

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 3



NHÀ XUẤT GIÁO DỤC - 2009

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Lời nói đầu	3
Những kí hiệu trong sách	4

CHƯƠNG 1 **KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ**

Phần một **TOÁN VỀ TẬP HỢP SỐ NGUYÊN, SỐ HỮU TỈ**

<i>Bùi Quang Trường</i>	Có thể làm toán sinh động hơn được không ?	5
<i>Bùi Quang Trường</i>	Cộng và trừ thêm một con số thích hợp.....	7
<i>Nguyễn Ngọc Hương</i>	Tổng các chữ số của một số tự nhiên.....	9
<i>Lê Quang Trung</i>	Xây dựng công thức tính tổng các số tự nhiên bằng đa thức	11
<i>Nguyễn Hữu Bằng</i>	Về bài toán so sánh phân số	12
<i>Trần Xuân Đáng</i>	Định lí Trung Hoa về số dư.....	14
<i>Ngô Hàn</i>	Phương pháp cực hạn.....	16
<i>Lê Hào</i>	Suy nghĩ từ lời giải một bài toán thi vô địch quốc tế.....	18
<i>Bùi Quang Trường</i>	Phương trình cân đồng dạng bậc hai	20
<i>Nguyễn Ngọc Bình Phương</i>	Một số bài toán về số hữu tỉ và số vô tỉ	22
<i>Lê Quang Trung</i>	Tính biểu thức hữu tỉ bằng cách xét dạng đa thức bằng nhau tại nhiều giá trị	24
<i>Trịnh Khôi</i>	Tập duyệt khai thác các đẳng thức đã biết	26

Phần hai **TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT**

<i>Lê Hải Khôi</i>	Về mối quan hệ giữa hai bất đẳng thức Cauchy và Bernoulli.....	28
<i>Vũ Đức</i>	Từ các tính chất cơ bản của bất đẳng thức.....	29
<i>Ngô Văn Thái</i>	Một phương pháp đánh giá tổng các phân thức	31
<i>Tôn Nữ Bích Vân</i>	Vận dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $ vào giải toán.....	33

Vũ Đức	Một số bài toán về giá trị tuyệt đối.....	35
Nguyễn Đức	Chứng minh bất đẳng thức dạng $ A \leq \alpha$	38
Trịnh Vinh Ngọc	Đôi điều về một phương pháp giải phương trình ở cấp trung học cơ sở .	39
Phan Ngọc Thảo	Bài toán cực trị của biểu thức chứa dấu căn	41
Vũ Đức	Suy luận hợp lí trong lời giải có vẻ thiếu tự nhiên.....	44
Huỳnh Văn Trọng	Một số chú ý khi giải toán tìm cực trị đại số	46
Nguyễn Văn Hiến	Một số sai lầm khi giải toán cực trị	48
Lê Văn Tiến	Một số lưu ý khi giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.....	51
Hoàng Hải Dương	Giải toán bất đẳng thức và cực trị dựa vào phương trình bậc hai.....	53
Nguyễn Ngọc Khoa	Tìm cực trị một biểu thức bằng nhiều cách	56
Phạm Thị Việt Thái	Sử dụng phương pháp tham biến để tìm cực trị một biểu thức	58
Nguyễn Ngọc Khoa	Giải toán cực trị đại số với các biến có điều kiện	60

Phần ba

RÈN LUYỆN TƯ DUY QUA TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG

Lê Trường Tùng	Về định lí Steiner - Lehmus.....	62
Ngô Văn Thái	Trở lại định lí Steiner - Lehmus.....	64
Lê Ngọc Thành Vinh	Sửa sai thành... chưa đúng	65
Võ Kim Huệ	Định lí bốn điểm và cách chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau	66
Vũ Hữu Bình	Khi đặc biệt hoá bài toán.....	69
Nguyễn Minh Thông	Hãy giải một bài toán theo những cách nhìn khác nhau.....	70
Đàm Hiếu Chiến	Khai thác một bài toán	72
Nguyễn Ngọc Nam	Từ kết quả của một bài toán	74
Lê Quốc Hán	Từ một bài toán hình học lớp 9.....	76
Tạ Toàn, Đỗ Tiến Hải	Từ bất đẳng thức đại số đến bài toán cực trị hình học	78
Nguyễn Văn Vĩnh	Nhận xét lời giải bài toán như thế nào ?	81
Ngô Thế Phiệt	Phương pháp diện tích	83
Đặng Văn Biểu	Giải được bài toán chưa hẳn là kết thúc.....	86
Nguyễn Đức Tấn	Thay đổi điều kiện thứ yếu trong bài toán hình học	88
Nguyễn Đức Trường	Ứng dụng của một hệ thức về tỉ số diện tích.....	90
Hoàng Ngọc Cảnh	Rèn luyện năng lực tư duy thông qua việc khai thác các bài toán	92
Nguyễn Đức Tấn	Về một bài toán cực trị hình học	95
Lê Duy Ninh	Phát triển từ một bài toán hình học.....	96

CHƯƠNG II NHÌN BÀI TOÁN TỪ NHIỀU HƯỚNG

Phần một

VẤN ĐỀ NGHIỆM VÀ NGHIỆM KÉP CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Trần Tử Quảng	Về lời giải của một bài toán cơ bản.....	99
Nguyễn Phú Chiến	Quỹ tích đại số	101
Phạm Bảo	Bậc của tham số và hình bao của họ đường thẳng $y = f(x, m)$	104
Trần Phương	Họ đường cong tiếp xúc với một đường cố định.....	108
Dương Quốc Việt	Nhìn lại khái niệm nghiệm kép của phương trình và vấn đề đường cong tiếp xúc với trục hoành	113
Phạm Ngọc Bội	Một số vấn đề về nghiệm bội của phương trình.....	115
Nguyễn Văn Quý	Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép.....	118
Lê Thống Nhất	Lại bàn về chuyện tiếp xúc của hai đồ thị	120
Nguyễn Anh Dũng	Về bài toán phương trình tiếp tuyến	122
Đặng Hùng Thắng	Về cơ sở của phương pháp nghiệm kép	123
Nguyễn Việt Hải	Bàn về sự tiếp xúc của hai đồ thị	125

Phần hai

MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG CÔNIC

Phan Nam Hùng	Một số dạng khác của bài toán con bướm	128
Lê Hào	Một số hệ thức liên hệ giữa đường thẳng và đường tròn.....	130
Lê Hào	Mở rộng bài toán con bướm cho các đường conic.....	133
Bùi Văn Viện	Họ tiếp tuyến với đường tròn.....	136
Lê Hữu Dũng	Giai điệu parabol	137
Phạm Quốc Phong	Viết phương trình parabol bằng phương pháp chùm	138
Cao Trung Chinh	Đi tìm một lời giải đẹp	142
Trần Văn Minh	Khoảng cách từ một conic đến một loại đường thẳng	143
Nguyễn Đạo Phương	Phương tích của một điểm đối với một đường conic	145
Nguyễn Đạo Phương	Đường conic đẳng phương của hai đường conic.....	149
Nguyễn Thúc Hào	Phương trình tiếp dạng của đường conic	151

Phần ba

TỪ HÌNH PHẪNG ĐẾN HÌNH KHÔNG GIAN

Hồ Công Dũng	Giải toán cực trị hình học dưới cách nhìn đại số	154
Nguyễn Minh Hà	Điểm Torricelli của tứ diện	155
Trịnh Bằng Giang	Thử mở rộng một bài toán	158

<i>Võ Giang Giai</i>	Một vài kết quả đẹp của hình học chứng minh bằng phương pháp diện tích, thể tích	160
<i>Hồ Công Dũng</i>	Nhìn từ định lí Menelaus	163
<i>Trịnh Bằng Giang</i>	Đi tìm một dạng định lí sin cho tứ diện	165
<i>Nguyễn Anh Dũng</i>	Tứ diện gần đều	167
<i>Hồ Quang Vinh</i>	Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng chứa các cạnh của khối tứ diện	170
<i>Lưu Hùng</i>	Vài ứng dụng của định lí con nhím	173
<i>Phạm Đăng Long</i>	Phát triển một bài toán	176

CHƯƠNG III

100 ĐỀ TOÁN HAY

	<i>Phần một</i>	<i>Phần hai</i>
	ĐỀ BÀI	LỜI GIẢI
Số học	181	191
Đại số	182	197
Giải tích	185	211
Hình học phẳng	186	216
Hình học không gian	188	232

Tuyển chọn theo chuyên đề
TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
QUYỂN 3

★ KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN THCS

★ NHÌN BÀI TOÁN TỪ NHIỀU HƯỚNG

★ 100 ĐỀ TOÁN HAY

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

Phân một TOÁN VỀ TẬP HỢP SỐ NGUYÊN, SỐ HỮU TỈ

CÓ THỂ LÀM TOÁN SINH ĐỘNG HƠN ĐƯỢC KHÔNG ? (Về cách giải phương trình nghiệm nguyên $ax + by = c$)

BÙI QUANG TRƯỜNG (Hà Nội)

Các sách tham khảo về toán đã giới thiệu hàng loạt mẹo mực để tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định hai ẩn dạng $ax + by = c$ với a, b, c là các số nguyên. Đây là một bài toán đơn giản và ta sẽ phải lặp đi lặp lại cùng một kiểu lí luận để $t, t_1, t_2, \dots$ nguyên. Công việc đó thật đơn điệu và rất nhiều bạn ngại khi phải tìm tới $t_3, t_4, t_5, \dots$

Chẳng hạn, một lời giải mẫu trong sách giáo khoa những năm 80 về cách tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$23x + 53y = 109 \quad (1)$$

như sau :

Từ (1) ta có

$$x = \frac{109 - 53y}{23} = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}.$$

Muốn x nguyên phải có $t = \frac{17 - 7y}{23}$ là số nguyên, hay

$$23t + 7y = 17 \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) có } y = \frac{17 - 23t}{7} = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7}.$$

$$\text{Muốn } y \text{ nguyên phải có } \frac{3 - 2t}{7} = t_1 \text{ nguyên}$$

$$\text{hay } 7t_1 + 2t = 3 \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) có } t = \frac{3 - 7t_1}{2} = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2}.$$

$$t \text{ và } t_1 \text{ nguyên nên phải có } \frac{1 - t_1}{2} = t_2 \text{ nguyên}$$

$$\text{hay } 2t_2 + t_1 = 1. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (4) có } t_1 &= 1 - 2t_2 \text{ và } t = 1 - 3t_1 + t_2 = \\ &= 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2 \text{ hay } t = -2 + 7t_2. \text{ Khi đó ta} \\ &\text{được } y = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2) \\ &= 9 - 23t_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } x &= 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t_2) - 2 + 7t_2 \\ &= -16 + 53t_2. \end{aligned}$$

Phương pháp giải đã dẫn chúng ta tới đích, nhưng việc làm thật tế nhị. Nếu nghĩ rằng mọi điều trong sách vở là đã tuyệt vời, kín kẽ rồi thì chúng ta sẽ thụ động không phát huy được khả năng suy nghĩ sáng tạo.

Chúng ta hãy thử tìm một con đường khác.
Xét bài toán : *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $12x - 67y = 43$ (5)

Từ (5) có

$$x = 3 - 5y + \frac{7-7y}{12} = 3 - 5y + \frac{7(1-y)}{12}.$$

Vì 7 và 12 nguyên tố cùng nhau nên để x nguyên thì $\frac{1-y}{12} = t$ phải nguyên. Từ đó suy ra $y = 1 - 12t$ và $x = 67t - 2$.

Phải chăng phương pháp giải ở đây chỉ thuận lợi cho việc giải phương trình (5) mà thôi ? Để trả lời chúng ta hãy thử giải phương trình (1) theo kiểu đã giải phương trình (5).

Từ (1) ta có $x = 4 - 2y + \frac{17-7y}{23}$. Giả như 17 và 7 có ước số chung, hay đẹp hơn nữa: 17 chia hết cho 7 (!). Cố tạo ra con số chia hết cho 7, chúng ta cộng và trừ thêm 4 thì được $x = 4 - 2y + \frac{7(3-y)-4}{23}$. Con số 4 mới xuất hiện đã gây thêm phiền phức. Nếu nó chia hết cho 23 thì tốt quá (!). Bằng một linh cảm trực giác chúng ta chọn con số khác : 46.

$$\begin{aligned} \text{Ta viết } x &= 4 - 2y + \frac{17-7y}{23} \\ &= 4 - 2y + \frac{17-7y+46-46}{23} \\ &= 4 - 2y + \frac{7(9-y)}{23}. \end{aligned}$$

Tuyệt ! Như vậy phải có $\frac{9-y}{23} = t$ nguyên suy ra $y = 9 - 23t$ và

$$x = 2 - 18 + 46t + 7t = 53t - 16.$$

Nói một cách khái quát, để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ với các số nguyên a, b, c (6) chúng ta có thể làm như sau :

Chọn A là bội nguyên của a sao cho $c + A$ chia hết cho b , tức là $A = ma$ và $c + A = kb$ với m, k là các số nguyên. Lúc đó

$$\begin{aligned} x &= \frac{c + A - by - A}{a} = \frac{kb - by}{a} - m \\ &= \frac{b(k-y)}{a} - m. \end{aligned}$$

Giả ước $\frac{b}{a}$ để đưa về dạng tối giản $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$

với $(a', b') = 1$. Muốn x nguyên phải có $\frac{k-y}{a'} = t$ nguyên. Từ đó suy ra $y = k - a't, x = b't - m$.

Như thế để tìm toàn bộ các nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ (6) chúng ta chỉ cần tìm một cặp nghiệm nguyên $(x_0, y_0) = (-m, k)$.

Thí dụ. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$-12x + 3\frac{2}{9}y = 39\frac{2}{9} \quad (7)$$

Lời giải. $\frac{3+2}{9} = \frac{29}{9}$

Do đó (7) $\Leftrightarrow -12x + \frac{29y}{9} = \frac{353}{9}$

hay $-108x + 29y = 353$.

Từ đó

$$\begin{aligned} y &= \frac{353 + 108x}{29} = 12 + 3x + \frac{5 + 21x}{29} = \\ 12 + 3x + \frac{5 + 21x + 58 - 58}{29} &\quad (\text{vì nhận thấy trong} \\ \text{các bội số nguyên của 29 thì 58, khi cộng 5 sẽ} \\ \text{chia hết cho 21}). \end{aligned}$$

Muốn y nguyên thì $\frac{3+x}{29} = t$ phải là số nguyên. Vậy $x = 29t - 3$ và

$$y = 10 - 9 + 87t + 21t = 1 + 108t.$$

Vào một lúc xuất thần, sự luôn luôn nghĩ đến những cái mới có thể khiến bạn tách vế phải c của phương trình $ax + by = c$ (6) thành hai

phần : một phần chia hết cho a , phần còn lại chia hết cho b , nghĩa là $c = ax_0 + by_0$ (8) với x_0, y_0 là các số nguyên.

$$\begin{aligned} \text{Thế thì (6)} &\Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \\ &\Leftrightarrow x = x_0 + \frac{b(y_0 - y)}{a} = x_0 + \frac{b'(y_0 - y)}{a'} \end{aligned}$$

Do $(a', b') = 1$ nên $\frac{y_0 - y}{a'} = t$ là một số nguyên.

$$\text{Vậy } x = x_0 + b't, \quad y = y_0 - a't.$$

Bản chất của phương pháp tách c thành hai phần nêu trên là gì ?

Đó là khi biết một cặp nghiệm nguyên (x_0, y_0) của phương trình vô định (6) thì có ngay công thức nghiệm của (6). Đẳng thức (8) đã khẳng định (x_0, y_0) là một cặp nghiệm nguyên của (6).

Qua câu chuyện về cách tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định này, tôi không muốn dừng ở mục tiêu giới thiệu với bạn đọc một phương pháp giải khác với sách giáo khoa mà còn muốn nói rằng : đừng vội thoả mãn và yên lòng với những kết quả đã nêu trong sách vở mà phải luôn luôn nghĩ đến những cái mới tốt đẹp hơn, trong sáng hơn và hãy dũng cảm, kiên trì tiếp cận chúng.

Ngoài các cách giải trên còn có cách giải của nhà toán học Ấn Độ Bokhatcara đầu thế kỉ XII, các bạn có thể tự tìm các cách giải khác, hoặc xem trong các cuốn sách sau :

– *Số và khoa học về số* ; G. N. Becman ; NXB Giáo dục, Hà Nội, 1962.

– *Tìm lời giải các phương trình vô định* ; Bùi Quang Trường ; NXB Giáo dục, Hà Nội 1995.

CỘNG VÀ TRỪ THÊM MỘT CON SỐ THÍCH HỢP

BÙI QUANG TRƯỜNG (Hà Nội)

Trong bài *Có thể làm toán sinh động hơn được không ?* THPT số 154 tháng 2.1987 tác giả đã giải phương trình vô định $ax + by = c$ bằng cách cộng và trừ thêm một con số thích hợp. Cách giải đó không dùng tới quá nhiều bước biến đổi như sách giáo khoa. Nghiệm nguyên (x, y) của phương trình trên được tìm ra sau một vài thử nghiệm và biến đổi.

Trong bài *Phương trình vô định $ax + by = c + dxy$* (*) (Tuyển tập 30 năm, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ NXB Giáo dục, 2004 trang 58 – 59) tác giả vẫn dùng cách cộng, trừ thêm một con số thích hợp để tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định $ax + by = c + xy$ và dường như lúng túng trước phương trình

$$ax + by = c + dxy \quad (1)$$

Con đường suy luận hợp logic không thẳng tọt được nữa, nó có vẻ đã phải lượn cong đi ? Không ! Nó thực sự vẫn thẳng. Nó dường như chùn lại, gây hẫng trong lòng bạn và kích thích bạn muốn tiếp tục đi trên con đường thẳng bằng : *Cứ cộng, trừ thêm một con số thích hợp thì đã sao !*

Các bạn có nghĩ như vậy không ? những bạn trẻ yêu toán và ham muốn cống hiến cho các bài toán những lời giải đẹp và trong sáng.

Có thể và lúc nào đó, bạn nhìn phương trình (1) trên trang giấy trắng trước mặt và bạn viết :

$$(1) \Leftrightarrow ax = c + dxy - by = c + y(dx - b) \quad (2)$$

Trường hợp $dx - b = 0$ cho x nguyên, tức là $b : d$ thì ta chỉ việc thay $x = \frac{b}{d}$ (nguyên) vào

(2) được $ax = c$. Nếu $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{b}{d} = \frac{c}{a}$, khi đó y là số nguyên bất kì ; còn nếu $\frac{c}{a} \neq \frac{b}{d}$ thì trường hợp $dx - b = 0$ không thể xảy ra.

Trong trường hợp $dx - b \neq 0$ (tức b không chia hết cho d), ta viết

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{ax - c}{dx - b} \quad (3)$$

Nếu $a : d$ tức là $a = d.m$ (m nguyên) thì cộng và trừ thêm mb vào tử số được

$$y = \frac{dmx - mb + mb - c}{dx - b} = m + \frac{mb - c}{dx - b}$$

Để y nguyên phải có $\frac{mb - c}{dx - b} = t$ là số nguyên, hay

$$dxt - bt = mb - c \Leftrightarrow x = \frac{b \frac{mb - c}{d}}{t} \quad (4)$$

với t là ước số nguyên của $mb - c = \frac{ab}{d} - c$.

Tất nhiên chỉ những giá trị x cho bởi (4) là nghiệm nguyên mới thoả mãn bài toán, lúc đó $y = m + t$. Nhưng nếu a không chia hết cho d thì sao ? Ở (*) ta đã biết một cách giải : Điều kiện cần để $y = \frac{ax - c}{dx - b}$ (3) nguyên là $ax - c = 0$ hoặc $|ax - c| \geq |dx - b|$. Bình phương hai vế suy ra $x_1 \leq x \leq x_2$. Nhưng bây giờ chúng ta muốn giải (3) bằng cách cộng, trừ thêm một con số thích hợp vào tử số. Và sớm hay muộn bạn sẽ nảy ra một ý định : nhân hai vế của (3) với d được (3) $\Leftrightarrow dy = \frac{dax - cd}{dx - b}$.

Con số thích hợp để cộng, trừ thêm vào tử số rõ ràng là ab . Vậy :

$$dy = \frac{dax - ab + ab - cd}{dx - b} = a + \frac{ab - cd}{dx - b}.$$

Điều kiện cần để y nguyên là $M = \frac{ab - cd}{dx - b}$ là một số nguyên. Lúc đó $y = \frac{a + M}{d}$;

$$x = \frac{\frac{ab - cd}{M} - b}{d} \quad \text{với } M \text{ là ước số nguyên của } ab - cd \text{ sao cho } x, y \text{ nguyên.}$$

Chúng ta gọi đó là *Cách 2* để giải (1) nhằm phân biệt với *Cách 1* đã đưa ra trong (*).

Lấy hai thí dụ ở (*) nhưng giải bằng cách 2.

Thí dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x - 3y = -5x + 39$. (5)

Lời giải.

$$(5) \Leftrightarrow 2x = y(3 - 5x) + 39 \quad (6)$$

Vì x nguyên nên $3 - 5x \neq 0$, do đó

$$(6) \Leftrightarrow y = \frac{2x - 39}{3 - 5x}. \text{ Nhân hai vế với 5 được}$$

$$5y = \frac{10x - 195}{3 - 5x}.$$

Cộng, trừ thêm 6 vào tử số được

$$5y = \frac{10x - 6 + 6 - 195}{-5x + 3} = -2 - \frac{189}{-5x + 3}.$$

Điều kiện cần để y nguyên là $-5x + 3$ là ước số nguyên của $189 = 3.3.3.7$. Tức là $-5x + 3 = \pm k$ với $k = 1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 189$. Từ đó x chỉ có các giá trị nguyên $x = -12, 0, 2, 6$. Tương ứng là $y = -1, -13, -5, 1$.

Thí dụ 2. Tìm các số nguyên $(x ; y)$ thoả mãn đẳng thức $5x - 3y = 2xy - 11$ (7)

Lời giải. (7) $\Leftrightarrow 5x = y(2x + 3) - 11$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5x + 11}{2x + 3}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \frac{10x + 22}{2x + 3} = 5 + \frac{7}{2x + 3}$$

Điều kiện cần để y nguyên là $2x + 3 = \pm 1, \pm 7$ là các ước số của 7. Vậy có $x = 2, -5, -1, -2$ và tương ứng $y = 3, 2, 6, -1$.

Tóm lại, cộng và trừ thêm một con số thích hợp là phương pháp tìm được nghiệm nguyên của phương trình vô định (1). Nhưng đây có phải là phương pháp hay nhất không ? Phương pháp đó có thể giải quyết được phương trình tổng quát hơn (1) hay không ?

Chúng ta sẽ còn gặp nhau bàn về những phương trình vô định. Phải không các bạn ?

TỔNG CÁC CHỮ SỐ CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

NGUYỄN NGỌC HƯỜNG (Tiền Giang)

Với mỗi số tự nhiên n , ta gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n viết trong hệ thập phân.

I. Một số tính chất của hàm $S(n)$

(các bạn hãy tự chứng minh)

$$1) 0 \leq S(n) \leq n, S(n) = n \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 9.$$

$$2) n \equiv S(n) \pmod{9}$$

$$3) \text{ Nếu } n \leq \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$$

với $a_i, k \in \mathbb{N}; 0 \leq a_i \leq 9; a_k \geq 1; k \geq 1; i = 0, 1, \dots, k$ thì

$$a) S(n) \leq a_k + 9k \quad \text{nếu } a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = a_1 = a_0 = 9.$$

$$b) S(n) \leq (a_k - 1) + 9k \quad \text{nếu có ít nhất một trong } k \text{ chữ số } a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0 \text{ khác } 9.$$

$$4) \text{ Nếu } S(n) \geq r + 9t \text{ với } r, t \in \mathbb{N}; 0 \leq r \leq 9, t \geq 1 \text{ thì } n \geq \overline{r99\dots 9} \text{ (sau } r \text{ có } t \text{ chữ số } 9).$$

$$5) S(n+m) \leq S(n) + S(m) \text{ với mọi } n, m \in \mathbb{N}$$

$$6) S(nm) \leq S(n).S(m) \text{ với mọi } n, m \in \mathbb{N}.$$

Ta có thể sử dụng các tính chất trên để giải các bài toán về các số viết trong hệ thập phân.

