

TOÁN HỌC

tuổi trẻ

Số 101

2

1978

BAO RA HAI THÁNG MỘT LẦN

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHỪNG

Dây số: 52825

NÓI CHUYỆN VỚI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN

NHÂN Ý KIẾN CỦA THỦ TRƯỞNG BỘ GIÁO DỤC NGUYỄN CẢNH TOÀN, HÃY BÀN VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP LÀM TOÁN

NGUYỄN THÁI HÒE

TRONG bài báo "Học toán, làm toán một cách thông minh sáng tạo" của thủ trưởng Bộ Giáo dục Nguyễn Cảnh Toàn, đăng trong báo Khoa học và đời sống số 10, kỳ thứ 2, tháng 5 năm 1977 có đoạn viết: "... «Làm toán thường phải phân tích giả thiết, hy vọng tìm ra mối quan hệ của nó với kết luận. Cũng có khi người ta phân tích kết luận hoặc phân tích cả hai, hy vọng tìm ra trong nội dung của hai bên những yếu tố rõ ràng có quan hệ logic với nhau. Nếu tìm ra được những yếu tố như vậy, tức là mối liên hệ logic giữa giả thiết và kết luận được thiết lập (mà trước khi phân tích ta không thấy), tức là tìm ra được cách chứng minh.

Tuy nhiên có thể xảy ra tình trạng là vừa đi sâu vào giả thiết, vừa đi sâu vào nội dung của kết luận mà không gặp nhau. Bởi vậy cần phải biết tổng hợp, tức là luôn luôn nhìn bao quát cả giả thiết và kết luận để hướng cho sự phân tích của đôi bên đi đến chỗ gặp nhau...

Qua bài báo này, bằng các bài toán cụ thể, tôi muốn minh họa các ý kiến trong đoạn trên mà thực chất là đã chỉ cho ta một số phương pháp tìm lời giải các bài toán, đồng thời phần nào giúp các bạn cách tìm lời giải các bài toán.

Bài toán 1.

Cho đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ($n \geq 2$) có n nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng:

$$(n-1)a_1^2 \geq 2n \cdot a_0 a_2$$

Lời giải 1

Trước hết ta hãy dựa vào giả thiết $P(x)$ có n nghiệm phân biệt. Khi đó $P'(x)$ cũng là đa thức và có $n-1$ nghiệm phân biệt (điều này có thể chứng minh được). Lập luận tiếp tục, ta có $P^{(n-2)}(x)$ là một tam thức bậc hai và có 2

nghiệm phân biệt. Do đó biệt thức Δ của tam thức đó phải là một số dương.

Ta hy vọng rằng, trong biểu thức $\Delta > 0$ sẽ suy ra kết quả của bài toán đặt ra. Nếu vậy thì lời giải bài toán coi như được giải quyết.

Ta tiến hành cụ thể đường lối đó.

Bằng cách đạo hàm liên tiếp đa thức $P(x)$ đã cho $n-2$ lần, ta thu được:

$$P^{(n-2)}(x) = a_0 \cdot \frac{n!}{2} x^2 + a_1 \cdot (n-1)! x + a_2(n-2)!$$

$$\text{và } \Delta = a_1^2 \cdot (n-1)!^2 - 2 \cdot a_0 \cdot a_2 \cdot n! (n-2)! \\ = (n-2)! (n-1)! [(n-1) a_1^2 - 2a_0 a_2 n].$$

Do $(n-2)! (n-1)! > 0$ với $a \geq 2$, cho nên từ $\Delta > 0$ ta suy ra

$$(n-1) a_1^2 > 2na_0 a_2$$

Bất đẳng thức cuối cùng thu được từ kết quả $\Delta > 0$ chính là yêu cầu đòi hỏi của bài toán.

Như vậy là nhờ khai thác đúng hướng giả thiết của bài toán mà từ kết quả của việc khai thác và sử dụng kết quả có được ta suy ra được kết luận của bài toán.

Lời giải thứ 2

Ta hãy từ kết quả của bài toán đòi hỏi:

$$(n-1) a_1^2 > 2na_0 a_2 \quad (1)$$

Điều đòi hỏi đó tương đương với:

$$(n-1) (a_1/a_0)^2 > 2n (a_2/a_0). \quad (*)$$

Cũng không phải ngẫu nhiên ta nghĩ đến việc suy ra bất đẳng thức (*), mà chính là xuất phát từ suy nghĩ sau: Trong bất đẳng thức (1) có mặt các hệ số a_0, a_1, a_2 — các hệ số đó có mặt trong định lý Viét đối với phương trình bậc n có nghiệm phân biệt. Chính là ta đã nghĩ đến việc sử dụng định lý Viét.

Bây giờ ta lại dựa vào giả thiết $P(x)$ có n nghiệm phân biệt, sử dụng định lý Viét ta có

$$a_1/a_0 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$a_2/a_0 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

Khi đó, ta có dãy các biến đổi tương đương sau:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1) (x_1 + \dots + x_n)^2 > 2n(x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n) \quad (\text{Gọi } B = x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n)$$

$$\Leftrightarrow (n-1) [(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 2B] > 2nB$$

$$\Leftrightarrow (n-1) (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) > 2B$$

$$\Leftrightarrow n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) > (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \quad (3)$$

(Chỉ cần chứng minh sự đúng đắn của bất đẳng thức (3) là bài toán được giải quyết. Bất đẳng thức (3) có được từ quá trình kết hợp phân tích kết luận cùng với giả thiết của bài toán.

Nhưng sự đúng đắn của (3) là hiển nhiên. Việc ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki cho $2n$ số $1, 1, \dots, 1; x_1, x_2, \dots, x_n$.

Bài toán 2.

Chứng minh rằng tam giác ABC là cân nếu điều kiện sau đây thỏa mãn:

$$\frac{2\sin A \cdot \sin B}{\sin C} = \cot \frac{C}{2}$$

Lời giải

Có những bài toán mà lời giải có được bằng cách kết hợp phân tích cả giả thiết và kết luận của bài toán. Quá trình phân tích và lời giải dưới đây sẽ chỉ rõ nếu không kết hợp chặt chẽ sự phân tích đồng thời giả thiết và kết luận thì không khẳng định được tính đúng đắn của phương hướng và lời giải bài toán.

Yêu cầu đòi hỏi của bài toán là tam giác ABC cân. Để chứng minh một tam giác là cân ta có thể sử dụng các tính chất của một tam giác cân chẳng hạn tam giác có hai cạnh bằng nhau hoặc hai góc bằng nhau...

Chọn hướng nào trong hai hướng đó. Tất nhiên ta sẽ chọn hướng thứ hai: Chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau, vì giả thiết cho ta một hệ thức giữa các góc của tam giác đó thông qua các hàm số lượng giác của chúng.

Như vậy là ta sẽ chứng minh một trong các khả năng sau đây: $A=B$; $B=C$, $C=A$.

Ta sẽ chứng minh khả năng nào?

Lại phân tích dạng của biểu thức đã cho trong giả thiết. Ta nhận thấy rằng, biểu thức đó có tính đối xứng đối với $\sin A$ và $\sin B$ không xảy ra điều đó đối với $\sin A$ và $\sin C$ hoặc $\sin B$ và $\sin C$. Như vậy có thể khẳng định được phương hướng chứng minh là $A=B$.

Ta hãy tìm cách chứng minh $A=B$ hay $A-B=0$.

Hiển nhiên ta phải chứng minh điều này không qua các hàm số lượng giác.

Để chứng minh $A-B=0$, ta phải chọn một trong hai cách sau đây:

Chứng minh: $\sin(A-B)=0$ hoặc $\cos(A-B)=1$. Ta chọn đường nào?

Lại phải bám vào giả thiết bài toán. Trong giả thiết của bài toán có chứa biểu thức $2\sin A \cdot \sin B$. Biểu thức đó cho ta $\cos(A-B)$ mà không cho ta suy ra $\sin(A-B)$. Có thể biến đổi từ biểu thức giả thiết làm xuất hiện $\sin(A-B)$ để mà chứng minh $\sin(A-B)=0$ được. Như vậy là đường lối bài toán cuối cùng đã chọn được và ta có thể biểu diễn như sau:

Để chứng minh tam giác ABC cân (nếu có điều kiện giả thiết đã cho) ta hãy chứng minh $\cos(A-B) = 1$.

Lời giải bài toán ngắn gọn như sau:

$$(1) \Rightarrow \cos(A-B) = \cos(A+B) = \sin C \cdot \cot \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) + \cos C = 2\cos^2 \frac{C}{2}$$

$$(\text{do } C+A+B=\pi)$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) + \cos C = 1 + \cos C$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) = 1 \text{ (đpcm).}$$

Có lẽ chúng ta không phải nói gì thêm về việc giải thành kết quả và cũng không cần khoản

gì nữa nếu như có ai lại hỏi là về cách tìm lời đường lối và lời giải bài toán nữa.

Có nhiều bài toán khác mà việc tìm lời giải của chúng cũng được áp dụng theo phương pháp đã chỉ ra ở trên.

Ý của đồng chí thủ trưởng đã chỉ ra cho chúng ta một số phương pháp tìm lời giải các bài toán. Những ví dụ trên nhằm phân tích minh họa các ý đồ để giúp thêm cho các bạn học sinh trong quá trình rèn luyện năng lực tư duy và óc sáng tạo toán học. Tôi mong gặp lại các bạn trên các bài báo quanh vấn đề "các phương pháp tìm lời giải các bài toán".

ÁP DỤNG MỘT TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC ĐỂ GIẢI TOÁN

ĐÀO ĐÌNH HẢI

Trong chương trình toán ở trường phổ thông không đề cập đến khái niệm hàm số liên tục; tuy nhiên đó là những hàm số rất quen biết đối với các bạn. Một hàm số là liên tục trong một khoảng nào đó, nếu trong khoảng đó đồ thị của nó là một đường liên tục. Định nghĩa chính xác khái niệm hàm số liên tục như sau:

"Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a, b]$ (thuộc miền xác định của nó, nếu tìm $f(x) = f(x_0)$ với mọi $x_0 \in [a, b]$."

Hàm số liên tục có một tính chất rất có hiệu lực để giải một số bài toán. Tính chất đó là: "Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = 0$ ".

Sau đây là vài ví dụ áp dụng tính chất nêu trên:

Bài toán 1. Chứng minh rằng phương trình $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$ (1) có nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện,

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} < x_0 < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

(Bài 998 Báo THVT số 99)

Giải. Đặt $y = 16x^2$ thì (1) trở thành

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 3 = 0 \quad (2)$$

và ta phải chứng minh (2) có nghiệm y_0 trong khoảng

$$(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}, 2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})$$

Lại đặt $z = y - 2$ thì (2) trở thành

$$z^3 - 3z - 1 = 0 \quad (3)$$

và ta phải chứng minh (3) có nghiệm z_0 thuộc

$$(\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}})$$

Xét hàm số $f(z) = z^3 - 3z - 1$. $f(z)$ là hàm số liên tục trên $(-\infty, +\infty)$ do đó liên tục trên đoạn

$$[\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}}]$$

Do

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{3,42} < 1,85$$

và

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{3,40} > 1,84,$$

nên

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2 + \sqrt{2}}) &= (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^3 - 3\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 1 \\ &< (1,85)^3 - 3 \cdot 1,84 - 1 \\ &< 6,35 - 5,52 - 1 < 0. \end{aligned}$$

Mặt khác do

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} < \sqrt{3,74} < 1,94$$

và

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} > \sqrt{3,73} > 1,93,$$

$$\begin{aligned} \text{nên } f(\sqrt{2 + \sqrt{3}}) &= (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^3 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 1 \\ &> (1,93)^3 - 3 \cdot 1,94 - 1 \\ &> 7,18 - 5,82 - 1 > 0. \end{aligned}$$

Như vậy ta có $f(\sqrt{2+\sqrt{2}}), f(\sqrt{2+\sqrt{3}}) < 0$,
mà áp dụng tính chất nêu trên của hàm số liên
tục $f(x)$ ta có $f(x)$ phải có nghiệm x_0 thuộc
khoảng $(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{3}})$ (đpcm).

Bài toán 3. Chứng minh rằng nếu $a/k + b/l + c/m = 0$ với $k > l > m > 0$ và $km \leq l^2$,
thì tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có
nghiệm thuộc $(0, 1)$.

(Bài 6/98 - Báo THvTT số 93)

Giải. Nếu $a = 0$ thì tam thức trở thành nhị
thức $bx + c$, có nghiệm $x_0 = -c/b = m/l$ (do
 $b/l + c/m = 0$). Vì $l > m > 0$, nên $0 < m/l < 1$,
tức là nhị thức có nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Nếu $a \neq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned} f(0) \cdot f(1/k) &= c \left(\frac{l^2}{k^2} + \frac{b}{l} + c \right) \\ &= c \left[\frac{l^2}{k} \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l} + \frac{c}{m} \right) + c \left(1 - \frac{l^2}{km} \right) \right] \\ &= c^2 (1 - l^2/km) \leq 0 \quad (\text{do } km \leq l^2 \text{ và } c^2 \geq 0). \quad (1) \end{aligned}$$

Nếu $c = 0$ thì tam thức trở thành nhị thức
 $ax^2 + bx$, có nghiệm $x_0 = -b/a = l/k$. Nếu
 $1 - l^2/km = 0$ mà $c \neq 0$ thì từ (1): $c \cdot f(1/k) =$
 $f(0) \cdot f(1/k) = c^2 (1 - l^2/km) = 0$, suy ra $f(1/k) = 0$,
tức là tam thức cũng có nghiệm $x_0 = l/k$.

