \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{AA'} = \dfrac{k}{1-k}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'})$

$$= \frac{k}{1-k}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'}) - \overrightarrow{BQ}, \text{ tức}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BQ} = \frac{k}{1-k}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'}) \text{ hay}$$

$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AB} = \frac{k}{1-k}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'}).$$

Tóm lại $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{A'B'}}{1-k}$.

(2) trở thành $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - \dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{PQ}$ tức

$$\overrightarrow{PM} = -\frac{m}{1-m}\overrightarrow{PQ} \quad (3)$$

Vậy quỹ tích của M là đoạn thẳng PQ.

Nếu $m = 0$ thì M ở P; nếu $m = \infty$ thì M ở Q.

Bài 5. a) *Cách 1.* Khi $M \equiv A$, $M' \equiv B$, nên MM' đối xứng qua điểm giữa I của AB; khi $M \equiv E$, $M' \equiv D$, nên MM' đối xứng qua điểm giữa J của ED. Tiếp tục chứng minh: MM' đối xứng qua IJ bằng phương pháp tổng hợp.

Cách 2. (Phương pháp vectơ). Gắn mục tiêu tọa độ như sau: B là gốc, $\overrightarrow{BC}$ làm trục x, $\overrightarrow{BA}$ làm trục y, $\overrightarrow{BE}$ làm trục z. Chú ý rằng $AM = BM'$. Đặt $BA = 1$. Gọi x là hoành độ của M', ta có $M'(x, x, 0)$, $M(0, 1-x, x)$, $I(0, 1/2, 0)$, $J(1/2, 1/2, 1/2)$, $\overrightarrow{MM'} = \{x, 2x-1, -x\}$, $\overrightarrow{IJ} = \{1/2, 0, 1/2\}$. Do đó ta thấy ngay $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$ (1). Hơn nữa nếu gọi K là điểm giữa của MM' thì K có tọa độ $(x/2, 1/2, x/2)$ và $\overrightarrow{IK} = \{x/2, 0, x/2\}$.

Vậy $\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IJ}$ (2), tức là MM' đối xứng qua IJ (do (1) và (2)).

b) *Cách 1.* (Phương pháp tổng hợp). Thực hiện các bước: Dựng $AI // BD$; từ D kẻ $DH \perp (EAI)$; từ H kẻ $HA' // AI$. Tiếp tục suy ra

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE};\ \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD};\ A'B' = a\sqrt{3}/3.$$

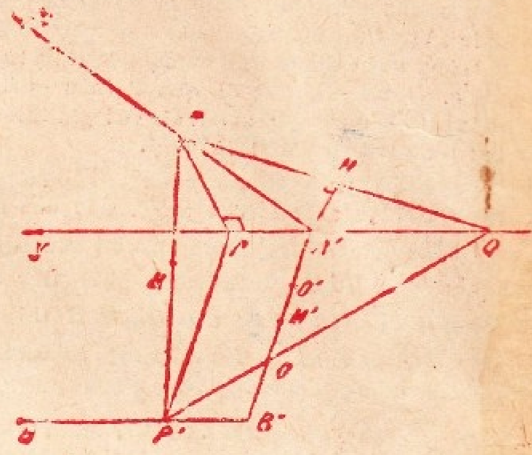
Cách 2. (Phương pháp vectơ). Ta luôn có:

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$. Nhưng $\overrightarrow{AA'} = x\overrightarrow{AE} = x(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{BB'} = y\overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$. Vậy: $\overrightarrow{A'B'} = -x\overrightarrow{AF} + (1-x-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. Từ đẳng thức $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$, ta rút ra: $-xa^2 + (1-x-y)a^2 = 0$, tức $1 = 2x + y$ (1). Tương tự, từ $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, ta có $1 = x + 2y$ (2). Giải hệ (1) và (2) ta có $x = 1/3$, $y = 1/3$.

c) Từ A' kẻ $A'y // B'B$. Góc của $A'E$ và $A'y$ bằng $60°$. Kẻ $Pp \perp A'y$, sẽ có $A'p = B'P'$. Chứng minh tiếp rằng $PP' \perp B'B$, tức P' là giao điểm giữa $B'B$ với mặt phẳng qua P và vuông góc với $B'B$.

Đặt $A'P = 2v$, như vậy $B'P' = v$. Từ hệ thức $PP'^2 = OP'^2 + OP^2$; rút ra $v = \dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. Cũng có thể từ $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, rút ra kết quả trên, với chú ý rằng $\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos 60°$, với $\vec{i}$ theo $A'E$, $\vec{j}$ theo $A'y$ và trục z theo $\overrightarrow{B'A'}$.

Xét hình cầu đường kính PP' (hình 2), có tâm M. Hình chiếu vuông góc của M lên $A'B'$ là M', điểm giữa của $A'B'$. Vì $A'B'$ cắt hình cầu ấy tại O, $MO > MO'$, nên còn cắt hình cầu nói trên tại điểm thứ hai O', đối xứng của O qua M'. Xem tam giác $A'Pp$ là hình chiếu của tam giác OPP' nên $S(\triangle A'Pp) = S(\triangle OPP')\cos\alpha$, trong đó $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa $A'B'$ với mặt phẳng POP' thì $\varphi = \pi/2 - \alpha$ tức $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}/2$.



Hình 2

Cách khác. Kéo dài $P'O$ gặp $A'y$ tại Q. Kẻ $A'H \perp PQ$. Do đó $OH \perp PQ$, tức $PQ \perp (A'OH)$. Vậy $(POP') \perp (A'OH)$ với giao tuyến là OH. Vậy hình chiếu của A' nằm trên OH. Tóm lại

$\varphi = \widehat{A'OH}$; $\operatorname{tg}\varphi = A'H/OA' = \sqrt{2}/2$ (chú ý rằng $A'H = A'p = v$).

Bài 6. a) *Cách 1.* Có thể xem «Tuyển tập những bài toán sơ cấp» tập III trang 259, 260.

Cách 2. Từ giả thiết, rút ra $2AM \cdot BP = AB^2$ (1) ngoài ra

$OM^2 = OA^2 + AM^2$ (2); $OP^2 = OA^2 + BP^2$ (3).

Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống MP. Tính

$$S(\triangle MOP) = (1/2)\ MP \cdot OK \qquad (4)$$

$$S(\triangle MOP) = (1/2)\ OM \cdot OP \cdot \sin\widehat{MOP} \qquad (5)$$

Thay (1), (2), (3) trong (5) sẽ có $S(\triangle MOP) = (AB/4) \cdot MP$ (6).

So sánh (4) với (6) có ngay $OK = AB/2$.

c) Từ B kẻ $Bt // Ax$. Gọi m, k là hình chiếu vuông góc M và K lên mặt phẳng (Bt, By). Ta có

$$\frac{mk}{kP} = \frac{MK}{KP} = \frac{Bm}{BP},$$ nên k nằm trên đường phân giác Bz của góc $\widehat{yBx}$. Vậy K nằm trong mặt phẳng (AB, Bz). Trong mặt phẳng đó K nhìn AB dưới một góc vuông vì $OK = AB/2 = OA = OB$, nên K chạy trên nửa đường tròn đường tròn đường kính AB.

In tại Xí nghiệp in Hà Nội xong ngày 30-6-1978 Chỉ số: 12884 Giá 0,10đ