II. Các bài toán

Bài 1. Tìm số tự nhiên n biết tổng các chữ số của n bằng $n^2 - 1999n + 28$.

Lời giải. Nếu $1 \leq n \leq 1998$ thì ta có

$$S(n) = n^2 - 1999n + 28 < n^2 - 1999n + 1998 = (n-1)(n-1998) \leq 0 \text{ (loại)}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } n = 1999 \text{ thì } S(n) = S(1999) = 28 = n^2 - 1999n + 28 \text{ (đúng)}.$$

$\bullet$ Nếu $n > 1999$ thì ta có

$$S(n) = n^2 - 1999n + 28 > n(n-1999) > n \text{ (loại)}.$$

Vậy $n = 1999$.

Bài 2. Biết tổng các chữ số của một số tự nhiên bằng tổng các chữ số của tích số đó với 1998, chứng minh rằng số đó chia hết cho 9.

Lời giải. Gọi số tự nhiên đã cho là n . Ta có $n \equiv S(n) \pmod{9}$ và $1998n \equiv S(1998n) \pmod{9}$ mà theo giả thiết $S(n) \equiv S(1998n)$ nên $1998n - n \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 1997n : 9 \Rightarrow n : 9$ (đpcm).

Bài 3. Chứng minh rằng $\frac{S(2n)}{S(n)} \geq \frac{1}{5}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Ta có

$$S(n) = S(10n) = S(5.2n) \leq S(5).S(2n)$$

$$= 5.S(2n) \Rightarrow \frac{S(2n)}{S(n)} \geq \frac{1}{5} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Bài 4. a) Tìm số tự nhiên n sao cho $n + S(n) = 1998$.

b) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số tự nhiên liên tiếp biểu diễn được dưới dạng $n + S(n)$ với n là một số tự nhiên nào đó.

Lời giải. a) Cách 1 : Ta có $n = 1998 - S(n) \leq 1997$

$$\Rightarrow S(n) \leq 9.3 = 27$$

$$\Rightarrow n = 1998 - S(n) \geq 1971.$$

Đặt $n = \overline{19ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b \leq 9$.

$$\text{Ta có } \overline{19ab} + 10 + a + b = 1998$$

$$\Rightarrow 11a + 2b = 88$$

$$\Rightarrow 70 \leq 11a \leq 88 \Rightarrow a = 8, b = 0.$$

Vậy $n = 1980$.

Cách 2. Ta có $1998 = n + S(n)$

$$= n - S(n) + 2S(n) \Rightarrow 2S(n) : 9 \Rightarrow S(n) : 9.$$

Mặt khác $n = 1998 - S(n) \leq 1997 \Rightarrow S(n) \leq 9.3 = 27$.

Do đó $S(n) = 9, 18$ hoặc 27 . Thử trực tiếp chỉ có $S(n) = 18$ thoả mãn, ứng với $n = 1980$.

b) Đặt $S_n = n + S(n)$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét.

• Nếu n tận cùng bằng 9 thì $S_{n+1} < S_n$.

• Nếu n tận cùng không phải là 9 thì $S_{n+1} = S_n + 1$.

Đối với số tự nhiên $m > 2$ bất kì, ta chọn k là số lớn nhất sao cho $S_k < m \Rightarrow S_{k+1} \leq m + 1$. Do cách chọn k thì $S_{k+1} \geq m$. Do đó hoặc $S_{k+1} = m$ hoặc $S_{k+1} = m + 1$.

Bài 5. Cho a là tổng các chữ số của $(2^9)^{1999}$, b là tổng các chữ số của a . Tính tổng các chữ số của b .

Lời giải. Ta có

$$n = (2^9)^{1999} = (2^3)^{3 \cdot 1999} = 8^{5997} < 10^{5997}$$

$$\Rightarrow a = S(n) \leq 9.5997 = 53973$$

$$\Rightarrow b = S(a) \leq 4 + 9.4 = 40 \Rightarrow c = S(b) \leq 3 + 9.1 = 12. \text{ Vì } n = (2^3)^{5997} \equiv 8 \pmod{9} \text{ và } n \equiv a \equiv b \equiv c \equiv 8 \pmod{9} \text{ nên } c = 8.$$

Bài 6. Tìm số tự nhiên n sao cho lũy thừa bậc 5 của tổng các chữ số của n bằng n^2 .

Lời giải. Giả sử số n cần tìm có k chữ số và S ; là tổng các chữ số đó. Ta có $S^5 = n^2$ với $k \geq 2$;
 $S \leq 9k, n \geq 10^{k-1} \Rightarrow 9^5 k^5 \geq S^5 = n^2 \geq 10^{2k-2}$ (1)

$$\text{Đặt } u_k = \frac{9^5 k^5}{10^{2k-2}}$$

$$\text{Ta có } \frac{9^5 (k+1)^5}{9^5 k^5} = \frac{(k+1)^5}{k^5} \leq 2^5 < 10^2 = \frac{10^{2(k+1)-2}}{10^{2k-2}} \text{ với mọi } k \geq 2.$$

Từ đó $u_{k+1} < u_k$ với mọi $k \geq 2$ nên dãy số (u_k) là dãy giảm.

Vì $u_6 < 1$ nên ta có $9^5 k^5 \leq 10^{2k-2}$ với mọi $k \geq 6$ (2)

Từ (1), (2) phải có $k \leq 5 \Rightarrow S \leq 9.5 = 45$.

Mặt khác $S^5 = n^2$ suy ra S phải là số chính phương. Vậy S có thể là 1, 4, 9, 16, 25, 36. Thử trực tiếp thì $S^5 = n^2$ chỉ đúng khi $S = 1$ và $S = 9$ ứng với $n = 1$ và $n = 243$.

Bài 7. Ký hiệu bình phương tổng các chữ số của n là $f_1(n)$. Đặt $f_k(n) = f_1(f_{k-1}(n))$. Tính $f_{1998}(2^{1999})$ và $f_{1999}(2^{1999})$.

Lời giải. Ta có $n = 2^{1999} = 2.8^{666} \equiv 2 \pmod{9}$

$$f_1(n) \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow f_2(n) \equiv 7 \pmod{9}.$$

$$\text{Mặt khác } n = 2.8^{666} < 10^{667}$$

$$\Rightarrow f_1(n) \leq (9.667)^2 = 36036009$$

$$\Rightarrow f_2(n) \leq (2 + 9.7)^2 = 4225$$

$$\Rightarrow f_3(n) \leq (3 + 9.3)^2 = 30^2.$$

Gọi $S = S(f_2(n))$ thì ta có $S \equiv 7 \pmod{9}$ và $S \leq 30$.

Suy ra S bằng 7, 16 hoặc 25 $\Rightarrow f_3(n)$ bằng 49; 256 hoặc 625.

$$\text{Vì } 4 + 9 = 2 + 5 + 6 = 6 + 2 + 5 = 13 \text{ nên}$$

$$f_4(n) = 13^2 = 169 \Rightarrow f_5(n) = 16^2 = 256.$$

$$\text{Vậy với } k \geq 4 \text{ thì } \begin{cases} f_k(n) = 169 & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ f_k(n) = 256 & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f_{1998}(n) = 169, f_{1999}(n) = 256.$$

III. Các bài tập tự luyện

Bài 1. Tổng các chữ số của một số chính phương có thể bằng 1995 hoặc 1997 được không? Vì sao?

Bài 2. Người ta viết dãy số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 1.000.000. Sau đó mỗi số được thay bằng tổng các chữ số của nó. Cứ làm như vậy cho đến khi trong dãy chỉ còn các số có một chữ số, lúc này trong dãy cuối cùng chữ số nào xuất hiện nhiều lần nhất?

Bài 3. Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $S(n) = m, S(n^2) = m^2$ với m là một số tự nhiên cho trước?

Bài 4. Chứng minh rằng $\frac{S(8n)}{S(n)} \geq \frac{1}{8}$ với mọi

$n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Bài 5. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $S(S(n)) \geq 10$ và $S(S(S(n))) \leq 9$.

Bài 6. Với mỗi số tự nhiên n , chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên m sao cho $S(nm) \leq 2S(m)$.

Bài 7. Tìm số tự nhiên n thoả mãn mỗi đẳng thức sau :

a) $n + S(n) = 1999$; b) $n - S(n) = 1998$

c) $2n + 3S(n) = 122$;

d) $3n + 2S(n - 3) = 6007$

e) $n + S(n) + S(S(n)) = 1998$

Bài 8. Cho a là tổng các chữ số của $(3^8)^{1999}$, b là tổng các chữ số của a , c là tổng các chữ số của b . Tính tổng các chữ số của c .

XÂY DỰNG CÔNG THỨC TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN BẰNG ĐA THỨC

LÊ QUANG TRUNG (Bạc Liêu)

Giả sử $f(x)$ là một đa thức có bậc n ($n \geq 1$).
Xét đẳng thức $f(x) - f(x-1) = g(x)$ (1)

Ta nhận thấy $g(x)$ là đa thức có bậc $(n-1)$ và khi thay x lần lượt bằng $1, 2, 3, \dots, n$ rồi cộng lại ta được tổng :

$$g(1) + g(2) + \dots + g(n) = f(n) - f(0) \quad (2)$$

Do đó xuất phát từ yêu cầu tính tổng n số tự nhiên nào đó ta sẽ chọn $g(x)$ và dẫn đến bài toán : "xác định đa thức $f(x)$ thoả mãn $f(x) - f(x-1) = g(x)$ ". Sau đây xin nêu một vài ví dụ minh hoạ.

Thí dụ 1. Tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.
Từ tổng trên và (1), (2) ta chọn $g(x) = x$ và $f(x)$ là đa thức bậc hai. Do đó ta xét bài toán : Tìm đa thức bậc hai $f(x)$ biết $f(x) - f(x-1) = x$.

Lời giải. Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Khi đó từ (1) có $2ax - a + b = x$,

suy ra $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{c}$, c tùy ý.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$.

Thay x lần lượt bằng $1, 2, 3, \dots, n$ từ (2) có

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ &= f(n) - f(0) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Thí dụ 2. Tính tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.

Từ tổng đó và (1), (2) ta chọn $g(x) = 2x - 1$ và xét bài toán : Tìm đa thức bậc hai $f(x)$ biết $f(x) - f(x-1) = 2x - 1$.

Lời giải. Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
Khi đó từ (1) có $2ax - a + b = 2x - 1$,

suy ra $a = 1$, $b = 0$, c tùy ý. Vậy $f(x) = x^2 + c$.
Thay x lần lượt bằng $1, 2, 3, \dots, n$, từ (2) có

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = f(n) - f(0) = n^2.$$

Thí dụ 3. Tính tổng

$$S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2.$$

Từ tổng trên ta chọn

$g(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ và xét bài toán : Tìm đa thức bậc ba $f(x)$ biết

$$f(x) - f(x-1) = 4x^2 - 4x + 1.$$

Lời giải. Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Khi đó từ (1) có

$$3ax^2 - (3a - 2b)x - b + c + a = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 4 \\ 3a - 2b = 4 \\ a + c - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x + d.$$

Lần lượt thay x bằng 1, 2, 3, ..., n từ (2) được

$$\begin{aligned} S &= 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \\ &= f(n) - f(0) = \frac{4n^3 - n}{3} \end{aligned}$$

Thí dụ 4. Tính tổng

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Ta chọn $g(x) = x^3$ và xét bài toán : Tìm đa thức bậc bốn $f(x)$ biết

$$f(x) - f(x-1) = x^3.$$

Lời giải. Giả sử

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0).$$

Khi đó từ (1) có

$$4ax^3 + (3b - 6a)x^2 + (4a - 3b + 2a)x + b - a + d = x^3, \text{ giải ra ta được :}$$

$$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}, d = 0, e \text{ tùy ý và}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + e.$$

Thay x lần lượt bằng 1, 2, 3, ..., n từ (2) có

$$\begin{aligned} S &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Qua các thí dụ trên, chắc các bạn đã nhận ra cách chọn $g(x)$ và từ đó tìm được $f(x)$ thoả mãn yêu cầu của phương pháp này.

Bây giờ các bạn hãy thử tính hai tổng sau đây nhé !

$$\text{Bài 1. Tính } S_1 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n.$$

$$\text{Bài 2. Tính } S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

VỀ BÀI TOÁN SO SÁNH PHÂN SỐ

NGUYỄN HỮU BÀNG (Nghệ An)

Trong phần ôn tập về tính chất của bốn phép tính của phân số dương có bài toán :

So sánh bằng nhiều phương pháp khác nhau xem trong hai phân số $\frac{5}{7}$ và $\frac{13}{16}$ thì phân số nào lớn hơn ?

Đây là một bài toán đơn giản nhưng chứa đựng nhiều điều thú vị trong chương trình Toán 6. Trước hết xin nêu tóm tắt **những cách so sánh phân số dương** quen thuộc là :

1. Quy đồng mẫu các phân số đã cho rồi so sánh các tử với nhau.

2. Viết các phân số đã cho dưới dạng các phân số cùng tử rồi so sánh các mẫu với nhau.

3. So sánh phân số dựa vào tính chất : Nếu $ad < bc$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

4. So sánh tỉ số các phân số đã cho với 1 dựa vào tính chất :

$$\text{Nếu } \frac{x}{y} < 1 \text{ thì } x < y.$$

5. Viết các phân số dưới dạng số thập phân rồi so sánh các số thập phân đó.

6. So sánh số nghịch đảo của các phân số dựa vào tính chất :

Nếu $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

7. Dựa vào tính chất bắc cầu của quan hệ thứ

tự: Nếu $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$ và $\frac{m}{n} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

8. So sánh "phần bù của các phân số đối với đơn vị" dựa vào tính chất: Nếu $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ đều nhỏ

hơn 1 và $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Tiếp theo xin nêu thêm vài cách giải khác dựa vào một số tính chất mở rộng hơn.

9. Ta có tính chất (bạn đọc tự chứng minh):

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Áp dụng vào bài toán trên ta có:

Vì $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{8}{9} < \frac{3}{2}$,

từ $\frac{5}{7} < \frac{8}{9}$ suy ra $\frac{5}{7} < \frac{13}{16} < \frac{8}{9}$.

Vậy $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$.

10. Từ tính chất đã nêu ở cách 9 ta dễ dàng suy ra tính chất sau:

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{an+c}{bn+d} < \frac{c}{d}$ với n là số nguyên dương.

Áp dụng vào bài toán trên ta có

Vì $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{5.2+3}{7.2+2} < \frac{3}{2}$ suy ra $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$.

Một vài nhận xét về các cách giải.

a. Do bốn số 5, 7, 13, 16 đôi một nguyên tố cùng nhau nên khi áp dụng các cách giải 1, 2, 3, 4 vào bài toán trên ta đều quy về so sánh 5.16 và 7.13.

b. Khi so sánh các phân số chẳng hạn $\frac{35}{82}$ và

$\frac{36}{83}; \frac{97}{99}$ và $\frac{969}{971}; \frac{1991}{1995}$ và $\frac{1993}{1997}$, rõ ràng ta

không áp dụng các cách 6, 7, 8, tương ứng là hợp lý nhất.

c. Để vận dụng cách 10 trong bài toán ban đầu ta cần viết

$$13 = 5.2 + 3; 16 = 7.2 + 2.$$

Tương tự ta cũng so sánh được một cách nhanh gọn hai phân số, chẳng hạn $\frac{89}{95}$ và $\frac{895}{954}$.

Ta có $\frac{89}{95} < \frac{5}{4}$ nên $\frac{89}{95} < \frac{89.10+5}{95.10+4} < \frac{5}{4}$ do đó $\frac{89}{95} < \frac{895}{954}$.

d. Một điều thú vị là nhờ so sánh phân số mà ta có một cách chứng minh tính chất sau:

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương, nếu $a < b \leq c < d$ và $a + d = b + c$ thì $ad < bc$.

Thật vậy từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} b-a = d-c \\ 0 < b < d \end{cases} \Rightarrow \frac{b-a}{b} > \frac{d-c}{d}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{a}{b} > 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc.$$

Nghĩa là: Cho hai số tự nhiên biến thiên có tổng không đổi, thế thì tích của chúng càng lớn nếu hiệu của chúng càng nhỏ.

Ví dụ: $95.98 > 94.99$;

$$1995^2 > 1992.1998;$$

$$a^2 > (a-1)(a+1).$$

Thật ra tính chất này cũng đúng với a, b, c, d là các phân số dương. Khi đó ta xét các tỉ số tương ứng thay cho phân số.

Rõ ràng một bài toán đơn giản nhưng cũng chứa đựng nhiều vấn đề lý thú.

Cuối cùng xin nêu vài bài tập vận dụng.

Bài 1. So sánh từng cặp phân số sau theo cách hợp lý nhất:

$$\frac{47}{96} \text{ và } \frac{49}{100}; \frac{38}{43} \text{ và } \frac{383}{428}; \frac{625}{655} \text{ và } \frac{3871}{3874};$$

$$\frac{73}{65} \text{ và } \frac{7345}{6551}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$a) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{99}{100}.$$

$$b) \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

Hướng dẫn : ta có $n^3 > n(n-1)(n+1) \Rightarrow$

$$\frac{2}{n^3} < \frac{2}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)},$$

với $n = 2; 3; \dots$

ĐỊNH LÝ TRUNG HOA VỀ SỐ DƯ

TRẦN XUÂN ĐÁNG (Nam Định)

Định lý Trung Hoa về số dư được phát biểu như sau :

Nếu $m_1, m_2, \dots, m_n$ là n số nguyên dương nguyên tố cùng nhau từng đôi một và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số nguyên bất kì thì hệ phương trình đồng dư sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Ngoài ra nếu $x = c$ là một nghiệm nào đó của hệ thì $x = x_0$ là một nghiệm của hệ khi và chỉ khi tồn tại $t \in \mathbb{Z}$, sao cho $x_0 = c + (m_1 m_2 \dots m_n)t$.

Chứng minh. Với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, đặt $n_i = \frac{m_1 m_2 \dots m_n}{m_i}$. Khi đó $n_i \in \mathbb{N}^*$ và $(m_i, n_i) = 1$.

(Kí hiệu (m_i, n_i) là ƯSCLN của m_i và n_i). Vì vậy tồn tại $b_i \in \mathbb{Z}$, sao cho $b_i n_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Đặt $M = \sum_{j=1}^n a_j b_j n_j$. Khi $j \neq i$ thì $n_j \vdots m_i$. Với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ thì $M \equiv a_i b_i n_i \equiv a_i \cdot 1 \equiv a_i \pmod{m_i}$. Vậy $x = M$ là một nghiệm của hệ.

Giả sử $x = c$ là một nghiệm của hệ. Nếu $x = x_0$ là một nghiệm nào đó của hệ thì $(x_0 - c) \vdots m_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. (1)

Đặt $m = [m_1, m_2, \dots, m_n]$ (m là bội số chung nhỏ nhất của $m_1, m_2, \dots, m_n$). Vì $m_1, m_2, \dots, m_n$ nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên $m = m_1 m_2 \dots m_n$.

Theo (1) thì $x_0 - c$ chia hết cho m .

Vậy tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho $x_0 - c = mt$. Suy ra $x_0 = c + mt$.

Ngược lại nếu $x_0 \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $x_0 = c + mt$ thì rõ ràng $x = x_0$ là một nghiệm của hệ.

Áp dụng định lý Trung Hoa về số dư ta có thể giải được các bài toán sau.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n , tồn tại n số tự nhiên liên tiếp mà mỗi số trong n số đó đều là hợp số.

Lời giải. Giả sử $p_1, p_2, \dots, p_n$ là n số nguyên tố khác nhau từng đôi một. Xét hệ phương trình đồng dư $x \equiv -k \pmod{p_k^2}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Theo định lý Trung Hoa về số dư, tồn tại $x_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x_0 \equiv -k \pmod{p_k^2}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó các số

$x_0 + 1, x_0 + 2, \dots, x_0 + n$ đều là hợp số (với $1 \leq k \leq n$ thì $(x_0 + k) \vdots p_k^2$).

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho

bất kì số nào trong các số đó cũng đều không phải là lũy thừa (với số mũ nguyên) của một số nguyên tố.

(Đề thi toán quốc tế năm 1989)

Lời giải. Cách 1 : Với mỗi số tự nhiên n , xét n số nguyên tố khác nhau từng đôi một $p_1, p_2, \dots, p_n$. Theo định lí Trung Hoa về số dư tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a \equiv p_k - k \pmod{p_k^2}$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó, dễ dàng thấy rằng các số $a + 1, a + 2, \dots, a + n$ đều không phải là lũy thừa (với số mũ nguyên) của một số nguyên tố.

Cách 2 : Giả sử n là một số tự nhiên bất kì và $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ là các số nguyên tố khác nhau từng đôi một. Theo định lí Trung Hoa về số dư, hệ phương trình đồng dư $x \equiv -1 \pmod{p_1 q_1}, x \equiv -2 \pmod{p_2 q_2}, \dots, x \equiv -n \pmod{p_n q_n}$ có nghiệm.

Chú ý rằng các số $p_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_n q_n$ nguyên tố cùng nhau từng đôi một. Hiển nhiên rằng có thể chọn $x = c$ là một nghiệm của hệ này sao cho $c \in \mathbb{N}^*$. Khi đó các số $c + 1, c + 2, \dots, c + n$ là n số tự nhiên liên tiếp và bất kì số nào trong các số đó cũng chia hết cho ít nhất 2 số nguyên tố khác nhau $(c + 1) : (p_1 q_1), (c + 2) : (p_2 q_2), \dots, (c + n) : (p_n q_n)$. Vì vậy không có số nào trong các số đó là lũy thừa (với số mũ nguyên) của một số nguyên tố.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n , tồn tại một cấp số cộng gồm n số hạng sao cho mọi số hạng của nó đều là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ nguyên lớn hơn 1.

Lời giải. Giả sử p_i là số nguyên thứ i ($i = 1, 2, \dots, n$) và đặt $p = p_1 p_2 \dots p_n$. Kí hiệu $q_i = \frac{p}{p_i}$. Khi đó $(p_i, q_i) = 1$ ($1 \leq i \leq n$). Với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, hệ phương trình đồng dư $x \equiv 0 \pmod{q_i}, x \equiv -1 \pmod{p_i}$ có nghiệm $x = a_i \in \mathbb{N}^*$. Xét cấp số cộng gồm n số hạng với công sai

$d = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots n^{a_n}$ và số hạng đầu bằng d . Với $1 \leq k \leq n$ thì $kd = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots k^{a_k+1} \dots n^{a_n}$.

Khi đó $kd = \left(\frac{a_1}{1^{p_k}} \frac{a_2}{2^{p_k}} \dots \frac{a_k+1}{k^{p_k}} \frac{a_n}{n^{p_k}} \right)^{p_k}$

Số $1^{\frac{a_1}{p_k}} 2^{\frac{a_2}{p_k}} \dots k^{\frac{a_k+1}{p_k}} \dots n^{\frac{a_n}{p_k}} \in \mathbb{N}^*$ vì $a_i : p_k$ với

mỗi $i \neq k$ và $(a_k + 1) : p_k$.

Vậy mọi số hạng của cấp số cộng trên đều là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ nguyên lớn hơn 1.

Bài toán 4. Chứng minh rằng có vô hạn số tự nhiên k sao cho các số $k.2^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) đều là hợp số.

Lời giải. Với mỗi số tự nhiên m , đặt $F_m = 2^{2^m} + 1$ thì với mỗi $m = 0, 1, 2, 3, 4$ ta có F_m là số nguyên tố còn $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 641.p$ với p là số nguyên tố, $p > 2^{16} + 1 = F_4$. Do $(p, 2^{32} - 1) = 1$ nên theo định lí Trung Hoa về số dư có vô hạn số tự nhiên k thỏa mãn $k \equiv 1 \pmod{(2^{32} - 1)641}$ và $k \equiv -1 \pmod{p}$.

Ta sẽ chứng minh với $k > p$ thì $k.2^n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) đều là hợp số.

