

TOÁN HỌC
VIỆT NAM

Số 100

1

1978

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chịu trách nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Địa chỉ: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHUNG

Điện thoại: 52825

VỚI CHUYỆN VỚI CÁC BẠN TRÈ YÊU TOÁN

QUY NẠP, DỰ ĐOÁN, BÁC BỎ BẰNG CÁC PHÂN VÍ DỤ

QUỐC TRINH

TOÁN học đem trình bày chặt chẽ là một khoa học suy diễn có hệ thống, nhưng toán học trong lúc hình thành là một khoa học thực nghiệm, quy nạp* (G. Pólya).

Trong toán học cũng như trong các khoa học tự nhiên khác, chúng ta dùng quan sát và quy nạp để đưa ra các giả thuyết, khám phá ra các quy luật. Nhưng trong toán học, ngoài các phương pháp quan sát và quy nạp, rất cần sự chứng minh chặt chẽ bằng suy luận.

Nhờ quan sát, quy nạp, ta phỏng đoán ra các giả thuyết, các mệnh đề toán học đưa ra có đúng không, có phải là một định lý, một quy tắc không.

Với các bài tập toán học cũng vậy, quan sát, phỏng đoán kết luận, quy nạp, ... rồi tìm lại, các suy luận có lý đóng vai trò rất quan trọng.

Thật vậy, quan sát có thể dẫn tới phát minh. Quan sát có mục đích phát hiện một sự kiện

toán học lặp lại đều đặn, một lược đồ hay một quy tắc nào đó.

Quan sát với sự chỉ đạo của một tư tưởng nhất định có nhiều may mắn dẫn tới những kết quả đáng chú ý.

Quan sát có thể dùng làm bàn đạp cho sự suy rộng và cho những giả định, nhưng nó không phải là sự chứng minh. Lúc đầu là phỏng đoán, sau đó ta phải chứng minh. Cần bắt đầu từ quan sát rồi nhờ các phép tương tự, quy nạp, tổng quát hóa, đặc biệt hóa mà tập dượt nghiên cứu, sáng tạo và phát minh trong toán học.

Chính nhờ quan sát rằng:

$1 + 20 = 2 + 19 = 3 + 18 = \dots = 10 + 11 = 21$, mà lúc còn học ở trường tiểu học, Gao-xơ (1777 - 1855) đã tính nhẩm rất nhanh tổng: $1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20 = 10 \times 21 = 210$.

Nhờ nhận xét rằng về trái của đẳng thức:

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

gồm những lập phương của các số tự nhiên liên tiếp (1, 2, 3, 4), còn về phải là một bình phương (10³), ta viết đẳng thức đó ở dạng sau:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^3.$$

Từ đó, mở rộng vấn đề, ta dự đoán rằng:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2. \quad (a)$$

Ta chứng minh được đẳng thức này đúng (tức điều ta dự đoán đúng) và thế là ta xây dựng được mệnh đề đúng (a).

Tất nhiên, nhờ quy nạp không hoàn toàn ta chỉ có thể đưa ra được điều dự đoán, điều đó có thể đúng, có thể sai. Ta lấy vài ví dụ lịch sử sau đây:

Ví dụ 1. Ta hãy xét tam thức $A = x^2 + x + 41$ mà nhà toán học nổi tiếng Oie (1707 - 1783) đã nêu ra. Trong tam thức đó nếu thay x bằng 0 ta được số nguyên tố 41 và tiếp tục thay:

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ thì lần lượt ta được:

$$A = 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151.$$

Các số này là các số nguyên tố. Từ đó ta kết luận bằng mệnh đề F : "Trong tam thức $A = x^2 + x + 41$, nếu thay x bằng bất cứ số nguyên không âm nào ta cũng được một số nguyên tố". Mệnh đề đó đúng với $x = 1, 2, 3, \dots, 38, 39$.

Nhưng với $x = 40$ thì $A = 41^2$ là một hợp số.

Trong trường hợp này, ta nói rằng ta đúng phần ví dụ để chứng minh rằng mệnh đề trên là không hằng đúng, để bác bỏ giả thuyết.

Ví dụ 2. Nhà toán học vĩ đại Fécma (1601 - 1665) đã xét dãy số:

$$5, 17, 29, 65537, \text{ với số hạng tổng quát } 2^{2^n} + 1^n.$$

Ông nhận thấy rằng với $n = 1, 2, 3, 4$ thì $2^{2^n} + 1^n$ là các số nguyên tố. Ông giả định rằng những số tiếp theo đó cũng là những số nguyên tố. Tuy không chứng minh được, ông vẫn tin rằng giả thuyết của mình là đúng và thách Yalut và các nhà toán học Anh chứng minh giả thuyết đó. Nhưng Oie, chính là người đã tìm thấy rằng ngay số hạng tiếp theo là $2^{2^5} + 1$ ứng với $n = 5$ không phải là số nguyên tố (vì nó bằng 4294967297 chia hết cho 641). Oie viết "Chúng ta đã thấy một trường hợp mà phép quy nạp giản đơn dẫn đến sai lầm".

Nhờ đưa ra phản thí dụ trên, Oie đã bác bỏ giả thuyết trên của Fécma.

Ví dụ 3. Ta hãy phân tích nhị thức $x^n - 1$, với n là số tự nhiên, ra thừa số:

$$\begin{aligned} x - 1 &= x - 1, \\ x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1), \\ x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1), \\ x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1), \\ x^6 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1), \end{aligned}$$

Trước kia, các nhà toán học đã thành lập những bảng và nhờ các bảng đó mà thấy rằng các hệ số của x^k trong các thừa số xét về giá trị tuyệt đối đều không vượt quá đơn vị. Vì có nhiều nhà toán học tìm cách chứng minh điều nhận xét đó với mọi n , nhưng họ cũng chưa đạt được kết quả mong muốn.

Năm 1938, Sêbôlarép, nhà toán học nổi tiếng và là viện sĩ thông tấn viện Hàn lâm khoa học Liên Xô đã viết một bài đề nghị các nhà toán học làm sáng tỏ vấn đề trên. Sau đó Ivanôp đã chứng minh rằng: tất cả các nhị thức $x^n - 1$ mà số mũ n bé hơn 105 đều có tính chất đã nêu trên. Nhưng với $n = 105$ thì một trong các thừa số của $x^n - 1$ là đa thức sau:

$$\begin{aligned} &x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} \\ &- x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} \\ &- x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} \\ &+ x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 \\ &- x^6 - x^5 + x^3 + x + 1. \end{aligned}$$

Bỏ rằng là đa thức này không còn có tính chất nêu trên nữa. Phần ví dụ này đã bác bỏ tính đúng đắn của giả thuyết trên.

Qua các ví dụ lịch sử trên, ta thấy vai trò của các phản ví dụ rất quan trọng trong việc giải toán và sáng tạo toán học. Nhiều lúc, dùng phản ví dụ để chứng minh một mệnh đề tổng quát nào đó là sai, một bài toán nào đó là sai.

Trong học tập, các bạn nên tự nghĩ ra các ví dụ cụ thể để minh họa cho các định lý, các quy tắc và tìm kiếm các phản ví dụ để bác bỏ tính chân thực của những mệnh đề nào đó. Đó là cách củng cố và đào sâu kiến thức tốt. Các bạn có thể tập được như vậy từ vấn đề dễ đến vấn đề khó, từ ở lớp dưới đến lớp trên.

Ví dụ 4. Chúng ta biết rằng: "Nếu một số hạng chia hết cho một số nào đó thì tổng của chúng cũng chia hết cho số đó".

Ta thử xem mệnh đề đảo của mệnh đề này, tức mệnh đề H : "Nếu tổng các số hạng chia hết cho số nào đó thì mỗi số hạng của tổng cũng chia hết cho số đó", có đúng không.

Mệnh đề H là đúng với tổng: $4 + 6 = 10$ (10, 4, 6 đều chia hết cho 2) nhưng không đúng với tổng như $62 + 49 = 111$ (111 chia hết cho 3 với tổng như 62 và 49 không chia hết cho 3). Chỉ cần dùng phản ví dụ $62 + 49 = 111$ là bác bỏ được mệnh đề H .

V
nhân
V3 -
N1
có h
a)
b)
c)
V4
phân
V6
phân
ph
vô tỉ
số x
ph
các
hau
ph
lg2 +
vô
phân
ph
tỉ nh
hau
ph
đ, n1
ph
tỉ, n2
vô
các p
ph
nhưng
ph
là nh
số th
Vi
qua m
bộ ba
thẳng
Mỗi
bài ph
Hai
không
Ba x
không
không

Ví dụ 5. Với số vô tỉ học ở lớp 10m, bạn nhận biết dễ rằng các tổng sau: $\sqrt{3} + 1$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ là các số vô tỉ.

Nhưng bạn thử kiểm tra xem các mệnh đề sau có đúng hay không?

- a) Tổng hai số vô tỉ là số vô tỉ;
- b) Tích hai số vô tỉ là số vô tỉ;
- c) Thương hai số vô tỉ là số vô tỉ.