Từ giả thiết ta có $0 < l/k < 1$, tức là tam
thức có nghiệm thuộc $(0, 1)$. (*)

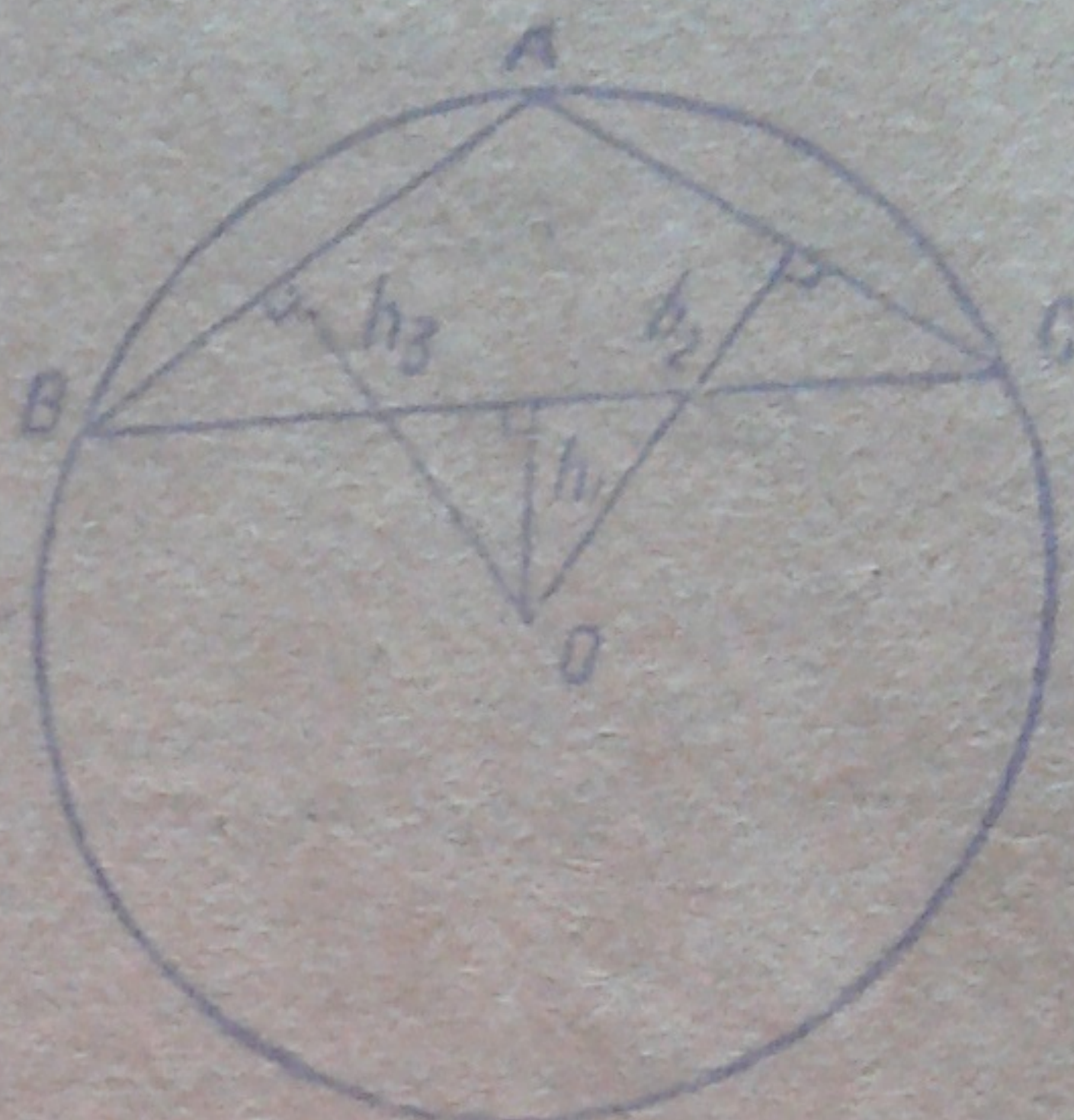
Nếu cả c và $1 - l^2/km$ đều khác 0 thì (1) trở
thành $f(0) \cdot f(1/k) < 0$. Áp dụng tính chất nói trên
của hàm số liên tục $f(x)$ ta có $f(x)$ phải có
nghiệm x_0 thuộc khoảng $(0, l/k)$ tức là x_0 thuộc
 $(0, 1)$.

Trên đây là hai ví dụ rất gần gũi đối với
chúng ta, áp dụng một tính chất của hàm số
liên tục. Trong công việc toán học và làm bài
tập, chắc chắn rằng các bạn còn gặp nhiều bài
toán có thể áp dụng tính chất đó để giải. Một
điều thú vị là có bài toán ta không cần xác định
cụ thể hàm số nhưng biết nó là hàm số liên
tục ta vẫn có thể lợi dụng tính chất của nó.
Dưới đây là một ví dụ.

Bài toán 3. Hãy xét xem mệnh đề sau đây
có đúng hay không: « Nếu trong một tam giác
mà tổng các khoảng cách từ tâm đường tròn
ngoại tiếp đến ba cạnh bằng $3R/2$ (R là bán kính
đường tròn ngoại tiếp), thì tam giác đó là tam
giác đều ». (Bài toán này báo Toán học và tuổi

trẻ đã hai lần đề cập đến và đó là bài toán
trích trong một đề thi vào đại học).

Ta dùng phản ví dụ để bác bỏ mệnh đề
trên như sau:



Xét tam giác
cân ABC có góc
 $A \geq 90^\circ$ và bán
kính đường tròn
ngoại tiếp bằng
 R . Gọi khoảng
cách từ tâm đường
tròn ngoại tiếp
 O của tam giác
đến ba cạnh
 BC, CA, AB
tương ứng là
 h_1, h_2, h_3 .

Giữ nguyên đường tròn ngoại tiếp tam giác
không đổi và cho tam giác biến đổi: B, C tiếp
dẫn tới A nhưng tam giác vẫn luôn luôn cân.
Rõ ràng khi tam giác biến đổi thì h_1, h_2, h_3 tăng
dần. Ta cũng có thể nói khi h_1 tăng dần thì
 h_2 và h_3 tăng dần. Và như vậy hàm số tổng
 $f(h_1) = h_1 + h_2(h_1) + h_3(h_1)$ không cần xác định
cụ thể nó cũng dễ thấy nó là một hàm số liên
tục. Từ đó suy ra hàm số

$\varphi(h_1) = f(h_1) - 3R/2$ là hàm số liên tục.

Ta có:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 + R\sqrt{2}/2 + R\sqrt{2}/2 - 3R/2 \\ &= \sqrt{2}R - 3R/2 = (2\sqrt{2} - 3)R/2 < 0 \quad (2b^{2k}) \\ \varphi(R) &= R + R + R - 3R/2 = 3R/2 > 0. \quad \text{ nên } 2 \end{aligned}$$

$\varphi(0) \cdot \varphi(R) < 0$, nên tồn tại một giá trị h_1 thuộc
khoảng $(0, R)$ sao cho $\varphi(h_1) = 0$. Khi đó $h_1 + h_2 + h_3 = 3R/2$, nhưng tam giác không phải là đều.

Như vậy bài toán đã được giải quyết mà
không cần chỉ ra thật cụ thể tam giác lấy làm
phản ví dụ có giá trị các góc bằng bao nhiêu
như các lần giải trước trên báo.

(*) Với bài 6/98, ta hiểu đầu bài nói tam thức
bậc hai với nghĩa là $a, b, c \neq 0$ (nếu không thì
không còn là tam thức). Khi hiểu được như vậy
thì mới đặt được điều kiện $k > l > m > 0$ (thay
cho điều kiện $k > l > m > 0$). Rõ ràng khi
 $1 - l^2/km = 0$ thì phải có $k > l$, và như vậy phải
có $0 < l/k < 1$.

(Chú thích của T.S.)





Bài 1/98. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Đặt

$$A_k = a^{2k} + b^{2k}, k = 1, 2, \dots$$

$$B = a + b$$

Chứng minh rằng A_k và B không có ước số chung nào khác 1 và 2.

Lời giải. Ta có $A_k = a^{2k} + b^{2k}$
 $= (a^{2k} - b^{2k}) + 2b^{2k}$
 $= (a^2 - b^2)C + 2b^{2k} \text{ (C nguyên)}$
 $= (a + b)(a - b)C + 2b^{2k}$
 $= B \cdot D + 2b^{2k} \text{ (D nguyên)}$

Qua đó ta thấy, nếu d là ước số chung của A_k và B thì d là ước số của $2b^{2k}$. Tương tự d cũng là ước số của $2a^{2k}$.

Nếu ký hiệu (n, m) là ước số chung lớn nhất của hai số n và m , thì từ điều đã cho $(a, b) = 1$ ta có thể suy ra $(a^{2k}, b^{2k}) = 1$ và do đó $(2a^{2k}, 2b^{2k}) = 2$. Vì d là ước số chung của $2a^{2k}$ và $2b^{2k}$ nên $2 \mid d$. Vậy ước số chung d của A_k và B chỉ có thể là 1 hoặc 2. Dễ thấy rằng nếu a và b là những số lẻ thì $d = 1$ và 2, trong những trường hợp còn lại $d = 1$.

Nhận xét. Các bạn: Phạm Thị Viên Phương (3 Tân Yên 2 Hà Bắc), Dương Tấn Thành (A8 ĐHTH Hà Nội), Nguyễn Hồng Thái (101 Chu Văn An, Hà Nội), Ngô Hữu Liêm (11 Trường Bùi Thị Xuân, T.P. Hồ Chí Minh) Lê Xuân Hòa (10 CT, ĐHSPT Vĩnh), Nguyễn Đức Long (8E Hùng Vương, Vĩnh Phú) và nhiều bạn khác trong lớp 8E, Hùng Vương, Vĩnh Phú có lời giải tốt.

C.T.

Bài 2/98. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n và k , các số dạng

$$(k+1)^{6n-2} + k^{6n-2} + 1$$

có ít nhất một ước số là số chính phương khác 1.

Lời giải của bạn Dương Tấn Thành (A8 ĐHTH, Hà Nội).

Biến đổi biểu thức cho trước ta được:

$$(k+1)^{6n-2} + k^{6n-2} + 1 = (k+1)^{6n-2} + (k+1) +$$

$$+ k^{6n-2} - k = (k+1)[(k+1)^{6n-3} + 1] +$$

$$+ k[k^{6n-3} - 1] = (k+1)[(k+1)^{6n-3} + 1] \times$$

$$\times [(k+1)^{6n-4} - (k+1)^{6n-5} + \dots + (-1)^{i+1} \times$$

$$\times (k+1)^{6n-i-1} + \dots + 1] + k(k^3 - 1)(k^{3(2n-2)} +$$

$$+ (k^3)^{2n-3} + \dots + k^{3(2n-i-1)} + \dots + 1) = (k+1) \times$$

$$\times (k+2)(k^2 + k + 1) \cdot [(k+1)^{3(2n-2)} + (k+1)^{3(2n-3)} -$$

$$- \dots + (-1)^{i+1} \cdot [(k+1)^{3(2n-i-1)} + (k+1)^{3(2n-i-2)}] +$$

$$+ \dots - (2n-2)(k+1)^3 - 1] + 2n-1 + k(k-1) \times$$

$$\times (k^2 + k + 1) \cdot [k^{3(2n-2)} - k^{3(2n-3)} + 2[k^{3(2n-3)} -$$

$$- k^{3(2n-4)}] + \dots + i[k^{3(2n-i-1)} - k^{3(2n-i-2)}] + \dots +$$

$$+ (2n-2) \times [k^3 - 1] + 2n-1 \}$$

Với mỗi $i = 1, 2, \dots, 2n-2$ ta có:

$$1) [(k+1)^{3(2n-i-1)} + (k+1)^{3(2n-i-2)}] =$$

$$= (k+1)^{2n-i-2} \times [(k+1)^3 + 1] = (k+1)^{2n-i-2} \times$$

$$\times (k+2)(k^2 + k + 1), \text{ và}$$

$$2) [k^{3(2n-i-1)} - k^{3(2n-i-2)}] = k^{2n-i-2} \cdot (k^3 - 1) =$$

$$= k^{2n-i-2} \cdot (k-1)(k^2 + k + 1).$$

Thay hai đẳng thức này vào biểu thức trên ta được:

$$(k+1)^{6n-2} + k^{6n-2} + 1 = (k^2 + k + 1)^2 p + (2n-1) \times$$

$$\times (k+1)(k+2)(k^2 + k + 1) + (k^2 + k + 1)^2 q +$$

$$+ (2n-1)(k-1)(k^2 + k + 1) = (k^2 + k + 1)^2 \times$$

$$\times (p+q) + (2n-1)(k^2 + k + 1)(k^2 - k + k^2 + 3k + 2) =$$

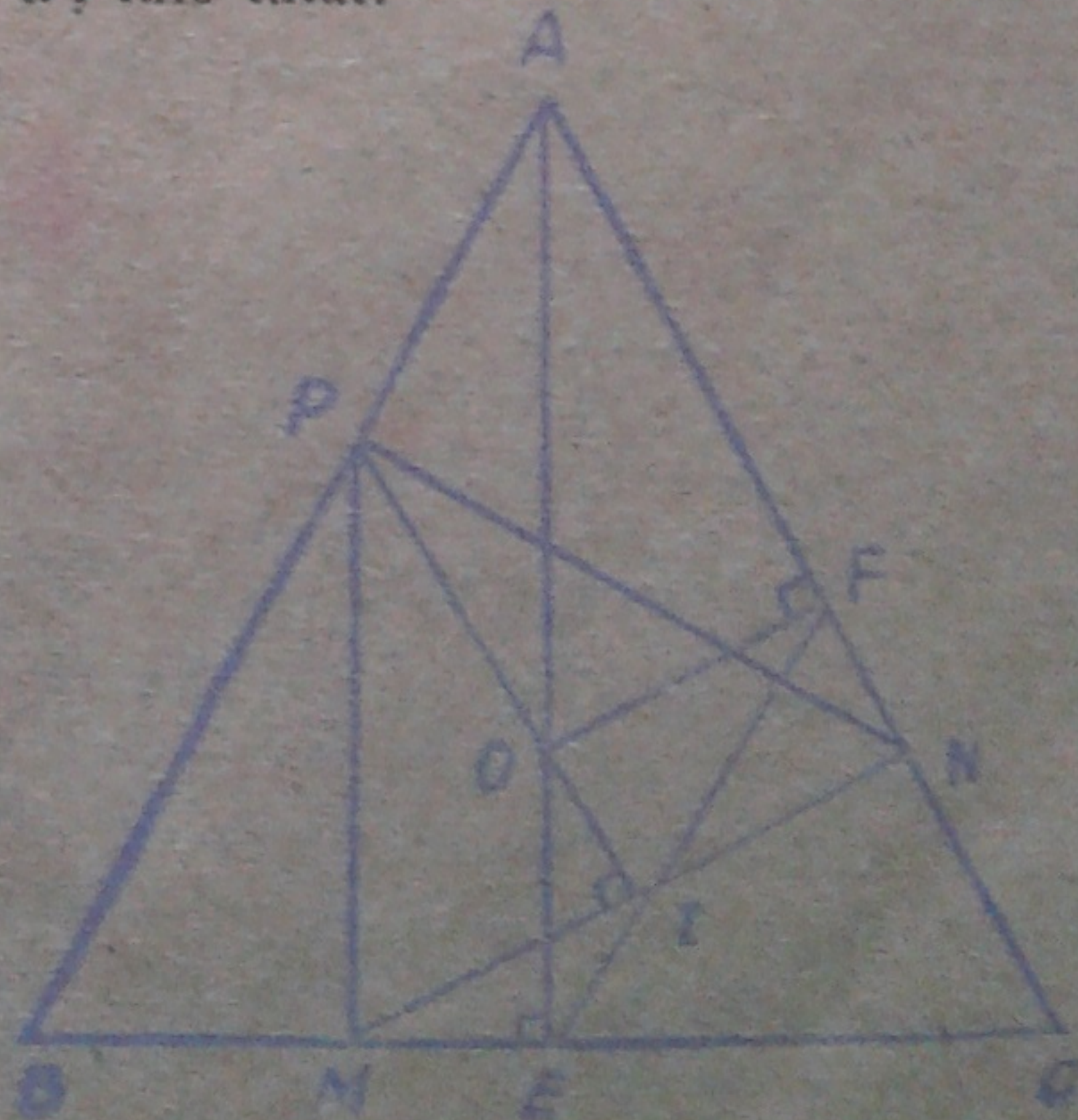
$$= (k^2 + k + 1)^2 \times (p+q+4n-2), \text{ trong đó } p, q$$

$$\text{là những số tự nhiên.}$$

Vậy $(k+1)^{6n-2} + k^{6n-2} + 1$ có một ước số là số chính phương $(k^2 + k + 1)^2 \neq 1$, với mọi số tự nhiên n và k .