Thật vậy số n viết được dưới dạng $n = 2^m(2t + 1)$ với $m, t \geq 0$. Khi $m = 0, 1, 2, 3, 4$ thì vì

$k.2^n + 1 \equiv 2^{2^m(2t+1)} + 1 \pmod{(2^{32} - 1)}$ nên $(k.2^n + 1) : F_m$. Vì $k.2^n + 1 > p > F_4$ (do $k > p$) nên $k.2^n + 1$ là hợp số.

Với $m = 5$ thì $k.2^n + 1 \equiv 2^n + 1 \pmod{641}$. Mặt khác $(2^n + 1) : F_5 \Rightarrow (k.2^n + 1) : 641$, mà $k.2^n + 1 > F_5 > 641 \Rightarrow k.2^n + 1$ là hợp số.

Với $m \geq 6$ thì $n = 2^6.h$ với h là một số tự nhiên.

Từ đây ta có $k.2^n + 1 \equiv 2^{2^6} + 1 \pmod{p}$ hay $(k.2^n + 1) : p$ vì $(2^{2^6} + 1) : (2^{2^6} - 1)$ mà $(2^{2^6} - 1) : F_5$ và $F_5 : p$. Do $k.2^n + 1 > k > p$ nên $k.2^n + 1$ là hợp số.

Tóm lại có vô số tự nhiên k để $k.2^n + 1$ là hợp số.

Dạng tổng quát của định lí Trung Hoa về số dư như sau :

Cho n số nguyên dương nguyên tố cùng nhau từng đôi một $m_1, m_2, \dots, m_n$ và các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sao cho $(a_1, m_1) = (a_2, m_2) = \dots = (a_n, m_n) = 1$. Khi đó

$$\text{hệ phương trình đồng dư} \begin{cases} a_1 x_1 \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2 x_2 \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ a_n x_n \equiv b_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

có nghiệm. Ngoài ra nếu $x = c$ là một nghiệm nào đó của hệ thì $x = x_0$ là một nghiệm của hệ khi và chỉ khi tồn tại $t \in \mathbb{Z}$, sao cho $x_0 = c + (m_1 m_2 \dots m_n)t$.

Chứng minh. Xét các phương trình đồng dư $a_i y \equiv 1 \pmod{m_i}$ ($1 \leq i \leq n$). Vì $(a_i, m_i) = 1$ thì hệ này có nghiệm y_i . Khi đó $(y_i, m_i) = 1$. Vì vậy phương trình đồng dư $a_i x \equiv b_i \pmod{m_i}$ tương đương với phương trình $y_i a_i x \equiv y_i b_i \pmod{m_i}$.

Nhưng phương trình này lại tương đương với phương trình $x \equiv y_i b_i \pmod{m_i}$. Như vậy ta được hệ phương trình đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv y_1 b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv y_2 b_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv y_n b_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Áp dụng định lí Trung Hoa về thặng dư ta có điều phải chứng minh.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc.

Bài 1. Xét một cấp số cộng tăng có các số hạng là các số tự nhiên. Chứng minh rằng có thể chọn từ cấp số cộng này một số tùy ý các số hạng liên tiếp nhau sao cho tất cả đều là hợp số.

Bài 2. Giả sử $f(x)$ là một đa thức với các hệ số nguyên và m là một số tự nhiên. Biết rằng số dư của phép chia cho m ($m \geq 2$) của các số $f(1), f(2), \dots$ bằng 0 hoặc bằng 1. Chứng minh rằng m là lũy thừa của một số nguyên tố.

PHƯƠNG PHÁP CỰC HẠN

NGÔ HÂN (Hà Bắc)

Khi giải một số bài toán có các yếu tố rời rạc hoặc hữu hạn, nếu ta dùng *phương pháp cực hạn* để chứng minh nhiều khi rất thuận lợi.

Nội dung của phương pháp này là phải chọn được *phần tử cực hạn* (nhỏ nhất hoặc lớn nhất) của một tập hợp đã cho.

Đặc biệt nếu tập hợp đã cho là một tập con của tập hợp các số thực hoặc tập hợp đã cho có quan hệ với một tập con của tập hợp các số thực thì có thể sử dụng một tính chất (hay nguyên lí) của các số thực (xem bài *Nguyên lí khởi đầu cực trị*). Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, NXB Giáo dục, 2004, trang 60 – 61).

Tính chất đó như sau :

Trong một tập hợp hữu hạn khác rỗng các số thực luôn chọn được số nhỏ nhất và số lớn nhất.

Để các bạn làm quen với *phương pháp cực hạn*, xin giới thiệu một số bài toán sau.

Bài toán 1. 7 người vào rừng hái nấm được tất cả 100 cái. Số nấm hái được của mỗi người đều khác nhau. Chứng minh rằng có 3 người hái được tổng số nấm không ít hơn 50 cái.

Lời giải. Gọi số nấm hái được của mỗi người là $a_1, a_2, \dots, a_7$ được sắp xếp từ nhỏ đến lớn :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 \quad (1)$$

Xét hai trường hợp :

1) $a_5 \geq 16$. Gọi M là tập hợp gồm ba số nguyên a_5, a_6, a_7 . Khi đó theo (1) thì a_5 là số nhỏ nhất của M :

$$a_5 \geq 16 \Rightarrow a_6 \geq 17 ; a_7 \geq 18.$$

Do đó ta có

$$a_5 + a_6 + a_7 \geq 51 \quad (2)$$

2) $a_5 \leq 15$. Gọi N là tập hợp gồm 4 số nguyên a_1, a_2, a_3, a_4 . Khi đó theo (1) có

$$a_4 \leq 14$$

Mặt khác a_4 là số lớn nhất của N nên

$$a_3 \leq 13 ; a_2 \leq 12 ; a_1 \leq 11$$

Ta có :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 50$$

$$\text{Suy ra } a_5 + a_6 + a_7 \geq 50 \quad (3)$$

Các bất đẳng thức (2) và (3) chứng tỏ bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 + y^2 = 3z^2 \quad (4)$$

chỉ có một nghiệm nguyên duy nhất.

Lời giải. Để thấy phương trình đã cho có nghiệm tầm thường

$$x = y = z = 0.$$

Giả sử phương trình còn có nghiệm nguyên $(x ; y ; z)$ khác với nghiệm $(0 ; 0 ; 0)$. Nhận thấy nghiệm này phải có x và y không đồng thời bằng 0. Suy ra $z \neq 0$.

Xét hai trường hợp :

1) $z > 0$. Gọi M là tập hợp các số nguyên $z > 0$ có được từ các nghiệm nguyên $(x ; y ; z)$ của phương trình.

M có số nhỏ nhất z_0 ứng với nghiệm $(x_0 ; y_0 ; z_0)$.

Ta có

$$x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2$$

Vì $(x_0^2 + y_0^2)$ chia hết cho 3 nên x_0 và y_0 cùng chia hết cho 3. Thật vậy, nếu x_0 và y_0 đều không chia hết cho 3 thì $x_0^2 + y_0^2$ khi chia cho 3 sẽ có số dư là 1, do đó $(x_0^2 + y_0^2)$ không chia hết cho 3.

Đặt $x_0 = 3x_1 ; y_0 = 3y_1$, trong đó x_1 và y_1 là các số nguyên không đồng thời bằng 0.

Ta có :

$$9x_1^2 + 9y_1^2 = 3z_0^2$$

$$\text{hay } 3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2.$$

Vì z_0^2 chia hết cho 3 nên z_0 cũng chia hết cho 3. Đặt $z_0 = 3z_1$ trong đó z_1 là số nguyên dương. Ta có

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2.$$

Đẳng thức này chứng tỏ $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ cũng là nghiệm nguyên của phương trình (4). Nhưng vì $0 < z_1 < z_0$ nên không thoả mãn với z_0 là số nguyên dương nhỏ nhất.

Như vậy phương trình không có nghiệm nguyên với $z > 0$.

2) $z < 0$. Nhận thấy nếu $(x ; y ; z)$ là nghiệm của phương trình thì $(x ; y ; -z)$ cũng là nghiệm. Do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên $(x ; y ; z)$ với $z < 0$.

Tóm lại phương trình đã cho có một nghiệm nguyên duy nhất là $(0, 0, 0)$.

Bài toán 3. Trong mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$) trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác được tạo thành từ ba đường thẳng đã cho mà tam giác này không bị chia cắt bởi bất kì đường thẳng nào trong các đường thẳng còn lại.

Lời giải. Giả sử d_1 là một trong các đường thẳng đã cho. Xét tất cả các giao điểm của $n - 1$ đường thẳng còn lại. Gọi M là tập hợp các

khoảng cách (số đo là số thực dương) từ các giao điểm đó đến đường thẳng d_1 . M có số nhỏ nhất là t_0 .

Giả sử P là giao điểm của hai đường thẳng d_2 và d_3 có khoảng cách đến d_1 bằng t_0 . Các đường thẳng d_2 và d_3 cắt d_1 tại các điểm Q và R tương ứng (vì không có hai đường thẳng nào song song). Như thế tam giác PQR được tạo

thành từ ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 và không bị cắt bởi bất kì đường thẳng nào. Thật vậy, giả sử có đường thẳng d_4 cắt cạnh PR hoặc cạnh PQ tại điểm $T \neq P$ (vì không có ba đường thẳng nào đồng quy). Khoảng cách từ T đến d_1 là t_1 . Rõ ràng $t_1 < t_0$. Điều này trái với t_0 là khoảng cách nhỏ nhất.

SUY NGHĨ TỪ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ

LÊ HÀO (Phú Yên)

Đôi lúc một vấn đề đã được giải quyết xong lại gợi ý tìm ra một vấn đề hoàn toàn khác nhưng lại rất có ý nghĩa. Nếu loay hoay mãi vẫn không giải quyết được vấn đề thứ hai, các bạn thử "mô phỏng" theo những lập luận khi giải quyết vấn đề thứ nhất xem sao !. Một sự "mô phỏng" có sáng tạo, cải tiến, bổ sung có thể giúp ta đạt mục đích. Nhiều khi nhờ thế mà bạn bỗng tìm được những kết quả thú vị bất ngờ. Xin nêu một trường hợp như thế.

Trong cuốn *Tuyển tập những bài toán thi vô địch quốc tế* có nêu một bài toán do CHLB Đức đề nghị (năm 1988) như sau :

Bài toán. a, b là hai số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho $ab + 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ là số chính phương.

Tác giả nêu hai cách giải khác nhau. Cả hai cách đều hay, làm thu hút sự chú ý của tôi. Ở đây xuất hiện vấn đề sau khi thay $ab + 1$ bởi $ab - 1$.

Nếu $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a^2 + b^2) : (ab - 1)$ thì có kết luận gì về thương $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$?

Ta thấy

$$(1^2 + 2^2) : (1 \times 2 - 1) \text{ và } \frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2 - 1} = 5$$

$$(1^2 + 3^2) : (1 \times 3 - 1) \text{ và } \frac{1^2 + 3^2}{1 \times 3 - 1} = 5.$$

Thử thêm vài cặp số tự nhiên nữa, tôi càng tin rằng mệnh đề sau là đúng :

Mệnh đề 1. Nếu a, b là hai số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho $ab - 1$ thì $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5$.

Chứng minh mãi không được, tôi bỗng nhớ đến cách giải thứ hai bài toán thi vô địch quốc tế ở trên. Cái cốt lõi của cách giải này là : Từ chỗ $(a^2 + b^2) : (ab + 1)$ chỉ ra có $c, d \in \mathbb{N}^*$ mà

$$c + d < a + b, \quad \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd + 1}.$$

Tôi nhận thấy để chứng minh mệnh đề 1 ở trên cần giải quyết đều cốt lõi sau : Từ chỗ $(a^2 + b^2) : (ab - 1)$ chỉ ra có $c, d \in \mathbb{N}^*$ mà

$$c + d < a + b, \quad \frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd - 1}.$$

Dựa theo cách giải thứ hai bài toán thi vô địch quốc tế kể

trên, có cải tiến, thay đổi một số lập luận, khắc phục một số trở ngại, cuối cùng tôi chứng minh được mệnh đề 1 như sau.

Chứng minh. Giả sử $(a^2 + b^2) : (ab - 1)$. Ta thấy $a \neq b$ vì nếu $a = b$ thì $(2a^2) : (a^2 - 1)$, nhưng $(a^2, a^2 - 1) = 1$ nên $2 : (a^2 - 1)$, không xảy ra. Do vai trò của a và b như nhau có thể xem $a > b$. Nếu $b = 1$ thì do $(a^2 + 1) : (a - 1)$ suy ra $2 : (a^2 - 1)$ nên $a = 2$ hoặc $a = 3$. Lúc đó $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{a^2 + 1}{a - 1} = 5$.

Ta xét $a > b > 1$. Từ $(a^2 + b^2) : (ab - 1)$

có $b^2(a^2 + b^2) : (ab - 1)$

$\Rightarrow (b^4 + 1) : (ab - 1)$. Đặt $k = \frac{b^4 + 1}{ab - 1} > 0$ ta

có $kab - k = b^4 + 1 \Rightarrow k \equiv -1 \pmod{b}$, do đó có $c \in \mathbb{N}^*$ để $k = bc - 1$.

Từ đó $b^4 + 1 = (ab - 1)(bc - 1)$. Ta có

$$\frac{b^2(b^2 + c^2)}{bc - 1} = bc + 1 + \frac{b^4 + 1}{bc - 1} = bc + ab$$

$$\frac{b^2(a^2 + b^2)}{ab - 1} = ab + 1 + \frac{b^4 + 1}{ab - 1} = ab + bc.$$

$$\text{Do đó } \frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc - 1}.$$

Tương tự như trên thì $b \neq c$. Vì $b > 1$ và $a > b$ nên $ab - 1 = b^2 + 1 + b(a - b) - 2 \geq b^2 + 1 \Rightarrow (b^2 + 1)^2 > b^4 + 1 = (ab - 1)(bc - 1) \geq (b^2 + 1)(bc - 1) \Rightarrow b^2 + 1 > bc - 1 \Rightarrow 2 > b(c - b)$. Vì $b > 1$ nên $b > c$.

Nếu $c > 1$ thì lập luận như trên, có $d \in \mathbb{N}^*$, $a > b > c > d$ để

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc - 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd - 1}.$$

Cứ tiếp tục như thế, quá trình này phải dẫn đến tồn tại số $u \in \mathbb{N}^*$ mà $a > b > c > d > \dots > u > 1$,

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc - 1} = \dots = \frac{u^2 + 1}{u - 1}.$$

Vì $(u^2 + 1) : (u - 1)$ thì như đã biết : $u = 2$

hoặc $u = 3$, vậy $\frac{u^2 + 1}{u - 1} = 5$ nên $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5$, (đpcm).

Từ mệnh đề 1 ta có ngay hệ quả sau :

Hệ quả. Phương trình

$$x^2 + y^2 - mxy + m = 0$$

có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi $m = 5$.

Điều thú vị là từ cách chứng minh của mệnh đề 1, ta có thể chỉ ra cách tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0.$$

Các bạn hãy xét hai dãy số (a_k) và (b_k) với $k = 1, 2, \dots$ xác định bởi công thức :

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ và } a_k + a_{k+2} = 5a_{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, b_2 = 3 \text{ và } b_k + b_{k+2} = 5b_{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Ta có :

Mệnh đề 2. Cặp số nguyên dương $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình

$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0 \quad (1)$$

khi và chỉ khi $x_0 + y_0$ là hai số kế nhau ở một trong hai dãy số nói trên.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (1), có thể xem $x_0 > y_0$. Khi đó

$$5 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 y_0 - 1}.$$

Nếu $y_0 = 1$ thì $x_0^2 + 5x_0 + 6 = 0$ nên $x_0 = 2$ hoặc $x_0 = 3$, do đó $(x_0; y_0)$ là hai số liên tiếp đầu tiên ở một trong hai dãy số trên.

Nếu $y_0 > 1$, theo chứng minh mệnh đề 1, có

$$z_0 \in \mathbb{N}^*, x_0 > y_0 > z_0 \text{ để } 5 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 y_0 - 1} = \frac{y_0^2 + z_0^2}{y_0 z_0 - 1}.$$

Khi đó phương trình bậc hai $X^2 - 5y_0 X + 5 + y_0^2 = 0$ có hai nghiệm x_0, z_0 .

Theo định lý Viète $x_0 + z_0 = 5y_0$.

Cứ theo lập luận trên có $u_0, \dots, v_0, t_0 \in \mathbb{N}^*$ mà $x_0 > y_0 > z_0 > u_0 > \dots > v_0 > t_0 > 1$ với hai số liên tiếp là nghiệm của (1), nghĩa là

$$x_0 + z_0 = 5y_0, y_0 + u_0 = 5z_0, \dots,$$

$v_0 + 1 = 5t_0$. Vì $5 = \frac{v_0^2 + 1}{v_0 - 1}$ nên $v_0 = 2$ hoặc $v_0 = 3$.

Vậy $t_0, v_0, \dots, u_0, z_0, y_0, x_0$ tạo thành các số hạng liên tiếp của một trong hai dãy số trên.

Điều kiện đủ. Nếu $(x_0; y_0)$ là hai số kế nhau của một trong hai dãy số trên. Giả sử x_0, y_0 là hai số liên tiếp của dãy (a_k) ($k = 1, 2, \dots$), $a_1 = 1, a_2 = 2$, với $x_0 = a_{k+1}, y_0 = a_k$. Ta có nhận xét : nếu $a > b > c, a + c = 5b, (b; c)$ là nghiệm của (1) thì $(a; b)$ cũng là nghiệm của (1).

Vì $a_{k+1} > a_k > \dots > a_2 = 2 \geq a_1 = 1$, $a_{i+1} + a_{i-1} = 5a_i$ ($i = 2, 3, \dots, k$), $(a_2; a_1)$ là

ng nghiệm của (1), nên theo nhận xét trên $(a_{k+1}; a_k)$ là nghiệm của (1) (đpcm).

Chứng minh tương tự khi $(x_0; y_0)$ là hai số liên tiếp của dãy (b_k) ($k = 1, 2, \dots$), $b_1 = 1, b_2 = 3$.

Nhận xét. Nếu $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}, (x_0; y_0)$ là

ng nghiệm của (1), thì rõ ràng x_0, y_0 không thể trái dấu. Vậy nếu tìm được các nghiệm nguyên dương của (1) sẽ suy ra các nghiệm nguyên còn lại bằng cách đổi dấu.

Đến đây mời các bạn tiếp tục suy nghĩ. Có thể còn nhiều điều thú vị khác chưa được khai thác hết. Như các bạn biết, trang lịch sử khoa học có nhiều phát minh quan trọng ra đời nhờ biết kế thừa, cải tiến, bổ sung những thành tựu đã có. Các bạn trẻ hãy học toán một cách chủ động, biết phát huy, kế thừa để sáng tạo. Các bạn sẽ thấy toán học thật sinh động, lí thú.

PHƯƠNG TRÌNH CĂN ĐỒNG DẠNG BẬC HAI

BÙI QUANG TRƯỜNG (Hà Nội)

Trong một kì thi chọn học sinh giỏi lập đội tuyển thi Toán Quốc tế của nước ta có bài toán sau đây :

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho với $x < y$ thì

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}.$$

Nếu cùng các phép biến đổi thông thường rồi thực hiện các phép thử chúng ta sẽ có $(x; y)$ bằng $(55; 1375); (220; 880)$. Tuy nhiên nếu để ý rằng $\sqrt{1980} = 6\sqrt{55}$ là số vô tỉ thì lời giải sẽ đẹp hơn nhiều. Vế trái cần phải là các căn thức đồng dạng với $\sqrt{55}$, tức là $\sqrt{x} = a\sqrt{55}, \sqrt{y} = b\sqrt{55}$ với a, b nguyên dương thoả mãn

đẳng thức $a + b = 6$. Dễ thấy rằng $a = 1$ hoặc $a = 2$ và ta lại có các nghiệm đã nêu.

Nếu chỉ biến đổi và thực hiện các phép thử sẽ bất lực với bài toán sau đây :

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$13\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = \sqrt{2000}.$$

Lời giải. Vế phải $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$. Vế trái là tổng của hai số nên : hoặc một trong hai số bằng không, hoặc cả hai là những căn thức đồng dạng với $\sqrt{5}$, tức là $\sqrt{x} = a\sqrt{5}, \sqrt{y} = b\sqrt{5}$ với a, b là các số nguyên không âm nghiệm đúng phương trình

$$13a - 7b = 20.$$

$$\text{Như vậy } a = \frac{20+7b}{13} = 1 + \frac{7(1+b)}{13}.$$

Vì $(13, 7) = 1$ nên để a nguyên thì $1+b = 13t$ với t nguyên. Suy ra $b = 13t - 1$, $a = 1 + 7t$. Để $a, b \geq 0$ thì t phải nguyên dương. Cuối cùng $x = 5a^2 = 5(1+7t)^2$, $y = 5b^2 = 5(13t-1)^2$ với t là số nguyên dương.

Chúng ta sẽ tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = \sqrt{c} \quad (1)$$

với a, b nguyên và c nguyên dương không chính phương. Chúng ta có thể gọi phương trình (1) là phương trình vô định căn đồng dạng.

Để giải phương trình, ta viết c dưới dạng $c = km^2$ trong đó k, m là các số nguyên dương, k không chia hết cho bất cứ số chính phương nào khác 1. Vế phải $\sqrt{c} = m\sqrt{k}$ rõ ràng là một số vô tỉ. Vế trái là tổng hai số nên : hoặc một số bằng 0, hoặc cả hai là những số vô tỉ đồng dạng với $\sqrt{k}$. Trường hợp $a = 0$ hoặc $b = 0$ đơn giản. Ta xét trường hợp $a \neq 0, b \neq 0$, dễ thấy a, b không cùng âm. Lúc này $x = u\sqrt{k}, y = v\sqrt{k}$ với u, v là các số nguyên âm. Thành thử

$$au + bv = m \quad (2)$$

Đây là phương trình vô định mà chúng ta đã có cách giải hết sức ngắn gọn (xem bài *Có thể làm toán sinh động hơn được không ?* trong quyển này). Bây giờ tôi xin giới thiệu một phương pháp giải khác.

Phương trình (2) có thể vô nghiệm (nguyên), nhưng nếu có một nghiệm u_0, v_0 thì cấu trúc nghiệm của (2), do đó cấu trúc nghiệm của phương trình đã cho, có thể xác định như sau :

Do u_0, v_0 nghiệm đúng (2) nên

$$au + bv = au_0 + bv_0 = m.$$

$$\text{Vì vậy } u = \frac{au_0 + bv_0 - bv}{a} = u_0 + \frac{b(v_0 - v)}{a}$$

$$= u_0 + \frac{b'(v_0 - v)}{a'}$$

với a', b' nguyên và $(a', b') = 1$.

Để u nguyên thì $v_0 - v = a't$ với t nguyên, nên $v = v_0 - a't, u = u_0 + b't$.

Do $u, v \geq 0$ nên $v_0 - a't \geq 0 \Rightarrow a't \leq v_0$

$$u_0 + b't \geq 0 \Rightarrow b't \geq -u_0.$$

Vì trong a, b có ít nhất một số dương nên trong a', b' có ít nhất một số dương. Không mất

tính tổng quát, giả sử $b' > 0 \Rightarrow t \geq -\frac{u_0}{b'}.$

• Nếu $a' < 0$ thì $t \geq \frac{v_0}{a'}$ do đó

$$t \geq \max\left(\frac{-u_0}{b'}, \frac{v_0}{a'}\right) \text{ với } u_0, v_0, b' > 0, a' < 0.$$

• Nếu $a' > 0$ thì $t \leq \frac{v_0}{a'}$ với u_0, v_0, b', a' đều dương.

$$\text{Cuối cùng } x = ku^2 = k(u_0 + b't)^2,$$

$$y = kv^2 = k(v_0 - a't)^2.$$

Phương trình vô định căn đồng dạng không chỉ bó hẹp ở dạng đã nêu. Nhiều phương trình sẽ được giải một cách đơn giản nếu nhìn dưới con mắt đó. Chẳng hạn bài toán sau :

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $\frac{11x}{5} - \sqrt{2x+1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2.$

Nhận thấy $\sqrt{4y-1}$ là số vô tỉ với mọi y nguyên (vì bình phương của một số lẻ có dạng

$$(4m+1) \text{ mà } \sqrt{4y-1} - \sqrt{2x-1} = 3y + 2 - \frac{11x}{5}$$

là số hữu tỉ nên điều kiện cần (và đủ) để phương trình có nghiệm nguyên là cả hai vế bằng 0, tức

$$\text{là } \sqrt{4y-1} = \sqrt{2x+1}, \quad 3y + 2 - \frac{11x}{5} = 0. \text{ Để}$$

dễ dàng rút ra $x = 5, y = 3$. Nghiệm này thoả mãn bài toán.