Với mỗi mệnh đề này, ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ là đủ.

Với mệnh đề a, ta có thể dùng một trong các phản ví dụ sau:

Phần ví dụ 1: $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ và $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ là các số vô tỉ nhưng tổng $(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 0$ là số hữu tỉ.

Phần ví dụ 2: 3,1311311... và 1,3,331333... là các số vô tỉ nhưng 3,1311311... + 1,3,331333... =

4,4444444... (tức 4, $\frac{4}{1}$) là số

hữu tỉ.

Phần ví dụ 3: $\lg 2$ và $\lg 5$ là các số vô tỉ nhưng $\lg 2 + \lg 5 = 1$.

Với mệnh đề b, ta có thể dùng một trong các phản ví dụ sau để bác bỏ nó.

Phần ví dụ 1: $\sqrt{2} + 1$ và $\sqrt{2} - 1$ là các số vô tỉ nhưng tích $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$ là số hữu tỉ.

Phần ví dụ 2: $\sin 45^\circ$ và $\cos 45^\circ$ là các số vô tỉ, nhưng $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$ là số hữu tỉ.

Phần ví dụ 3: $\lg 37^\circ$ và $\cotg 37^\circ$ là các số vô tỉ, nhưng $\lg 37^\circ \cdot \cotg 37^\circ = 1$ là số hữu tỉ.

Với mệnh đề c, ta có thể dùng một trong các phản ví dụ sau để bác bỏ nó:

Phần ví dụ 1: $\sqrt{12}$ và $\sqrt{3}$ là các số vô tỉ, nhưng $\sqrt{12} : \sqrt{3} = 2$ là số hữu tỉ.

Phần ví dụ 2: 10, 10010010000 100000 1... và 2, 0200 2000 20000 200000 2...

là những số vô tỉ, nhưng chia số thứ nhất cho số thứ hai là được số thương 5, là số hữu tỉ.

Ví dụ 6. Ta hãy xét n mặt phẳng cùng đi qua một điểm chung và giả sử rằng không có bộ ba mặt phẳng nào cùng chứa một đường thẳng chung.

Một mặt phẳng sẽ chia không gian thành hai phần.

Hai mặt phẳng cùng đi qua một điểm chia không gian thành bốn phần.

Ba mặt phẳng cùng đi qua một điểm nhưng không chứa một đường thẳng chung sẽ chia không gian thành tám phần.

Từ đó, ta dự đoán một cách tổng quát rằng với điều kiện đã nêu ở trên, n mặt phẳng sẽ chia không gian thành 2^n phần. Điều dự đoán đó có đúng không?

Chúng ta chỉ ra được rằng bốn mặt phẳng sẽ chia không gian ra thành 14 phần chứ không phải là 2^4 (tức 16) phần như điều dự đoán. Do đó mệnh đề dự đoán trên là sai.

Thật vậy nhờ phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được bài toán sau:

*Nếu n mặt phẳng cùng đi qua một điểm và sao cho không có bộ ba mặt phẳng nào cùng đi qua một đường thẳng chung thì chúng sẽ chia không gian thành $A_n = n(n-1) + 2$ phần.

Ví dụ 7. Học khối đa diện lồi ở lớp mười, bạn sẽ tìm được công thức Oler về số đỉnh, số mặt, số cạnh với các khối tứ diện, ngũ diện lục diện, thất diện. Với mỗi khối đa diện này khi gọi D là số đỉnh, M là số mặt và C là số cạnh thì ta có

$$M + D = C + 2.$$

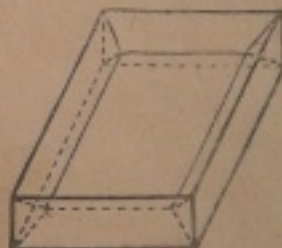
Công thức này cũng đúng với các khối đa diện đều, với hình lập phương cụt (hình 1), với hình chóp tháp (hình 2). Nhưng công thức đó có đúng với những hình đa diện khác nữa không, ví dụ với hình đa diện không lồi: hình đa diện dạng cái khung ảnh (hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Với hình đa diện này thì $M = 12$, $D = 12$ và $C = 24$ nên

$$M + D \neq C + 2.$$

Công thức trên không đúng nữa.

Phần ví dụ này lưu ý chúng ta rằng công thức trên của Oler nói về các hình đa diện lồi.

Cũng cần lưu ý thêm, trong lịch sử toán học có những giả thuyết mà đến nay chưa ai chứng minh được chúng mà cũng chẳng có ai bác bỏ được chúng. Lấy ví dụ về giả thuyết của Oler "một số chẵn lớn hơn 4 đều có thể phân tích thành tổng của hai số nguyên tố". Oler

không chứng minh được điều đó nhưng vẫn tin như vậy, và viết thư cho Gônbéc (1690 - 1764) sau khi đã biết Gônbéc đề ra bài toán nổi tiếng: « Chứng minh rằng mỗi số lẻ lớn hơn 5 đều có thể phân tích thành tổng của ba số nguyên tố ». Giả thuyết đó được nảy sinh ra nhờ kết quả của sự quan sát quy nạp và được minh họa bằng những ví dụ riêng biệt. Giả thuyết trên của Ôle với mọi trường hợp có đúng không? Cho đến nay chưa có ai trả lời được câu hỏi đó. Mặc dầu nhiều nhà toán học đã có những cố gắng lớn nhằm làm sáng tỏ vấn đề đó, nhưng cho đến nay cũng như ở thời Ôle giả thuyết của Ôle nêu lên một trong « nhiều tính chất của các số mà chúng ta rất quen thuộc, nhưng chúng ta vẫn chưa chứng minh hay bác bỏ được ».

Như trên, các bạn đã thấy, dễ dàng tạo trong toán học, ta dùng phép quy nạp. Phép quy nạp thường bắt đầu từ kết quả của sự quan sát. Nhờ quy nạp ta đưa ra điều dự đoán, giả thuyết. Có những giả thuyết có vai trò rất giá trị trong lịch sử khoa học, nhưng ngay việc giải

một bài toán, việc xây dựng một ví dụ hợp một phần ví dụ cũng đòi hỏi phải có một lý thuyết đơn giản hoặc một dự đoán tương ứng.

Bạn phải dự đoán về một định lý toán học trước khi bạn chứng minh nó; bạn phải dự đoán về ý của sự chứng minh trước khi chứng minh chi tiết.

Bạn phải đối chiếu các kết quả quan sát được và suy ra những điều tương tự; bạn phải thử đi, thử lại.

Sau khi dự đoán được mệnh đề, bạn phải chứng minh hay bác bỏ nó.

Nhiều khi phép quy nạp dẫn đến những mệnh đề chỉ đúng với những trường hợp riêng. Để bác bỏ tính chân thực của các mệnh đề này trong mọi trường hợp, là chỉ cần đưa ra phần ví dụ.

Khi học toán, giải toán, bạn cần tìm thêm các ví dụ để minh họa mà hiểu sâu thêm lý thuyết và xây dựng các phần ví dụ để bác bỏ những mệnh đề không hằng đúng.



Bài 1/97. Một số bạn như: Nguyễn Văn Nhung (Hải Phòng), Phạm Ngọc Thanh (A7, Cao đẳng S.P. T.P. Hồ Chí Minh), Nguyễn Văn Tiến (Yên Phong, Hà Bắc), Xuân Dũng (Sơn La), Nguyễn Thế Ninh và Vũ Đức Hiền (101 Chu Văn An, Hà Nội)... đã phát hiện rằng: với $p = 3$, thì điều khẳng định thứ hai trong đề ra là sai khi $n = 3$. Vì vậy xin sửa lại đầu bài như sau:

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + 1 = 0$ trong đó p là một số nguyên lớn hơn 3.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , thì tổng

$$S_n = x_1^n + x_2^n$$

bao giờ cũng là một số nguyên và không chia hết cho $p - 1$.

Lời giải. Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho, nên ta có:

$$(x_1^2 - px_1 + 1)x_1^{n-2} = 0$$

$$(x_2^2 - px_2 + 1)x_2^{n-2} = 0$$

hay, khi $n > 2$

$$S_n - pS_{n-1} + S_{n-2} = 0.$$

Từ đây suy ra với mọi $n > 3$

$$S_n = pS_{n-1} - S_{n-2} = p(pS_{n-2} - S_{n-3}) - S_{n-2} = (p^2 - 1)S_{n-2} - pS_{n-3} \quad (*)$$

Theo công thức này, để chứng minh S_n là một số nguyên và không chia hết cho $p - 1$ bằng phương pháp quy nạp, ta cần phải kiểm tra điều đó đối với $n = 1, 2, 3$. Thật vậy, theo định lý Viet,

$$S_1 = x_1 + x_2 = p.$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2.$$

$$S_3 = pS_2 - S_1 = p(p^2 - 2) - p = p(p^2 - 1) - 1p$$

Qua đó ta thấy S_1, S_2, S_3 là những số nguyên và không chia hết cho $p - 1$, với $p > 3$. (Trong trường hợp $p = 3$, $S_3 = 18$ và do đó, chia hết cho $p - 1 = 2$).