C.T.

Bài 3/98. Trên hai cạnh BC và CA của một tam giác đều ABC người ta lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho $BM = CN$. Tìm quỹ tích điểm giữa của MN khi M và N chạy trên BC và CA . Từ đó suy ra vị trí của M khi độ dài của MN có giá trị nhỏ nhất.



Lời giải: Trên AB lấy điểm P sao cho $AP=BI$. Để chứng minh được rằng tam giác MNP là tam giác đều và có cùng tâm O với tam giác ABC . Như vậy nếu gọi I là điểm giữa của MN thì $OI \perp MN$. Gọi E và F tương ứng là các điểm giữa của BC và AC . Thế thì các tứ giác $OEMI$ và $OINF$ nội tiếp được đường tròn. Từ đó ta có:

$$\widehat{MIE} = \widehat{MOE} \text{ và } \widehat{NIF} = \widehat{NOF}.$$

Nhưng hai tam giác OME và ONF bằng nhau nên $\widehat{MOE} = \widehat{NOF}$.

Vậy $\widehat{MIE} = \widehat{NIF}$, tức là ba điểm E, I, F thẳng hàng. Do đó trung điểm I của MN nằm trên đường trung bình EF của tam giác CAB .

Đảo lại, nếu I là điểm bất kỳ trên EF , qua I ta kẻ đường thẳng cắt BC và AC tương ứng ở M và N sao cho $BM=CN$, thì rõ ràng I là điểm giữa của MN (vì phân thuận đã chứng minh được nếu M và N trên BC và CA thỏa mãn $BM=CN$ thì điểm giữa của MN nằm trên EF , mà MN và EP chỉ cắt nhau ở 1 điểm).

Kết luận: Quỹ tích điểm giữa của MN là đường trung bình EF của tam giác CAB .

Ta cố nhận xét là tỷ số $IO:IM$ không đổi bằng $1:\sqrt{3}$. Do đó MN có giá trị nhỏ nhất khi IO có giá trị nhỏ nhất. I chạy trên EF nên OI nhỏ nhất khi $OI \perp EF$, tức là khi M trùng với E (N trùng với F).

Một số bạn còn giải theo cách khác cũng ngắn gọn; nhưng khi tìm vị trí của M khi MN có giá trị nhỏ nhất thì các cách giải đó không sử dụng đến quỹ tích đã tìm ra, như vậy không đáp ứng được yêu cầu của bài toán.

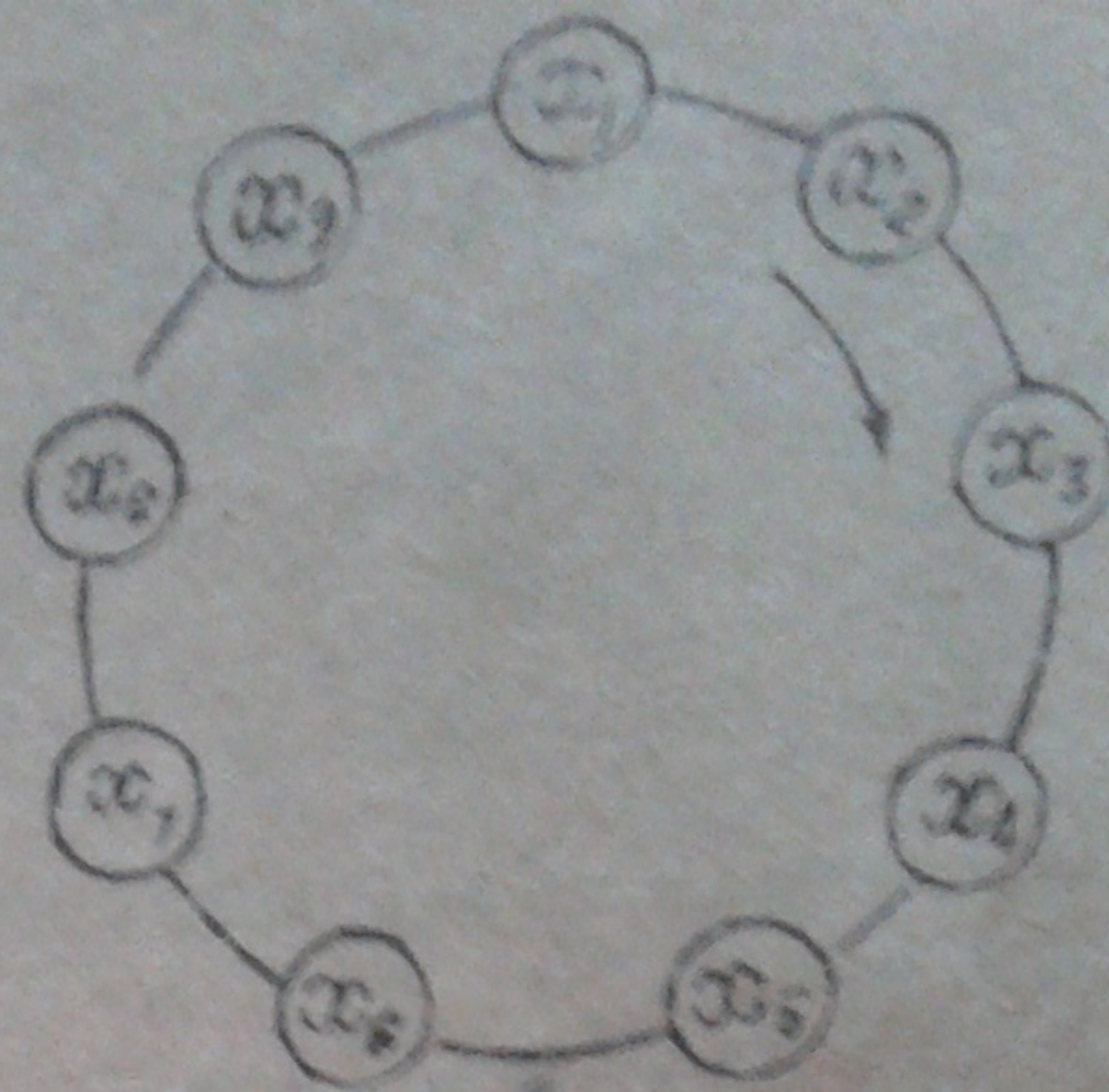
T.T.

Bài 4/98. Giải hệ bất phương trình.

$$\begin{cases} x_1(x_2 - x_3 + x_4) < 0 \\ x_2(x_3 - x_4 + x_5) < 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_8(x_9 - x_1 + x_2) < 0 \\ x_9(x_1 - x_2 + x_3) < 0 \end{cases}$$

Lời giải: Hệ đã cho không có nghiệm.

Giả thiết trái lại rằng hệ đã cho có nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_9)$. Dĩ nhiên khi đó $x_i \neq 0$ với mọi $i=1, 2, \dots, 9$. Ta hãy xét dấu các x_i . Đặt các số x_i trên đường tròn, theo hình vẽ, ta thấy rằng phải có 2 số liên tiếp có cùng dấu (vì số các x_i là lẻ). Bằng cách hoán vị vòng quanh nếu cần ta có thể giả thiết x_1, x_2 cùng dấu.



1) Giả thiết $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$. Khi đó từ hai phương trình đầu suy ra

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_4 &< 0 \quad (*) \\ x_3 - x_4 + x_5 &< 0. \end{aligned}$$

cộng lại ta được

$$x_2 + x_5 < 0$$

mà $x_2 > 0$, vậy $x_5 < 0$.

Xét dấu của x_3 . Nếu $x_3 > 0$ thì kết hợp luận trên với $x_2 > 0$ ta suy ra $x_6 < 0$. Từ $x_5 < 0$, suy ra $x_9 > 0$. Từ $x_9 > 0$, $x_1 > 0$, suy ra $x_4 < 0$. Từ $x_4 < 0$, $x_5 < 0$, suy ra $x_8 > 0$. Từ $x_8 > 0$, $x_9 > 0$, suy ra $x_3 < 0$, mâu thuẫn. Vì vậy phải có $x_3 < 0$.

Lại xét dấu của x_4 . Nếu $x_4 < 0$ thì từ $x_3 < 0$, $x_4 < 0$ suy ra $x_7 > 0$. Từ $x_4 < 0$, $x_5 < 0$ suy ra $x_8 > 0$. Từ $x_7 > 0$, $x_8 > 0$, suy ra $x_2 < 0$, mâu thuẫn! Thành thử phải có $x_4 > 0$.

Nhưng vì $x_2 > 0$, $x_3 < 0$ nên $x_2 - x_3 + x_4 > 0$ trái với (*).

2) Nếu $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ thì bất đẳng thức (*) tất cả các bất đẳng thức sau đó đều đổi chiều cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn chứng tỏ hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Các bạn Hoàng Lợi (8 chuyên toán, Hải Phòng), Dương Tấn Thành (8 chuyên toán THPT Hà Nội), Nguyễn Hồng Thái (101 Chu Văn An Hà Nội) lời giải tương đối tốt.

T.T.

Bài 5/98 Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1+n^2} > \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n+1+\left[\frac{m}{n}\right]}$$

trong đó n và m là hai số nguyên dương và $[a]$ là phần nguyên của số a .

Lời giải của Ngô Hữu Liêm (lớp 11, Bùi Xuân, Thành phố Hồ Chí Minh và Trần Cao (lớp 9 chuyên toán, THPT Vĩnh)

Với $m = 1$ bất đẳng thức đã cho là một đồng nhất thức. Với $m > 1$ ta xét các trường hợp:

1) $1 < n^2 < m$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1+n^2} > \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n+1}$$

hay

$$\frac{1}{n+1+n^2} > \frac{1}{n+m}$$

Bất đẳng thức này đúng, bởi vì n và m là hai số nguyên dương và nếu $m > n^2$ thì $m > 1+n^2$, do đó $n+m > n+1+n^2$.

2) $1 < m = n^2$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1+n^2} > \frac{1}{n+n^2} + \frac{1}{n+2}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n^2} - \frac{1}{n+n^2+1}$$

hay

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} > \frac{1}{(n+n^2)(n+n^2+1)}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng bởi vì $n+n^2 > n+1$ và $n+n^2+1 > n+2$.

3) $1 < m < n^2$. Trước hết ta đề ý rằng nếu $n^2 = pm + q$ với p nguyên dương và q nguyên, $0 \leq q \leq m-1$, thì

$$\left[\frac{n^2}{m} \right] = \frac{n^2}{m} - \frac{q}{m} > \frac{n^2}{m} - \frac{m-1}{m} > 0.$$

Từ đây ta suy ra

$$\frac{1}{n+1 + \frac{n^2}{m} - 1 + \frac{1}{m}} > \frac{1}{n+1 + \left[\frac{n^2}{m} \right]}$$

hay

$$\frac{m}{n^2 + 1 + nm} > \frac{1}{n+1 + \left[\frac{n^2}{m} \right]}$$

Vi vậy đề có bất đẳng thức cần chứng minh, ta hãy chứng tỏ rằng

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1+n^2} > \frac{1}{n+m} + \frac{m}{n^2+1+nm} \quad (*)$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n^2+1+nm} - \frac{1}{n^2+1+n}$$

hay

$$\frac{m-1}{(n+1)(n+m)} > \frac{(m-1)(n^2+1)}{(n^2+1+nm)(n^2+1+n)}$$

Vì $m > 1$ nên bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{1}{(n+1)(n+m)} > \frac{n^2+1}{(n^2+1+nm)(n^2+1+n)}$$

hay

$$(n^2+1+nm)(n^2+1+n) > (n^2+1)(n+1)(n+m),$$

hay sau khi khai triển cả hai vế và rút gọn:

$$n^2 + 1 > m.$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta đã giả thiết rằng $n^2 > m$. Thành thử ta có (*) và từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

T.T.

Bài 6/98. Xem « bài toán 2 » trong bài « Áp dụng một tính chất của hàm số liên tục để giải toán » trong số báo này. Cách giải bài toán 2 trong bài báo này tương tự cách giải của các bạn Đặng Ngọc Long và Nguyễn Quang Thịnh (101 Chu Văn An Hà Nội).

Bài 7/98. Cho phương trình

$$x^{12} - 4x^4 \sqrt{x^n} - 1 + 1 = 0.$$

Với những giá trị nào của n , thì phương trình trên vô nghiệm; tồn tại ít nhất một nghiệm?

Lời giải. Trước hết ta nhận xét rằng chỉ cần xét bài toán với $x > 0$, vì rằng với n lẻ thì $x \geq 0$ mới có nghĩa còn với n chẵn thì nếu x_0 là một nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm. Vậy $x^n = 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ ($x = 1$ không phải là nghiệm).