Cuối cùng, ta dùng phương pháp vừa nêu để giải một bài toán đã được đề nghị dùng làm đề Thi Toán quốc tế :

Tìm tất cả các số tự nhiên x và y thoả mãn phương trình

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 3361 - \sqrt{11296320} \quad (3)$$

Lời giải. Nhận thấy x, y là các số nguyên không âm và $\sqrt{11296320} = 8.41\sqrt{105}$ là số vô tỉ. Viết lại (3) thành $(x + y)^2 + 4xy - 3661$

$$= 4(x + y)\sqrt{xy} - 8.41\sqrt{105} \quad (4)$$

Vế trái của (4) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để (4) có nghiệm là cả hai vế cùng bằng 0.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} S^2 + 4P - 3361 = 0 \\ S\sqrt{P} = 82\sqrt{105} \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

với $S = x + y, P = xy$. Từ (6) có $P = \frac{82^2 \cdot 105}{S^2}$,

thay vào (5) được $S^4 - 3361S^2 + 4.82^2 \cdot 105 = 0$.

Biết số $\Delta = 1$ nên $S^2 = 1681, 1680$. Vì $1681 = 41^2$ nên $S = 41$, rõ ràng 1680 không là

số chính phương. Lúc đó $P = 420$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 41z + 420 = 0$, giải ra ta được $z = 20 ; 21$. Vậy $(x ; y)$ là $(20 ; 21)$ hoặc $(21 ; 20)$.

Cũng có thể chỉ xét điều kiện cần của (3).

Đẳng thức (4) xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{xy}$ và $\sqrt{105}$ là các căn thức đồng dạng, tức là $\sqrt{xy} = k\sqrt{105}$ với k nguyên dương. Như vậy

$x + y = \frac{82}{k}, xy = 105k^2$, ta có x và y là hai

nghiệm của phương trình $t^2 - \frac{82t}{k} + 105k^2 = 0$.

Phương trình này chỉ có nghiệm nếu $\Delta =$

$$\left(\frac{82}{k}\right)^2 - 4.105k^2 \geq 0 \Rightarrow k \leq 2. \text{ Nếu } k = 1,$$

phương trình $t^2 - 82t + 105 = 0$ không có nghiệm

nguyên. Nếu $k = 2$, phương trình $t^2 - 41t + 4.105 = 0$

có nghiệm $t = 20 ; 21$. Sau khi thử vào (3)

thấy đúng, ta kết luận $(x ; y)$ là $(20 ; 21)$ hoặc $(21 ; 20)$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ HỮU TỈ VÀ SỐ VÔ TỈ

NGUYỄN NGỌC BÌNH PHƯƠNG (TP. Hồ Chí Minh)

Chúng ta đã biết :

Định lí. Nếu a là số nguyên dương không chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

Tổng quát. Nếu a là số nguyên dương không là số lũy thừa bậc n của bất kì số nguyên dương nào thì $\sqrt[n]{a}$ là số vô tỉ ($n \in \mathbb{N} ; n \geq 2$).

Sau đây là một số bài toán áp dụng.

Bài 1. Chứng minh rằng số $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Giả sử a là số hữu tỉ, ta có

$$a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{a^2 - 5}{2} \text{ là số hữu tỉ (vô lí).}$$

Vậy $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ (đpcm).

Bài 2. Cho $\sqrt{n}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$, n là số tự nhiên không chính phương. Tìm các nghiệm còn lại.

Lời giải. Ta có $n\sqrt{n} + na + b\sqrt{n} + c = 0$

$$\Leftrightarrow (n+b)\sqrt{n} + na + c = 0$$

$$\text{Nếu } n+b \neq 0 \text{ thì } \sqrt{n} = \frac{-(na+c)}{n+b} \in \mathbb{Q}$$

(vô lí).

Vậy $n+b=0$ và $na+c=0 \Rightarrow b=-n$ và $c=-na$.

Thế các giá trị của b và c vào phương trình, ta được

$$x^3 + ax^2 - nx - na = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - n)(x + a) = 0.$$

Từ đó ta thấy ngoài nghiệm $x = \sqrt{n}$, phương trình còn có các nghiệm $x = -\sqrt{n}$, $x = -a$ với $a \in \mathbb{Q}$.

Bài 3. Cho hai thùng đựng nước với dung tích lớn tùy ý và hai cái gáo có dung tích lần lượt là $\sqrt{2}$ lít và $2 - \sqrt{2}$ lít. Hỏi có thể dùng hai cái gáo để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia được hay không? Tại sao?

(Đề thi tuyển vào lớp 10 ĐHSPT Hà Nội, 1995).

Lời giải. Giả sử có thể dùng gáo a (dung tích $\sqrt{2}$) và gáo b (dung tích $2 - \sqrt{2}$) để chuyển được 1 lít nước từ bình A sang bình B bằng cách đong m gáo a và n gáo b với $m, n \in \mathbb{Z}$ ($m > 0$ nếu đong từ A sang B và $m < 0$ nếu đong từ B sang A; tương tự đối với n). Khi đó $m\sqrt{2} + n(2 - \sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow (m - n)\sqrt{2} + 2n - 1 = 0$

$$\text{Nếu } m \neq n \text{ thì } \sqrt{2} = \frac{2n-1}{n-m} \in \mathbb{Q} \text{ (vô lí).}$$

$$\text{Vậy } m = n = \frac{1}{2} \text{ (mâu thuẫn với } m, n \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận: Không thể dùng hai cái gáo đó để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n phương trình sau đây không có nghiệm hữu tỉ:

$$(x + y\sqrt{3})^n = \sqrt{1 + \sqrt{3}}.$$

(Vô địch toán Liên Xô, 1987)

Lời giải. Với $n = 1$, giả sử có $x, y \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$x + y\sqrt{3} = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (x + y\sqrt{3})^2 = 1 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3y^2 - 1 = (1 - 2xy)\sqrt{3}.$$

$$\text{Nếu } 1 - 2xy \neq 0 \text{ thì } \sqrt{3} = \frac{x^2 + 3y^2 - 1}{1 - 2xy} \in \mathbb{Q}$$

(vô lí).

$$\text{Vậy } 1 - 2xy = 0 \text{ và } x^2 + 3y^2 - 1 = 0.$$

Rút y từ $1 - 2xy = 0$ thế vào $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ ta được $4x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm nên không tồn tại $x, y \in \mathbb{Q}$ thỏa $x + y\sqrt{3} = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

$$\text{Nếu } x, y \in \mathbb{Q} \text{ thì } (x + y\sqrt{3})^n = x_1 + y_1\sqrt{3}$$

với $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$.

(Để dàng chứng minh được bằng cách khai triển nhị thức Newton).

Do đó nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và $x, y \in \mathbb{Q}$ sao cho

$(x + y\sqrt{3})^n = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$. Đây là điều mà ta đã chứng minh là không thể xảy ra.

Bài 5. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn được ở dạng $p + q\sqrt{r}$ trong đó $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

Lời giải. Giả sử tồn tại $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ thỏa $p + q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2}$.

$$\text{Ta có } p^3 + 3p^2q\sqrt{r} + 3pq^2r + q^3r\sqrt{r} = 2$$

$$\Leftrightarrow (3p^2q + q^3r)\sqrt{r} = 2 - p^3 - 3pq^2r.$$

• Nếu $3p^2q + q^3r \neq 0$ thì

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q} \text{ (vô lí).}$$

• Nếu $3p^2q + q^3r = 0$

$$\Leftrightarrow q(3p^2 + q^2r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ p = q = 0 \end{cases}$$

Rõ ràng không thể xảy ra $p = q = 0$.

Nếu $q = 0$ thì $\sqrt[3]{2} = p \in \mathbb{Q}$ (vô lí).

Vậy không tồn tại $p, q, r \in \mathbb{Q}, r > 0$ thoả

$$p + q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2} \text{ (đpcm).}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng các số $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$;

$b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ đều là các số vô tỉ.

Bài 2. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ có một nghiệm là $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$. Tìm các cặp số (a, b) .

Bài 3. Giải phương trình

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$$

với nghiệm hữu tỉ (Vô địch toán Anh, 1970).

Bài 4. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ và m, n là các số nguyên dương không chính phương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{n}$ là $a = c$ và $b\sqrt{m} = d\sqrt{n}$.

Bài 5. Cho a, b là hai số hữu tỉ khác không và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng số $x = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ là số vô tỉ.

Bài 6. Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thoả

$$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0.$$

Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

TÍNH BIỂU THỨC HỮU TỈ BẰNG CÁCH XÉT DẠNG ĐA THỨC BẰNG NHAU TẠI NHIỀU GIÁ TRỊ

LÊ QUANG TRUNG (CĐSP Bạc Liêu)

1. Khi giải một số bài toán gồm các phân thức hữu tỉ, nếu khai triển các phép tính trên các phân thức đại số thường gặp những biến đổi rất phức tạp. Song nếu ta biểu thị nó dưới dạng đa thức thì nhiều khi công việc trở nên dễ dàng.

Cơ sở của cách làm này dựa vào các mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1. Nếu nhị thức dạng $f(x) = Ax + B$ (1) với A, B là các tham số mà

$f(x)$ triệt tiêu tại hai giá trị khác nhau của x thì $A = B = 0$ hay $f(x)$ đồng nhất bằng không.

Chứng minh. Giả sử với $x_1 = a, x_2 = b$ ($a \neq b$) mà $f(a) = f(b) = 0$, hay $Aa + B = 0$ và $Ab + B = 0$, từ đó $A(a - b) = 0$, vì $a - b \neq 0$ nên $A = 0$ suy ra $B = 0$.

Mệnh đề 2. Nếu tam thức dạng $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ (2) với A, B, C là các tham số mà $f(x)$ triệt tiêu tại ba giá trị khác

nhau của x thì $A = B = C = 0$ hay $f(x)$ đồng nhất bằng không.

Chứng minh. Giả sử với $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = d$ (đôi một khác nhau) mà $f(a) = f(b) = f(d) = 0$ hay $Aa^2 + Ba + C = 0, Ab^2 + Bh + C = 0, Ad^2 + Bd + C = 0$. Từ các đẳng thức trên suy ra : $A(a^2 - b^2) + B(a - b) = 0, A(a^2 - d^2) + B(a - d) = 0$, Vì $a - b \neq 0, a - d \neq 0$ nên $A(a + b) + B = 0$; $A(a + d) + B = 0$ suy ra $A(b - d) = 0$, vì $b - d \neq 0$ nên $A = 0$. Từ đó ta suy ra $B = 0, C = 0$.

2. Một số thí dụ

Thí dụ 1. Tính tổng sau

$$\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Lời giải. Tổng trên chỉ xác định khi a, b, c đôi một bằng nhau.

Nếu thay d bằng x và đặt tổng trên bằng $f(x)$ thì $f(x)$ là tam thức dạng (2) đối với x . Ta nhận thấy : $f(a) = f(b) = f(c) = 1$. Như vậy $f(x) - 1$ là tam thức nhận ba số khác nhau a, b, c làm nghiệm. Vậy $f(x) - 1$ đồng nhất bằng 0 hay $f(x) = 1$ với mọi x , suy ra $f(d) = 1$.

Thí dụ 2. Chứng minh rằng với a, b, c là các số đôi một khác nhau thì

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

Lời giải.

Xét biểu thức

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^2$$

Ta thấy $f(x)$ là tam thức dạng (2) nhận ba số khác nhau a, b, c làm nghiệm, vậy $f(x)$ đồng nhất bằng 0 và bài toán được chứng minh.

Thí dụ 3. Đơn giản biểu thức

$$P = \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải. Sau khi quy đồng mẫu số ta được tử số là

$$f(a) = (a-b)(b+c)(c+a) + (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c) + (a-b)(b-c)(c-a).$$

Ta thấy $f(x)$ là tam thức dạng (2) đối với a và có ba nghiệm : $a = b, a = c, a = 0$.

Nếu b, c khác nhau và đều khác 0 thì ba nghiệm này đôi một khác nhau nên $f(a)$ đồng nhất bằng 0 và ta có $P = 0$.

Nếu $b = 0$ hoặc $c = 0$ hoặc $b = c$ thì ta đều có $f(a) = 0$ suy ra $P = 0$.

3. Một số bài tập áp dụng

Bài 1. Đơn giản biểu thức

$$\frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)}$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)} + \\ & + \frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(c-b)} \\ & + \frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)} \\ & + \frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)} \\ & = \frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}. \end{aligned}$$

TẬP DUỆT KHAI THÁC CÁC ĐẲNG THỨC ĐÃ BIẾT

TRỊNH KHÔI (Bắc Ninh)

Khi đã được học phép nhân đa thức, bất kì học sinh nào cũng có thể thực hiện phép tính để rút ra hằng đẳng thức :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (1)$$

Nếu chỉ quan sát đẳng thức (1) trong trạng thái tĩnh thì quả thực ta khó có thể rút ra được một điều gì thú vị ngoài tính cân đối, đẹp mắt của nó. Ta hãy nhìn đẳng thức (1) với trạng thái động xem sao ! Trước hết chúng ta hãy chủ động cho các đối tượng a, b, c thay đổi một chút, chẳng hạn ta thay a, b, c tương ứng bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, theo đẳng thức (1) ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc}$$

hay $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} \quad (2)$

Trong (2) cho $a+b+c=0$, được

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Rõ ràng ta có một kết quả thú vị : Với $abc \neq 0$, $a+b+c=0$ thì

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| \quad (3)$$

Như vậy, chỉ cần thay đổi một chút các dữ kiện, ta đã thu được một kết quả rất đẹp. Nhưng nếu ta dừng lại ở đây thì sẽ không thấy hết được tầm ứng dụng của kết quả mới. Chúng ta thử cùng xem vai trò của đẳng thức (3) qua một loạt các bài toán ở những dạng khác nhau dưới đây.

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right| \quad (4)$

b) $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}} = \left| a + b - \frac{ab}{a+b} \right| \quad (5)$

Hướng dẫn giải. • Để chứng minh đẳng thức (4) ta chỉ cần chú ý rằng $(a+b)^2 = [-(a+b)]^2$ như vậy đẳng thức (4) được suy ra trực tiếp từ (3) khi ta thay $c = -(a+b)$.

• Tương tự (5) được suy ra trực tiếp từ (3) khi ta thay a, b, c tương ứng bởi ba số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ và $-\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$s = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}}$ là số hữu tỉ.

Hướng dẫn giải. Chỉ cần để ý

$(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, nên từ (3) ta

có $s = \left| \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right| \in \mathbb{Q}$.

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau :

$$P = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{(a^2+b^2)^2}}$$

Hướng dẫn giải. Áp dụng (4) ta có

$$\sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2+b^2}$$

và áp dụng (4) một lần nữa được

$$P = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|.$$

Bài 4. Xét tổng

$$S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots$$

$$+ \sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}}$$

a) Tính S_{2000} .

b) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì S_n là số hữu tỉ nhưng S_n không thể là số nguyên.

Hướng dẫn giải. Hãy chú ý

$1 + (n-1) + (-n) = 0$, áp dụng (3) ta có

$$\sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Từ đó dễ dàng thấy

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = (n-2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

Từ đó giải quyết được a) và b).

Bài 5. Đặt $S_n = \sqrt{1 + 99\dots 9^2} + 0,99\dots 9^2$

(hạng tử thứ hai trong căn là bình phương của số tự nhiên có n chữ số 9, còn hạng tử thứ ba trong căn là bình phương của số thập phân có n chữ số 9 ở sau dấu phẩy).

a) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì S_n luôn là số hữu tỉ.

b) Viết S_{2000} dưới dạng số thập phân.

Hướng dẫn giải. Chú ý $99\dots 9 = 10^n - 1$ (vế trái là số tự nhiên có n chữ số 9).

$$0,99\dots 9 = \frac{10^n - 1}{10^n} \quad (\text{vế trái là số thập phân có } n \text{ chữ số 9 sau dấu phẩy}).$$

Do đó

$$S_n = \sqrt{1 + (10^n - 1)^2 + \left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right)^2}$$

Áp dụng (5) với $a = 1$, $b = 10^n - 1$, ta thu được $S_n = 10^n - 1 + \frac{1}{10^n}$ nên việc giải quyết các câu a) và b) không còn khó khăn.

Bài 6. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$b) x^2 + 6x + 6 + \left(\frac{x+3}{x+4}\right)^2 = 0.$$

Hướng dẫn giải. Áp dụng các đẳng thức (4) và (5) để giải các phương trình trên.

Trên đây chúng tôi đã giới thiệu với các bạn một hướng khai thác đẳng thức (1). Kết quả thu được rõ ràng đã giúp chúng ta sáng tạo ra nhiều bài toán mới.

Các bạn hãy tập khai thác hàng đẳng thức khác đang học trong chương trình.

Phần hai

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA HAI BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY VÀ BERNOULLI

LÊ HẢI KHÔI (Hà Nội)

Bất đẳng thức Cauchy có dạng :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

với $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bất đẳng thức Bernoulli có dạng :

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (2)$$

với mọi $x \geq -1$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Như chúng ta đã biết có nhiều cách chứng minh các bất đẳng thức này : trực tiếp hay gián tiếp, dài hay ngắn, đơn giản hay phức tạp, v.v... Dưới đây trình bày cách chứng minh bất đẳng thức này nhờ bất đẳng thức kia.

Giả sử có bất đẳng thức Cauchy, ta cần chứng minh (2). Nếu $1+nx \leq 0$ thì do vế trái của (2) không âm nên bất đẳng thức đúng. Trong trường hợp $1+nx > 0$, xét $n-1$ số 1 và số $1+nx$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1+1+\dots+1+(1+nx)}{n} \geq \sqrt[n]{1.1\dots 1.(1+nx)}$$

Nâng lên lũy thừa bậc n hai vế ta được (2).

Ngược lại, giả sử có bất đẳng thức Bernoulli (2) ta cần chứng minh (1). Đặt $1+x = t$ ta có thể viết (2) dưới dạng :

$$t^j \geq 1+j(t-1), \text{ với mọi } t \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}^*,$$

hay là

$$t^j \geq jt - (j-1), \text{ với mọi } t \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}^* \quad (3)$$

Xét n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Trong trường hợp có một số nào đó bằng 0 thì bất đẳng thức (1) là hiển nhiên, do đó có thể giả thiết rằng $a_j > 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Kí hiệu } S_j = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_j}{j} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Khi đó các bất đẳng thức (3) với $t = \frac{S_j}{S_{j-1}}$

$$(j = 2, \dots, n) \text{ cho ta } \left(\frac{S_j}{S_{j-1}} \right)^j \geq j \frac{S_j}{S_{j-1}} - (j-1).$$

$$\text{Do đó, } S_j^j \geq (jS_j - (j-1)S_{j-1})S_{j-1}^{j-1} = a_j S_{j-1}^{j-1}$$

với $j = 2, 3, \dots, n$.

Vậy là chúng ta có :

$$\begin{aligned} S_n^n &\geq a_n S_{n-1}^{n-1} \geq a_n a_{n-1} S_{n-2}^{n-2} \geq \dots \\ &\geq a_n a_{n-1} \dots a_2 S_1 = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Thay $S_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ vào (4) và khai căn ta được bất đẳng thức Cauchy.

TỪ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

VŨ ĐỨC (Ninh Bình)

Ta đã biết các tính chất cơ bản của bất đẳng thức được coi là những yếu tố nền tảng, cơ sở để từ đó xây dựng được các bất đẳng thức mới phức tạp hơn. Ngược lại, muốn chứng minh một bất đẳng thức, ta cần phải sử dụng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức và các bất đẳng thức quen thuộc như Cauchy, Bunyakovski sau khi biến đổi biểu thức hoặc thêm bớt vào biểu thức một số hạng nào đó.

Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. Với a, b, c là ba số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \geq 4(a+b+c) \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} + 4(a+b+c) \geq 8(a+b+c) \quad (2)$$

Mặt khác ta có

$$(a+b)^2 - 4(a+b)c + 4c^2 \geq 0$$

$$\text{hay } \frac{(a+b)^2}{c} + 4c \geq 4(a+b).$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\frac{(b+c)^2}{a} + 4a \geq 4(b+c); \quad \frac{(c+a)^2}{b} + 4b \geq 4(c+a).$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên sẽ thu được (2). Từ đó có điều phải chứng minh.

Cách 2. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left[\frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \right] (a+b+c) \geq 4(a+b+c)^2 \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có $4(a+b+c)^2 = [(a+b) + (b+c) + (c+a)]^2$

$$= \left[\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}} \right) \cdot \sqrt{c} + \left(\frac{b+c}{\sqrt{a}} \right) \cdot \sqrt{a} + \left(\frac{c+a}{\sqrt{b}} \right) \cdot \sqrt{b} \right]^2 \leq \left[\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{c+a}{\sqrt{b}} \right)^2 \right] [(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2] = \left[\frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \right] (a+b+c).$$

Suy ra bất đẳng thức (3) đúng. Từ đó có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2. Với a, b, c là ba số dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (4)$$

Lời giải. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 2 \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \right) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (5)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy có

$$\frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} + b^2 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^3}{b} \cdot \frac{a^3}{b} \cdot b^2}$$

$$\text{hay } 2 \cdot \frac{a^3}{b} + b^2 \geq 3a^2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$2 \cdot \frac{b^3}{c} + c^2 \geq 3b^2; \quad 2 \cdot \frac{c^3}{a} + a^2 \geq 3c^2.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên ta thu được (5). Từ đó có điều phải chứng minh.

Thí dụ 3. Với a, b, c, d là các số dương, đặt

$$M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}.$$

Chứng minh rằng: $2 < M < 3$.

Lời giải. Vì a, b, c là các số dương nên $a+b+c, b+c+d, c+d+a, d+a+b$ đều nhỏ hơn $a+b+c+d$.

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} M &> \frac{a+b}{a+b+c+d} + \frac{b+c}{a+b+c+d} + \\ &+ \frac{c+d}{a+d+c+d} + \frac{d+a}{a+b+c+d} \\ &= \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{và } M &= \left(1 - \frac{c}{a+b+c}\right) + \left(1 - \frac{d}{b+c+d}\right) + \\ &+ \left(1 - \frac{a}{c+d+a}\right) + \left(1 - \frac{b}{d+a+b}\right) \\ &= 4 + \frac{(-c)}{a+b+c} + \frac{(-d)}{b+c+d} + \frac{(-a)}{c+d+a} + \frac{(-b)}{d+a+b} \\ &< 4 + \frac{(-c)}{a+b+c+d} + \frac{(-d)}{a+b+c+d} + \\ &+ \frac{(-a)}{a+b+c+d} + \frac{(-b)}{a+b+c+d} = \\ &= 4 - \frac{(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3 \end{aligned} \quad (7)$$

Từ (6) và (7) ta có $2 < M < 3$.

Thí dụ 4. Với $x \geq y \geq z > 0$, chứng minh rằng :

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Lời giải. Xét hiệu

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \right) - (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{x^2(y-z)}{z} + \frac{y^2(z-x)}{x} + \frac{z^2(x-y)}{y} \end{aligned}$$

Từ giả thiết $z \leq y \leq x$ và $x^2(y-z) \geq 0$,
 $y^2(z-x) \leq 0$ suy ra

$$\begin{aligned} \frac{x^2(y-z)}{z} &\geq \frac{x^2(y-z)}{y} \\ \frac{y^2(z-x)}{x} &\geq \frac{y^2(z-x)}{y} \end{aligned}$$

Do đó

$$H \geq \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow yH &\geq x^2[(y-x) + (x-z)] + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\ &= (x-y)(z^2 - x^2) + (x-z)(x^2 - y^2) \\ &= (x-y)(x-z)[(x+y) - (x+z)] \\ &= (x-y)(x-z)(y-z) \geq 0 \quad (\text{do } x \geq y \geq z > 0). \end{aligned}$$

Vậy $H \geq 0$ suy ra đpcm.