Giả sử S_k là một số nguyên và không chia hết cho $p - 1$ với mọi $k < n$. Khi đó, theo công thức (*), suy ra S_n cũng là một số nguyên. Đồng thời, S_n không chia hết cho $p - 1$, bởi vì $(p^2 - 1)S_{n-2}$ chia hết cho $p - 1$ còn pS_{n-3} không chia hết cho $p - 1$ (do S_{n-3} không chia hết cho $p - 1$ và $(p, p - 1) = 1$).

Như vậy, S_n là một số nguyên và không chia hết cho $p - 1$ với mọi số nguyên dương n .

Nhiều bạn đã có những lời giải đúng, song đôi chỗ lập luận không chặt chẽ.

C.T.

Bài này được đồng ý các bạn tham gia giải và hầu hết các bạn đã giải theo cách thứ 1. Bạn Mỹ Vinh Quang có cách giải tương tự như cách thứ 2.

V.T.

Bài 2/97. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 6, trong đó $P(1)=P(-1)$, $P(2)=P(-2)$, $P(3)=P(-3)$. Chứng minh rằng, với mọi x ta đều có $P(x)=P(-x)$.

Lời giải.

Cách thứ nhất:

$$P(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\text{Theo giả thiết } P(1) = a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\ + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = P(-1) = a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

suy ra

$$a_5 + a_3 + a_1 = 0 \quad (1)$$

Tương tự như trên, thay 2, -2, 3 và -3 vào $P(x)$ ta có:

$$16a_5 + 4a_3 + a_1 = 0 \quad (2)$$

$$81a_5 + 9a_3 + a_1 = 0 \quad (3)$$

Giải hệ phương trình gồm ba phương trình (1), (2) và (3) ta được:

$$a_5 = a_3 = a_1 = 0, \text{ như vậy } P(x) \text{ đã cho có dạng}$$

$$P(x) = a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0.$$

Do $P(x)$ là một đa thức chỉ gồm các số hạng bậc chẵn, nên $P(x) = P(-x)$, với mọi x .

Cách thứ hai Trước hết ta công nhận định lý sau đây:

Một đa thức bậc n không có quá n nghiệm.

Xét hàm số: $\varphi(x) = P(x) - P(-x)$ tức là:

$$\varphi(x) = a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 - (a_6x^6 - a_4x^4 - a_2x^2 - a_0) - a_5x^5 - a_3x^3 - a_1x + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \\ = 2a_5x^5 + 2a_3x^3 + 2a_1x$$

Như vậy $\varphi(x)$ là một đa thức bậc 5.

Theo giả thiết ta có:

$$\varphi(1) = P(1) - P(-1) = 0$$

$$\varphi(-1) = P(-1) - P(1) = 0$$

$$\varphi(2) = P(2) - P(-2) = 0$$

$$\varphi(-2) = P(-2) - P(2) = 0$$

$$\varphi(3) = P(3) - P(-3) = 0$$

$$\varphi(-3) = P(-3) - P(3) = 0$$

$\varphi(x)$ là một đa thức bậc 5 mà có 1, 2, 3 và -1, -2, -3 là nghiệm, nghĩa là $\varphi(x)$ có quá 5 nghiệm. Vậy theo định lý trên, $\varphi(x) = 0$; đa thức đã cho có dạng:

$P(x) = a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ là đa thức chỉ gồm các số hạng bậc chẵn, nên $P(x) = P(-x)$ với mọi x .

Bài 3/97. Cho tam giác ABC. Từ một điểm I trong tam giác kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này có phần nằm trong tam giác là các đoạn thẳng A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 . Hãy tìm vị trí của I để

a) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ nhỏ nhất;

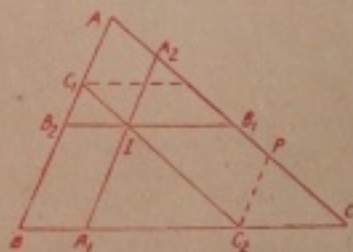
b) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ lớn nhất.

Lời giải của Nguyễn Hồng Thái (10/ Chu Văn An, Hà Nội): Đặt $d = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$. Giả sử $A > B > C$.

So sánh các cạnh trong các tam giác, và do tính chất bằng nhau của các cạnh đối diện trong các hình bình hành, ta có các bất đẳng thức

$$1) BC_1 = BB_2 + B_2C_1 < IA_1 + IB_2 < A_1C_1 + BA_1 = BC_2, \text{ tức là}$$

$$BC_1 < IA_1 + IB_2 < BC_2. \quad (1)$$



$$2) C_1C_2 + IA_2 + IB_1 = AP + PC_2 + CC_2 < AC + CC_2 \text{ và } C_1C_2 + IB_1 + IA_2 = CQ + C_1Q + AC_1 < AC + AC_1, \text{ tức là}$$

$$AC + AC_1 < C_1C_2 + IA_2 + IB_1 < AC + CC_2. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được

$$AC + AB < d < AC + BC.$$

Giá trị của d nhỏ nhất bằng $AC + AB$ khi d trùng với AB .

Giá trị của d lớn nhất bằng $AC + BC$ khi d trùng với C .

Từ kết quả trên ta rút ra kết luận (đồng quát): Vị trí của I để d có giá trị nhỏ nhất là đỉnh của tam giác có góc lớn nhất và vị trí của I để d có giá trị lớn nhất là đỉnh của tam giác có góc nhỏ nhất.

V.T.

Bài 4/97. Cho góc nhọn $\alpha O\beta$. S là một điểm tùy ý trong góc đó. Từ S kẻ SM, SN lần lượt vuông góc với các cạnh Ox , Oy (M trên Ox , N

trên Oy). Trên Ox lấy các điểm M_1, M_2 và trên Oy lấy các điểm N_1, N_2 sao cho $MN_1 // M_1N_2 // SN$ và $NM_1 // N_1M_2 // SM$.

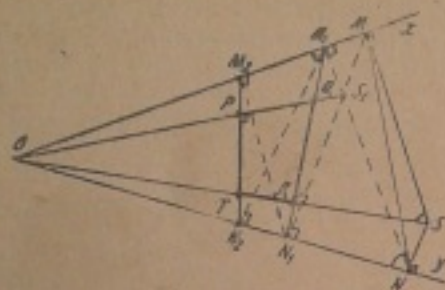
Các đường OS, OS_1 cắt các đường M_1N_1, M_2N_2 tại bốn điểm P, Q, R, T . Chứng minh rằng P, Q, R, T nằm trên cùng một đường tròn.

Lời giải (của nhiều bạn):

— Theo giả thiết $MN_1 // M_1N_2 // SN$ mà $SN \perp OS$, nên suy ra $MN_1 \perp OS$ và $M_1N_2 \perp OS$.

Cũng theo giả thiết $NM_1 // N_1M_2 // SM$ mà $SM \perp OS$ nên ta có $NM_1 \perp OS$ và $N_1M_2 \perp OS$.

— Ta thấy từ góc OSN nội tiếp được đường tròn (tổng hai góc đối $\widehat{M} + \widehat{N} = 2v$), nên:



$\widehat{MSO} = \widehat{MNO}$ (cùng chắn cung $\widehat{MO}$). (1)

Ta lại thấy M_1 và N_1 cùng nhìn MN dưới một góc vuông nên M, N, N_1, M_1 nằm trên cùng một đường tròn từ đó:

$\widehat{MNO} = \widehat{OM_1N_1}$ (cùng bù với $\widehat{MN_1N_1}$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MSO} = \widehat{OM_1N_1}$, hay $\widehat{MSO}$ bù với $\widehat{MM_1N_1}$, nghĩa là tứ giác $MSRM_1$ nội tiếp được đường tròn, từ đó $\widehat{SMM_1} = 1v$ (do $\widehat{SMM_1} = 1v$).

— Bằng lập luận hoàn toàn tương tự như trên (thay M, N, M_1N_1, S, R lần lượt bởi $M_1, N_1, M_2, N_2, S_1, P$), ta suy ra $\widehat{S_1PM_2} = 1v$.

Vậy từ góc PQH (có tổng hai góc đối $\widehat{R} + \widehat{P} = 2v$) nội tiếp được trong một đường tròn, đó chính là điều cần chứng minh.

Các bạn Hoàng Tuấn Hưng (9H, cấp 3 Lê Hồng Phong, Hà Nam Ninh), Đặng Thanh Hải (lớp 9 chuyên toán Đại học sư phạm Vinh), Kim Thành và Thúc Trạch (lớp, cấp 2 3 Phú Nhuận, Thành phố Hồ Chí Minh), Thế Ninh và Đức Hiền (lời Chu Văn An, Hà Nội), Cao Xuân Hồng (lớp, cấp 3 thị xã Hưng Yên, Hải Hưng) đã có những lời giải rất hay. Bạn Nguyễn Văn Tuấn (9N, Hồng Quang, Hải Hưng) đã có nhận xét

đúng: ba đường M_1N_2, M_2N_1 và OS đồng quy (đó chính là ba đường cao trong tam giác OM_1N_1). (Hình vẽ không chính xác).