Ta có: $x^{12} + 1 = (x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$.

$x^4 + 1 > 2\sqrt{x^4 \cdot 1} = 2x^2$ (áp dụng bất đẳng thức Côsi);

$$x^8 - x^4 + 1 = x^4(x^4 - 1) + 1 \geq$$

$$2\sqrt{x^4(x^4 - 1) \cdot 1} = 2x^2 \sqrt{x^4 - 1}$$

$$\text{Vậy } x^{12} + 1 > 4x^4 \sqrt{x^4 - 1} > 4x^4 \sqrt{x^2 - 1} >$$

$$> 4x^4 \sqrt{x^2 - 1} > 4x^4 \sqrt{x - 1} > 0.$$

Vậy nên phương trình $x^{12} - 4x^4 \sqrt{x^n} - 1 + 1 = 0$ vô nghiệm với $n = 1, 2, 3, 4$.

Ta chứng minh rằng với $n \geq 5$ phương trình bao giờ cũng có nghiệm.

Xét $n = 5$.

Đặt $f(x) = x^{12} - 4x^4 \sqrt{x^5} - 1 + 1$. $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[1, +\infty)$. Mặt khác, ta thấy với $x = 1$ thì $f(1) = 2 > 0$; $x = 1,2$ thì

$$x^{12} + 1 = (1,2)^{12} + 1 < 10$$

còn $4x^4 \sqrt{x^5} - 1 = 4(1,2)^4 \sqrt{(1,2)^5} - 1 > 10$, suy ra $f(1,2) < 0$. Theo tính chất của hàm số liên tục, tồn tại $x_0 \in [1; 1,2]$ sao cho $f(x_0) = 0$, x_0 là nghiệm của phương trình.

Với $n > 5$ thì $f(1) = 2 > 0$ và với $x = 1,2$ thì $x^{12} + 1 < 10$ còn $4x^4 \sqrt{x^{n-1}} > 4x^4 \sqrt{x^{5-1}} > 10$ nên $f(1,2) < 0$. Lý luận tương tự như trên ta thấy với $n > 5$ tồn tại một $x_0 \in [1; 1,2]$ sao cho $f(x_0) = 0$, tức là x_0 là nghiệm của phương trình.

Bài 8/98. Chứng minh rằng trong 1900 số tự nhiên liên tiếp tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 27.

Lời giải (của nhiều bạn). Ta xét 1900 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ.

$$N, N+1, N+2, \dots, N+1899 \quad (*)$$

Trong 1000 số $N, N+1, N+2, \dots, N+999$ phải có một số tận cùng bằng ba chữ số 0. Ta gọi số này là N_0 và giả sử N_0 có tổng các chữ số là n . Khi đó tổng các chữ số của 27 số $N_0, N_0+1, \dots, N_0+9, N_0+10, N_0+19, N_0+29, N_0+39, N_0+49, N_0+59, N_0+69, N_0+79, N_0+89, N_0+99, N_0+109, N_0+199, N_0+299, N_0+399, N_0+499, N_0+599, N_0+699, N_0+799, N_0+899$

lần lượt là: $n, n+1, n+2, \dots, n+26$.

Do $N_0 \leq N+999$, nên $N_0+899 \leq N+1899$, tức là 27 số đang xét là các số của (*).

Trong 1900 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ ta đã chỉ ra một dãy gồm 27 số có tổng các chữ số lập thành 27 số tự nhiên liên tiếp, vì vậy phải có một số trong dãy có tổng các chữ số chia hết cho 27 (đpcm).

Một số bạn hiền đầu bài sai nên chỉ chứng minh cho 1900 số tự nhiên từ 1 đến 1900.

Bài 9/98. Chứng minh rằng phương trình

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0 \quad (*)$$

có nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện.

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} < x_0 < \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2} \quad (**)$$

Lời giải của bạn Đào Đăng (Hải Hưng tỉnh Sơn La). (Các bạn Đặng Phước Lợi (9CT, QH), Lê Xuân Hòa và Đặng Ngọc Thủy (10CT - ĐHSP Vinh), Ngô Hữu Liêm (lớp 11, Trường Bài thi Xuân, T.P. Hồ Chí Minh) và Trần Anh Sơn (10A1 Ngô Quyền, Hải Phòng) có cách giải tương tự).

Từ công thức $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ta suy

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos \alpha}}}{2}$$

với $0 < \alpha < \pi/2$.

Theo công thức này ta có

$$\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \quad \text{và} \quad \cos \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$$

phương trình (*) ta có thể tìm được dưới dạng $x_0 = \cos \beta$, sao cho $\pi/24 < \beta < \pi/16$ (điều kiện này tương đương với điều kiện (**)).

Ta có phương trình

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 64\cos^6 \beta - 96\cos^4 \beta + 36\cos^2 \beta - 3 = 1 \\ &\Leftrightarrow 2[2(16\cos^6 \beta - 24\cos^4 \beta + 9\cos^2 \beta) - 1] = 4 \\ &\Leftrightarrow 2(4\cos^3 \beta - 3\cos \beta)^2 - 1 = 1/2 \\ &\Leftrightarrow (\text{do } \cos 3\beta = 4\cos^3 \beta - 3\cos \beta) \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 3\beta - 1 = 1/2 \\ &\Leftrightarrow \cos 6\beta = 1/2 \\ &\Leftrightarrow \beta = \pm \pi/18 + k\pi/3 \end{aligned}$$

($k = 0, 1, 2, \dots$).

Lấy $\beta = \pi/18$ ta được $\pi/24 < \beta < \pi/16$ và

nghiệm $x_0 = \cos \frac{\pi}{18}$ thỏa mãn điều kiện (**).

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, nhiều bạn như: Đặng Thanh Hải (9CT, ĐHSP Vinh); Dương Tấn Thành (A08 DHTH Hà Nội); Phạm Thị Việt Phương (Tân Yên 2, Hà Bắc); Nguyễn Hồng Thái, Nguyễn Thế Ninh, Đặng Ngọc Long và Trần Quốc Huy (101 Chu Văn An Hà Nội) đã giải bài toán này bằng cách sau:

$$\text{Đặt } a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2},$$

$$b = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$$

$$\text{và } f(x) = 64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3.$$

Bằng cách nào đó các bạn đã chứng minh được rằng $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ và sau đó sử dụng tính liên tục của hàm số $f(x)$ để suy ra rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện $a < x_0 < b$. Một trong các lời giải như thế các bạn có thể xem "bài toán 1" trong bài: "Áp dụng một tính chất của hàm số liên tục để giải toán" trong cùng số báo này.

C.T.

Bài 10/98. Cho tam giác ABC cố định trong một phẳng P. Gọi M là một điểm bất kỳ trong không gian, B', C' là hình chiếu của BC xuống AM. Hãy tìm quỹ tích của M sao cho tam giác AM B' C' không đổi.

Lời giải của Nguyễn Hồng Thái (101 Chu Văn An, Hà Nội). Qua A ta kẻ đường thẳng d // BC. Lấy P trên d sao cho AP = BC.

Phân tích: Gọi P' là hình chiếu của P trên AM thì ta có $AP' = H'C'$.
Gọi M' là hình chiếu của M trên d thì rõ ràng là góc $MM'P'$ nội tiếp được đường tròn. Từ đó ta có:

$$AM' \cdot AP' = AM \cdot AP' \quad (1)$$

Thay $AP' = H'C'$ và $AP' = B'C'$ và (1) ta được

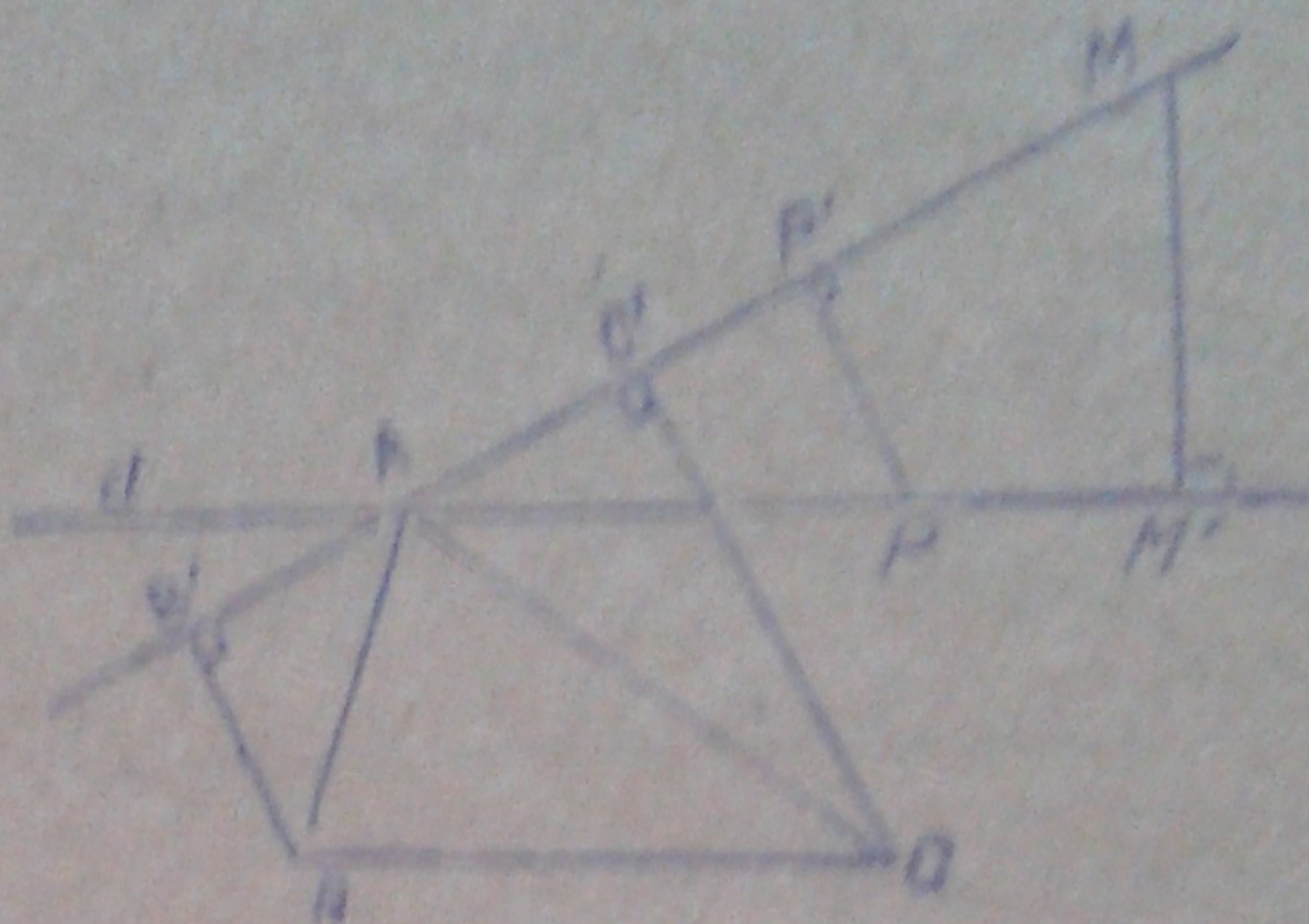
$$AM' \cdot BC = AM \cdot B'C' \quad (2)$$

vì $AM \cdot B'C' = k$ không đổi, nên từ (2) $AM' = k/BC$ không đổi.

Vậy M chỉ có thể nằm trên một trong hai mặt phẳng vuông góc với d (cũng là vuông góc với BC) và cũng cách A một khoảng bằng $AM' = k/BC$.

Phân đảo: Lấy M là điểm bất kỳ trên một trong hai mặt phẳng nói trên. Kẻ đường thẳng qua A, M và hạ PP' vuông góc với đường này.

Rõ ràng là góc $AM'P'$ nội tiếp được đường tròn. Suy ra $AM \cdot AP'$ không đổi, nhưng $AP' = B'C'$ là hình chiếu của BC trên đường AM , do đó $AM \cdot B'C'$ không đổi.



Bài 1/101 (lớp 8). Cho tam giác ABC có góc A vuông, đường cao AH có độ dài z . Đặt $HB = x, HC = y$.

Chứng minh rằng nếu ta có $x + y + z = xyz$, thì $z > \sqrt{3}$.

Nguyễn Đức Triệu (Hải Hưng)

Bài 2/101 (lớp 8). Cho tam giác ABC , O là một điểm ở trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh tam giác tương ứng ở A_1, B_1, C_1 .

Tìm vị trí của O để biểu thức

$$P = \frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} + \frac{OC}{OC_1}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Nguyễn Đức Triệu

Bài 3/101 (lớp 8). Chứng minh rằng với một lục giác lồi bất kỳ thì bao giờ cũng có thể tìm được một đỉnh của nó sao cho ba đường chéo xuất phát từ đỉnh đó có thể lấy làm ba cạnh của một tam giác. Có thể tìm được hai đỉnh (của lục giác lồi bất kỳ) thỏa mãn điều kiện trên hay không?

Phạm Hoàng (Hà Nội)

Bài 4/101 (lớp 9) Với điều kiện nào của a thì các phương trình

$$6\sin x = a(7 + \cos 2x) \quad (1)$$

$$3a\sin x - 8 = a(1 + \sin 2x) \quad (2)$$

có nghiệm chung.

Hà Trầm (Bắc Thái)

Bài 5/101 (lớp 9). Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ là những số dương và

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = B$$

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = C$$

Chứng minh rằng

$$\min [a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, \dots, a_n b_n c_n] \leq ABC/n^3$$

Phan Đức Chính (Hà Nội)

Bài 6/101 (lớp 10). Cho đa thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ thỏa mãn điều kiện:}$$

$$|f(-1)| \leq 1, |f(0)| \leq 1, |f(1)| \leq 1.$$

Chứng minh rằng

$$|f(x)| = |2ax + b| \leq 4 \text{ với mọi } |x| \leq 1.$$

Phan Đức Chính

Bài 7/101 (lớp 10). Với n là số tự nhiên và $0 < (n+1)x < \pi/2$. Hãy chứng minh

$$(1 - \cos^n x)(1 + \cos^n x) < 1 \cos x \cos x$$

Đặng Hải Nam (Hải Hưng)

HỌC SINH TÌM TÀI

Bài 8/101 (lớp 8). Chứng minh rằng hai số 1978^n và $1978^n + 1$ có chung một số chữ số, với mọi n là số tự nhiên.