Thí dụ 5. Với a, b, c là ba số dương, chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \\ &\geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}. \end{aligned}$$

Lời giải. Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

$$\text{Vì } 1 \geq \frac{b}{a} \geq \frac{c}{a} > 0 \text{ nên } \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq \frac{b}{a}; \left(\frac{c}{a}\right)^2 \leq \frac{c}{a}$$

$$\text{suy ra } \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \geq \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow a^2(b+c) \geq a(b^2+c^2).$$

Từ đó kết hợp với

$$0 < (b^2+c^2)(b+c) \leq (a^2+c^2)(a+c) \text{ có}$$

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} = \frac{a^2(b+c) - a(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)(b+c)} \\ &\geq \frac{a^2(b+c) - a(b^2+c^2)}{(a^2+c^2)(a+c)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{Vì } \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \geq 1 \text{ nên } \left(\frac{a}{c}\right)^2 \geq \frac{a}{c}; \left(\frac{b}{c}\right)^2 \geq \frac{b}{c}$$

$$\text{suy ra } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2(a+b) \leq c(a^2+b^2).$$

Từ đó kết hợp với

$$0 < (a^2+c^2)(a+c) \leq (a^2+b^2)(a+b) \text{ có :}$$

$$\begin{aligned} &\frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} = \frac{c^2(a+b) - c(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)} \\ &\geq \frac{c^2(a+b) - c(a^2+b^2)}{(a^2+c^2)(a+c)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{b}{c+a} = \frac{b^2(c+a) - b(c^2+a^2)}{(a^2+b^2)(a+c)} \quad (10)$$

Cộng theo từng vế (8), (9) và (10), ta được

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} - \frac{a}{b+c} + \frac{c^2}{a^2+b^2} -$$

$$- \frac{c}{a+b} + \frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{b}{c+a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

$$\geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Nhiều bất đẳng thức trong khi thi chọn học sinh giỏi hoặc thi vào Đại học có thể chứng minh tương tự như trên. Mời các bạn thử sức với các bài tập sau.

Bài 1. Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, chứng minh rằng :

$$1) \sqrt{\frac{a}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3;$$

$$2) \frac{a(b+c)}{b+c-a} + \frac{b(c+a)}{c+a-b} + \frac{c(a+b)}{a+b-c} \geq 2(a+b+c).$$

Bài 2. Với a, b, c là ba số dương, chứng minh rằng :

$$1) \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)};$$

$$2) \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{ab+bc+ca}{abc}.$$

Bài 3. Với số nguyên dương n chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

Bài 4. Hãy tổng quát hoá kết quả của thí dụ 4 và thí dụ 5 ở trên.

MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ TỔNG CÁC PHÂN THỨC

NGÔ VĂN THÁI (Trường PTTH bán công Quỳnh Phụ, Thái Bình)

Có nhiều bất đẳng thức đòi hỏi phải đánh giá tổng các phân thức với các số hạng hoán vị vòng quanh, trong đó có *bất đẳng thức Nesbit mở rộng* : Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i > 0$ với mọi $i, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$) thì :

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (1)$$

Bất đẳng thức (1) trong trường hợp tổng quát là *không đúng* với mọi $n \geq 26$. Trên tạp chí THPT cũng đã đăng lời giải cho trường hợp $n = 3, 4, 5, 6$. Sau đây là cách chứng minh cho trường hợp $n = 3, 4$ khá gọn dành cho các bạn THCS. Trong cách chứng minh dưới đây phải sử dụng đến *bất đẳng thức Cauchy* của ba số không âm (chứng minh dành cho các bạn) :

Cho ba số không âm X_1, X_2, X_3 thì

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 3\sqrt[3]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3}.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (1) với $n = 3$ và $n = 4$.

1) Với ba số dương a_1, a_2, a_3 ($n = 3$) thì

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_1} + \frac{a_3}{a_1+a_2} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Đặt $P = \frac{a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_3}{a_3+a_1} + \frac{a_1}{a_1+a_2}$

$$Q = \frac{a_3}{a_2+a_3} + \frac{a_1}{a_3+a_1} + \frac{a_2}{a_1+a_2}.$$

Dễ thấy $P + Q = 3$.

Gọi vế trái của BĐT trên là M .

$$M + P = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_1} + \frac{a_3 + a_1}{a_1 + a_2};$$

$$M + Q = \frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_1}{a_3 + a_1} + \frac{a_3 + a_2}{a_1 + a_2}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$M + P \geq 3; M + Q \geq 3.$$

$$\text{Suy ra } 2M + P + Q \geq 6 \Rightarrow 2M \geq 3 \Rightarrow M \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 > 0$.

2) Với bốn số dương a_1, a_2, a_3, a_4 ($n = 4$) thì

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2} \geq 2.$$

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT trên là M .

$$\text{Đặt } P = \left(\frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_3 + a_4} + \frac{1}{a_4 + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right)$$

Ta có

$$M = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3 + a_4}{a_4 + a_1} + \frac{a_4 + a_1}{a_1 + a_2} \right) - 1 + a_1 \cdot P$$

$$M = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4 + a_1}{a_1 + a_2} \right) - 1 - a_2 \cdot P$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy của ba số dương trong từng ngoặc đơn ta suy ra :

$$M \geq 3 - 1 + a_1 \cdot P = 2 + a_1 \cdot P \quad (2)$$

$$M \geq 3 - 1 - a_2 \cdot P = 2 - a_2 \cdot P \quad (3)$$

Nếu $P \geq 0$ theo (2) ta được $M \geq 2$.

Nếu $P < 0$ theo (3) ta được $M > 2$.

Tóm lại $M \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 > 0$. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Với phương pháp đã trình bày ở trên, các bạn sẽ giải quyết được một cách ngắn gọn ba bài toán sau đây.

Bài 1. Cho sáu số dương $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sao cho trong sáu tổng sau $(x_1 + x_2), (x_2 + x_3), (x_3 + x_4), (x_4 + x_5), (x_5 + x_6), (x_6 + x_1)$ có $(x_1 + x_2)$ nhỏ nhất, $(x_2 + x_3)$ lớn nhất. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_5} + \frac{x_4}{x_5 + x_6} + \frac{x_5}{x_6 + x_1} + \frac{x_6}{x_1 + x_2} \geq 3.$$

Bài 2. Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ và $x_i > 0$ với mọi

$i = 1, 2, \dots, n$. Đặt

$$M = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2}$$

$$N = \frac{x_2 x_3}{x_1(x_2 + x_3)} + \frac{x_3 x_4}{x_2(x_3 + x_4)} + \dots + \frac{x_n x_1}{x_{n-1}(x_n + x_1)} + \frac{x_1 x_2}{x_n(x_1 + x_2)}.$$

Chứng minh rằng $\max(M, N) \geq \frac{n}{2}$.

Bài 3. Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ và $x_i > 0$ với mọi

$i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{3n}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n} \right).$$

Mong các bạn tiếp tục trao đổi.

VẬN DỤNG HẲNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$ VÀO GIẢI TOÁN

TÔN NỮ BÍCH VÂN (GV THCS Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng)

Trong chương trình toán THCS hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ có nhiều vận dụng trong các bài tập từ đơn giản đến phức tạp.

Tuy nhiên, khi gặp dạng toán này, nhiều bạn thường lúng túng, ngay cả học sinh giỏi cũng gặp nhiều sai sót khi trình bày lời giải. Bài viết này nêu một số loại toán thường gặp có thể vận dụng hai dạng biến đổi căn thức cơ bản sau đây.

Đưa ra ngoài dấu căn

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Đưa vào trong dấu căn

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2 B} & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Loại 1. Biến đổi đơn giản căn thức bậc hai

Thí dụ 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$\sqrt{9x^4 y^2} = 3x^2 |y| = \begin{cases} 3x^2 y & \text{nếu } y \geq 0 \\ -3x^2 y & \text{nếu } y < 0 \end{cases}$$

Thí dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$x\sqrt{2y} = \begin{cases} \sqrt{2x^2 y} & \text{nếu } x \geq 0 \\ -\sqrt{2x^2 y} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Một số bạn thường nhầm ở trường hợp thứ hai.

Loại 2. Tính giá trị của một biểu thức

Thí dụ 1. Tính $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sqrt{8-2\sqrt{7}} &= \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} = \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} = \\ &= |\sqrt{7}-1| = \sqrt{7}-1 \quad (\text{vì } \sqrt{7}-1 > 0). \end{aligned}$$

Có thể đặt $\sqrt{8-2\sqrt{7}} = a+b\sqrt{7}$ với các số nguyên a, b rồi bình phương hai vế để tính a, b ?

Tương tự, hãy tính $\sqrt{2002+2\sqrt{2000-2\sqrt{1999}}}$.

Thí dụ 2. Tính giá trị của

$$A = 3x - 1 - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \quad \text{với } x = 1999.$$

Lời giải. $A = 3x - 1 - \sqrt{(2x-3)^2} = 3x - 1 - |2x-3|$. Với $x = 1999$ thì $2x - 3 > 0$ nên $A = 3x - 1 - (2x - 3) = x + 2$. Lúc đó A có giá trị là $1999 + 2 = 2001$.

Loại 3. Rút gọn một biểu thức

Thí dụ 1. Rút gọn $B = \sqrt{3x-4-2\sqrt{3x-5}}$.

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{5}{3}$. Biến đổi

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{3x-5-2\sqrt{3x-5}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3x-5}-1)^2} = |\sqrt{3x-5}-1|. \end{aligned}$$

• Nếu $\sqrt{3x-5}-1 \geq 0$ hay $\sqrt{3x-5} \geq 1$ hay $x \geq 2$ thì $B = \sqrt{3x-5}-1$.

• Nếu $\sqrt{3x-5}-1 < 0$ hay $x < 2$ thì $B = 1-\sqrt{3x-5}$.

$$\text{Vậy } B = \begin{cases} \sqrt{3x-5}-1 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 1-\sqrt{3x-5} & \text{nếu } \frac{5}{3} \leq x < 2 \end{cases}$$

Có thể đặt $B = a+b\sqrt{3x-5}$ với các số nguyên a, b rồi tính a, b ?

Thí dụ 2. Rút gọn $C = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{|x|-2}$.

Lời giải. $C = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{|x|-2} = \frac{|x+2|}{|x|-2}$ với $x \neq \pm 2$.

Lập bảng khử dấu giá trị tuyệt đối

x	-2	0
$ x+2 $	-(x+2)	0
$ x -2$	-x-2	0

Từ đó tính được

$$C = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < -2 \\ -1 & \text{nếu } -2 < x < 0 \\ \frac{x+2}{x-2} & \text{nếu } x \geq 0 \text{ và } x \neq 2 \end{cases}$$

Có thể đưa mẫu số $|x| - 2$ vào trong dấu căn ?

Loại 4. Chứng minh một đẳng thức

Thí dụ 1. Chứng minh $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ (*)

Lời giải. Biến đổi vế trái :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2+\sqrt{3}} &= \sqrt{4(2+\sqrt{3})} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6+2\sqrt{12}+2} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{6}+\sqrt{2}| = \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

Có thể biến đổi $\sqrt{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ hoặc bình phương hai vế của (*) ?

Thí dụ 2.

$$\text{Chứng minh } \sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{2}.$$

Lời giải. Đặt vế trái là A, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2}A &= \sqrt{12+2\sqrt{11}} - \sqrt{12-2\sqrt{11}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{11}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{11}-1)^2} \\ &= |\sqrt{11}+1| - |\sqrt{11}-1| = 2 \end{aligned}$$

Có thể tính A^2 ?

Loại 5. Giải phương trình

Thí dụ. Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-3} + \sqrt{x-6} + 6\sqrt{x-3} = 3$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 3$. Biến đổi vế trái thành

$$\begin{aligned} &\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x-3} + 1 + \sqrt{x-3} + 6\sqrt{x-3} + 9 \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}+3)^2} \\ &= |\sqrt{x-3}+1| + |\sqrt{x-3}+3| \end{aligned}$$

$$= \sqrt{x-3} + 1 + \sqrt{x-3} + 3$$

$$= 4 + 2\sqrt{x-3} \geq 4.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Loại 6. Tìm giá trị của biến thỏa mãn điều kiện cho trước

Thí dụ. Cho $M = 4x - 1 - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$.
Tìm x để $M = 3$.

Lời giải.

$$M = 4x - 1 - \sqrt{(3x-2)^2} = 4x - 1 - |3x-2|$$

Xét dấu của $3x-2$ ta tính được

$$M = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \geq \frac{2}{3} \\ 7x-3 & \text{nếu } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

• Với $x \geq \frac{2}{3}$ thì $M = 3 \Leftrightarrow x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$ (thích hợp).

• Với $x < \frac{2}{3}$ thì $M = 3 \Leftrightarrow 7x-3 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$ (loại vì không thỏa mãn $x < \frac{2}{3}$)

Vậy $M = 3$ khi $x = 2$. Có thể viết $4x - 4 = \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$ rồi bình phương hai vế ?

Loại 7. Tìm cực trị của một biểu thức đại số

Thí dụ. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$D = \sqrt{1-4x+4x^2} + \sqrt{4x^2-12x+9}.$$

$$\text{Lời giải. } D = \sqrt{(1-2x)^2} + \sqrt{(2x-3)^2}$$

$$D = |1-2x| + |2x-3| \geq |1-2x+2x-3| = 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow (1-2x)(2x-3) \geq 0.$$

Lập bảng xét dấu

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$1-2x$	+	-
$2x-3$	-	+
$(1-2x)(2x-3)$	-	+

Từ đó

$$(1 - 2x)(2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy GTNN D bằng 2 với $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Các bài tập ở các thí dụ trên có thể còn nhiều cách giải khác, trong phạm vi bài viết này, chỉ

xin trình bày cách giải có thể vận dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ và gợi ý một vài cách khác. Mong rằng các bạn có thể củng cố, khắc sâu và vận dụng thành thạo, linh hoạt khi gặp các dạng toán biến đổi biểu thức có dấu căn.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

VŨ ĐỨC (Ninh Bình)

I. Một số tính chất của giá trị tuyệt đối

Cho a là số thực, ta có

- 1) $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$
- 2) $|a| \geq 0$
- 3) $|a| = |-a|$
- 4) $\sqrt{a^2} = |a|$; $|a|^2 = a^2$
- 5) $|a| \geq a \geq -|a|$
- 6) $|a| + |b| \geq |a + b|$

Chứng minh. Do hai vế của bất đẳng thức không âm nên (6) tương đương với $(|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow |ab| \geq ab$. Vậy (6) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

Hệ quả :

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_n|.$$

$$7) |a + b| \geq ||a| - |b||.$$

Chứng minh. Do hai vế của bất đẳng thức không âm nên

$(a + b)^2 \geq (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow ab \geq -|ab|$ đúng, do đó (7) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \leq 0$.

$$8) |a| \geq |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) \geq 0$$

$$9) a \geq |b| \Leftrightarrow a \geq b \geq -a.$$

II. Phương trình, bất phương trình có dấu giá trị tuyệt đối

Thí dụ 1. Giải bất phương trình

$$|4x^3 - 3x| \leq 1.$$

Lời giải. Ta có $|4x^3 - 3x| \leq 1$

$$\Leftrightarrow (4x^3 - 3x)^2 \leq 1^2$$

$$\Leftrightarrow (4x^3 - 3x)^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^3 - 3x + 1)(4x^3 - 3x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(4x^2 - 4x + 1)(x - 1)(4x^2 + 4x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x - 1)^2(2x + 1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(4x^2 - 1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Thí dụ 2. Cho số thực $a \geq 1$. Giải bất phương trình :

$$|x^2 - 2ax + a| \geq |x^2 - a|.$$

Lời giải. Ta có

$$|x^2 - 2ax + a| \geq |x^2 - a|$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a)^2 \geq (x^2 - a)^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a)^2 - (x^2 - a)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow [(x^2 - 2ax + a) + (x^2 - a)][(x^2 - 2ax + a) - (x^2 - a)] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (2x^2 - 2ax)(2a - 2ax) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -4ax(x-1)(x-a) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x(x-1)(x-a) \leq 0.
\end{aligned}$$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ 1 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Thí dụ 3. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} |x-y| + |x+y| = m & (1) \\ x^3 + |y|^3 = m^3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Giả sử hệ có nghiệm $(x; y)$. Để ý rằng nếu $xy \geq 0$ thì $|x+y| = |x| + |y|$, còn nếu $xy \leq 0$ thì $|x-y| = |x| + |y|$ nên từ (1) ta có $m \geq |x| + |y|$. Suy ra

$$\begin{aligned}
x^3 + |y|^3 &= m^3 \geq (|x| + |y|)^3 = \\
&= |x|^3 + |y|^3 + 3|xy|(|x| + |y|).
\end{aligned}$$

Mà $x^3 \leq |x|^3$, nên ta có

$$|xy|(|x| + |y|) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

• Nếu $x = 0$ thì thay vào (1) và (2), ta được $m = 0$ và $y = 0$.

• Nếu $y = 0$ thì thay vào (1) và (2) ta được $m = 0$ và $x = 0$.

Vậy nếu hệ có nghiệm thì $m = 0$ và từ đó chỉ có một nghiệm $x = 0, y = 0$.

Kết luận : Nếu $m \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m = 0$ thì nghiệm của hệ là $x = 0; y = 0$

Thí dụ 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} |x+1| + |y-3| = m \\ |y+1| + |x-3| = m \end{cases}$$

Lời giải. Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$;

Ta thấy

$$\begin{aligned}
&|(2-x_0)+1| + |(2-y_0)-3| \\
&= |3-x_0| + |-y_0-1| \\
&= |y_0+1| + |x_0-3| = m \\
&\text{và } |(2-y_0)+1| + |(2-x_0)-3| \\
&= |3-y_0| + |-x_0-1| = |x_0+1| + |y_0-3| = m.
\end{aligned}$$

Từ đó nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì hệ cũng có nghiệm $(2-x_0; 2-y_0)$. Để hệ có nghiệm duy nhất thì hai nghiệm này phải trùng nhau, tức là

$$\begin{cases} x_0 = 2-x_0 \\ y_0 = 2-y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Với $x_0 = y_0 = 1$ ta suy ra $m = 4$.

Nếu $m = 4$ thì dễ thấy $x = y = 1$ và $x = y = 3$ là nghiệm của hệ.

Kết luận : Không tồn tại m để hệ có nghiệm duy nhất.

III. Bất đẳng thức có dấu giá trị tuyệt đối

Thí dụ 1. Chứng minh rằng nếu $t \neq 0$ thì

$$\left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2.$$

Lời giải. Xét hiệu

$$\begin{aligned}
\left|t + \frac{1}{t}\right| - 2 &= \left|\frac{t^2+1}{t}\right| - 2 = \frac{t^2+1}{|t|} - 2 \\
&= \frac{t^2+1-2|t|}{|t|} = \frac{(|t|-1)^2}{|t|} \geq 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2$.

Thí dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$F(x) = |x-1| + |2x-4| + |3x-9| + |4x-16| + |5x-25|$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
F(x) &= (|x-1| + |2x-4| + |3x-9| + |4x-16| + |5x-25|) \\
&\geq (x-1) + (2x-4) + (3x-9) + (4x-16) + (5x-25) \\
&= 15 + 3x - 41 \geq 15.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $F(4) = 15$. Suy ra $\min F(x) = 15$.

Thí dụ 3. Biết rằng đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $|f(1)| \leq 1$, $|f(-1)| \leq 1$ và $|f(0)| \leq 1$.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Lời giải. Ta có $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$;

$$f(-1) = a - b + c. \text{ Suy ra :}$$

$$2a = f(1) + f(-1) - 2f(0);$$

$$2b = f(1) - f(-1).$$

Thay vào $f(x)$ ta được

$$f(x) = f(1) \cdot \frac{x(1+x)}{2} + f(0) \cdot (1-x^2) - f(-1) \cdot \frac{x(1-x)}{2}$$

Suy ra, với mọi $x \in [-1; 1]$ ta có

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| f(1) \cdot \frac{x(1+x)}{2} \right| + |f(0) \cdot (1-x^2)| \\ &+ \left| f(-1) \cdot \frac{x(1-x)}{2} \right| \\ &= |f(1)| \cdot \left| \frac{x(1+x)}{2} \right| + |f(0)| \cdot |1-x^2| + |f(-1)| \cdot \left| \frac{x(1-x)}{2} \right| \\ &\leq \frac{|x(1+x)|}{2} + |1-x^2| + \frac{|x(1-x)|}{2} = \\ &= 1-x^2 + \frac{|x|}{2} (|1+x| + |1-x|) = \\ &= 1-x^2 + \frac{|x|}{2} (1+x+1-x) = 1-x^2 + |x| \\ &= \frac{5}{4} - \left(|x| - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Thí dụ 4. Biết đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Chứng minh rằng

$$|a| + |b| + |c| \leq 3.$$

Lời giải. Quy ước rằng số 0 có thể mang dấu + hoặc dấu -.

Xét các trường hợp có thể xảy ra :

• Nếu cả ba số a, b, c cùng dấu thì $|a| + |b| + |c| = |a + b + c| = |f(1)| \leq 1$.

• Nếu a trái dấu với b và c thì

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= |-a| + |b| + |c| = \\ &= |-a + b + c| = |2f(0) - f(-1)| \leq 2|f(0)| + |f(-1)| \leq 3. \end{aligned}$$

• Nếu b trái dấu với a và c thì

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= |a| + |-b| + |c| = |a - b + c| = \\ &= |f(-1)| \leq 1. \end{aligned}$$

• Nếu c trái dấu với a và b thì

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= |a| + |b| + |-c| = |a + b - c| = \\ &= |f(1) - 2f(0)| \leq |f(1)| + 2|f(0)| \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy ta luôn có $|a| + |b| + |c| \leq 3$.

Sau khi đã xét các thí dụ trên, mời các bạn làm các bài tập sau đây.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $F(x) = |x + 1| + 2|x + 2| - 3|x + 3|$.

Bài 2. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Đặt $g(x) = cx^2 + bx + a$.

Chứng minh rằng $|g(x)| \leq 2$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Bài 3. Tìm a, b để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} 2|x| + y = a \\ x^2 + y = b \end{cases}$$

Bài 4. Tìm a, b sao cho $|2x^2 + ax + b| \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG $|A| \leq \alpha$

NGUYỄN ĐỀ (Hải Phòng)

Bài viết này đề cập bất đẳng thức dạng $|A| \leq \alpha$, trong đó α là một số, còn A là đa thức hoặc A là biểu thức đại số có chứa phân thức. Những thí dụ nêu ra chỉ được giải bằng kiến thức thuộc cấp THCS.

Thí dụ 1.

Cho $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$.

Chứng minh rằng

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq 1.$$

Lời giải. Để ý thấy rằng

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) &= \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + \\ &+ \dots + (a_1 b_n - a_n b_1)^2 + \dots + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Bởi vậy $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq 1$. Suy ra $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq 1$.

Thí dụ 2. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $m^2 + n^2 = 1$

Chứng minh rằng

$$|am + bn + c| \leq \sqrt{2}.$$

Lời giải. Bài toán được giải tương tự Thí dụ

1 khi thay $m^2 + n^2 = 1$ bởi $m^2 + n^2 + 1 = 2$.

Thí dụ 3. Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$, thì $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (1)

$$1 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $(x + y)^2 \leq 2$. Suy ra

$$|x + y| \leq \sqrt{2}.$$

Thí dụ 4. Cho $x^2 + 4y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$|x - y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

Kí hiệu $x - y = a$, suy ra $y = x - a$ (4)

Thay (4) vào (3) ta được phương trình với ẩn số x như sau :

$$5x^2 - 8ax + 4a^2 - 1 = 0$$

$\Delta = 5 - 4a^2$. Phương trình trên có nghiệm khi $\Delta \geq 0$ hay $5 - 4a^2 \geq 0$. Từ đó suy ra $|a| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ hay $|x - y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ (đpcm).

Qua thí dụ trên ta thử đặt vấn đề rằng khi nào việc chứng minh bất đẳng thức dạng $|A| \leq \alpha$ được đưa về tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm.