Thực ra để giải bài toán này (như đã thí ở trên) chỉ cần dùng tới kiến thức lớp 7, tuy vậy cũng còn có nhiều cách giải khác nữa. Chẳng hạn, có thể chứng minh từ góc PQR nội tiếp được đường tròn bằng cách chứng minh $OP, OQ = Os, OT$ (phương tích từ O đến đường tròn ngoại tiếp từ góc $PQRT$) như trong lời giải của bạn Xuân Dũng (Sơn La).

T.T.

Bài 5/97. Tìm các số nguyên dương n , thỏa mãn phương trình.

$$2^{m+1} + 6^n = 10^n$$

Lời giải (của nhiều bạn): Ta nhận thấy lũy thừa cùng bằng chữ số 0, 6^n cũng bằng chữ số 6, nên từ phương trình trên suy ra 2^{m+1} phải tận cùng bằng chữ số 4. Thế nhưng với $m > 1$ thì $2^{m+1} = 2^{1+2+3+4+5+\dots+m} = (2^1)^{1+2+3+\dots+m}$ tận cùng bằng chữ số 6, còn với $m = 1$ thì $2^{m+1} = 2$, vậy chỉ còn phải xét hai trường hợp:

— $m = 2$, phương trình đã cho trở thành $2^3 + 6^n = 10^n$, hay $10^n - 6^n = 4$, rõ ràng phương trình này chỉ có nghiệm khi $n = 1$ ($10 - 6 = 4$), với $n > 1$ thì $10^n - 6^n > 4$.

— $m = 3$, phương trình đã cho trở thành $2^4 + 6^n = 10^n$ hay $10^n - 6^n = 64$. Để thấy rằng $n = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình này ($10^2 - 6^2 = 64$), vì với $n = 1$ thì $10 - 6 < 64$, còn với $n > 2$ thì $10^n - 6^n > 64$.

Tóm lại, có hai cặp số tự nhiên thỏa mãn phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} m_1 = 2 \\ n_1 = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} m_2 = 3 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

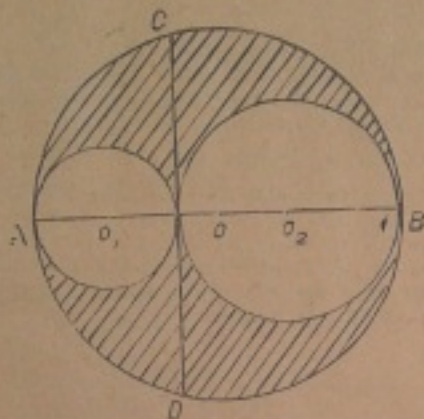
Các bạn Nguyễn Văn Nam (9E Nguyễn Huệ, thị xã Hà Đông) Mỹ Vinh Quang (lớp 10 chuyên toán Đại học sư phạm Vinh), Phạm Quốc Thái (9N Hồng Quang, Hải Hưng), Nguyễn Đức Bình (lớp Nam Đan 2), Nguyễn Huy Sĩ (bộ đội 8A - 610 Đồng Anh, Hà Nội) đã có những lời giải rất tốt. Nhiều bạn khác cũng có lời giải đúng, tuy vậy không ít bạn đã bỏ sót nghiệm hoặc quên nghiệm nhưng lập luận dài dòng, thậm chí có bạn còn kết luận sai là phương trình vô nghiệm.

T.T.

Bài 6/97. Cho hai đường tròn tâm O_1, O_2 tiếp xúc ngoài với nhau và cùng tiếp xúc (trong) với một đường tròn tâm O , sao cho ba tâm của chúng

đường tròn thẳng hàng. Phần tiếp tuyến chung của hai đường tròn tâm O_1, O_2 giới hạn ở trong đường tròn tâm O có độ dài 1.

Hãy tìm diện tích của hình tạo bởi các phần ở ngoài hai đường tròn tâm O_1, O_2 và ở trong đường tròn tâm O theo 1.



Lời giải. Gọi R, r_1 và r_2 lần lượt là bán kính của đường tròn tâm O, O_1 và O_2 . Ta có

$$R = r_1 + r_2.$$

1. Tiếp tuyến chung trong.

Gọi S là diện tích phần tìm, ta có

$$S = \pi R^2 - (\pi r_1^2 + \pi r_2^2) = \pi [(r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2] = 2\pi r_1 r_2.$$

Mặt khác ta có $MA, MB = MC, MD$ (phương tích của điểm M đối với đường tròn O) và $MA = 2r_1, MB = 2r_2, MC = MD = l/2$. Từ đó

$$2r_1 \cdot 2r_2 = (l/2)^2$$

$$\text{hay } 2r_1 r_2 = l^2/8.$$

$$\text{Vậy } S = 2\pi r_1 r_2 = \pi l^2/8.$$

2. Tiếp tuyến chung ngoài.

Ta thay đổi một chút cách gọi: đặt l_1 là độ dài trong đường tròn tâm O của tiếp tuyến chung ngoài và l_2 là độ dài trong đường tròn tâm O của tiếp tuyến chung trong. Ta có nhận xét là khi $r_1 = r_2$

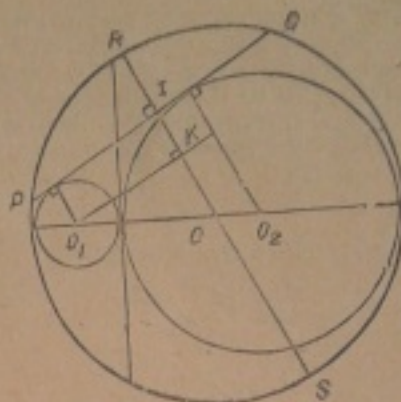
$$\text{thì } l_1 = \sqrt{3} R, l_2 = 2R,$$

$$\text{và } l_1/l_2 = \sqrt{3}/2.$$

Xét chẳng hạn trường hợp $r_1 = r_2/3$, tức là khi $r_1 = R/4$ và $r_2 = 3R/4$. Trong trường hợp này $l_2 = \sqrt{3} R$. Ta tính l_1 .

Bằng cách tính KO , ta tính được

$$OI = (3r_1 + r_2)/4 = 5R/8.$$



Ta có

$$l_1 = PQ = 2IQ = 2\sqrt{IR \cdot IS} = 2\sqrt{(R - 5R/8)(R + 5R/8)} = 2\sqrt{(3R/8)(13R/8)} = \sqrt{39} R/4.$$

$$\text{Vậy } \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sqrt{39} R/4}{\sqrt{3} R} = \frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39} \cdot \sqrt{3}}{12} > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy nếu giữ nguyên độ dài l_2 trong hai trường hợp $r_1 = r_2$ và $r_1 = r_2/3$ thì S không thay đổi, trong khi đó l_1 lại thay đổi (do l_1/l_2 thay đổi). Vậy S không chỉ phụ thuộc vào l_1 .

T.T.

Bài 7/97. Cho một số hữu hạn hình cầu giao nhau tạo thành một hình có thể tích 27. Chứng minh rằng tồn tại một hình cầu hoặc một cô hùu hạn hình cầu đôi một không giao nhau mà thể tích của nó hoặc tổng thể tích của chúng lớn hơn 1.

Lời giải của Dương Tấn Thành (8CT - THPT Hà Nội): Chọn hình cầu lớn nhất và giả sử bán kính của nó là r_1 , xét tất cả các hình cầu giao với hình cầu này. Chúng tạo thành một hình có thể tích là V_1 . Hình này có thể chứa được hình cầu có bán kính $3r_1$, nhưng không chiếm hết hình cầu đó vì số hình cầu cho trước là hữu hạn. Ta có

$$V_1 < \frac{4}{3} \pi (3r_1)^3$$

hay

$$\frac{1}{27} V_1 < \frac{4}{3} \pi r_1^3.$$

Nếu $V_1 = 27$ thì thay vào bất đẳng thức trên ta có thể tích hình cầu lớn nhất đã chọn > 1 .

Nếu $V_1 < 27$ thì ta bỏ tất cả các hình cầu vừa xét ra và xét các hình cầu còn lại. Lại chọn hình cầu lớn nhất trong số còn lại này và bán kính của nó là r_2 . Xét tất cả các hình cầu giao với hình cầu này, chúng tạo thành một hình có thể tích là V_2 . Tương tự như trên ta có

$$\frac{1}{27} V_2 < \frac{4}{3} \pi r_2^3.$$

Lập lại lý luận ở trên ta sẽ được

$$\frac{1}{27} V_3 < \frac{4}{3} \pi r_3^3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{27} V_k < \frac{4}{3} \pi r_k^3.$$

Vì số hình cầu cho trước hữu hạn nên chỉ sau một số k hữu hạn bước chọn thì không còn hình cầu nào nữa. Ta có

$$\frac{4}{3} \pi (r_1^3 + r_2^3 + \dots + r_k^3) > \frac{1}{27} (V_1 + V_2 + \dots + V_k) = 1.$$

Vậy k hình cầu được chọn đôi một không giao nhau, có tổng thể tích > 1 .