Trần Lương Nghiệp và Trần Cao Sơn
(9C1 - PHSP Vinh)

Bài 9/101 (lớp 8). Tìm tất cả các số x, y, z để đẳng thức

$$\sqrt[n]{\overbrace{11 \dots 1}^x} - \sqrt[n]{\overbrace{99 \dots 9}^y} = \sqrt[n]{\overbrace{zz \dots z}^z}$$

x chữ số y chữ số z chữ số

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÍNH GIÁ TRỊ GẦN ĐÚNG

QUỐC TRINH

HỌC vấn đề đạo hàm ở lớp mười, các bạn biết được đạo hàm có nhiều ứng dụng: trong hình học (để lập phương trình tiếp tuyến của đường cong), trong vật lý (để tính vận tốc và gia tốc của các chuyển động, hệ số nở dài của vật, nhiệt dung của vật...), trong giải số (để suy ra sự đồng biến hay sự nghịch biến của hàm số trong khoảng nào đó, để tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một đoạn, để giải những bài toán của thực tiễn có liên quan đến các giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, để giải một số bất đẳng thức) (xem Toán học và Tuổi trẻ số 87).

Sau đây chúng tôi giới thiệu thêm: ứng dụng của đạo hàm để tính giá trị gần đúng:

Cho hàm số $f(x)$. Đạo hàm $f'(x_0)$ của $f(x)$ tại điểm $x = x_0$ là

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$\Delta x = x - x_0$ là số gia của đối số.

Vậy với Δx đủ nhỏ thì

$$f(x_0) \approx [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] \Delta x$$

hay $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$,

tức là $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$ (1)

Công thức này được dùng để tính giá trị gần đúng của một số biểu thức.

là đúng với mọi n tự nhiên.

Trần Anh Sơn
(10A7 - Ngô Quyền, Hải Phòng)

Bài 10/101 (lớp 9). Cho các số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ nằm ngoài khoảng (a, b) và $y_1, y_2, \dots, y_n$ nằm trong khoảng (a, b) sao cho

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

Chứng minh rằng $x_1 x_2 \dots x_n \leq y_1 y_2 \dots y_n$.

Trần Quang và Ngô Cảnh Hưng
10C - Lê Hồng Phong, Hà Nam Ninh

Ví dụ 1. Tính $f(2,001)$ nếu $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 4$.
Vận dụng (1) ta có

$$f(2,001) = f(2 + 0,001) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0,001.$$

Ta có $f(2) = 16$, $f'(x) = 6x^2 - 2x + 5$ nên $f'(2) = 25$.

Thay các giá trị này vào (1) ta có:

$$f(2,001) \approx 16 + 0,025 = 16,025$$

Thường ta còn phải tính gần đúng các biểu thức phức tạp hơn nhiều.

Ví dụ 2. Tính gần đúng $(0,999)^{50}$.

Đặt $f(x) = x^{50}$ với $x = 0,999$ và lấy $x_0 = 1$.

Thế thì $f(x_0) = 1^{50} = 1$.

Vì $f'(x) = 50x^{49}$ nên $f'(x_0) = 50 \cdot 1^{49} = 50$.

Vận dụng công thức (1):

$$(0,999)^{50} \approx 1 + 50(0,999 - 1) = 1 - 0,05 = 0,95$$

Ta còn phải tính gần đúng cả các căn thức nữa như:

$$\sqrt[4]{4,01}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[10]{1000}, \dots$$

Muốn vậy, trước hết là phải tìm công thức tính gần đúng các căn thức này:

Cho hàm số $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Với $x \neq 0$ thì

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x/n},$$

nên $f'(x_0) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x_0/n}$

Vận dụng công thức (I) trên thì:

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{1}{n} \sqrt[n]{x_0/n} \cdot \Delta x \quad (II)$$

Ví dụ 3. Tính gần đúng $\sqrt[4]{4.01}$.

Vận dụng công thức (II) thì

$$\sqrt[4]{4.01} = \sqrt[4]{4 + 0.01} \approx \sqrt[4]{4} + \frac{1}{4} \sqrt[4]{4/4} \cdot 0.01 = 2.0025.$$

(Thực ra theo phương pháp tính giá trị gần đúng thì giá trị $\sqrt[4]{4.01}$ với chín con số sau dấu phẩy là: $\sqrt[4]{4.01} \approx 2.002498140$)

Ví dụ 4. Tính gần đúng $\sqrt[3]{3}$.

Ở đây ta phải lưu ý việc phân tích số 3 thành tổng hai số hạng sao cho khi vận dụng công thức (II), việc tính toán được dễ dàng.

Ta phân tích:

$$3 = (1.4)^3 + 0.256$$

tôi vận dụng công thức (II):

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3} &= \sqrt[3]{(1.4)^3 + 0.256} \approx \sqrt[3]{(1.4)^3} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1.4)^3} \cdot 0.256 = \\ &= 1.4 + 0.0435 = 1.4435. \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt[3]{3} \approx 1.4435$.

Ví dụ 5. Tính gần đúng $\sqrt[3]{3}$.

Tương tự như ở ví dụ 4, ta phải nghĩ cách phân tích số 3 thành tổng hai số hạng sao cho khi vận dụng công thức (II), việc tính toán được dễ dàng.

Ở đây, ta phân tích: $3 = (1.3)^4 + 0.1439$.

Vận dụng công thức (II) thì

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3} &= \sqrt[3]{(1.3)^4 + 0.1439} \approx \sqrt[3]{(1.3)^4} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{(1.3)^4} \cdot 0.1439 = \\ &= 1.3 + \frac{1.3}{4 \cdot (1.3)^4} \cdot 0.1439 = 1.316 \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tính gần đúng $\sqrt[10]{1000}$.

Ta biến đổi như sau: $1000 = 2^{10} - 24$ để vận dụng công thức (II).

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} = 2 \sqrt[10]{1 - 24 \cdot 2^{-10}}$$

Vận dụng công thức (II) thì

$$\begin{aligned} 2 \sqrt[10]{1 - 24 \cdot 2^{-10}} &\approx 2 \left[\sqrt[10]{1} + \frac{\sqrt[10]{1}}{10 \cdot 1} (-24 \cdot 2^{-10}) \right] \\ &= 2 - \frac{3}{2^9 \cdot 10} \approx 1.995. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[10]{1000} \approx 1.995.$$

Ví dụ 7. Tìm sai số của công thức gần đúng

$$\sqrt[3]{130} \approx 2.$$

Ở đây ta phải tìm hàm $\sqrt[3]{x}$ tại $x = 130$.

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$\text{Ta biết rằng } \sqrt[3]{128} = 2.$$

$$\text{Đó là giá trị của } f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ tại điểm } x_0 = 128.$$

$$f(x_0) = \sqrt[3]{128} = 2.$$

Vận dụng công thức (II) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{128 + 2} \approx 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} (130 - 128) \\ &= 2 + 1/225 \approx 2.004. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{130} \approx 2.004.$$

Các bạn thử giải tiếp mấy bài toán sau:

Bài tập 1. Tính gần đúng các biểu thức:

$$\sqrt[10]{27.03}; \sqrt[10]{26.7}; \sqrt[10]{32.1}; (1.002)^{10}; (0.998)^{10}.$$

$$\sqrt[10]{(3 + \sqrt{1000})}.$$

Bài tập 2. Tìm sai số của công thức gần đúng:

$$\sqrt[3]{350} \approx 7; \sqrt[3]{249} \approx 3; \frac{1}{3 - (0.998)^{100}} \approx \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{9 + (0.998)^{100}} \approx 0.1.$$

VÀI BÀI TOÁN TRÊN BÀN CỜ

LÊ THỐNG NHẤT

XIN giới thiệu với các bạn một số bài toán khá thú vị trên bàn cờ Châu Âu.

Bài toán 1. Một bàn cờ châu Âu bị khoét mất 2 ô cùng màu thì không thể chia phần còn lại thành 31 hình chữ nhật kích thước 2×1 .

Lời giải. Nhìn lên bàn cờ châu Âu ta thấy ngay lời giải. Thật vậy giả sử chia được phần còn lại thành 31 hình chữ nhật kích thước 2×1 , thì mỗi hình chữ nhật sẽ có 1 ô đen và 1 ô trắng. Như vậy suy ra với 31 hình này ta có 31 ô đen và 31 ô trắng. Điều này vô lý vì sau khi bỏ đi 2 ô cùng màu thì trên phần còn lại số ô đen và số ô trắng không thể bằng nhau.

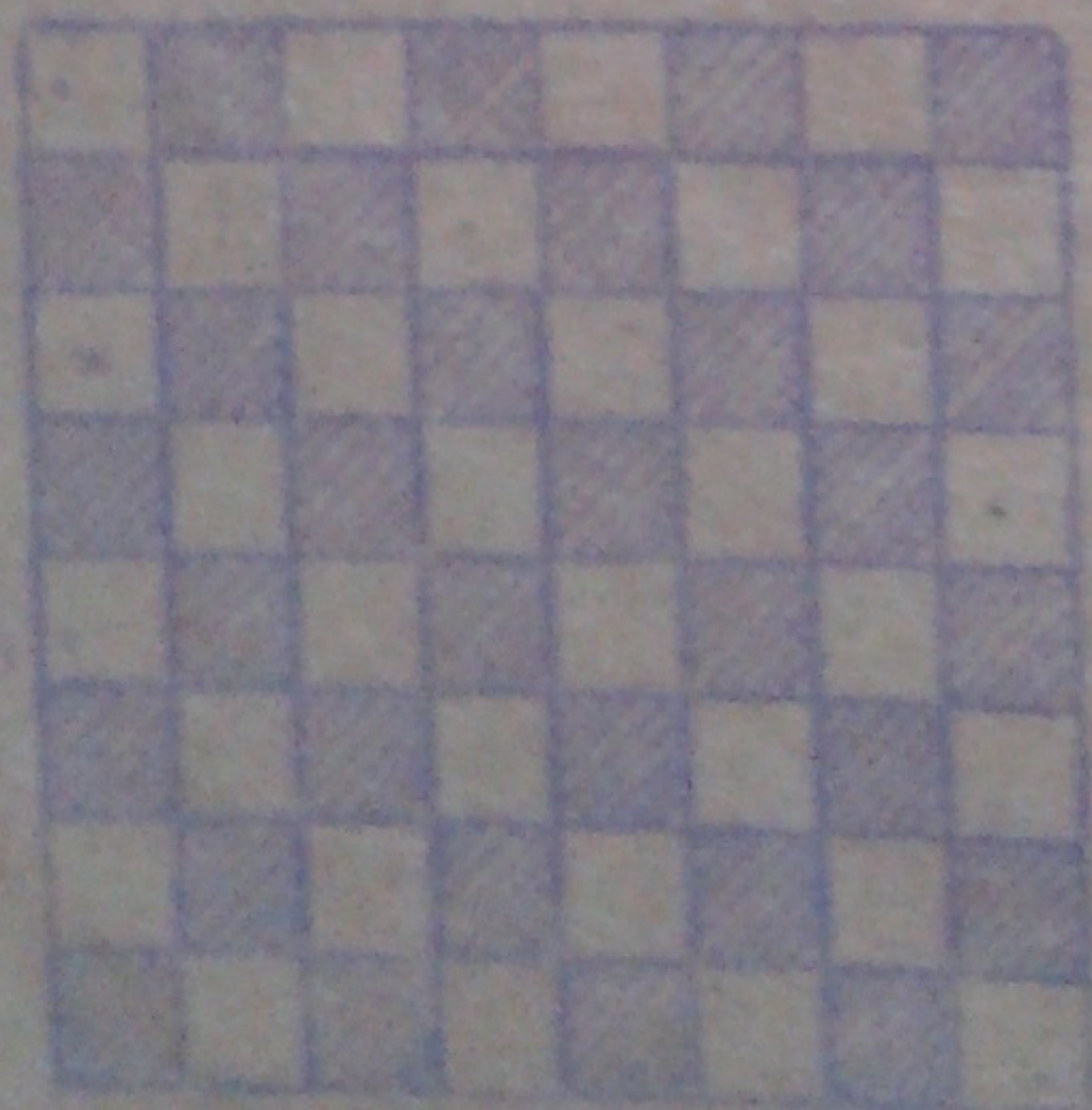
Chú ý: Bài toán này nếu phát biểu không ở trên bàn cờ châu Âu mà phát biểu như bài 1/85 thì lời giải tương tự như trên chắc là cũng khó nghĩ ra, và một câu hỏi đặt ra: "Nếu khoét đi 2 ô khác màu thì vấn đề vẽ như thế nào?" Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Một bàn cờ châu Âu bị khoét mất 2 ô khác màu thì chia được phần còn lại thành 31 hình chữ nhật kích thước 2×1 .

Lời giải: Ta dùng «mèo» sau:

Các bạn hãy cắt bàn cờ theo những đường kẻ đậm. Các bạn sẽ được một băng kín mà đi theo băng này thì các ô đen, trắng là kẻ xen kẽ nhau.

Nếu bàn cờ khoét đi 2 ô khác màu, ta có 2 khả năng:



Hình 1

1. Hai ô bỏ đi là kẻ nhau ở trên băng. Khi cắt đi hai ô này ta có được một băng hở. Các ô đen trắng là kẻ xen kẽ nhau. Các bạn thử một đầu nào đó của băng mà cắt những hình chữ nhật kích thước 2×1 .

2. Hai ô bỏ đi là không kẻ nhau ở trên băng. Khi cắt đi hai ô này ta có 2 băng hở, do hai băng hở khác màu nên trên mỗi băng hở này số các ô là chẵn mà các ô đen, trắng vẫn kẻ xen kẽ nhau. Trên mỗi băng này các bạn lại thực hiện phép cắt những hình chữ nhật kích thước 2×1 kẻ từ một đầu nào đó của băng.

Chắc các bạn nghĩ ngay đến việc chia bàn cờ thành những hình khác thì thế nào? Xin các bạn theo dõi bài toán sau.

Bài toán 3. Một bàn cờ Châu Âu có thể chia thành 21 hình chữ nhật kích thước 3×1 và 1 hình vuông kích thước 1×1 .