Thí dụ 5. Với x, y, z là độ dài các cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right| < \frac{1}{8}.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh đẳng thức

$$\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = \frac{(x-z)(y-z)(x-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (5)$$

Kí hiệu vế trái của (5) là A và biến đổi $x - y = (x - z) - (y - z)$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(y+z)(x+z)[(x-z)-(y-z)]}{(x+y)(y+z)(z+x)} + \\ &+ \frac{(y-z)(x+y)(x+z) + (z-x)(x+y)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{(x-z)(y-z)(x-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}. \end{aligned}$$

Đến đây ta thấy (5) đúng, từ đó suy ra

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right| = \left| \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{y-z}{y+z} \cdot \frac{z-x}{z+x} \right| \quad (6)$$

Mặt khác $|x - y| < z$, $|y - z| < x$, $|z - x| < y$,
bởi vậy

$$\left| \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{y-z}{y+z} \cdot \frac{z-x}{z+x} \right| < \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (7)$$

Lại có $\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$ (8), $\frac{\sqrt{xz}}{x+z} \leq \frac{1}{2}$ (9)

$$\frac{\sqrt{yz}}{y+z} \leq \frac{1}{2} \quad (10)$$

và $\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{xz}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Từ (6), (7), (8), (9), (10) suy ra

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right| < \frac{1}{8} \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 6. Chứng minh rằng với mọi $x \in [-1; 1]$
có bất đẳng thức $|ax^2 + bx + c| \leq h$ thì

$$|a| + |b| + |c| \leq 4h.$$

Lời giải. Bài toán này không trực tiếp chứng minh bất đẳng thức $|A| \leq \alpha$, nhưng đã sử dụng kiện thức có liên quan đến bất đẳng thức đó để giải bài toán trong trường hợp phức tạp hơn.

Thật vậy, với các giá trị $x = 0, -1, 1$ ta có :

• Với $x = 0$ thì $|c| \leq h$ (11)

• Với $x = 1$ thì $|a + b + c| \leq h$ (12)

• Với $x = -1$ thì $|a - b + c| \leq h$.

Từ (12) và (13) suy ra $-h \leq a + b + c \leq h$ (14)

$$-h \leq a - b + c \leq h \quad (15)$$

Từ (14) và (15) ta được $-h \leq a + c \leq h$ (16)

Mặt khác lại có thể viết (14), (15) như sau :

$$-h \leq a + b + c \leq h$$

$$h \geq a - b + c \geq -h$$

Dẫn đến $|b| \leq h$ (17)

Từ (11) và (16) ta có $-h \leq a + c \leq h$ (18)

$$h \geq c \geq -h \quad (19)$$

Từ (18), (19) có $|a| \leq 2h$ (20)

Từ (11), (17), (20) ta được

$$|a| + |b| + |c| \leq 4h \text{ (đpcm).}$$

ĐÔI ĐIỀU VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH Ở CẤP TRUNG HỌC CƠ SỞ

TRỊNH VINH NGỌC (Hà Tĩnh)

Trong các kì thi học sinh giỏi THCS, học sinh thường gặp các bài toán giải phương trình và hệ phương trình mà cách giải không bình thường. Để giúp các bạn tìm hiểu vấn đề đó, bài viết này xin bàn đôi điều về một phương pháp giải loại phương trình trên.

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định tương ứng là D_f , D_g . Xét phương trình $f(x) = g(x)$ (1) với tập xác định $D = D_f \cap D_g$.

Nếu $\begin{cases} f(x) \geq m \\ g(x) \leq m \end{cases}$ với mọi $x \in D$, m là hằng số

thì phương trình (1) tương đương với hệ $\begin{cases} f(x) = m \\ g(x) = m \end{cases}$ (2)

Nếu tồn tại $x_0 \in D$ thỏa mãn (2) thì x_0 là nghiệm của (1).

Để giải một phương trình cho trước theo phương pháp trên, vấn đề mấu chốt là phải đưa được phương trình đó về dạng (1) mà việc tìm min $f(x)$ và max $g(x)$ không gặp khó khăn. Sau đây là một số bài toán.

Bài toán 1. Giải phương trình

$$6x - x^2 - 2 = |x - 1| + |x - 2| + |2x - 3| + |4x - 13| \quad (3)$$

Lời giải. Ta có thể giải (3) bằng cách lập bảng xét dấu vế phải của (3), từ đó suy ra nghiệm. Song cách này tương đối dài, mất nhiều thời gian.

Áp dụng cách trên ta xét hai vế của (3).

• Xét vế phải của (3)

$$|x - 1| + |x - 2| + |2x - 3| + |4x - 13| \geq$$

$$|x - 1 + x - 2 + 2x - 3 + 13 - 4x| = 7.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 1$, $x - 2$, $2x - 3$, $13 - 4x$ cùng không âm hoặc cùng không dương. Từ đó tìm được $2 \leq x \leq \frac{13}{4}$.

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{13}{4}.$$

• Xét vế trái của (3)

$$6x - x^2 - 2 = 7 - x^2 + 6x - 9 = 7 - (x - 3)^2 \leq 7$$

$$\Rightarrow \max (6x - x^2 - 2) = 7 \text{ và đạt được khi } x = 3.$$

Do $x = 3 \in \left[2; \frac{13}{4}\right]$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1) \quad (4)$$

Lời giải. Nếu khai triển vế trái của (4) thì ta được phương trình bậc bốn đủ, nên khó tìm nghiệm bằng kiến thức ở THCS.

Áp dụng cách trên như sau.

Vì $x = -1$ không phải là nghiệm của (4) nên

$$(4) \Leftrightarrow \frac{8x - 4x^2 - 1}{4} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

• Xét hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ ($x \neq -1$). Để

dùng tìm được min $y = \frac{3}{4}$ đạt được khi $x = 1$.

• Mặt khác $\frac{8x - 4x^2 - 1}{4} = -x^2 + 2x - 1 + \frac{3}{4}$

$$= \frac{3}{4} - (x - 1)^2 \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \max \left(\frac{8x - 4x^2 - 1}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

đạt được khi $x = 1$.

Từ đó phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 3. Tìm x thỏa mãn phương trình

$$-16x^4 + 72x^3 - 81x^2 + 28 - 16(x - \sqrt{x - 2}) = 0 \quad (5)$$

Lời giải. Nếu đặt $\sqrt{x - 2} = t \geq 0$, thế $x = t^2 + 2$ vào (5) thì ta được một phương trình bậc 8. Để giải phương trình này phải có kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử hay tìm nghiệm đa thức. Để áp dụng cách trên đặt $\sqrt{x - 2} = t \geq 0$. Khi đó $x = 2 + t^2$ và $x - \sqrt{x - 2} = x - 2 - \sqrt{x - 2} + 2 = t^2 - t + 2$.

• Xét $f(t) = t^2 - t + 2$ với $t \in [0; +\infty)$ thì min $f(t) = \frac{7}{4}$, đạt được khi $t = \frac{1}{2}$ hay

$$\min_{x \in [2; +\infty)} (x - \sqrt{x - 2}) = \frac{7}{4} \text{ khi } x = \frac{9}{4}.$$

• Mặt khác $\frac{-16x^4 + 72x^3 - 81x^2 + 28}{16} =$

$\frac{7}{4} - \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 x^2 \leq \frac{7}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có $x = \frac{9}{4}$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

Lời giải. Nếu trong ba số x, y, z có đúng một số âm hoặc cả ba số đều âm thì $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} < 0$ nên không thỏa mãn phương trình.

Vì vậy trong ba số x, y, z thì cả ba số đều dương hoặc hai trong ba số là âm, ta có

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = \frac{|x||y|}{|z|} + \frac{|y||z|}{|x|} + \frac{|z||x|}{|y|}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{|x||y||z|} = 3\sqrt[3]{|xyz|} \geq 3.$$

$$\min A = 3 \text{ đạt được khi } |x| = |y| = |z| = 1.$$

Vậy nghiệm nguyên $(x; y; z)$ của phương trình là :

$$(1; 1; 1); (1; -1; -1); (-1; -1; 1); (-1; 1; -1).$$

Bài toán 5. Tìm m để hệ sau có nghiệm x, y, z đều dương :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = 9m \\ xyz = m \end{cases}$$

Giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương x, y, z ta có

$$1 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{m} \Rightarrow m \leq \frac{1}{27} \quad (6)$$

$$9m = xy + yz + xz \geq 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} = 3\sqrt[3]{m^2} \Rightarrow m \geq \frac{1}{27} \quad (7).$$

Từ (6), (7) phải có $m = \frac{1}{27}$.

Ngược lại với $m = \frac{1}{27}$, ta thấy ngay hệ đã cho có nghiệm $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy $m = \frac{1}{27}$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Như vậy, vận dụng phương pháp này ta không chỉ giải được phương trình dạng căn thức, phương trình bậc cao một cách nhanh gọn mà còn xét được một số hệ phương trình. Các bạn học sinh THCS còn được gặp lại phương pháp này khi giải các loại phương trình, hệ phương trình phong phú và đa dạng hơn ở các lớp THPT.

BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC CHỨA DẤU CĂN

PHAN NGỌC THẢO (Trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Chương I là chương khó của Đại số lớp 9, các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất có chứa dấu căn thường hay gặp trong các kì thi tuyển sinh vào lớp 10 và các kì thi học sinh giỏi. Dưới đây là một số dạng toán thường gặp và

một số vấn đề mà học sinh hay sai sót. Trong bài này khi nói về giá trị nhỏ nhất (min), giá trị lớn nhất (max) của biểu thức $P(x, y, z)$ ta hiểu rằng các biến x, y, z thuộc tập số T sao cho $P(x, y, z)$ có giá trị xác định.

A. Cơ sở lý thuyết

Xét biểu thức $P(x, y)$ với các biến x, y thuộc tập xác định T . Để chứng minh

$\min P(x, y) = a$ (a là hằng số) với mọi x, y thuộc tập T , ta chứng minh hai phần

1. $P(x, y) \geq a$ với mọi x, y thuộc T .

2. Có (x_0, y_0) sao cho $P(x_0, y_0) = a$.

Chứng minh tương tự với $\max P(x, y) = a$, chỉ cần đổi dấu $\geq$ thành dấu $\leq$.

Các dạng thường gặp là :

a) $P(x, y) = [Q(x, y)]^{2n} + a \geq a$ với a là hằng số, $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Nếu có (x_0, y_0) sao cho $Q(x_0, y_0) = 0$ thì $\min P(x, y) = a$ với mọi x, y thuộc T .

b) $P(x, y) = -[Q(x, y)]^{2n} + b \leq b$ với b là hằng số, $n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Nếu có (x_0, y_0) sao cho $Q(x_0, y_0) = 0$ thì $\max P(x, y) = b$ với mọi x, y thuộc T .

Ta vận dụng điều trên vào việc tìm GTNN, GTLN của biểu thức có chứa dấu căn với các chú ý sau.

1. Ở công thức (1) nếu $a \geq 0$ thì

$\min \sqrt{P(x, y)} = \sqrt{a}$ với x, y thuộc T .

Ở công thức (2) nếu $P(x, y) \geq 0$ và $b \geq 0$ thì

$\max \sqrt{P(x, y)} = \sqrt{b}$ với x, y thuộc T .

2. Vận dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a + b|$

Dấu bằng xảy ra khi $ab \geq 0$.

3. Nếu $M \geq 0$ muốn tìm GTNN, GTLN của M ta tìm GTNN, GTLN của M^2 .

B. Bài tập áp dụng

Bài 1. Tìm GTNN các biểu thức sau với $x \in \mathbb{R}$.

1) $D = \sqrt{(x-1996)^2} - \sqrt{(x-1997)^2}$

2) $F = -\frac{1}{x + \sqrt{x+1}}$

Hướng dẫn giải.

1) $D = |x-1996| + |x-1997|$

Cách 1. Xét các khoảng giá trị của x .

• Với $x < 1996$ thì $D = 1996 - x + 1997 - x = 3993 - 2x > 1$.

• Với $1996 \leq x \leq 1997$ thì $D = 1$.

• Với $x > 1997$ thì $D = 2x - 3993 > 1$.

Do đó $D_{\min} = 1$ xảy ra khi $1996 \leq x \leq 1997$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu bằng xảy ra khi $ab \geq 0$.

$$D = |x-1996| + |1997-x| \geq |x-1996+1997-x| = 1.$$

$D_{\min} = 1$ xảy ra khi $(x-1996)(1997-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1996 \leq x \leq 1997$.

2) $F = -\frac{1}{x + \sqrt{x+1}}$. Nhận xét: $x \geq 0$.

Cách 1. Vì $F < 0$ nên xảy ra $\min_{x \geq 0} F$

$$\Leftrightarrow \max_{x \geq 0} \left\{ \frac{1}{x + \sqrt{x+1}} \right\} \Leftrightarrow \min_{x \geq 0} \{x + \sqrt{x+1}\} \Leftrightarrow \min_{x \geq 0} \{x\}.$$

Vì $x \geq 0$ nên $\min_{x \geq 0} \{x\} = 0$.

Vậy $F_{\min} = -1$ xảy ra khi $x = 0$.

Cách 2. $\frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \leq 1$ vì $x \geq 0$, do đó $-\frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \geq -1$

Vậy $F_{\min} = -1$ xảy ra khi $x = 0$.

Bài 2. Tìm GTLN của biểu thức

$$K = \frac{yz\sqrt{x-1} + xz\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$$

Hướng dẫn giải.

$$K = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y} + \frac{\sqrt{z-3}}{z} \quad \text{với điều}$$

kiện $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta được :

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{1(x-1)} \leq \frac{1+x-1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{y-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(y-2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2+y-2}{2} = \frac{y}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{z-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3(z-3)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3+z-3}{2} = \frac{z}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó } K \leq \frac{x}{2x} + \frac{y}{2\sqrt{2}y} + \frac{z}{2\sqrt{3}z}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Vậy $K_{\max} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ xảy ra khi $x = 2, y = 4, z = 6$.

Bài 3. Xét biểu thức

$$P = \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+2}{1-a^3}.$$

a) Rút gọn P .

b) Tìm GTNN của P .

Hướng dẫn giải. Điều kiện : $a \geq 0, a \neq 1$.

$$\text{a) } P = -\frac{1}{a^2+a+1}.$$

b) Vì $P < 0$ nên xảy ra

$\min_{0 \leq a \neq 1} P \Leftrightarrow \min_{0 \leq a \neq 1} \{a^2+a+1\}$. Điều này xảy ra khi $a = 0$.

Kết luận : $P_{\min} = -1$ xảy ra khi $a = 0$.

Chú ý : Một số học sinh nhầm lẫn, quên điều kiện $a \geq 0$ nên đã giải :

$$P = -\frac{1}{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq -\frac{4}{3}$$

suy ra $P_{\min} = -\frac{4}{3}$ xảy ra khi $a = -\frac{1}{2}$.

Bài 4. Tìm GTNN của các biểu thức :

$$\text{a) } H = \frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{b) } K = \sqrt{x+2(1+\sqrt{x+1})} + \sqrt{x+2(1-\sqrt{x+1})}.$$

Hướng dẫn giải.

$$\text{a) } H = \frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ xác định khi } -1 < x < 1 \Rightarrow$$

$H > 0$.

$$\text{Ta có } H^2 = \left(\frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 = \frac{25-30x+9x^2}{1-x^2} =$$

$$\frac{9-30x+25x^2+16-16x^2}{1-x^2} = \frac{(3-5x)^2}{1-x^2} + 16 \geq 16.$$

Vậy $H_{\min} = 4$ khi $x = \frac{3}{5}$.

b) Điều kiện : $x \geq -1$.

$$K = \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$$

$$= |\sqrt{x+1}+1| + |\sqrt{x+1}-1|$$

$$= |\sqrt{x+1}+1| + |1-\sqrt{x+1}|$$

$$\geq |\sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}| = 2.$$

$$K_{\min} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+1)(1-\sqrt{x+1}) \geq 0.$$

Vì $\sqrt{x+1}+1 > 0$ nên $1-\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Vậy $K_{\min} = 2$ xảy ra khi $-1 \leq x \leq 0$.

Bài 5. a) Cho hai số thực a, b với $a < b$

Tìm GTNN của

$$S = |x-a| + |x-b| \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

b) Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ với

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n.$$

$$\text{Tìm GTNN của } S_n = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_n|$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta phân biệt ba trường hợp :

• Nếu $x < a$ ta có

$$S = a-x+b-x = b-a+2(a-x) > b-a$$

vì $a-x > 0$.

• Nếu $a \leq x \leq b$ ta có

$$S = x-a+b-x = b-a.$$

• Nếu $x > b$ ta có

$$S = b-a+2(x-b) > b-a \text{ (vì } x-b > 0)$$

Vậy $S_{\min} = b-a$ xảy ra khi $a \leq x \leq b$.

b) Ta xét hai trường hợp :

• Với $n = 2p$ (chẵn) ; $p \in \mathbb{N}^*$.

Ta viết

$$S_{2p} = (|x - a_1| + |x - a_{2p}|) + (|x - a_2| + |x - a_{2p-1}|) + \dots + (|x - a_p| + |x - a_{p+1}|).$$

Theo a) ta có

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (|x - a_1| + |x - a_{2p}|) = a_{2p} - a_1$$

khi $a_1 \leq x \leq a_{2p}$;

$$\max_{x \in \mathbb{R}} (|x - a_2| + |x - a_{2p-1}|) = 2a_{p-1} - a_2$$

khi $a_2 \leq x \leq a_{2p-1}$;

.....

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (|x - a_p| + |x - a_{p+1}|) = a_{p+1} - a_p$$

khi $a_p \leq x \leq a_{p+1}$.

$$\forall x \in [a_p; a_{p+1}] \subset \dots \subset [a_2, a_{2p-1}] \subset [a_1, a_{2p}]$$

nên khi $x \in [a_p; a_{p+1}]$ thì

$$\min_{x \in \mathbb{R}} S_{2p} = (a_{2p} - a_1) + (a_{2p-1} - a_2) + \dots$$

$$+ (a_{p+1} - a_p) \text{ hay}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} S_{2p} = (a_{2p} + a_{2p-1} + \dots + a_{p+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_p).$$

• Với $n = 2p + 1$ (lẻ) ; $p \in \mathbb{N}^*$.

Tương tự như trên ta viết

$$S_{2p+1} = (|x - a_1| + |x - a_{2p+1}|) +$$

$$+ (|x - a_2| + |x - a_{2p}|) + \dots$$

$$+ (|x - a_p| + |x - a_{p+2}|) + |x - a_{p+1}|$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} S_{2p+1} = (a_{p+1} + a_{2p} + \dots + a_{p+2}) -$$

$$- (a_1 + a_2 + \dots + a_p)$$

khi $x = a_{p+1}$ (a_{p+1} là số hạng đứng giữa trong dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$).

Người viết bài này hi vọng làm sáng tỏ một phần nào những thắc mắc về các bài toán cực trị vốn rất phong phú và phức tạp.

SUY LUẬN HỢP LÍ TRONG LỜI GIẢI CÓ VẼ THIẾU TỰ NHIÊN

VŨ ĐỨC (Ninh Bình)

Khi xem xét lời giải của một bài toán thường xuất hiện câu hỏi : Tại sao người ta lại nghĩ ra cách giải như vậy ? Có những lời giải xem ra *thiếu tự nhiên*, có phải do sự may mắn trong quá trình tìm kiếm cách giải hay chúng bắt nguồn từ sự suy luận hợp lí trên cơ sở phân tích các giả thiết của bài toán. Sau đây là một vài thí dụ minh hoạ .

Thí dụ 1. (Bài T3/255). *Chứng minh rằng với các số dương a, b, c thì*

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c.$$

Dạng bất đẳng thức trong bài toán gợi ý ta thử dùng phương pháp đánh giá một hạng tử ở vế trái.

Căn cứ vào bậc của tử (bậc ba) và bậc của mẫu (bậc hai) ta có thể dự đoán, có các bất đẳng

$$\text{thức dạng : } \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq xa + yb \quad (1)$$

$$\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq xb + yc \quad \text{và} \quad \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq xc + ya.$$

Từ đó, cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta có vế phải là $(x + y)(a + b + c)$. Nếu chọn được x, y sao cho $x + y = 1$ và các bất

đăng trên đúng là bài toán giải quyết xong. Ta thế $y = 1 - x$ thì (1) trở thành

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq x.a + (1-x)b. \quad (2)$$

Thử các giá trị đặc biệt của a, b ta thấy có thể chọn $x = -1$ thì (2) đúng và dự đoán

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a \quad (3) \text{ với mọi số dương } a, b.$$

Việc chứng minh (3) xin dành cho các bạn. Tất nhiên lời giải sẽ bắt đầu bởi một câu có vẻ thiếu tự nhiên: "Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3)" (!).

Bằng cách suy nghĩ tương tự, có thể giải được bài toán sau.

Cho các số dương a, b, c , chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

(Hãy suy luận hợp lí để tìm ra BĐT

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4} \text{ với } a, b > 0).$$

Thí dụ 2. Cho các số dương a, b, c và $a^2 + b^2 + c^2 = 27$, chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \geq 81$.

Vai trò bình đẳng của a, b, c gọi ta dự đoán dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi $a = b = c = 3$.

Ta cần tìm một bất đẳng thức thể hiện quan hệ giữa $a^2 + b^2 + c^2$ và $a^3 + b^3 + c^3$. Từ sự chênh lệch số mũ của a^3 và a^2 ta nghĩ đến áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương a^3 , a^3 và hằng số k . Nhưng cần chọn k là số nào? Để ý rằng dấu bằng trong bất đẳng thức Cauchy xảy ra khi $a = b = c$, lúc đó $3a^2 = 27 \Rightarrow a = 3$. Do đó ta nghĩ đến thử chọn $k = 3^3 = 27$.

$$\text{Ta có } a^3 + a^3 + 27 \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot 27} = 9a^2.$$

$$\text{Tương tự } b^3 + b^3 + 27 \geq 9b^2$$

$$c^3 + c^3 + 27 \geq 9c^2.$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \cdot 27 \geq 9(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Suy ra } a^3 + b^3 + c^3 \geq 81.$$

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$4x^2 + \sqrt{2x+1} + 5 = 12x.$$

Nhờ kinh nghiệm giải một số bài tương tự, ta thử chuyển phương trình này thành hệ phương trình đối xứng loại hai bằng cách đặt $\sqrt{2x+1} = ax + b$ với tham số a, b nào đó.

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} 4x^2 + ay + b + 5 = 12x \\ 2x + 1 = (ay + b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + ay + b + 5 = 0 \\ a^2y^2 + 2aby - 2x + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Xác định a, b sao cho hệ trên là hệ đối xứng loại hai, tức là

$$\frac{a^2}{4} = \frac{2ab}{-12} = \frac{-2}{a} = \frac{b^2 - 1}{b + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy, nếu đặt $\sqrt{2x+1} = -2y + 3$ với điều kiện $-2y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2}$, ta có hệ

$$\begin{cases} 4x^2 - 2y + 3 + 5 = 12x \\ 2x + 1 = (-2y + 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - y + 4 = 0 \\ 2y^2 - 6y - x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 6x - y + 4) - (2y^2 - 6y - x + 4) = 0 \\ 2x^2 - 6x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(2x + 2 - 5) = 0 \\ 2x^2 - 6x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

Đến đây việc giải phương trình đã cho không còn mấy khó khăn.

Qua một số thí dụ trên có thể thấy những lời giải thiếu tự nhiên cũng nhiều khi là xuất phát từ sự tìm tòi, khai thác giả thiết kết hợp với việc nhận xét, đánh giá để đưa ra những dự đoán hợp lí, rồi chứng minh các bài toán trung gian đơn giản.

MỘT SỐ CHÚ Ý KHI GIẢI TOÁN TÌM CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

HUỖNH VĂN TRỌNG (Bình Định)

Trong đại số các bài toán cực trị có một vị trí khá quan trọng. Đã có rất nhiều tài liệu, sách, báo nói về vấn đề này. Bài này trình bày một số sai lầm thường thấy của học sinh khi tìm cực trị của biểu thức chứa biến và một vài dạng toán tìm cực trị đại số.

Xét biểu thức chứa biến $P(x)$, $P(x, y)$... Ta kí hiệu giá trị lớn nhất của biểu thức P trên tập xác định của biến là GTLN (P) hay $\max P$, còn giá trị nhỏ nhất của P là GTNN (P) hay $\min P$.