Như vậy: hoặc hình cầu lớn nhất có thể tích lớn hơn 1, hoặc tồn tại một số hữu hạn hình cầu đôi một không giao nhau có tổng thể tích lớn hơn 1. (Tất nhiên cũng có thể xảy ra cả hai trường hợp).

Bài 8/97. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = (a+x)(b+x)/cx,$$

trong đó a, b, c, x đều dương.

Lời giải của bạn Nguyễn Huy Sửu (BỘ ĐỘI, 8A - 610, Đồng Anh, Hà Nội):

Hàm số y có thể viết dưới dạng

$$y = (a+b)/c + x/c + ab/cx.$$

Do a, b, c, x đều dương, cho nên y nhận giá trị nhỏ nhất khi $x/c + ab/cx$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Tích hai số x/c và ab/cx bằng ab/c không đổi, vậy tổng của chúng nhỏ nhất khi chúng bằng nhau:

$$x/c = ab/cx \text{ tức là khi } x = ab.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là

$$\frac{a+b}{c} + \frac{\sqrt{ab}}{c} + \frac{ab}{c\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{c}$$

(khi $x = \sqrt{ab}$).

Ngoài ra nhiều bạn đã tìm được giá trị nhỏ nhất của y bằng cách áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số x/c và ab/cx , hoặc sử dụng lại đẳng thức Bu-nhia-côp-ski.

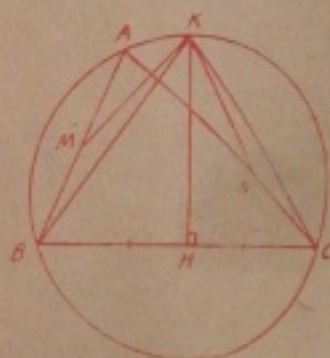
Một số bạn dùng đạo hàm cũng tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

C.T.

Bài 9/97. Cho tam giác ABC . Trên AB lấy điểm M và trên AC lấy điểm N , sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải (của nhiều bạn):

Trước tiên ta nhận thấy rằng nếu ABC là tam giác cân, $AB = AC$, thì đường trung trực của đoạn MN sẽ trùng với đường trung trực cố định của BC . Trong trường hợp tổng quát đường trung trực của MN sẽ cắt đường trung trực của BC tại một điểm.



Gọi K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường trung trực của BC . Ta sẽ chứng minh rằng đường trung trực của MN đi qua điểm cố định K .

Thật vậy, ta có $\angle MBK = \angle NCK$ vì $BM = CN$ (theo giả thiết).

$\angle MBK \cong \angle NCK$ (cùng chắn cung AK).

$BK = CK$ (K nằm trên đường trung trực của BC).

Do đó $MK = NK$, hay K nằm trên đường trung trực của đoạn MN .

Ngoài ra, nhiều bạn đã giải bằng cách chứng minh được rằng đường trung trực của MN đi qua giao điểm của đường trung trực của BC với đường phân giác ngoài góc BAC , hoặc đi qua điểm giữa của cung BAC , v.v...

C.T.

Bài 10.
ngoài của
sao cho

Hồng tin

Lời giải

Dại học

ngôi tam

$CB \perp 2 = \overline{E}$

$BA_2A_3 = C$

Ta có c

ΔC_1AB

tam giác

Từ đó ta

BC_1/BA

Quay ta

thì $C_1 \rightarrow$

Quay ta

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

ta có

C

Bài 10/97. Cho tam giác ABC . Dựng về phía ngoài của nó các tam giác AB_1C_1 , BCA_1 , CAB_2 , sao cho

$$\begin{aligned}\widehat{ABC_1} &= \widehat{ACB_1} = \alpha, \\ \widehat{BAC_1} &= \widehat{CAB_1} = \beta, \\ \widehat{A_1BC} &= \widehat{A_1CB} = \gamma.\end{aligned}$$

với $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Hãy tính các góc của tam giác $A_1B_1C_1$.

Lời giải của Trịnh Đông Hưng (TC khoa toán, Đại học sư phạm 2 Hà Nội): Dựng về phía ngoài tam giác ABC , tam giác BCA_2 cân có $CB_2 = CA_2$, $\widehat{BCA_2} = \alpha + \gamma$. Dễ dàng thấy rằng $BA_2A_1 = CA_2A_1 = \beta$.

Ta có các tam giác đồng dạng:

$\triangle C_1AB \sim \triangle A_1A_2B$, $\triangle B_1AC \sim \triangle A_1A_2C$; và hai tam giác A_1A_2B , A_1A_2C có các cạnh bằng nhau. Từ đó ta có

$$BC_1/BA = BA_1/BA_2 = CA_1/CA_2 = CB_1/CA = k$$

Quay tam giác C_1A_1B quanh B một góc $-\alpha$ thì $C_1 \rightarrow C_1'$, $A_1 \rightarrow A_1'$, ta có:

$$BC_1'/BA = BA_1'/BA_2 = k \quad (*)$$

Quay tam giác CB_1A_1 quanh C một góc α thì

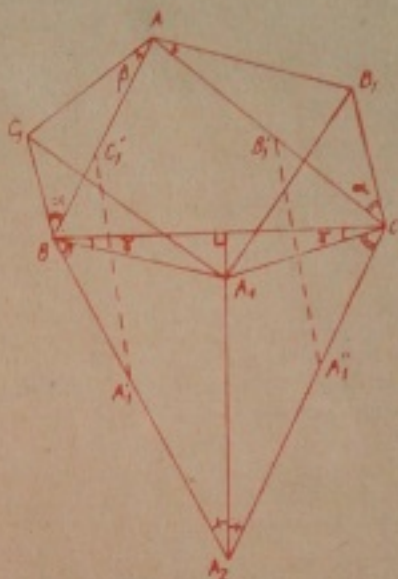
$$B_1 \rightarrow B_1'; A_1 \rightarrow A_1'$$

ta có

$$CB_1'/CA = CA_1'/CA_2 = k. \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra C_1A_1'/B_1A_1' và $C_1A_1' = B_1'A_1'$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}B_1A_1' &= C_1A_1', \\ B_1A_1C_1 &= 2\alpha.\end{aligned}$$



Tam giác $A_1B_1C_1$ cân có góc $E_1A_1C_1$ bằng 2α , còn lại

$$\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{A_1C_1B_1} = 90^\circ - \alpha.$$

ĐỀ RA
kỳ này



Bài 1/100 (lớp 8). Đầu năm 1978, khi được các học sinh hỏi tuổi, một thầy giáo dạy toán nói: "Số tuổi của tôi và năm sinh ra tôi có tỉ số giữa BSCNN và USCLN là 23:100".

Hạn hãy tính xem thầy giáo đó bao nhiêu tuổi.

Đào Quang Điền (Hải Hưng)

Bài 2/100 (lớp 8). Tìm sự liên hệ giữa các bán kính đường tròn bàng tiếp của một tam giác để tổng của chúng nhỏ hơn chu vi tam giác.

Hải Châu (Hải Hưng)

Bài 3/100 (lớp 8). Cho D_1 và D_2 là hai đa giác đều. Biết rằng tỷ số hai góc của chúng là 5:7, tìm số cạnh của D_1 và số cạnh của D_2 .

Quốc Trình (Hà Nội)

Bài 4/100 (lớp 9). Dãy số liệt $\{a_n\}$ cho bởi các công thức

$$u_1 = p + q - 1$$

$$u_{k+1} = p + q - pq/u_k \text{ với } k \geq 1,$$

trong đó p, q là các số tự nhiên.

Chứng minh rằng tích $u_1 u_2 \dots u_n$ là một số nguyên.

Lê Quốc Hán (Nghệ Tĩnh)

Bài 5/100 (lớp 9). Giả sử a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện

$$1/(1+a) + 1/(1+b) + 1/(1+c) \geq 2.$$

Chứng minh rằng

$$abc \leq 1/8.$$

Phan Đức Chính (Hà Nội)

Bài 6/100 (lớp 9). Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số dương có tổng bằng 1, thì:

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

Phan Đức Chính

Bài 7/100 (lớp 10). Chứng minh rằng nếu α, β là những góc nhọn thỏa mãn điều kiện $\tan \beta / \tan \alpha = 3$, thì $\beta \leq \alpha + 30^\circ$.

Bài 8/100 (lớp 10). Cho hai đường thẳng a và b không cùng nằm trong một mặt phẳng và hai điểm A và B lần lượt trên a và b . Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một mặt cầu tiếp xúc với a, b tại A và B .

Đặng Hải Nam (Hải Hưng)

Bài 9/100 (lớp 8). Tìm a sao cho số

$$A = \underbrace{4 \dots 435 \dots 5a}_n$$

là số chính phương

Đặng Thanh Hà
(9CT - BHSP Vinh)

Bài 10/100 (lớp 8). Cho đường tròn O, I cùng AC . Trên cung nhỏ AC lấy điểm M sao cho hình chiếu H của nó trên AC thỏa mãn

$$AC/4 < AH < 3AC/4.$$

Điểm N chạy trên AC , đường MN cắt đường tròn tại điểm thứ hai K . Gọi I là điểm trung điểm của KN .