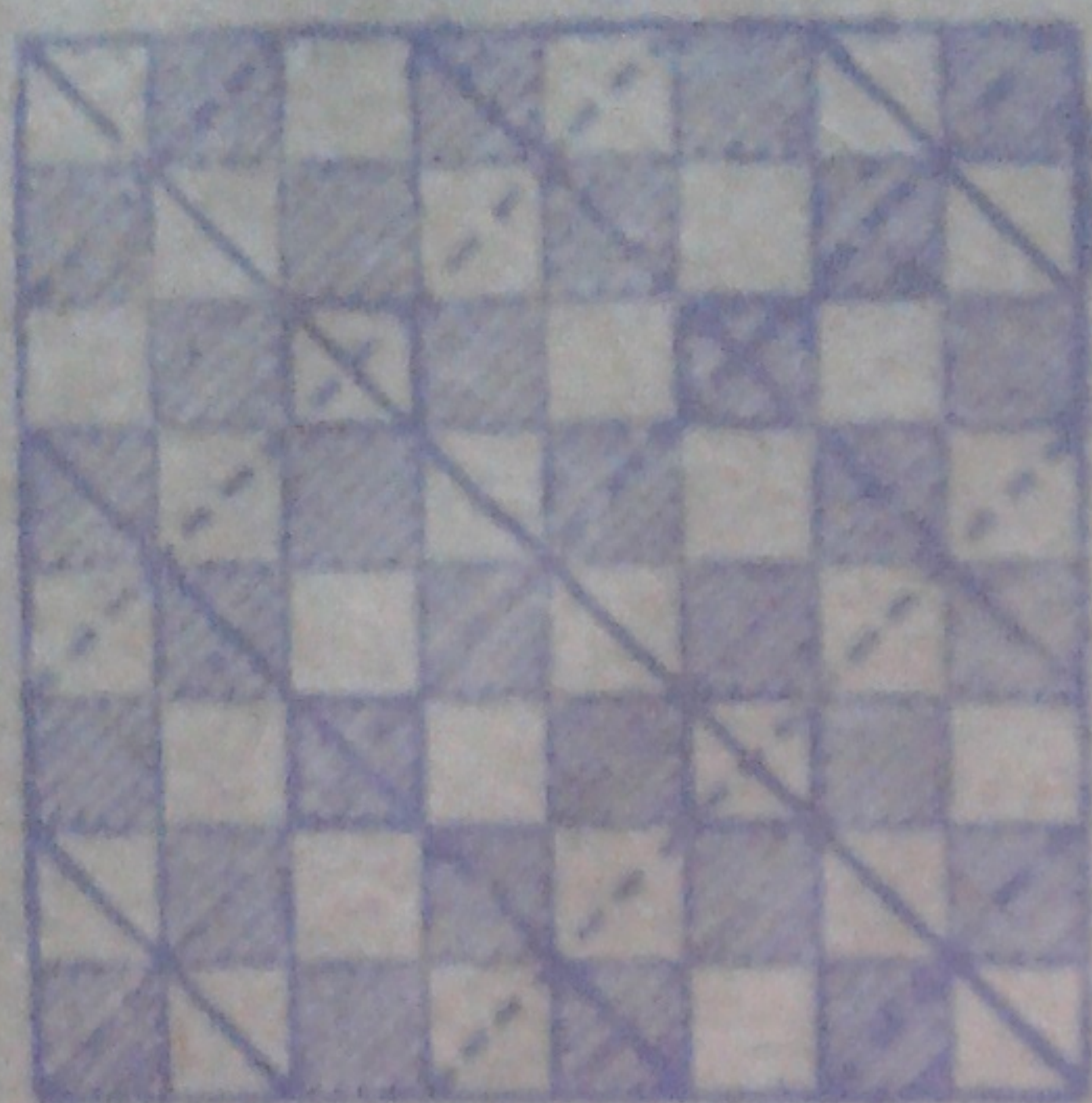
Hình 2

Lời giải. Hình 2 chính là câu giải đáp. Các bạn hãy nghĩ các cách chia khác. Để các bạn đỡ mất công khi tìm cách chia khác, xin mời các bạn đọc ý tôi cái hình vuông kích thước 1×1 ở vị trí (1,1) chia. Liệu hình vuông này có thể ở một vị trí bất kỳ trên bàn cờ được không? Bài toán 3 chính là các bạn chưa thử vị trí khác. Nhưng đây mới chỉ là bài toán «gợi ý» thôi. Các bạn hãy theo dõi bài toán lý thú sau.

Bài toán 4. Tìm những vị trí của hình vuông kích thước 1×1 của phép chia ở bài toán 3.

Lời giải. Ở đây ta lại sử dụng một cái bàn cờ khả là độc đáo. Các bạn hãy kẻ các đường "đậm liền" và các đường "đậm đứt" như hình 3.

Chúng ta nhận xét rằng: bất cứ hình chữ nhật kích thước 3×1 nào cũng có 1 ô bị đường "đậm liền" cắt và 1 ô bị đường "đậm đứt" cắt (2 ô



Hình 3

này có thể chỉ là một) và không có quá 1 ô bị đường "đậm liền" cắt, cũng như không có quá 1 ô bị đường "đậm đứt" cắt. Như vậy mỗi hình chữ nhật kích thước 3×1 có 1 và chỉ 1 ô bị đường "đậm liền" cắt. Ta thấy bàn cờ có 22 ô bị đường "đậm liền" cắt. Vậy 21 hình chữ nhật 3×1 chỉ mới có đúng 21 ô bị đường "đậm liền" cắt. Do đó hình vuông kích thước 1×1 còn lại phải bị đường "đậm liền" cắt (mới đủ 22 ô bị đường "đậm liền" cắt. Lý luận tương tự đối với các ô bị đường "đậm đứt" cắt ta cũng suy ra hình vuông kích thước 1×1 còn lại phải bị đường "đậm đứt" cắt. Do vậy hình vuông kích thước 1×1 bị cả hai loại đường cắt, nên vị trí của nó chỉ có thể ở ô bị hai đường thuộc loại khác nhau cắt. Trên bàn cờ có 4 ô như thế. Từ cách chia ở hình 2 ta dùng các phép quay xung quanh tâm bàn cờ các góc 90° , 180° , 270° ta có các cách chia ứng với các vị trí tìm được.

Tóm lại: có 4 và chỉ 4 vị trí mà hình vuông kích thước 1×1 có thể chiếm được.

Có bạn nghĩ đến việc chia bàn cờ thành các hình chữ nhật kích thước 4×1 . việc này lời giải quá dễ dàng. Bây giờ chúng ta xét bài toán sau, bài toán này, tôi đã tìm ra lời giải từ lời giải bài toán 4.

Bài toán 5. Một bàn cờ châu Âu có thể chia thành 12 hình chữ nhật kích thước 5×1 và 3 hình vuông kích thước 2×2 . Chứng tỏ rằng vị trí của hình vuông này là duy nhất.

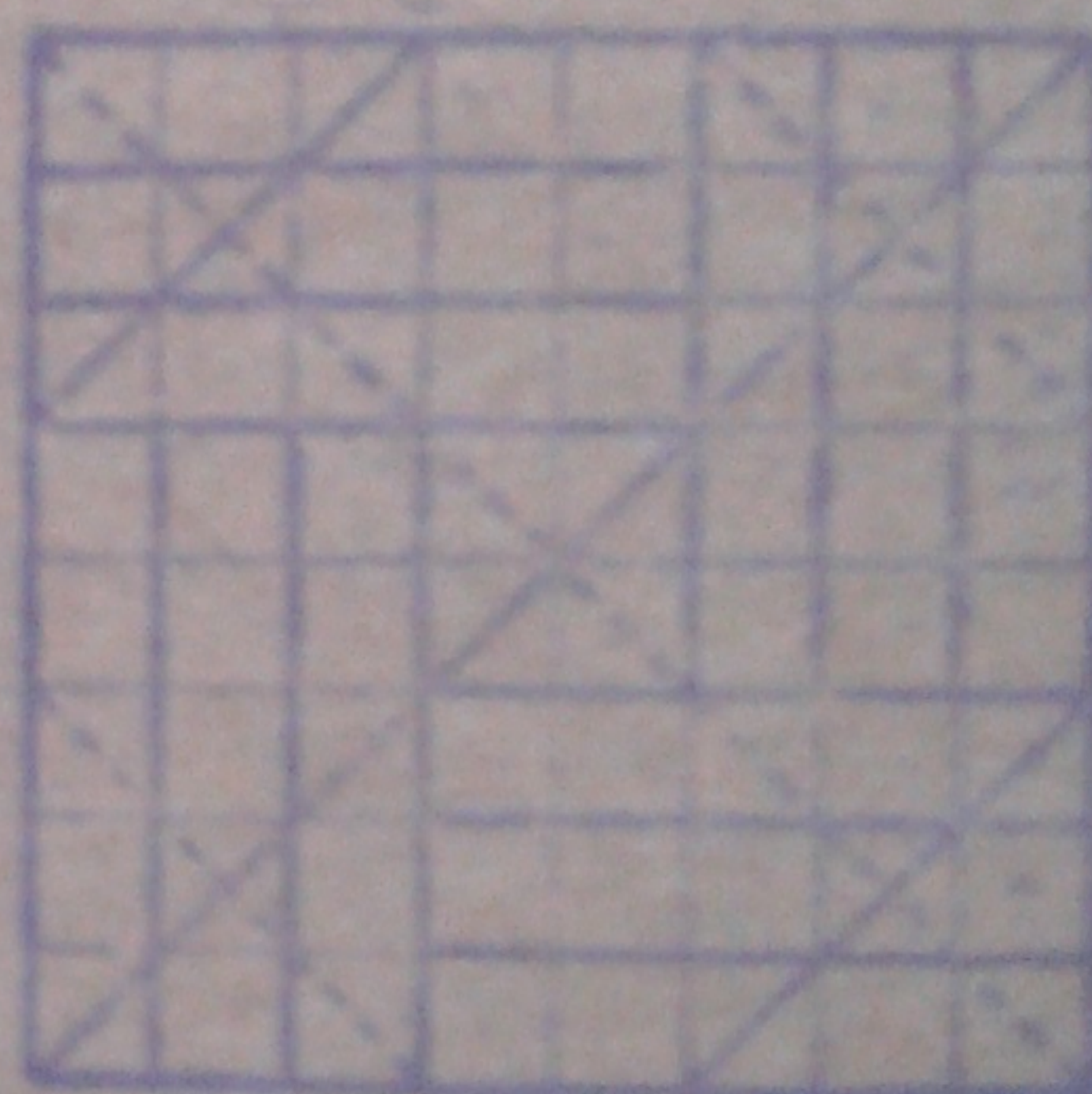
Lời giải. Tôi xin phép không đi đến những ô của bàn cờ vì đến lúc này bài toán không liên

quan tới vấn đề đó. Ta giải quyết vấn đề: nếu chia được theo yêu cầu bài toán thì hình vuông kích thước 2×2 có thể và chỉ có thể ở đâu, từ đó ta sẽ suy ra cách chia. Ở đây tôi dùng "mèo" bắt chuột lời giải bài toán 4. Tôi kẻ các đường "đậm liền" và "đậm đứt" như hình 4. Ta thấy một hình chữ nhật kích thước 5×1 bất kỳ có đúng 1 ô bị đường "đậm liền" cắt. Do đó 12 hình chữ nhật kích thước 5×1 sẽ có đúng 12 ô bị đường "đậm liền" cắt. Mà bàn cờ có đúng 14 ô bị đường "đậm liền" cắt, do đó hình vuông kích thước 2×2 phải có đúng 2 ô bị đường "đậm liền" cắt. Lý luận tương tự đối với các đường "đậm đứt" ta cũng suy ra: hình vuông kích thước 2×2 phải có đúng 1 ô bị đường "đậm đứt" cắt.

Tóm lại hình vuông kích thước 2×2 chỉ có thể ở vị trí để sao cho có đúng 2 ô bị đường "đậm liền" cắt và có đúng 1 ô bị đường "đậm đứt" cắt.

Như vậy chỉ có thể hình vuông này nằm đúng giữa bàn cờ.

Ta chỉ ra cách chia như trên hình 4 (để đó vẽ thêm hình khác).

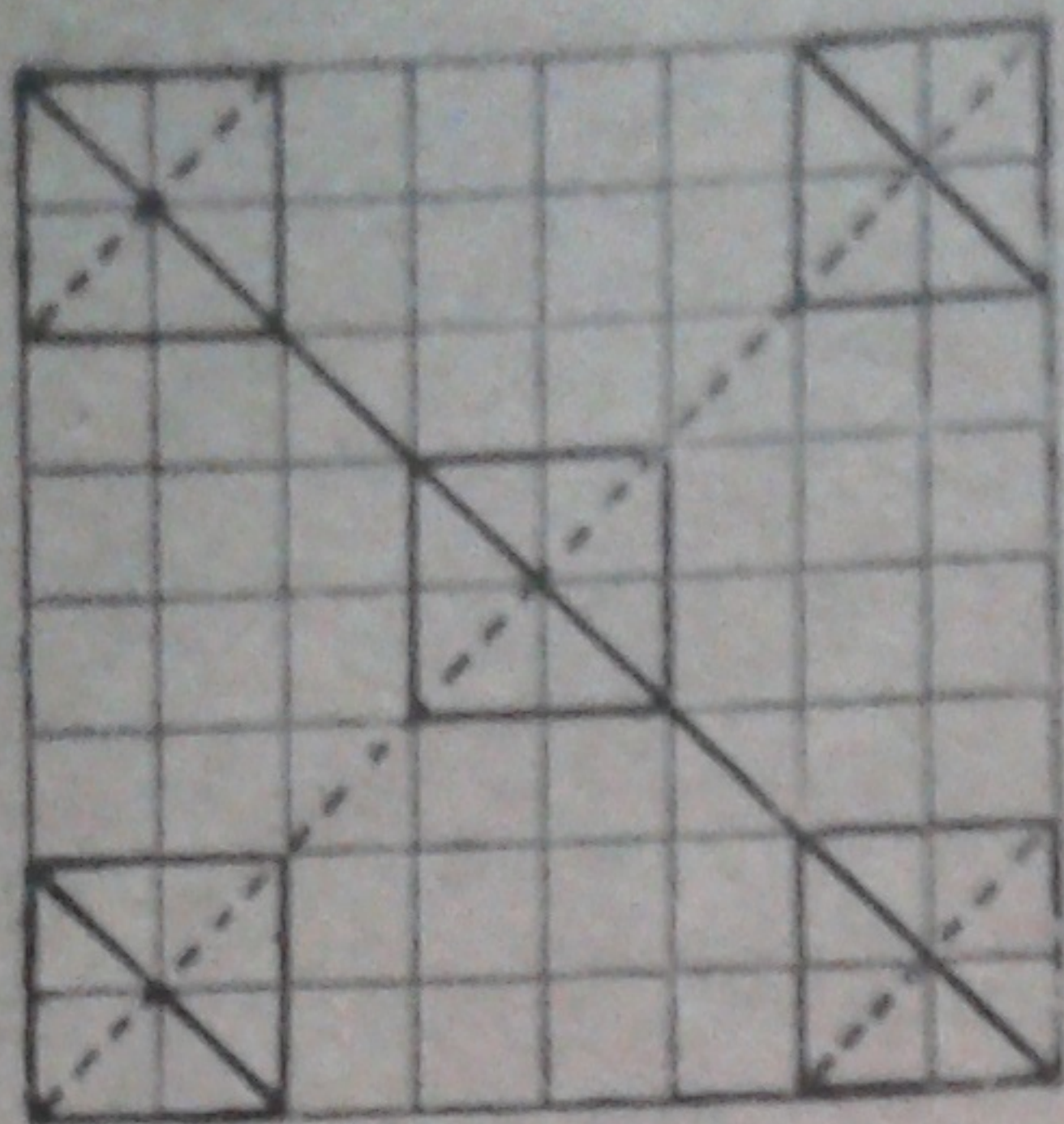


Hình 4

Giải xong bài toán này rồi, tôi nghĩ ngay ra bài toán sau vì cũng dùng cái "mèo" trên để giải.