I. Các kiến thức thường dùng

1) Cho $P = A + B$ thì $\max P = \max A + \max B$ và $\min P = \min A + \min B$.

trong đó A và B là các biểu thức chứa các biến độc lập với nhau, hoặc nếu A và B chứa cùng biến thì cùng đạt GTLN (GTNN) tại một giá trị xác định $x = x_0$, tức là $\max A = A(x_0)$, $\max B = B(x_0)$ thì $\max P = P(x_0)$.

2) Cho $P = \frac{1}{A}$ với $A > 0$ thì $\max P = \frac{1}{\min A}$

3) a) $\sum_{i=1}^n (f(x_i))^{2k} + m \geq m$

b) $M - \sum_{i=1}^n (f(x_i))^2 \leq M$

với mọi $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$

4) $A \geq 0$ thì $\max(A^2) = (\max A)^2$ và $\min(A^2) = (\min A)^2$.

5) Các dạng của bất đẳng thức Cauchy :

a) $a + b \geq \sqrt{2ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ($ab > 0$).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

6) Bất đẳng thức Bunyakovski :

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx$.

Cần chú ý rằng sau khi tìm được giá trị của biến để biểu thức P đạt cực trị cần thử lại xem P có đạt cực trị tại đúng giá trị đó không và giá trị đó của biến có thoả mãn các điều kiện giả thiết không.

II. Những sai sót thường gặp khi giải toán tìm cực trị đại số

Bài toán 1. Giả sử hai số thực x, y thoả mãn $x > y$ và $xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Lời giải. Ta có $A = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2xy}{x - y}$.

Do $x > y$ và $xy = 1$ nên

$$A = \frac{(x - y)^2}{x - y} + \frac{2xy}{x - y} = x - y + \frac{2}{x - y}.$$

$$\text{Theo (5b)} \quad A = \frac{x - y}{2} + \frac{2}{x - y} + \frac{x - y}{2}$$

$$\geq 2 + \frac{x - y}{2} \quad (*)$$

Vậy A có giá trị nhỏ nhất khi

$$\frac{x - y}{2} + \frac{2}{x - y} = 2$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + 4 = 4(x - y)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 - 4(x - y) + 4 = 0.$$

Giải phương trình được $x - y = 2$, mà $xy = 1$ nên $(x; y)$ là $(1 + \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$ và $(1 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2})$

$$\Rightarrow \min A = \frac{x - y}{2} + 2 = \frac{2}{2} + 2 = 3.$$

Bài giải trên là sai. Có thể biến đổi như sau :

$$A = x - y + \frac{2}{x - y} = \sqrt{2} \left(\frac{x - y}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x - y} \right) \geq 2\sqrt{2}.$$

Kết quả đúng là $\min A = 2\sqrt{2}$ khi (x, y) là

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}; \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right);$$

$$\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}; \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \right)$$

Vậy sai lầm của bài giải trên là biến đổi đến (*) thì $2 + \frac{x - y}{2}$ không phải là hằng số mà còn phụ thuộc vào biến x, y .

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

Có học sinh đã giải $P = (x^2 + x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \min P = 0$. Điều này không xảy ra vì không có giá trị nào của x làm cho $P(x) = 0$.

Có học sinh khác đã giải :

$$P = x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x^2 + 2x + 1$$

$$= x^2(x + 1)^2 + 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{1}{2}.$$

Dễ thấy đáp số này sai vì lúc đó x đồng thời bằng -1 và bằng $-\frac{1}{2}$.

Cách giải đúng như sau : $P = (x^2 + x + 1)^2$.

$$\text{Vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ mà } x^2 + x + 1 > 0 \text{ nên } \min(x^2 + x + 1) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau với $x \geq 0, y \geq 0$.

$$P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 1977.$$

Có học sinh đã giải như sau :

$$P = \frac{1}{3}[(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2] + \frac{5986}{3}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{5986}{3}. \text{ Đáp số này sai vì không thể } x = 1 \text{ và } x = 4.$$

Cách giải đúng như sau :

$$3P = 3x - 6\sqrt{xy} + 9y - 6\sqrt{x} + 5991$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{3}\left[(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^2 + 2\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)^2\right] + \frac{3991}{2}$$

$$\geq \frac{3991}{2}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{3991}{2} \text{ khi } \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{3}{2} = 0 \\ \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0 \end{cases}$$

$$\text{tức là } (x; y) \text{ bằng } \left(\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

III. Biến đổi một bài toán cực trị

Khi giải một bài toán cực trị ta có thể quy về bài toán gốc đơn giản hơn, hoặc ngược lại từ một bài toán gốc có thể sáng tạo ra bài toán mới phức tạp hơn.

Bài toán 1. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 = 1. \text{ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của } x + y.$$

Lời giải. Từ $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2$ dẫn đến :

$$\max(x + y) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{và } \min(x + y) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Từ bài toán trên có thể biến đổi thành các bài toán khác như sau :

Bài toán 1.1 Cho $x^2 + 4y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$S = x + 2y.$$

Bài toán 1.2. Cho $4x^2 + 9y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $S = 2x + 3y$ với $x \geq 0, y \geq 0$.

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

Hướng dẫn giải. Xét A^2 với $2 \leq x \leq 4$.

Bài toán 2.1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{6-2x}$.

Hướng dẫn giải. B xác định khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 3$. Áp dụng BĐT Cauchy khi viết $B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{3-x}$.

Bài toán 2.2. Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$$

Hướng dẫn giải. Điều kiện : $2 \leq x \leq 4$. Từ bài toán 2 có $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$. Mặt khác $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$. Suy ra $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x, y, z) = \frac{yz\sqrt{x-1} + xz\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$$

trên miền $D = \{(x, y, z) : x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3\}$

Lời giải.

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y} + \frac{\sqrt{z-3}}{z}.$$

Vận dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng cặp số sau :

$$\sqrt{x-1} \cdot 1 \leq \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{y-2} \cdot \sqrt{2} \leq \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-2}}{y} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{z-3} \cdot \sqrt{3} \leq \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-3}}{z} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2, y = 4, z = 6$.

Do đó

$$\max_{(x,y,z) \in D} f(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau :

a) $A = \frac{x^4 + y^4}{x^2 - y^2}$ với $x > y$ và $xy = 1$.

b) $B = x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 - x + 1$.

c) $C = x - 2\sqrt{xy} - \sqrt{x} + 2y$ với $x \geq 0, y \geq 0$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2-x}.$$

Bài 3. Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 + \sqrt{(x-2)(4-x)}.$$

MỘT SỐ SAI LẦM KHI GIẢI TOÁN CỰC TRỊ

NGUYỄN VĂN HIẾN (GV THCS Quỳnh Châu, Quỳnh Phụ, Thái Bình)

Giải bài toán cực trị thường đưa về việc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của một biểu thức đại số, trong đó biến số lấy giá trị trong một tập hợp xác định. Dạng toán này rất hấp dẫn nhưng tương đối khó cả về việc tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất

(GTNN) và cả về phương pháp giải. Bài viết này xin nêu ra một số sai lầm khi tìm GTLN, GTNN của một biểu thức $f(x)$ với kiến thức toán ở trường THCS bằng cách biến đổi đại số biểu thức để đưa về các dạng sau .

Dạng 1. a) Tìm GTLN của $f(x)$ khi xét

$f(x) \leq g(x) \leq a$ với a là hằng số.

b) Tìm GTNN của $f(x)$ khi xét $f(x) \geq g(x) \geq a$ với a là hằng số.

Dạng 2. a) Tìm GTLN của $f(x)$ khi viết $f(x) = h(x) + g(x)$ với $h(x) \leq 0$ rồi xét $g(x) \leq a$ với a là hằng số.

b) Tìm GTNN của $f(x)$ khi viết $f(x) = h(x) + g(x)$ với $h(x) \geq 0$ rồi xét $g(x) \geq a$ với a là hằng số.

Làm tương tự đối với trường hợp có hai biến số trở lên.

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1-x-2x^2}.$$

Lời giải. Cách 1. Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi

$$1-x-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(1-2x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức (BĐT) Bunyakovski ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x + 1 \cdot \sqrt{1-x-2x^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \cdot \sqrt{x^2 + (1-x-2x^2)} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{-\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4}} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ đó kết luận rằng khi $x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn

(2) và (1) thì biểu thức $f(x)$ đạt GTLN là $\frac{5}{4}$.

Nhận xét. Gọi biểu thức cuối cùng của (2) là $g(x)$ thì khi $x = -\frac{1}{2}$ có $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ nhưng

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \sqrt{1} = \frac{3}{4} < g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

Sở dĩ có điều này vì dấu bằng ở BĐT Bunyakovski xảy ra khi $\sqrt{1-x-2x^2} = 2x$.

Giải phương trình này với $x \geq 0$ được

$$1-x-2x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 1 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{2}$ và

$x_2 = \frac{1}{3}$, nhưng $x_1 = -\frac{1}{2} < 0$ nên bị loại, còn

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} < \frac{5}{4}$. Vậy theo cách trên không tìm được GTLN của $f(x)$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy ta được

$$\sqrt{1(1-x-2x^2)} \leq \frac{1+(1-x-2x^2)}{2}$$

$$\text{Do đó } f(x) \leq 1-x^2 \leq 1 \quad (3)$$

Từ đó kết luận rằng khi $x = 0$ thỏa mãn (3) và (1) thì biểu thức $f(x)$ đạt GTLN là 1.

Nhận xét. Trong (3) đặt $g(x) = 1-x^2$ thì $g(0) = 1$. Dấu bằng trong BĐT Cauchy xảy ra khi $1-x-2x^2 = 1 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0$ suy ra $x_1 = 0$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\forall f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} < g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow x_2 \text{ bị loại.}$$

Ta đã gặp may khi $f(0) = g(0) = 1$, nghĩa là hai dấu bằng đồng thời xảy ra trong (3), và cách giải này chấp nhận được sau khi tính được $f(0) = 1$.

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x) = 3-2x + \sqrt{5-x^2+4x}.$$

Lời giải. Cách 1. Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi $5-x^2+4x \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(5-x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta được

$$\begin{aligned} f(x) &= 3-2x + \sqrt{1(5-x^2+4x)} \\ &\leq 3-2x + \frac{1+(5-x^2+4x)}{2} = 6 - \frac{x^2}{2} \leq 6 \end{aligned} \quad (5)$$

Biểu thức $g(x) = 6 - \frac{x^2}{2}$ đạt GTLN là 6 khi $x = 0$ và $x = 0$ thỏa mãn (4). Từ đó kết luận rằng GTLN của $f(x)$ là 6.

Nhận xét. Kết luận này không đúng vì

$f(0) = 3 + \sqrt{5} \approx 5,23 < 6$. Sở dĩ có điều đó vì dấu bằng ở BĐT Cauchy xảy ra khi

$$5 - x^2 + 4x = 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 8.$$

Phương trình này có nghiệm $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}$ và $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$, lúc đó $f(2 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \approx 5,65$ và $f(2 + 2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} \approx -5,65$. Như vậy $f(x)$ không thể đạt giá trị là 6 vì hai dấu bằng trong (5) không đồng thời xảy ra.

Cách 2. Áp dụng BĐT Bunyakovski ta được

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + (-2)(x - 2) + \sqrt{1(5 - x^2 + 4x)} \\ &\leq -1 + \sqrt{4 + 1} \cdot \sqrt{(x^2 - 4x + 4)(5 - x^2 + 4x)} \\ &= -1 + \sqrt{45} = 3\sqrt{5} - 1 \approx 5,71 \end{aligned} \quad (6)$$

Đẳng thức xảy ra trong (6) khi

$$(-2)\sqrt{5 - x^2 + 4x} = x - 2.$$

Giải phương trình này với $x - 2 \leq 0$ được $5x^2 - 20x - 16 = 0$. Phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}$ (loại vì $x_1 > 2$) và $x_2 = 2 - \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx -0,68$, nghiệm này thỏa mãn (4).

Vậy GTLN của $f(x)$ là $f\left(2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}\right) = 3\sqrt{5} - 1$.

Nhận xét. Cách giải ở đây là áp dụng BĐT Bunyakovski để sao cho biểu thức trong căn không còn biến số x . Có thể vận dụng BĐT Bunyakovski để giải bài toán 1 bằng cách thay

$$\frac{x}{2} \text{ bởi } -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{4}\right).$$

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 3x$.

Lời giải. Cách 1. Biến đổi như sau

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x^2 - 4x + 2 + x^2 + x - 2 \\ &= (x - 2y)^2 + 2(x - 1)^2 + x^2 + x - 2 \\ &\geq x^2 + x - 2 \text{ với mọi } x \end{aligned} \quad (7)$$

$$\forall x \quad g(x) = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4} \quad (8)$$

khi $x = -\frac{1}{2}$ nên kết luận rằng $f(x, y)$ có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{9}{4}$ khi $x = -\frac{1}{2}$ và $x - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} = -\frac{1}{4}$.

Nhận xét. Dấu bằng xảy ra ở (7) khi $x = 2y$ và $x = 1$, còn dấu bằng xảy ra ở (8) khi $x = -\frac{1}{2}$, như vậy hai dấu bằng xảy ra không đồng thời nên GTNN của $g(x)$ không phải là GTNN của $f(x, y)$.

Cách 2

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 3x = \\ &= 4y^2 - 4xy + x^2 + 3(x^2 - x) \\ &= (2y - x)^2 + 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \geq -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$

lúc đó $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$ là GTNN của $f(x, y)$.

Các bạn hãy giải các bài tập sau đây và nhớ là đừng sai nhé !

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x) = \frac{3x}{2} - \sqrt{3 + 2x - x^2}.$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x, y) = -5x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y - 1.$$

MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

LÊ VĂN TIẾN

Có nhiều phương pháp giải bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một biểu thức. Một trong những phương pháp có hiệu quả là dùng các bất đẳng thức quen thuộc. Nhưng cũng chính phương pháp này dễ gây ra những sai lầm, nếu không nắm vững bản chất của nó.

Xét ví dụ sau đây (Báo Toán học và Tuổi trẻ, tháng 2.1980).

Bài toán 1. Biết rằng $x + y + z = 1$ và x, y, z dương, tìm giá trị lớn nhất của

$$S = xyz(x + y)(y + z)(z + x).$$

• Lời giải trong số báo trên như sau :

$$\left. \begin{aligned} z + (x + y) &\geq 2\sqrt{z(x + y)} \\ x + (y + z) &\geq 2\sqrt{x(y + z)} \\ y + (z + x) &\geq 2\sqrt{y(z + x)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Nhân theo từng vế ta có

$$1 \geq 8\sqrt{xyz(x + y)(y + z)(z + x)} \quad (2)$$

$$\text{Từ đó } S \leq \frac{1}{64} \Rightarrow S_{\max} = \frac{1}{64}.$$

• Nhận xét. Cách giải trên cho đáp số sai vì điều kiện xảy ra dấu bằng của các bất đẳng thức đã dùng không đạt được đồng thời. Cụ thể :

$$S = \frac{1}{64} \text{ đạt được khi và chỉ khi}$$

$$\left\{ \begin{aligned} z &= x + y \\ y &= x + z \\ x &= z + y \\ x + y + z &= 1 \\ x, y, z &> 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= y = z = 0 \\ x + y + z &= 1 \\ x, y, z &> 0 \end{aligned} \right.$$

Như vậy không tồn tại (x, y, z) để tại đó

$$S = \frac{1}{64}. \text{ Do đó không thể kết luận } S_{\max} = \frac{1}{64}.$$

• Lời giải đúng bài toán trên.

Với $x, y, z \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} S &= xyz(x + y)(y + z)(z + x) \\ &\leq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 (x + y)(y + z)(z + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{27}(x + y)(y + z)(z + x) \\ &\leq \frac{1}{27} \left(\frac{(x + y) + (y + z) + (z + x)}{3} \right)^3 = \frac{8}{27^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S \leq \frac{8}{27^2}$$

với mọi x, y, z thoả mãn $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = z \\ x + y = y + z = z + x \\ x + y + z = 1 \\ x, y, z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

$$\text{Kết luận : } S_{\max} = \frac{8}{27^2} \text{ đạt tại } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Nhắc lại định nghĩa $\max f(x, y, \dots, z)$ và $\min f(x, y, \dots, z)$.

1. Định nghĩa. Nếu biểu thức $f(x, y, \dots, z)$ với $x, y, \dots, z$ xác định trên tập hợp D , thoả mãn hai điều kiện sau :

i) $f(x, y, \dots, z) \leq A$ (hay $f(x, y, \dots, z) \geq B$) với mọi $x, y, \dots, z \in D$ với A (hay B) là các hằng số

ii) Tồn tại ít nhất bộ giá trị $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ với $x_0, y_0, \dots, z_0 \in D$ sao cho $f(x_0, y_0, \dots, z_0) = A$ (hay $f(x_0, y_0, \dots, z_0) = B$)

thì A được gọi là giá trị lớn nhất của $f(x, y, \dots, z)$ trên D (hay B được gọi là giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, \dots, z)$ trên D). Khi đó ta kí hiệu :

$$\max f = A ; \min f = B,$$

$$\text{hay } f_{\max} = A ; f_{\min} = B.$$

2. Một số chú ý

a) Nếu không chỉ ra được bộ giá trị $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ để $f(x_0, y_0, \dots, z_0) = A$, thì không khẳng định được $\max f = A$, mặc dù có $f(x, y, \dots, z) \leq A$ với mọi $x, y, z \in D$. Khi đó ta phải tìm một cách giải khác.

b) Bộ giá trị $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ để $f(x_0, y_0, \dots, z_0) = A$, thường được tìm bằng cách áp dụng điều kiện

xảy ra dấu bằng trong các bất đẳng thức đã dùng. Chẳng hạn :

- Bất đẳng thức Cauchy :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

với mọi $a_i \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

c) Trong các bài toán dạng cực trị có điều kiện nếu chỉ chú ý đến điều kiện xảy ra dấu bằng của các bất đẳng thức đã dùng, mà không kết hợp điều kiện ràng buộc của bài toán thì dễ mắc sai lầm.

d) Trong định nghĩa trên, A và B phải là các hằng số.

Thật vậy, xét bài toán sau đây.

Bài toán 2. Cho $x, y, z \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(x, y, z) = xyz(x + y)(y + z)(z + x)$.

- Xét lời giải. Với mọi $x, y, z \geq 0$ ta có

$$f(x, y, z) \leq \left(\frac{x + y + z + (x + y) + (y + z) + (z + x)}{6} \right)^6$$

$$\begin{cases} \text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi} \\ x = y = z = x + y = y + z = z + x \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

tức là $x = y = z = 0$. Khi đó vế phải của bất đẳng thức bằng 0. Suy ra $f(x, y, z) \leq 0$. Vậy $f(x, y, z) = 0$ khi $x = y = z = 0$ (!)

• Nhận xét. Cách giải trên mắc sai lầm ở chỗ là đã sử dụng một mệnh đề sai sau đây : "Nếu $f(x, y, z) \leq g(x_0, y_0, z_0)$ với mọi $x, y, z \in D$ và $f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0) = A$; $x_0, y_0, z_0 \in D$ thì $f(x, y, z) \leq A$ với mọi $x, y, z \in D$ ".

Để bác bỏ mệnh đề trên, ta có thể xét phản thí dụ sau.

Bài toán 3. Cho $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x^2$. Tìm GTLN của $f(x)$.

- Xét lời giải sau : $f(x) \leq g(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi $f(0) = g(0) = 0$, từ đó suy ra $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Nhận xét

Điều này sai vì $f(x) = x^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

e) Khi áp dụng nhiều lần các bất đẳng thức, chẳng hạn sử dụng cả hai bất đẳng thức sau :

$$f(x, y, \dots, z) \leq g(x, y, \dots, z) \leq A \quad (*)$$

thì $f(x, y, \dots, z) = A$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y, \dots, z) = g(x, y, \dots, z) \\ g(x, y, \dots, z) = A \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Điều kiện xảy ra dấu bằng của BĐT bên trái của (*) được thoả mãn và điều kiện xảy ra dấu bằng của BĐT bên phải của (*) được thoả mãn.

Nếu chỉ xét điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra của một trong hai bất đẳng thức đã dùng thì có thể mắc sai lầm như trong bài toán sau.

Bài toán 4. Cho hàm số

$$y = (\cos x + \sin x)^3 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của biến số x ?

- Xét lời giải sau :

$$y = \left(\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)^3 + \frac{4}{\sin^2 2x}$$

$$\geq -2\sqrt{2} + \frac{4}{\sin^2 2x} \geq -2\sqrt{2} + 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2 2x = 1$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow y_{\min} = -2\sqrt{2} + 4 \text{ khi } x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (!)$$

• **Nhận xét.**

Khi $x = -\frac{\pi}{4}$ ta có

$$y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + 4 = 4 \neq -2\sqrt{2} + 4.$$

Mâu thuẫn với kết luận trên.

Nguyên nhân sai lầm là do ta chỉ xét điều kiện cho dấu bằng cuối cùng xảy ra, mà bỏ qua điều kiện cho dấu bằng thứ nhất xảy ra.

• **Lời giải đúng**

$$y = -2\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin^2 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } y_{\min} = -2\sqrt{2} + 4 \text{ đạt tại } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

f) Đối với trường hợp khi $f(x) = g(x) + h(x)$ và $g(x) \leq A, h(x) \leq B$ (hoặc $g(x) \geq A, h(x) \geq B$) thì cần chỉ ra trực tiếp giá trị x_0 để $f(x_0) = A + B$ là đủ để kết luận $\max f(x) = A + B$ (hoặc $\min f(x) = A + B$) như ở bài toán sau.

Bài toán 4. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \cos x(1 + 2 \cos 2x).$$

Lời giải. $y = \cos x + 2 \cos x \cos 2x$

$$= \cos x + \cos x + \cos 3x = 2 \cos x + \cos 3x.$$

Do $-1 \leq \cos x \leq 1$ và $-1 \leq \cos 3x \leq 1$ thì $-5 \leq y \leq 5$.

Mặt khác khi $x = 0$ thì $y = 5$, khi $x = \pi$ thì $y = -5$.

$$\text{Vậy } y_{\max} = 5 \text{ và } y_{\min} = -5.$$

GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

HOÀNG HẢI DƯƠNG

(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Trong chương trình toán THCS, các bài tập về bất đẳng thức (BĐT) và cực trị luôn là những bài toán khó, gây lúng túng cho nhiều học sinh bởi vì kiến thức toán THCS rất ít đề cập trực tiếp đến vấn đề này. Bài viết này trình bày một số bài toán chứng minh BĐT và cực trị dựa vào dấu hiệu có nghiệm của phương trình (PT) bậc hai.

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán 1. *Giả sử cho ba số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện: $a > 0, bc = 2a^2, a + b + c = abc$. Chứng minh rằng $a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}$.*

Lời giải. Ta có : $bc = 2a^2$ và $b + c = abc - a = 2a^3 - a$. Theo hệ thức Viète thì b, c là nghiệm của phương trình

$$x^2 - (2a^3 - a)x + 2a^2 = 0.$$

PT có nghiệm khi $\Delta = a^2(4a^4 - 4a^2 - 7) \geq 0$

$$\Rightarrow a^2 \geq \frac{1+2\sqrt{2}}{2}, \text{ kết hợp với } a > 0 \text{ được}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}.$$

Bài toán 2. Giả sử ba số thực a, b, c thỏa

$$\text{mãn các điều kiện : } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 & (1) \\ ab + bc + ca = 1 & (2) \end{cases}$$

Chúng minh rằng $-4 < a + b + c < 4$.

Lời giải. Từ (1) có $a^2 + b^2 + c^2 + 2 = 4$.

Kết hợp với (2) được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 4 \Leftrightarrow a + b + c = \pm 2.$$

Trường hợp 1. Nếu $a + b + c = 2$. Kết hợp với (2) có $bc = 1 - a(b + c) = (a - 1)^2$.

Theo hệ thức Viète thì b, c là nghiệm của phương trình $x^2 + (a - 2)x + (a - 1)^2 = 0$.

PT có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Rightarrow a(4 - 3a) \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq a \leq \frac{4}{3}. \text{ Tương tự } 0 \leq b, c \leq \frac{4}{3} \text{ do đó}$$

$0 \leq a + b + c \leq 4$ nhưng đẳng thức không thể xảy ra nên $0 < a + b + c < 4$.