Tìm vị trí của N để góc AIC có giá trị lớn nhất.

Đặng Ngọc Thái
(10CT - BHSP Vinh)

Chú thích: Bài 7/100 do Đào Quang Hùng (Thay Hưng) sưu tầm.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

DÙNG TAM THỨC BẬC HAI ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN THÁI HỒE

TRONG chương trình toán ở trường phổ thông, tam thức bậc hai có một vị trí đáng kể về cả hai mặt: về nội dung và về công cụ để giải toán.

Chúng ta đã biết, các bài toán về xét dấu một tam thức bậc hai, so sánh một vài số với nghiệm của tam thức bậc hai, các bài toán sử dụng định lý Vi-ét có áp dụng lớn trong việc giải các bài toán ở phạm vi khác.

Bài báo này xin giới thiệu một vài áp dụng của tam thức bậc hai để chứng minh bất đẳng thức, giải các phương trình và bất phương trình.

Bài toán 1. Cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho:

$$0 < a < a_k < b$$

với $k = 1, 2, \dots, n$.

Gọi

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2$$

Hãy chứng minh rằng:

$$m_2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} m_1^2.$$

Lời giải 1. Xuất phát từ giả thiết $a < a_k < b$ ta suy nghĩ rằng, nếu xem a và b là nghiệm của tam thức bậc hai nào đó thì a_k nằm trong khoảng hai nghiệm đó. Như vậy ta có: $A(x) = x^2 - (a+b)x + ab$ trong đó A là hệ số cao nhất của tam thức

Để dùng thử rằng, tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm a và b là:

$$f(x) = x^2 - (a+b)x + ab.$$

Với $f(x)$ lập được, có $A=1$ (1)

Khi đó, do $a \leq a_k \leq b$ nên:

$$f(a_k) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

hay là:

$$a_k^2 - (a+b)a_k + ab \leq 0. \quad (*)$$

Lấy tổng theo k từ 1 đến n bất đẳng thức (*), ta có:

$$\sum_{k=1}^n f(a_k) \leq 0$$

hay là

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 - (a+b) \sum_{k=1}^n a_k + nab \leq 0. \quad (**)$$

Thay $\sum_{k=1}^n a_k^2 = n \cdot m_2, \quad \sum_{k=1}^n a_k = n \cdot m_1$

vào (**) ta có

$$n \cdot m_2 - (a+b) \cdot n \cdot m_1 + nab \leq 0$$

hay là, do $n > 0$ ta có:

$$m_2 - (a+b)m_1 + ab \leq 0.$$

hay là $(a+b)m_1 \geq m_2 + ab$.

Áp dụng bất đẳng thức cô-si cho m_2 và ab (vì m_2 và ab đều dương), ta có:

$$(a+b)m_1 \geq m_2 + ab \geq 2\sqrt{ab \cdot m_2}.$$

Vì $(a+b)m_1$ và $2\sqrt{ab \cdot m_2}$ đều dương, nên bất đẳng thức

$$(a+b)m_1 \geq 2\sqrt{ab \cdot m_2}$$

tương đương với

$$(a+b)^2 m_1^2 \geq 4abm_2$$

hay là:

$$m_2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} m_1^2.$$

Bất đẳng thức cuối cùng thu được chính là bất đẳng thức phải chứng minh.

Lời giải 2. Bây giờ nếu xuất phát từ kết quả của bài toán:

$$m_2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} m_1^2$$

$a \leq a_k \leq b$ hay là:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^2$$

$$(a+b)^2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - 4abn \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0 \quad (**)$$

thì ta có thể quan niệm về trái của bất đẳng thức (**) là biệt thức Δ của một tam thức bậc hai nào đó. Do $\Delta \geq 0$ (đó là điều kiện của bài toán), nên ta phải chứng tỏ rằng, tam thức bậc hai lập được phải có nghiệm.

Như vậy là, vấn đề chứng minh bất đẳng thức (**) quy về việc chứng minh tính có nghiệm của một tam thức bậc hai $f(x)$ có biệt thức Δ là về trái của (**).

Tam thức bậc hai $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu đối ra có dạng

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 - (a+b) \sum_{k=1}^n a_k x + nab \quad (***)$$

Tất nhiên để chứng minh $f(x)$ có nghiệm, không ai nghĩ rằng cần chứng minh $\Delta \geq 0$, vì nếu vậy ta sẽ sa vào vòng luẩn quẩn.

Để khắc phục khó khăn, ta hãy sử dụng phương pháp mà đôi khi tỏ ra có hiệu lực để chứng minh tính có nghiệm của tam thức bậc hai. Nội dung cụ thể của công việc đó là:

Hãy tìm số x_0 nào đó sao cho $af(x_0) \leq 0$,

trong đó $a = \sum_{k=1}^n a_k^2$.

Do điều kiện $a \leq a_k \leq b$ nên bao giờ cũng tồn tại số x_0 mà

$$\frac{a}{a_k} \leq x_0 \leq \frac{b}{a_k}.$$

Khi đó ta có $(x_0 a_k - a)(x_0 a_k - b) \leq 0$

hay là:

$$a_k^2 x_0^2 - (a+b)x_0 + ab \leq 0$$

Từ đó ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x_0^2 - (a+b) \sum_{k=1}^n a_k x_0 + nab \leq 0.$$

Biểu thức ở vế trái chính là $f(x_0)$, do đó ta có

$$f(x_0) \leq 0$$

và cũng có

$$af(x_0) \leq 0 \quad (\text{do } a = \sum_{k=1}^n a_k^2 > 0).$$

Đó là điều phải chứng minh.

Như vậy là, bằng hai con đường khác nhau, lời giải một xuất phát từ việc khai thác giả thiết $a < a_0 < b$, lời giải hai lại xuất phát từ kết quả của bài toán, ta đã khéo sử dụng các « phép màu nhiệm » của tam thức bậc hai để chứng minh bất đẳng thức đã cho.

Với tam thức bậc hai, như ta đã biết, nếu sử dụng đặc lực đồ thị của nó, trong một số bài toán, lời giải có thể không phải là ngắn gọn nhất nhưng sẽ tốt nhất trong việc minh họa hình học các giả thiết hoặc kết quả của bài toán mà từ đó, lời giải của bài toán sẽ sáng sủa hơn. Xin giới thiệu tiếp với các bạn vài bài toán với yêu cầu đó.

Bài toán 2. Cho một tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

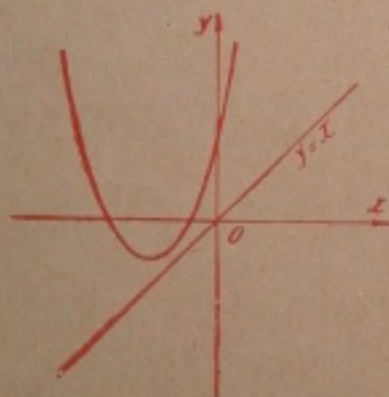
với giả thiết rằng, phương trình $f(x) = x$ không có nghiệm thực.

Hãy chứng minh rằng, phương trình

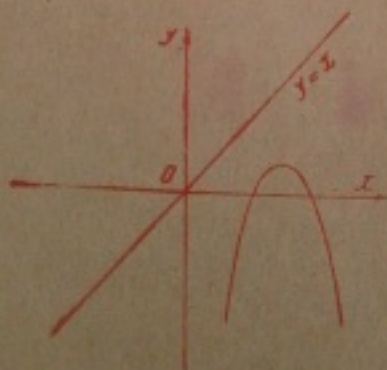
$$f[f(x)] = x$$

trong đó $f[f(x)]$ là hàm số hợp của x .

Lời giải. Ta hãy minh họa hình học giả thiết phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm bằng hình vẽ dưới đây:



Trường hợp $a > 0$



Trường hợp $a < 0$

Như vậy là:

Nếu $a > 0$ thì $f(x) > x$ với mọi x .

Nếu $a < 0$ thì $f(x) < x$ với mọi x .

Mặt khác, ta cũng có:

Nếu $a > 0$ thì $f(y) > y$ với mọi y .

Nếu $a < 0$ thì $f(y) < y$ với mọi y .

Thay $y = f(x)$ và phối hợp các kết quả ta có:

Nếu $a > 0$ thì $f[f(x)] > f(x) > x$ với mọi x .

Nếu $a < 0$ thì $f[f(x)] < f(x) < x$ với mọi x .

Kết quả cuối cùng chứng tỏ rằng:

Với mọi x thì $f[f(x)] \neq x$, (đpcm).

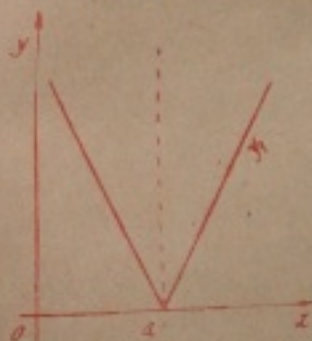
Bài toán 3. Giải bất phương trình

$$2|x-a| < -x^2 + 2ax - 2.$$

Đây là một bất phương trình mà về trái chứa dấu giá trị tuyệt đối, về phải là một tam thức bậc hai.