Bài toán 6. Bàn cờ Châu Âu có thể chia thành 10 hình chữ nhật kích thước 6×1 và 1 hình vuông kích thước 2×2 . Tìm tất cả các vị trí có thể được của hình vuông này.

Lời giải. Tôi kẻ các đường "đậm liền" và "đậm đứt" như hình 5. Giả sử chia được theo yêu cầu bài toán 6 thì bất cứ hình chữ nhật kích thước 6×1 nào cũng có đúng 1 ô bị đường "đậm liền" cắt. Do đó 10 hình chữ nhật kích thước 6×1 sẽ có đúng 10 ô bị đường "đậm liền" cắt. Mà bàn cờ có 12 ô bị đường "đậm liền" cắt.



Hình 5

cắt, vậy hình vuông kích thước 2×2 phải có đúng 2 ô bị đường «đậm liền» cắt. Lý luận tương tự đối với các đường «đậm đứt» ta cũng có hình vuông kích thước 2×2 phải có đúng 2 ô bị đường «đậm đứt» cắt.

Trên hình 5, ta thấy hình vuông 2×2 chỉ có thể ở 5 vị trí: 4 vị trí góc và 1 vị trí trung tâm. Với 4 vị trí góc bình đẳng, nên các bạn chỉ cần xét với 1 góc nào đó là được, và các bạn thấy rằng nếu hình vuông 2×2 ở một góc nào đó của bàn cờ thì phần còn lại của bàn cờ có thể chia thành 10 hình chữ nhật kích thước 6×1 . Nhưng tiếc thay vị trí ở giữa bàn cờ của hình vuông kích thước 2×2 lại không thể được. Nếu ở vị trí này thì phần còn lại không thể chia thành 10 hình chữ nhật kích thước 6×1 .

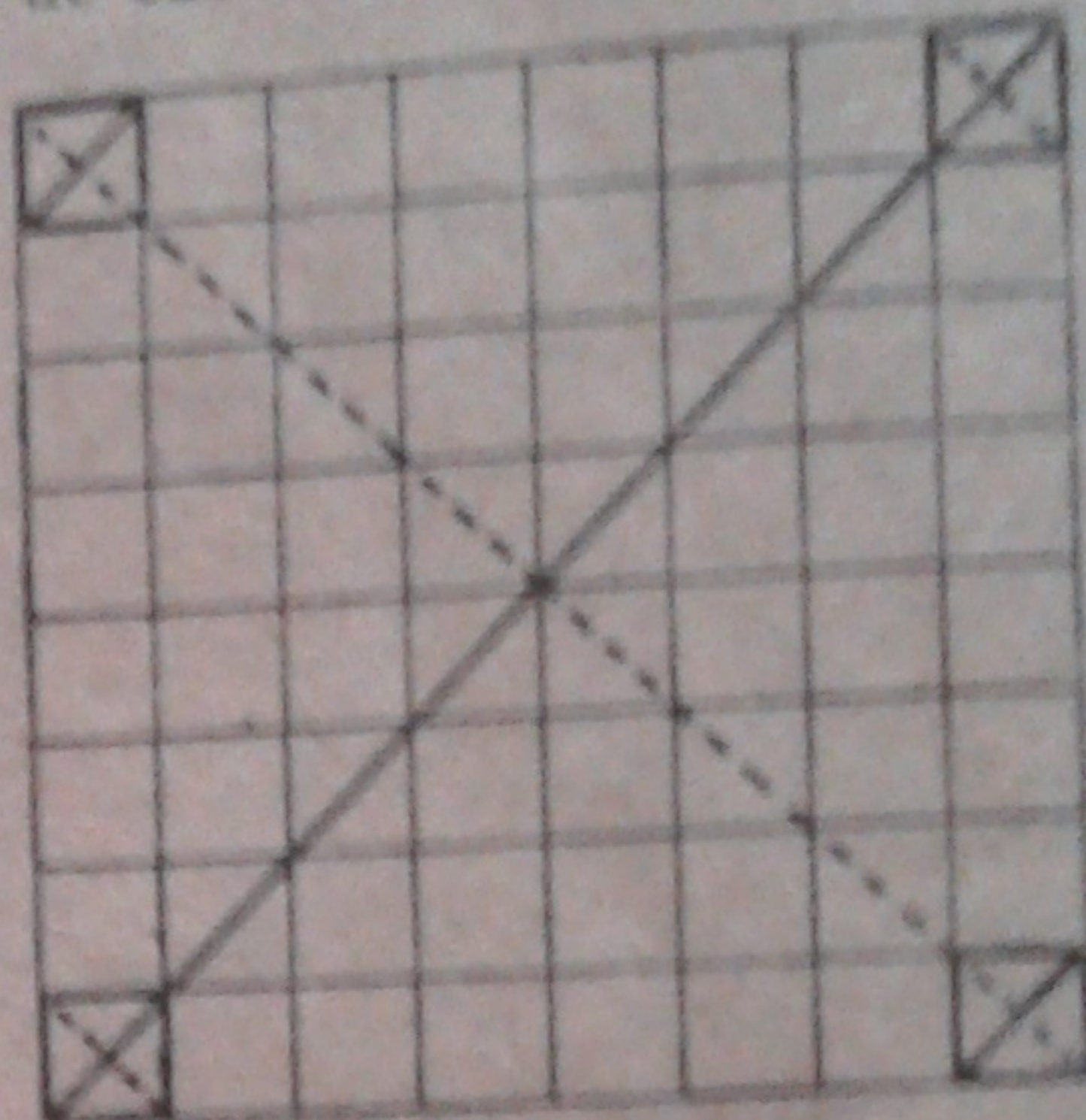
Một ý nghĩ khá hợp lý, tôi đi đến bài toán sau.

Bài toán 7. Một bàn cờ Châu Âu có thể chia thành 9 hình chữ nhật kích thước 7×1 và 1 hình vuông kích thước 1×1 . Tìm các vị trí có thể được của hình vuông này.

Lời giải. Tôi vẫn cố gắng dùng cái «mẹo» như ở các bài trên và có kết quả hiệu nghiệm.

Các bạn hãy kẻ các đường «đậm liền» và «đậm đứt» như hình 6.

Nếu chia được bàn cờ theo yêu cầu bài toán thì ta thấy 1 hình chữ nhật kích thước 7×1 có đúng 1 ô bị đường «đậm liền» cắt. Nếu ta chia bàn cờ thành 9 hình chữ nhật như thế sẽ có đúng 9 ô bị đường «đậm liền» cắt. Mà bàn cờ có 10 ô bị đường «đậm liền» cắt, do đó hình vuông kích thước 1×1 phải là ô bị đường «đậm liền» cắt. Ngược lại, hình vuông 2×2 phải có đúng 2 ô bị đường «đậm đứt» cắt. Vậy tóm lại hình vuông kích thước 1×1 phải ở vị trí ô bị cả 2 đường «đậm liền» và «đậm đứt» cắt. Trên hình 6, ta thấy có 4 vị trí như vậy, và các bạn dễ thấy các vị trí này đều thỏa mãn. Phép cắt là đơn giản xin dành để các bạn.



Hình 6

Đến đây có bạn nào nghĩ đến những hình chữ nhật kích thước 8×1 thì chúng ta thấy sự câu trả lời khá dễ dàng. Nhưng các bạn hãy suy nghĩ chia bàn cờ thành những hình chữ nhật phải là hình chữ nhật hay hình vuông mà những hình chẳng hạn như hình chữ T, hình chữ thập, v.v... Các bạn sẽ có nhiều kết quả lý thú.

Một điều muốn các bạn hãy suy nghĩ là chúng ta đừng dừng lại trên bàn cờ Châu Âu. Các bạn hãy phát biểu và làm các bài toán mở rộng những bài toán ở đây cho những bảng hình vuông bất kỳ.

VỀ CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

DƯƠNG HÙNG SƠN

TRONG hình học không gian chúng ta thường gặp các bài toán về chứng minh nhiều đường thẳng trong một khối hình học nào đó đồng quy.

Chúng ta có thể rút ra nhận xét về các đường thẳng đồng quy như sau:

Nhiều đường thẳng cắt nhau đôi một mà không đồng quy thì phải đồng phẳng và không đồng phẳng thì phải đồng quy. (*)

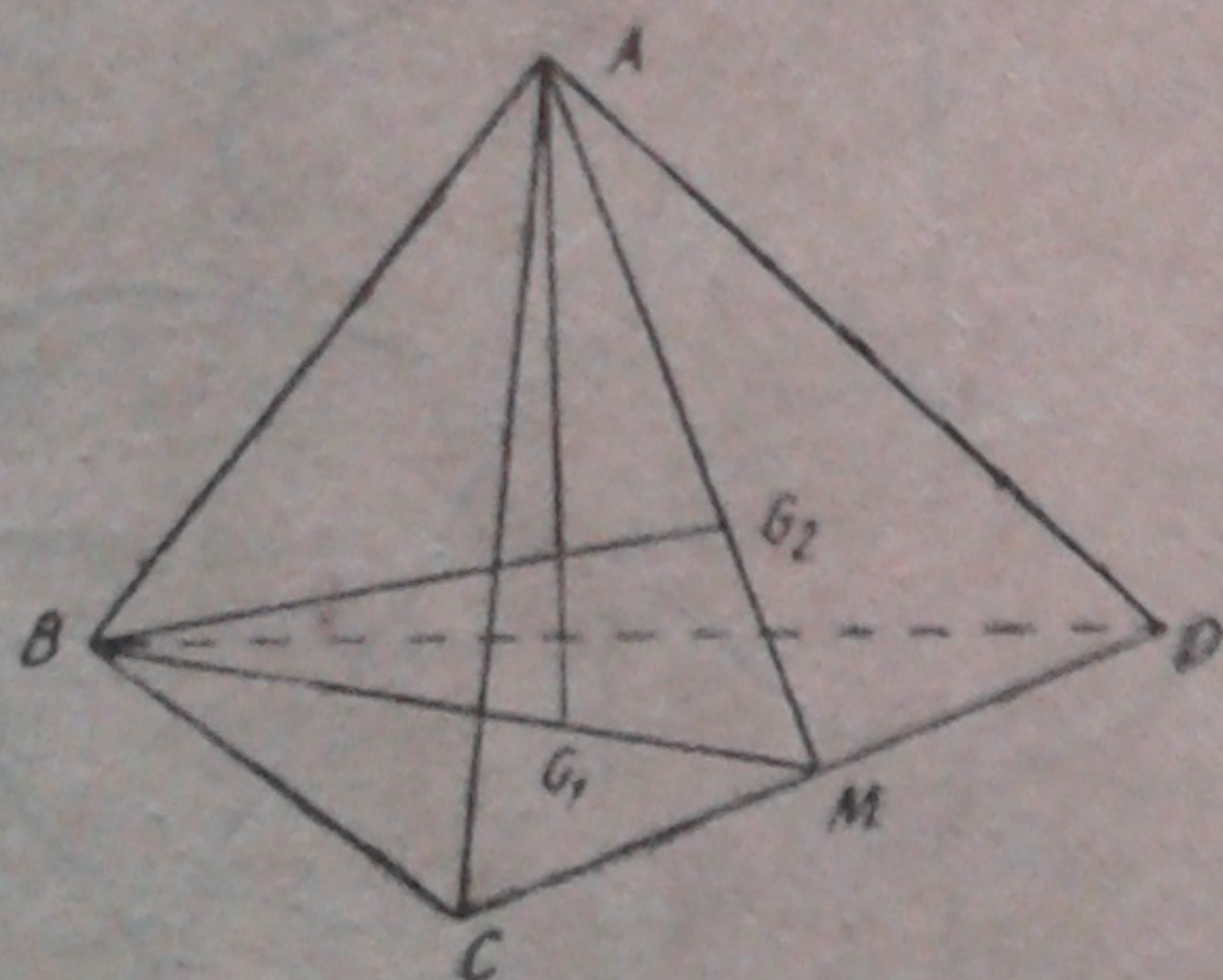
Ta chứng minh mệnh đề (*) bằng quy nạp. Cho ba đường thẳng a, b, c cắt nhau đôi một. Vì a và b cắt nhau nên hai đường thẳng

xác định một mặt phẳng. Nếu c không đi qua giao điểm của a và b thì c phải nằm trong mặt phẳng chứa a, b vì nếu không thì c chỉ cắt mặt phẳng đó tại một điểm không thể cắt cả a và b được. Điều đó có nghĩa là ba đường a, b, c đôi một cắt nhau thì nếu chúng không đồng quy thì chúng phải đồng phẳng và nếu không đồng phẳng thì phải đồng quy: mệnh đề (*) đúng với ba đường thẳng.

Giả sử (*) đúng với k đường thẳng, ta chứng minh nó cũng đúng với $k+1$ đường thẳng.