Có thể giải bất phương trình này bằng phương pháp khử dấu giá trị tuyệt đối ở về trái, để về việc giải hai bất phương trình bậc hai trên các trường hợp $x \geq a$ và $x < a$; hoặc có thể đặt $y = |x-a|$ và đưa về giải bất phương trình bậc hai đối với y .

Lời giải được trình bày dưới đây, đặc biệt chú ý khai thác khả năng minh họa bằng đồ thị.



Hình 1

Gọi $y_1 = 2|x-a| \geq 0$.

Đồ thị của y_1 , gồm hai nửa đường thẳng, xuất phát từ điểm $(a, 0)$ nằm phía trên Ox và đối xứng qua đường thẳng $x=a$ (hình 1).

Gọi $y_2 = -x^2 + 2ax - 2$.

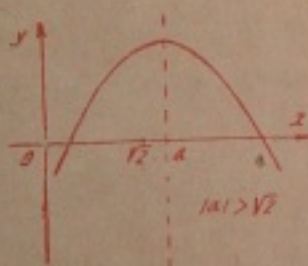
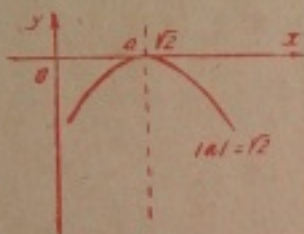
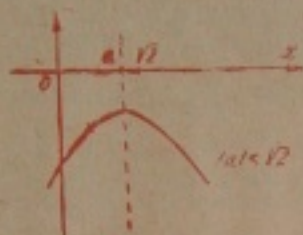
Đồ thị của y_2 là một parabol, quay về phía dưới; đỉnh của parabol xác định bởi

$$x_0 = a, y_0 = a^2 - 2.$$

Tùy theo giá trị của a mà:

$$a^2 < 2, a^2 = 2, a^2 > 2;$$

đồ thị của y_2 tương ứng sẽ nằm dưới Ox , tiếp xúc với Ox tại $x=a$ hoặc cắt Ox tại hai điểm đối xứng qua $x=a$.



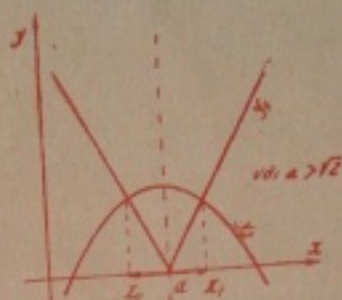
Hình 2

Cũng nhận thấy rằng, trục đối xứng của y_2 cũng là đường thẳng $x=a$ (hình vẽ 2a, 2b, 2c).

Từ đây, dễ dàng suy ra rằng, với mọi a mà $|a| > \sqrt{2}$ thì đồ thị của y_1 với y_2 mới cắt nhau;

chính trong trường hợp đó, bất phương trình đã cho mới có nghiệm.

Nghiệm của bất phương trình cho bởi đồ thị (xem hình vẽ 3) chính là khoảng (x_0, x_1) có tâm là a . Từ đó, ta có thể đi đến kết luận:



Hình 3

Với a mà $|a| < \sqrt{2}$ thì bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Với a mà $|a| > \sqrt{2}$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm.

- Nếu $a > \sqrt{2}$, nghiệm là khoảng (x_0, x_1) .

- Nếu $a < -\sqrt{2}$, nghiệm là khoảng (x_0', x_1') , trong đó x_1, x_1' là nghiệm của phương trình:

$$2x - 2a = -x^2 + 2ax - 2$$

$$\text{hay } x^2 - 2(x - a)x - 2(a - 1) = 0.$$

Do $x_1 > a > \sqrt{2}$, nên từ phương trình này ta có:

$$x_1 = a + (\sqrt{a^2 - 1} - 1).$$

Còn x_0 đối xứng với x_1 qua a , x_0 đối xứng với x_1 qua a , nên

$$x_0 = a - (\sqrt{a^2 - 1} - 1).$$

Tóm lại, với $a > \sqrt{2}$, nghiệm của bất phương trình là mọi x mà:

$$a - (\sqrt{a^2 - 1} - 1) < x < a + (\sqrt{a^2 - 1} - 1).$$

BẠN ĐỌC TÌM TÔI

TỪ MỘT BÀI BẢO

LÊ THỐNG NHẤT

ĐỌC xong bài « Nối tiếp các bất đẳng thức cổ điển » của bạn Lê Quốc Hán trong báo Toán học và tuổi trẻ số 95 tôi thấy có những tìm tòi khá công phu và bổ ích mà bạn Lê Quốc

Hán đã tìm ra. Tuy nhiên, tôi cũng cố gắng suy nghĩ nhìn lại những vấn đề đó và cũng tìm cho mình những điều thú vị mà ở bài báo này muốn trao đổi cùng các bạn.

Vấn đề 1. Bất đẳng thức thứ nhất của bạn Lê Quốc Hán nêu ra thực chất suy ngay từ bất đẳng thức Bunhiacôpski quen thuộc.
Thật vậy: Do $a_i > 0$ nên ta có thể đặt $A_i = m_i/\sqrt{a_i}$ và $B_i = \sqrt{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ (*)
Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n B_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right)^2 \quad (1)$$

Thay (*) vào (1) ta có

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2$$

hay

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{a_i} \geq \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 / \sum_{i=1}^n a_i$$

Bất đẳng thức này chính là bất đẳng thức thứ nhất của bạn Lê Quốc Hán nêu ra.

Vấn đề 2. Bất đẳng thức thứ hai của bạn Lê Quốc Hán nêu ra còn đúng cả với k là số thực thỏa mãn $k > 1$.

Với $k=1$ ta thấy bất đẳng thức thứ hai của bạn Lê Quốc Hán trở thành đẳng thức

Bây giờ ta xét với $k > 1$.

Ở đây tôi đưa ra hai cách chứng minh: cách thứ nhất chứng minh cho k là số hữu tỉ lớn hơn 1 (phép chứng minh khá thú vị, nên mặc dù chỉ trong phạm vi k là số hữu tỉ lớn hơn 1 thôi chứ chưa phải là số thực tôi vẫn muốn giới thiệu với các bạn); cách thứ hai chứng minh cho k là số thực lớn hơn 1, nhờ sử dụng một công cụ khá hay mà tôi nghĩ rằng đưa ra cũng bổ ích.

Cách chứng minh thứ nhất.

Bổ đề 1: Nếu $1+a > 0$ và k là số hữu tỉ lớn hơn 1 thì:

$$(1+a)^k \geq 1+k \cdot a \quad (2)$$

Chứng minh bổ đề: Giả sử $k=m/n > 1$ với m, n là các số nguyên dương.

Nếu $1+k \cdot a = 1 + \frac{m}{n} \cdot a \leq 0$ thì (2) luôn đúng.

Vậy ta hãy xét với $1 + \frac{m}{n} \cdot a > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho m số không âm với n số hạng là $1 + \frac{m}{n} \cdot a$

và $m-n$ số hạng là 1 (do $k > 1 \Leftrightarrow m > n$).
Ta có

$$\frac{n \cdot \left(1 + \frac{m}{n} \cdot a \right) + (m-n) \cdot 1}{m} \geq \sqrt[m]{\left(1 + \frac{m}{n} \cdot a \right)^n \cdot 1^{m-n}} = \left(1 + \frac{m}{n} \cdot a \right)^{\frac{n}{m}}$$

$$1+a > \left(1 + \frac{m}{n} \cdot a \right)^{\frac{n}{m}},$$

hay

$$(1+a)^{\frac{m}{n}} \geq 1 + \frac{m}{n} \cdot a$$

$$\Leftrightarrow (1+a)^k \geq 1+k \cdot a \text{ (đpcm).}$$

(Bổ đề này còn đúng với cả k là số thực lớn hơn 1).

Chứng minh bất đẳng thức thứ hai của bạn Lê Quốc Hán: Cho k là số hữu tỉ lớn hơn 1.

Ta viết bất đẳng thức thứ hai của bạn dưới dạng sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i^k \cdot a_i^{1-k}}{M^k \cdot A^{1-k}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i^k \cdot a_i^{1-k}}{M^k \cdot A^{1-k}} > 1$$

$$\left(\text{với } M = \sum_{i=1}^n m_i, A = \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

Và khác đi chút nữa:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i A}{M a_i} \right)^k \cdot \frac{a_i}{A} > 1$$

Bổ đề sử dụng bổ đề 1, chứng minh (3) ta có:

$$\frac{m_i A}{M a_i} = 1 + \frac{m_i A - M a_i}{M a_i} > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Áp dụng bổ đề 1 với k là số hữu tỉ lớn hơn 1, ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_i A}{M a_i} \right)^k &= \left(1 + \frac{m_i A - M a_i}{M a_i} \right)^k > \\ &> 1 + k \left(\frac{m_i A - M a_i}{M a_i} \right) \left(\frac{m_i A}{M a_i} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{a_i}{A} > \\ &\frac{a_i}{A} \left[1 + k \left(\frac{m_i A - M a_i}{M a_i} \right) \right] \end{aligned}$$

với $i = 1, 2, \dots, n$.