Giả thiết cho $k+1$ đường thẳng đôi một cắt nhau. Chọn k đường thẳng bất kỳ trong $k+1$ đường. Vì (*) đã đúng với k đường thẳng, nên nếu k đường chọn đó không đồng quy thì chúng phải đồng phẳng. Rõ ràng đường thẳng còn lại muốn cắt cả k đường đã chọn thì cũng phải nằm trong mặt phẳng chứa k đường đó: trong trường hợp này $k+1$ đường thẳng đồng phẳng. Nếu k đường thẳng đã chọn không đồng phẳng thì chúng phải đồng quy. Đường thẳng còn lại muốn cắt cả k đường thì phải đi qua giao điểm của k đường đó: trong trường hợp này $k+1$ đường thẳng đồng quy.

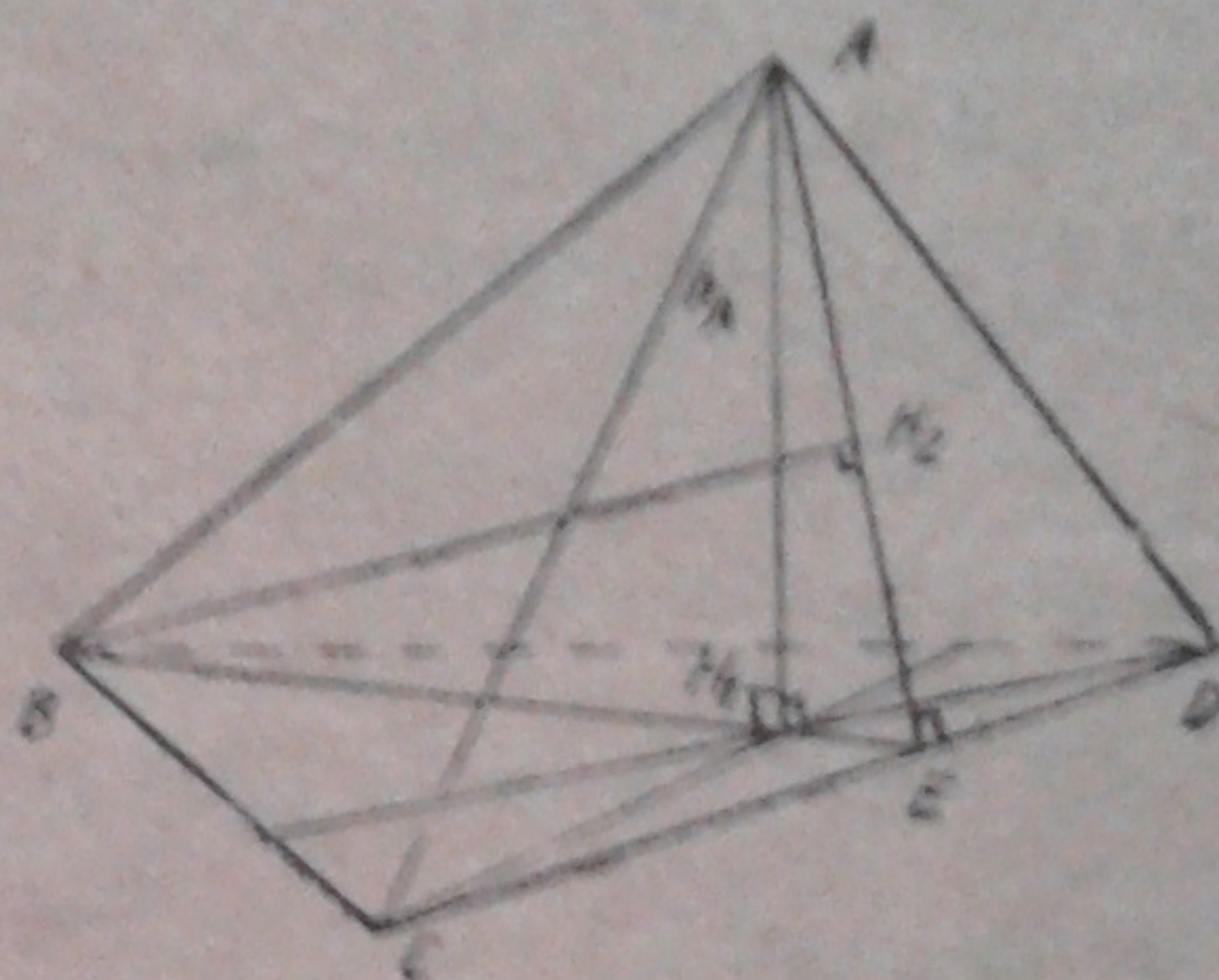
Với mệnh đề (*) ta giải được dễ dàng các bài toán sau đây:



Hai toán 1. Chứng minh rằng các đường thẳng nối đỉnh của tứ diện ABCD với trọng tâm của các mặt đối diện thì đồng quy.

Lời giải. Trọng tâm của các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng là G_1, G_2, G_3, G_4 . Gọi M là điểm giữa của CD thì $G_1 \in BM, G_2 \in AM$. Vậy AG_1 và BG_2 cắt nhau. Tương tự ta chứng minh được rằng tất cả các đường AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 lần lượt cắt nhau đôi một, mà chúng không đồng phẳng, vậy chúng phải đồng quy.

Hai toán 2. Cho tứ diện ABCD có các cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng bốn đường cao của nó đồng quy.



Lời giải. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D là các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C, D tương ứng của tứ diện. Gọi chân các đường cao h_A, h_B tương ứng là H_1, H_2 . BH_1 cắt CD tại E . CD vuông góc với AH_1 và AB nên $CD \perp BE$ và $CD \perp AE$. Mặt khác, CD vuông góc với BH_2 và AB nên $CD \perp AH_2$. Vậy A, H_2, E thẳng hàng, suy ra h_A và h_B cắt nhau.

Tương tự ta suy ra các đường cao h_A, h_B, h_C, h_D cắt nhau từng đôi một.

Như vậy h_A, h_B, h_C, h_D cắt nhau đôi một mà chúng không đồng phẳng, vậy chúng phải đồng quy.



GIẢI ĐÁP BÀI

« BÀI TOÁN CUỐI NĂM »

Đẳng thức

$$HAI \times SAU = MUOI + HAI$$

tương đương với đẳng thức

$$HAI \times (SAU - 1) = MUOI$$

Đặt $V = U - 1$ thì đẳng thức trên trở thành

$$HAI \times SAV = MUOI$$

Vì V phải là số chỉ có 4 chữ số nên một trong hai chữ H và S phải có giá trị bằng không. Theo giả thiết thì $H \neq 0$ vậy chỉ có thể

$$S = 0$$

Theo giả thiết $U < 2$, suy ra $V < 2$, vậy V chỉ có thể bằng 2 hoặc 1. Nhưng để $V \times I$ có tận

cùng hàng I thì chỉ có thể $V=1$, khi đó $U=2$.

Ta chuyển đẳng thức đang xét thành phép tính nhân

$$\begin{array}{r} \times \quad \begin{array}{ccc} H & A & I \\ & A & I \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} H & A & I \\ A.H & A^2 & A.I \end{array} \\ \hline M \quad 2 \quad 0 \quad I \end{array}$$

Nhìn vào phép tính ta thấy tích $A.H$ phải nhỏ hơn 10, vậy một trong hai chữ A và H phải có giá trị nhỏ hơn 3, tức là phải bằng 1. Nếu $A=1$ thì ở hàng chục:

$$A + AI = 1 + I < 10$$

(nếu bằng 10 thì ở kết quả $O=0$, trùng với S). Như vậy ở hàng trăm

$$H + A^2 = H + 1$$

không có giá trị thích hợp cho H để $H+1$ tận

cùng bằng 2 được. Vậy chỉ có thể $H=1$.

Phép tính trở thành

$$\begin{array}{r} \times \quad \begin{array}{ccc} 1 & A & I \\ & A & I \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 1 & A & I \\ A & A^2 & A.I \end{array} \\ \hline M \quad 2 \quad 0 \quad I \end{array}$$

Ta có nhận xét là $A < 6$, vì nếu $A \geq 6$ thì phép cộng ở hàng trăm có số nhớ ≥ 4 (chú ý con số 2 ở kết quả), số đó cộng với A ở hàng nghìn sẽ lớn hơn 9.

— $A=5$ thì để có con số 2 ở kết quả hàng trăm, đòi hỏi con số nhớ ở hàng chục là 6, không thể được đối với $A=5$.

— $A=4$ thì đòi hỏi con số nhớ ở hàng chục là 5 cũng không thể được.

Vậy chỉ có thể $A=3$; suy ra $M=4$.

Với $A=3$, số kết quả ở hàng trăm là 2 nên đòi hỏi phải có nhớ 2 ở hàng chục sang, suy ra:

$$5 < I < 9.$$

— $I=6$ thì $O=1$ sẽ trùng với H .

— $I=7$ thì $O=4$ sẽ trùng với M .

Vậy chỉ có thể $I=8$; suy ra $O=7$.

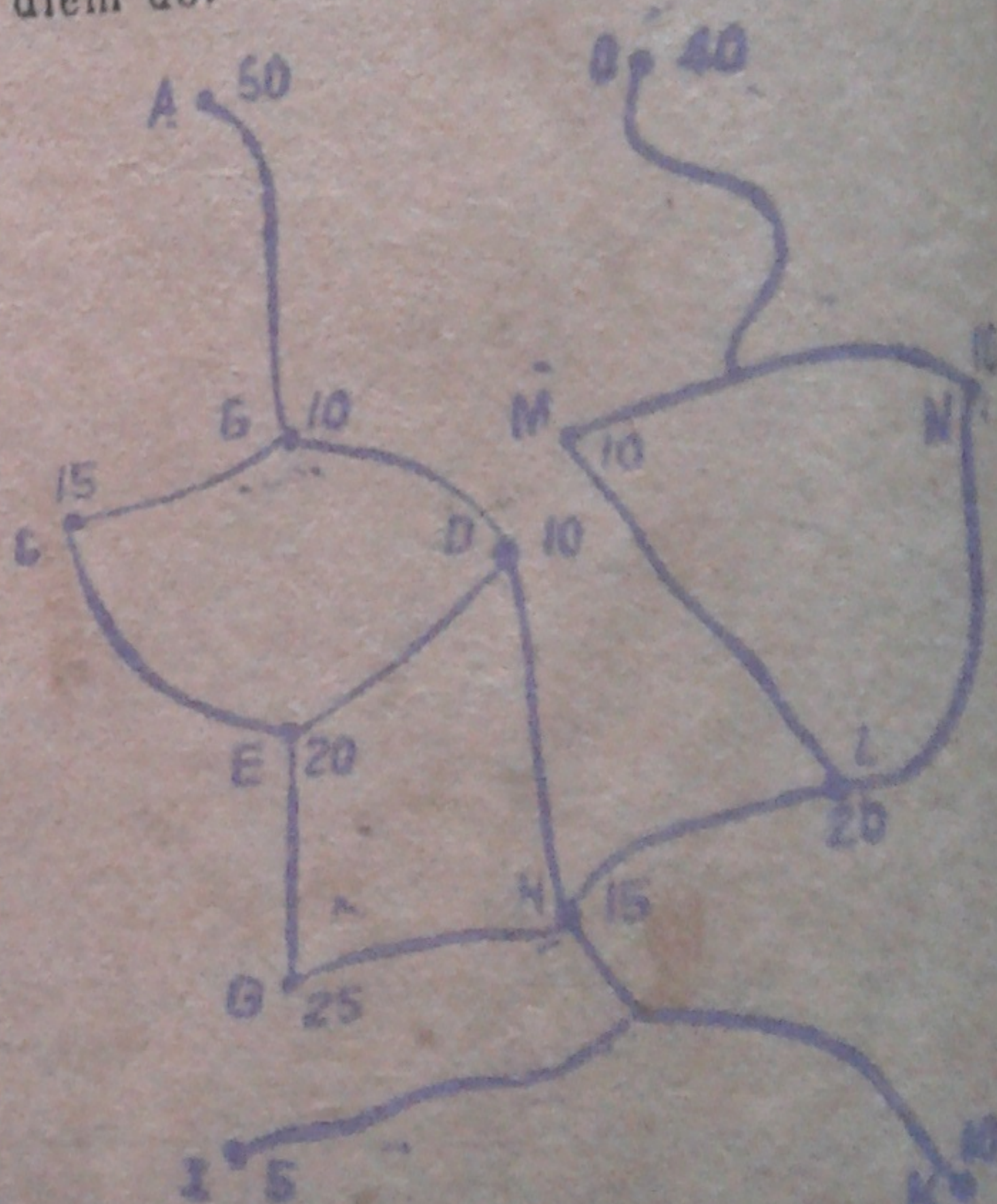
Thử các giá trị có thể của các chữ A, H, I vừa tìm được vào đẳng thức ban đầu:
 $135 \times 0,2 = 4278 + 138$
 ta thấy đẳng thức đúng. Bài toán được quyết.

PHẠM HOÀNG

XÂY NHÀ MÁY Ở ĐÂU?

Một khu dân cư gồm các địa điểm $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O$ và các đường giao thông nối liền các địa điểm như hình vẽ. Giả sử cần phải xây dựng một nhà máy sản xuất mì sợi tại một trong các địa điểm của khu vực để phục vụ nhân dân trong khu vực.

Toàn bộ nguyên vật liệu dùng cho nhà máy để sản xuất mì sợi lấy tại hai địa điểm A và O với số lượng hàng tháng tính ra tấn ghi tại các địa điểm đó.



Mì sợi sản xuất ra được bán tại các địa điểm còn lại với số lượng hàng tháng tính ra tấn ghi ở các địa điểm này.

Biết rằng trên mỗi đoạn đường thì chỉ vận chuyển một tấn hàng hóa bất kỳ theo chiều bất kỳ là như nhau.

Không cần biết chi phí vận chuyển một tấn hàng hóa trên từng đoạn đường, bạn có thể định được địa điểm nào để xây dựng nhà máy thì tổng chi phí vận chuyển hàng tháng là nhất hay không?

HỘI TÔI VIẾT

Chủ nhiệm

Tru sở:

NÓI CH

Các b
 Chúng
 tất cả c
 nhìn ch
 có cách
 $\sqrt{2}, \pi$
 có ý ng
 cái đó.
 lấy 3
 $x + x$
 có ngh
 hướng