Do đó

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i A}{M a_i} \right)^k \frac{a_i}{A} > \\ &> \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \left[a_i + k \left(\frac{m_i A - M a_i}{M} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{k}{A} \sum_{i=1}^n \frac{m_i A - M a_i}{M} = \\ &= 1 + \frac{k}{A} \sum_{i=1}^n \frac{A m_i}{M} - \frac{k}{A} \sum_{i=1}^n \frac{M a_i}{M} = \\ &= 1 + k \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i - k \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n a_i = \\ &= 1 + k \frac{M}{M} - k \frac{A}{A} = 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Cách chứng minh thứ hai.

Ta sử dụng tính chất hàm số lồi để chứng minh.

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là lồi trên đoạn từ $x = a$ đến $x = b$ nếu trong khoảng đó mọi cung MN của đồ thị hàm số đều nằm trên dây cung MN.

Thí dụ: Hàm số $y = \log x$ với $x \in (0, +\infty)$.

Hàm số $y = -x^m$ với $m > 1$

và $x \in (0, +\infty)$

Định lý: Giả sử $y = f(x)$ là hàm số lồi trong khoảng (a, b) còn $x_1, x_2, \dots, x_n$ (không bằng nhau tất cả) là n giá trị nào đó của đối số chọn trong khoảng đang xét; $p_1, p_2, \dots, p_n$ là n số dương có tổng bằng 1; thì

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n) \leq f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n).$$

Bất đẳng thức này gọi là bất đẳng thức Jen-xen tổng quát. Xin dành phép chứng minh cho các bạn.

Áp dụng bất đẳng thức Jen-xen cho hàm số (5) lồi $y = -x^k$ ($k > 1$) trong khoảng $(0, +\infty)$ ta có:

$$-p_1 x_1^k - p_2 x_2^k - \dots - p_n x_n^k$$

$$< -(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)^k$$

$$p_1 x_1^k + p_2 x_2^k + \dots + p_n x_n^k$$

$$> (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)^k \quad (4)$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Áp dụng (4) để chứng minh bất đẳng thức thứ hai của bạn Lê Quốc Hàn nêu ra cho k là số thực lớn hơn 1:

$$\text{Đặt } p_i = a_i / \sum_{i=1}^n a_i; \quad x_i = m_i / a_i,$$

$$\text{thì } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ và } x_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ta có (với x không bằng nhau tất cả):

$$\frac{a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{m_1^k}{a_1^k} + \frac{a_2}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{m_2^k}{a_2^k} + \dots$$

$$+ \frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{m_n^k}{a_n^k} > \left(\frac{a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{m_1}{a_1} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{m_n}{a_n} \right)^k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \frac{m_i^k}{a_i^{k-1}}}{\sum_{i=1}^n a_i} > \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \right)^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{m_i^k}{a_i^{k-1}} > \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^k / \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{k-1} \quad (\text{đpcm})$$

Vấn đề 3. Với k là số hữu tỉ thuộc $(0, 1)$ thì bất đẳng thức thứ hai của bạn Lê Quốc Hàn nêu ra sẽ có chiều ngược lại. Tức là:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i^k}{a_i^{k-1}} \leq \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^k / \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{k-1}$$

Viết ở dạng khác:

$$\sum_{i=1}^n m_i^k \cdot a_i^{1-k} \leq \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^k \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{1-k} \quad (5)$$

Trước hết các bạn thấy với $k = 1/2$ thì (5) chính là bất đẳng thức Bunhiacópski quen thuộc.

Bây giờ ta chứng minh (5), cho k là số hữu tỉ thuộc $(0, 1)$. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 2: Với k là số hữu tỉ thuộc $(0, 1)$; thì với mọi $a > 0; b > 0$ ta có

$$a^k \cdot b^{1-k} \leq ka + (1-k)b \quad (6)$$

Chứng minh bổ đề: Giả sử $0 < k = m/n < 1$, với m, n là các số nguyên dương.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số, trong đó m số hạng bằng a và $n-m$ số hạng bằng b (vì $k < 1 \Leftrightarrow n > m$) ta có:

$$\sqrt[n]{a^m \cdot b^{n-m}} \leq [m \cdot a + (n-m)b]/n,$$

hay

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{n-m}{n}} \leq \frac{m}{n} a + \frac{(n-m)}{n} b$$

$$\Leftrightarrow a^k \cdot b^{1-k} \leq ka + (1-k)b \quad (\text{đpcm})$$

Áp dụng chứng minh (5):

$$\text{Đặt } A = \sum_{i=1}^n a_i, M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

Viết (5) về dạng

$$\sum_{i=1}^n m_i^k \cdot a_i^{1-k} / M^k \cdot A^{1-k} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (m_i/M)^k (a_i/A)^{1-k} \leq 1 \quad (5')$$

Theo bổ đề 2, ta có:

$$\left(\frac{m_i}{M} \right)^k \left(\frac{a_i}{A} \right)^{1-k} \leq k \frac{m_i}{M} + (1-k) \frac{a_i}{A}$$

với $i = 1, 2, \dots, n$

Do đó:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{M} \right)^k \left(\frac{a_i}{A} \right)^{1-k} \leq k \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} +$$

$$+ (1-k) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} = k + (1-k) = 1 \quad (\text{đpcm}).$$

iviet

HỘI

Vấn đề 4. Bất đẳng thức (5) có thể mở rộng như sau:
Giả sử

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$
 $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$
 $a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$
là m dãy số dương và $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ là m số hữu tỉ dương thỏa mãn

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ij} \leq \prod_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \right] \quad (7)$$

(Kí hiệu: $\prod_{i=1}^m x_i$ hiểu là $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m$).

Để chứng minh (7) ta dùng bổ đề sau (là tổng quát của bổ đề 2).

Bổ đề 3: Với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là các số hữu tỉ dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$; A_1 là các số dương với $i = 1, 2, \dots, m$; thì

$$\prod_{i=1}^m A_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \quad (8)$$

Chứng minh bổ đề 3:

Giả sử $\alpha_i = t_i/T$ với t_i, T là các số nguyên dương.

Do $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ nên $\sum_{i=1}^m t_i = T$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho T số, trong đó

t_1 số hạng là A_1 ,

t_2 số hạng là A_2 ,

...

t_m số hạng là A_m .

ta có:

$$\sqrt[t_1]{A_1^{t_1}} \sqrt[t_2]{A_2^{t_2}} \dots \sqrt[t_m]{A_m^{t_m}} \leq \frac{t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_m A_m}{T}$$

$$\text{hay} \quad A_1^{t_1/T} \cdot A_2^{t_2/T} \dots A_m^{t_m/T} \leq \frac{t_1}{T} A_1 + \frac{t_2}{T} A_2 + \dots + \frac{t_m}{T} A_m$$

$$\Leftrightarrow A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m \quad (\text{đpcm})$$

Đặt $\sum_{j=1}^n a_{ij} = B_i$, ta viết (7) và được

$$\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \left(\frac{a_{ij}}{B_i} \right)^{\alpha_i} \leq 1. \quad (9)$$

Áp dụng (8) nếu đặt $a_{ij}/B_i = A_i$ ta có

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m \left(\frac{a_{ij}}{B_i} \right)^{\alpha_i} &= \prod_{i=1}^m A_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{a_{ij}}{B_i} \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \left(\frac{a_{ij}}{B_i} \right)^{\alpha_i} &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{a_{ij}}{B_i} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \frac{a_{ij}}{B_i} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\alpha_i}{B_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\alpha_i}{B_i} \cdot B_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Chú ý
Trụ sở

NÓI

Các bạn chú ý là các bất đẳng thức (5) và (7) cũng còn đúng với số mũ là số thực, ở bài báo này tôi chỉ tạm dừng ở số mũ hữu tỉ, các bạn hãy suy nghĩ chứng minh cho số mũ là số thực.

Vấn đề 5. Bất đẳng thức thứ hai của bài Lê Quốc Hán nêu ra có thể mở rộng theo cơ sở như từ bất đẳng thức (5) tôi bắt đầu thức (7) hay không? Nghĩa là với những số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ như thế nào thì bất đẳng thức (5) sẽ đổi chiều.

Cho đến nay tôi vẫn chưa suy nghĩ trọn vẹn được vấn đề 5; rất mong các bạn tiếp sức và chắc chắn là chúng ta sẽ tìm được câu trả lời thú vị.

Qua bài báo này tôi muốn rút ra một điều mà trong công việc làm toán chúng ta thường gặp: Nhiều vấn đề chúng ta tìm ra lại xuất phát từ những vấn đề mà ngỡ như đã dùng lại rồi tuy nhiên những kết quả đó có thể có người đã tìm ra mà mình chỉ là người khám phá lại, đó sao cũng là một sự rèn luyện tốt mà mong các bạn nên làm.

báo
5 n
phá
qua
ta p
hy
nhữ
Nếu
là
đượ
thá
T
đi
của
phá
quá
phá