Trường hợp 2. Nếu $a + b + c = -2$. Xét tương tự trường hợp 1 có $-4 < a + b + c < 0$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có đpcm.

Bài toán 3. Cho các số a, b, c thỏa mãn $(a + c)(a + b + c) < 0$ (3)

Chúng minh rằng $(b - c)^2 > 4a(a + b + c)$ (4)

Lời giải. 1) Nếu $a = 0$ từ (3) có $c(b + c) < 0$. Nếu $b = c$ thì $2c^2 < 0$, điều này không xảy ra. Vậy $b \neq c \Rightarrow (b - c)^2 > 0$.

2) Nếu $a \neq 0$. Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + (b - c)x + a + b + c, \text{ có}$$

$$f(0) = a + b + c, f(-1) = 2(a + c).$$

Từ đó $f(0)f(-1) = 2(a + c)(a + b + c) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta = (b - c)^2 - 4a(a + b + c) > 0 \Rightarrow (b - c)^2 > 4a(a + b + c)$ (đpcm).

Bài toán 4. Giả sử phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \quad (5)$$

có hai nghiệm khác nhau là x_1, x_2 . Chứng minh

$$\text{rằng } x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Lời giải. Vì x_1, x_2 là nghiệm của (5) nên ta có

$$\begin{cases} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0 \end{cases}$$

Trừ theo từng vế của hai đẳng thức trên được

$$a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0.$$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên

$$a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - ax_1x_2 = 0.$$

Ta nhận thấy : $x_1 + x_2$ là nghiệm của phương trình bậc hai

$$at^2 + bt + c - ax_1x_2 = 0.$$

Để PT này có nghiệm thì

$$\Delta = b^2 - 4ac + 4a^2x_1x_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2} \quad (\text{đpcm}).$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài toán 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị

$$\text{nhỏ nhất của biểu thức } a = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}.$$

Lời giải. Biểu thức nhận giá trị $a \Leftrightarrow$ phương trình $a = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ (6) có nghiệm.

Do $x^2 + 1 > 0$ nên

$$(6) \Leftrightarrow x^2(a - 2) - 4x + a - 5 = 0 \quad (7)$$

1) Nếu $a = 2$ thì (7) có nghiệm $x = -\frac{3}{4}$.

2) Nếu $a \neq 2$.

$$\text{PT (7) có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = 4 - (a-2)(a-5) \geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 7a + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 6 \quad (a \neq 2).$$

Với $a = 1$ thì $x = -2$.

$$\text{Với } a = 6 \text{ thì } x = \frac{1}{2}.$$

Kết hợp cả hai trường hợp 1 và 2, ta có : giá trị nhỏ nhất (GTNN) của a là 1 khi $x = -2$, giá trị lớn nhất (GTLN) của a là 6 khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài toán 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $b = 2x^2 + 4xy + 5y^2$, biết rằng $x^2 + y^2 = a$ với a là hằng số lớn hơn hoặc bằng 1.

Lời giải. Vì $a \geq 1$ nên có

$$\frac{b}{a} = \frac{2x^2 + 4xy + 5y^2}{a} = \frac{2x^2 + 4xy + 5y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$1) \text{ Nếu } y = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2.$$

$$2) \text{ Nếu } y \neq 0 \text{ đặt } t = \frac{x}{y} \text{ thì } \frac{b}{a} = \frac{2t^2 + 4t + 5}{t^2 + 1}.$$

Theo bài toán 5 điều kiện để PT ẩn t trên có nghiệm khi $1 \leq \frac{b}{a} \leq 6$ nên $a \leq b \leq 6a$ (vì $a \geq 1$).

Từ đó suy ra biểu thức b có GTLN là $6a$ khi

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2x \text{ hay khi } (x, y) \text{ lấy giá trị} \\ \left(\frac{\sqrt{5a}}{5}, \frac{2\sqrt{5a}}{5} \right); \left(\frac{-\sqrt{5a}}{5}, \frac{-2\sqrt{5a}}{5} \right) \text{ và } b \text{ có GTNN}$$

là a khi $\frac{x}{y} = -2 \Leftrightarrow x = -2y$ hay khi (x, y) lấy

$$\text{giá trị } \left(\frac{2\sqrt{5a}}{5}, \frac{-\sqrt{5a}}{5} \right); \left(\frac{-2\sqrt{5a}}{5}, \frac{\sqrt{5a}}{5} \right).$$

Bài toán 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $c = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{1-x} + \frac{7}{2}$.

Lời giải. Điều kiện : $0 \leq x \leq 1$. Đặt $z = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{1-x}$ thì $z^2 + y^2 = 1$ (8). Ta cần tìm GTLN và GTNN của $d = 4z + 3y$ với $2c = d + 7$. Điều kiện : $0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ và $0 < d < 7$.

Thay $9y^2 = (d - 4z)^2$ vào (8) được

$$25z^2 - 8dz + d^2 - 9 = 0.$$

Để PT này có nghiệm z thì $\Delta \geq 0 \Rightarrow d^2 \leq 25 \Rightarrow d \leq 5$.

• GTLN của d là 5 $\Leftrightarrow$ GTLN của c là 6 và đạt được khi $z = \frac{4d}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = z^2 = \frac{16}{25}$ (thỏa mãn $0 \leq x \leq 1$).

• $d = 4z + 3y \geq 2\sqrt{12yz}$. Đẳng thức xảy ra khi $4z = 3y$. Thay vào (8) tính được $z = \frac{3}{20}, y = \frac{1}{5}$, $x = \frac{9}{400}$ (thỏa mãn $0 \leq x \leq 1$). Lúc đó

GTNN của d là $2\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{6}{5} \Rightarrow$ GTNN của c là $\frac{41}{10} = 4,1$.

Với cách sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai, các bạn hãy làm tiếp các bài tập dưới đây.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng $3x + 4\sqrt{1-x^2} \leq 5$.

Bài 2. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$\frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2-x} + 3}{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{2-x} + 3}.$$

Bài 3. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \text{ với } x > 0.$$

TÌM CỰC TRỊ MỘT BIỂU THỨC BẰNG NHIỀU CÁCH

NGUYỄN NGỌC KHOA

(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi)

Việc giải toán bằng nhiều cách vừa giúp rèn luyện kỹ năng, vừa phát triển tư duy trong học toán. Nó đòi hỏi người làm toán phải nhìn bài toán theo các góc độ khác nhau, biết vận dụng các kiến thức phù hợp với từng tình huống. Ta thử xét việc tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) và giá trị lớn nhất (GTLN) của một số biểu thức với biến số thực dưới đây.

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1}$.

Lời giải. Biểu thức này có dạng một phân thức mà tử và mẫu đều là tam thức bậc hai một biến số.

Cách 1. Chuyển về xét cực trị của phân thức mà tử là nhị thức bậc nhất rồi so sánh giá trị của tử và mẫu

$$y = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1} = 1 + \frac{4\sqrt{2}x + 2}{x^2 + 1} \\ = 1 + z \text{ với } z = \frac{4\sqrt{2}x + 2}{x^2 + 1}$$

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên GTLN (z) đạt được khi tử thức dương và GTNN (z) đạt được khi tử thức âm. Xét ba trường hợp sau.

a) Với $4\sqrt{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ thì $z = 0$
 $\Rightarrow y = 1$.

b) Với $4\sqrt{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-\sqrt{2}}{4}$ thì
 ta chuyển việc tìm GTLN (y) về tìm GTLN (z).

Ta so sánh giá trị của tử thức và mẫu thức nhờ áp dụng bất đẳng thức:

$$(2x^2 + 1) + 1 \geq 2\sqrt{2}x + 1 > 0.$$

Từ đó

$$z = \frac{2(4\sqrt{2}x + 2)}{2(x^2 + 1)} = \frac{4(2\sqrt{2}x + 1)}{2x^2 + 1 + 1} \\ \leq \frac{4(2\sqrt{2}x + 1)}{2\sqrt{2}x + 1} = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, lúc đó GTLN (y) = 1 + 4 = 5.

c) Với $4\sqrt{2}x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-\sqrt{2}}{4}$. Xét tương tự trên, từ $x^2 + 1 = (x^2 + 2) - 1 \geq -2\sqrt{2}x - 1 = -(2\sqrt{2}x + 1) > 0$ có $z \geq \frac{2(2\sqrt{2}x + 1)}{-(2\sqrt{2}x + 1)} = -2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, lúc đó GTNN (y) = 1 + (-2) = -1.

Cách 2. So sánh giá trị của tử thức và mẫu thức bằng cách sử dụng BĐT Bunyakovski

Từ $(x^2 + 1)^2 = (1 - x^2)^2 + (2x)^2$ dẫn đến

$$(1 - x^2 + 2\sqrt{2}x)^2 \\ \leq (1 + (2\sqrt{2})^2)((1 - x^2)^2 + (2x)^2) \\ \Rightarrow |1 - x^2 + 4\sqrt{2}x| \leq 3(x^2 + 1).$$

$$\text{Ta có } y = 2 + \frac{1 - x^2 + 4\sqrt{2}x}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1 - x^2 + 4\sqrt{2}x}{x^2 + 1} \text{ thì } |t| \leq 3$$

hay $-3 \leq t \leq 3$, suy ra $-1 \leq y \leq 5$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \frac{1 - x^2}{1} = \frac{2x}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0. \text{ Giải phương trình này ta}$$

được: $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ứng với GTLN (y) = 5 ;

$x_2 = -\sqrt{2}$ ứng với GTNN (y) = -1.

Cách 3. Chuyển về xét điều kiện để phương trình (PT) bậc hai có nghiệm. Với mỗi giá trị x_0 ta có giá trị y_0 của biểu thức thỏa mãn

$$y_0 = \frac{x_0^2 + 4\sqrt{2}x_0 + 3}{x_0^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - 1)x_0^2 - 4\sqrt{2}x_0 + y_0 - 3 = 0.$$

Có thể coi x_0 là nghiệm của PT

$$(y_0 - 1)x^2 - 4\sqrt{2}x + y_0 - 3 = 0$$

trong đó y_0 là tham số. Ta thấy $y_0 = 1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ (1). Nếu $y_0 \neq 1$ thì điều kiện để

PT bậc hai luôn luôn có nghiệm là

$$\Delta = -y_0^2 + 4y_0 + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (y_0 - 5)(1 + y_0) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y_0 \leq 5. \text{ Để thấy } y_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\sqrt{2}$$

và $y_0 = 5 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2). Từ (1), (2) suy ra

GTNN (y) = -1 khi $x = -\sqrt{2}$ và GTLN (y) = 5

khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$.

Lời giải. Đặt $z = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$. Biểu thức này

có dạng một phân thức mà tử là hàm hai biến bậc nhất và mẫu là hàm hai biến bậc hai. Có thể giải bài này tương tự cách 1 và cách ba nói trên.

Cách 1. Mẫu thức $x^2 + y^2 + 7 > 0$ với mọi x, y nên GTLN và GTNN của z tương ứng với giá trị dương và âm của tử thức. Xét ba trường hợp :

a) Với $x + 2y + 1 = 0$ thì $z = 0$.

b) Với $x + 2y + 1 > 0$. Ta có BĐT

$$(x^2 + 1) + (y^2 + 4) + 2 \geq 2x + 4y + 2 > 0.$$

Từ đó

$$z = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7} = \frac{x+2y+1}{x^2+1+y^2+4+2}$$

$$\leq \frac{x+2y+1}{2(x+2y+1)} = \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = 2$, lúc đó

$$\text{GTLN}(z) = \frac{1}{2}$$

c) Với $x + 2y + 1 < 0$. Ta có BDT

$$(25x^2 + 49) + (25y^2 + 196) - 70$$

$$\geq (-70x) + (-140y) - 70 = -70(x + 2y + 1) > 0.$$

Từ đó

$$z = \frac{25(x+2y+1)}{25(x^2+y^2+7)} =$$

$$= \frac{25(x+2y+1)}{25x^2+49+25y^2+196-70}$$

$$\geq \frac{25(x+2y+1)}{-70(x+2y+1)} = -\frac{5}{14}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{-7}{5}, y = \frac{-14}{5}$, lúc

$$\text{đó GTNN}(z) = -\frac{5}{14}.$$

Cách 2. Chuyển về xét điều kiện có nghiệm

của PT $z = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$

$$\Leftrightarrow zx^2 - x + zy^2 - 2y + 7z - 1 = 0 \quad (3)$$

trong đó x là ẩn số, y là tham số tùy ý, còn z là tham số có điều kiện. Xét hai trường hợp :

a) $z = 0 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$.

b) $z \neq 0$ thì PT (3) luôn có nghiệm x khi biệt thức không âm :

$$1 - 4z(zy^2 - 2y + 7z - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4z^2y^2 + 8zy - 28z^2 + 4z + 1 \geq 0 \quad (4)$$

Coi (4) là bất phương trình ẩn y , BPT này xảy ra với mọi giá trị y khi

$$16z^2 + 4z^2(-28z^2 + 4z + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -28z^2 + 4z + 5 \geq 0 \Rightarrow \frac{-5}{14} \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

Khi z nhận các giá trị này thì đẳng thức xảy ra ở (4) và ở (3), khi đó $y = \frac{1}{z}$ và $x = \frac{1}{2z}$.

Vậy GTLN (z) = $\frac{1}{2}$ khi $y = 2$ và $x = 1$.

GTNN (z) = $\frac{-5}{14}$ khi $y = \frac{-14}{5}$ và $x = \frac{-7}{5}$.

Các bạn hãy rèn luyện giải các bài tập dưới đây bằng nhiều cách.

Bài 1. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức :

$$\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 2}.$$

Bài 2. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức

$$\frac{x^4 + y^4 + 4\sqrt{2}xy + 4}{x^4 + y^4 + 2}$$

Bài 3. Tìm giá trị m, n để biểu thức

$$\frac{x^2 + mx + n}{x^2 + 1} \text{ đạt GTNN là } -1 \text{ và GTLN là } 5.$$

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THAM BIẾN ĐỂ TÌM CỰC TRỊ MỘT BIỂU THỨC

PHẠM THỊ VIỆT THÁI (GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 303 tháng 9 năm 2002 có bài *Tìm cực trị một biểu thức bằng nhiều cách*. Bài viết này xin nêu thêm một cách giải theo một cách nhìn khác.

Giả sử cần tìm cực trị một biểu thức $Q(x)$. Để đơn giản ta chỉ xét biểu thức $Q(x)$ luôn xác định trên tập hợp số thực, nghĩa là nếu $Q(x)$ có mẫu thức thì mẫu thức luôn dương. Ta đưa thêm tham biến t để xét biểu thức $f(x) = Q(x) - t$. Nếu $f(x) \geq 0$ (hoặc $f(x) \leq 0$) với mọi x thuộc tập xác định của $Q(x)$ và tồn tại giá trị t_0 để có $f(x) = 0$ (tức là có $Q(x) = t_0$) thì t_0 chính là giá trị nhỏ nhất (GTNN) (hoặc giá trị lớn nhất (GTLN)) của biểu thức $Q(x)$. Xin minh họa việc sử dụng phương pháp tham biến qua các ví dụ dưới đây.

Thí dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 1}$.

Lời giải. Xét $f(x) = Q(x) - t$

$$= \frac{x^2 + 8x + 7 - t(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x nên dấu của $f(x)$ chính là dấu của tử thức $g(x) = x^2 + 8x + 7 - t(x^2 + 1)$ hay $g(x) = (1 - t)x^2 + 8x + 7 - t$ (1)

Xét tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c =$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \quad (*)$$

- Nếu $a = 0$ thì $g(x) = bx + c$ luôn cùng dấu khi $b = 0$ ($g(x) = c$) và khi $c = 0$ ($g(x) = 0$).

- Nếu $a > 0$ thì $g(x) \geq 0$ với mọi x khi $\Delta \leq 0$ và $g(x) = 0$ chỉ khi $\Delta = 0$.

- Nếu $a < 0$ thì $g(x) \leq 0$ với mọi x khi $\Delta \leq 0$ và $g(x) = 0$ chỉ khi $\Delta = 0$.

Áp dụng vào (1) có :

$$\Delta = 16 - (1 - t)(7 - t) = -t^2 + 8t + 9.$$

$$\Delta = 0 \text{ khi } t = -1 \text{ hoặc } t = 9.$$

- Với $t = -1$ thì $a = 1 - t = 2 > 0$ nên $g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$, suy ra $Q(x)$ có GTNN là -1 và xảy ra khi $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

• Với $t = 9$ thì $a = 1 - t = -8 < 0$ nên $g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$, suy ra $Q(x)$ có GTLN là 9 và xảy ra khi $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Như vậy phương pháp tham biến cho phép ta chuyển việc xét cực trị một biểu thức $Q(x)$, tức là xét một bất phương trình $Q(x) \geq t$ (hoặc $Q(x) \leq t$) về việc xét một phương trình $\Delta(t) = 0$, nên có thể nói *phương pháp tham biến là chiếc cầu nối giữa bất phương trình và phương trình*.

Ta có thể mở rộng việc xét cực trị của biểu thức một biến $Q(x)$ sang biểu thức hai biến $Q(x, y)$ bằng phương pháp tham biến, lúc đó $f(x, y) = Q(x, y) - t$ và xét tử thức của $f(x, y)$ theo một biến nào đó sao cho tử thức luôn cùng dấu và tồn tại giá trị bằng 0.

Thí dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ với (x, y) khác $(0, 0)$.

Lời giải. Vì $x^2 + y^2$ luôn luôn dương trừ giá trị $x = y = 0$ nên dấu của $f(x, y)$ chính là dấu của tử thức $g(x, y) = 3y^2 - 4xy - t(x^2 + y^2)$ hay

$$g(x, y) = (3 - t)y^2 - 4xy - tx^2 \quad (2)$$

Nếu $t = 3$ thì $g(x, y) = -3x^2 - 4yx$. Vì $\Delta = 4y^2 \geq 0$ nên $g(x, y) = 0$ chỉ khi $y = 0, x = 0$ (đã loại trừ).

Xét (2) theo biến y có

$$\Delta_y = 4x^2 + t(3 - t)x^2 = (4 + 3t - t^2)x^2;$$

$$\Delta_y = 0 \text{ với mọi } x \text{ khi } t = -1 \text{ hoặc } t = 4.$$

• Với $t = -1$ thì $a = 3 - t = 4 > 0$ nên $g(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(x, y) \geq 0$, suy ra $Q(x, y)$ có GTNN là -1 và xảy ra khi $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 0 \Leftrightarrow (2y - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y$ ($\neq 0$).

• Với $t = 4$ thì $a = 3 - t = -1 < 0$ nên $g(x, y) \leq 0 \Rightarrow f(x, y) \leq 0$, suy ra $Q(x, y)$ có GTLN là 4 và xảy ra khi $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 0 \Leftrightarrow -(y + 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2x$ ($\neq 0$).

Các bạn càng thấy ưu thế của phương pháp tham biến trong thí dụ sau.

Thí dụ 3. Tìm u, v để biểu thức $Q = \frac{ux + v}{x^2 + 1}$

đạt GTLN bằng 4 và GTNN bằng -1 .

Lời giải. Đặt

$$f(x) = Q(x) - t = \frac{ux + v - t(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên dấu của $f(x)$ chính là dấu của tử thức $g(x) = ux + v - t(x^2 + 1)$ hay $g(x) = -tx^2 + ux + v - t$.

Để GTLN $Q(x)$ là $t_1 = 4$ (lúc đó $a_1 = -4 < 0$) và GTNN $Q(x)$ là $t_2 = -1$ (lúc đó $a_2 = 1 > 0$) xảy ra đồng thời thì dựa vào (*) phải có

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u^2 + 16(v - 4) = 0 \\ u^2 - 4(v + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ u^2 = 16 \end{cases}$$

nghĩa là (u, v) bằng $(4, 3)$ hoặc $(-4, 3)$.

Mời các bạn áp dụng phương pháp trên (cùng các cách khác) để làm các bài tập sau.

Bài 1. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức Q sau đây :

$$1) Q = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1} \quad 2) Q = \frac{1 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

$$3) Q = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$$

$$4) Q = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \quad 5) Q = \frac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7}$$

$$6) Q = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 4} \quad 7) Q = \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}.$$

Bài 2. Tìm m để biểu thức $Q = \frac{x + m}{x^2 + x + 1}$

chỉ nhận giá trị thuộc $[-1; 1]$.

GIẢI TOÁN CỰC TRỊ ĐẠI SỐ VỚI CÁC BIẾN CÓ ĐIỀU KIỆN

NGUYỄN NGỌC KHOA

(GV trường THPT Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi)

Chúng ta đã quen biết bài toán tìm cực trị của hai biến mà các biến có một điều kiện ràng buộc, chẳng hạn như bài toán sau.

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của tích xy với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y = s$, trong đó s là số dương cho trước. Việc đưa ra nhiều cách giải bài này sẽ có ích.

Lời giải. Cách 1. Áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \left(\frac{s}{2} \right)^2 = \frac{s^2}{4}.$$

$$\text{Vậy GTLN}(xy) = \frac{s^2}{4}.$$

Cách 2. Đưa về xét cực trị của hàm một biến

$$\begin{aligned} xy &= x(s-x) = sx - x^2 = \frac{s^2}{4} - \left(x^2 - sx + \frac{s^2}{4} \right) \\ &= \frac{s^2}{4} - \left(x - \frac{s}{2} \right)^2 \leq \frac{s^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy GTLN}(xy) = \frac{s^2}{4}.$$

Cách 3. Sắp thứ tự giá trị các biến (theo điều kiện hoặc khi vai trò của chúng như nhau) và so sánh với giá trị không đổi xen giữa chúng.

Giả sử $x \leq y$. Từ $x + y = s$ có $x \leq \frac{s}{2} \leq y$ nên

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{s}{2} \right) \left(y - \frac{s}{2} \right) &\leq 0 \Leftrightarrow xy \leq \frac{s}{2} \left(x + y - \frac{s}{2} \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow xy \leq \frac{s^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy GTLN}(xy) = \frac{s^2}{4}.$$

Trong cả ba cách giải trên tích xy đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = y = \frac{s}{2}$.

Việc giải bài toán như trên sẽ khó khăn hơn khi các biến bị ràng buộc thêm một điều kiện nữa.

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất của tích xy với x, y là các số dương thỏa mãn hai điều kiện :

$$(1) x + y = s;$$

$$(2) y \geq a$$

trong đó s, a là những số dương cho trước và $a < s$.

Lời giải.

• Nếu $a \leq \frac{s}{4}$ thì theo cách giải bài toán 1 ta

$$\text{có GTLN}(x, y) = \frac{s^2}{4} \text{ khi } x = y = \frac{s}{2} \geq a.$$

• Xét trường hợp $a > \frac{s}{2}$. Lúc này không thể sử dụng cách giải 1 của bài toán 1.

Theo cách 2, đặt $y = a + t$ với $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } xy &= (s-y)y = (s-a-t)(a+t) = \\ &= -t(t+2a-s) + a(s-a) \leq a(s-a) \text{ vì } t \geq 0, \\ &t+2a-s \geq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = 0, y = a$ và $\text{GTLN}(xy) = a(s-a)$.

Theo cách 3 ta thấy $x < \frac{s}{2} < a \leq y$ nên

$$\begin{aligned} (x-a)(y-a) &\leq 0 \Leftrightarrow xy \leq a(x+y) - a^2 \\ &\Leftrightarrow xy \leq as - a^2 = a(s-a). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $y = a$ và $x = s-a$. Vậy $\text{GTLN}(xy) = a(s-a)$.

Trong bài toán 2 có thể thay điều kiện (2) bởi điều kiện $x \leq b$ với $b < s$, lúc đó trong lời giải xét hai trường hợp : $b \geq \frac{s}{2}$ và $b < \frac{s}{2}$ (chứng minh tương tự trên hoặc đặt $b = s-a$).

Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất của tích xyz , với x, y, z là các số dương thoả mãn các điều kiện :

$$(1) x + y + z = s$$

$$(2) z \geq a$$

trong đó s, a là những số dương cho trước và $a < s$.

Lời giải.

• Nếu $a \leq \frac{s}{3}$ thì áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 = \left(\frac{s}{3} \right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{s}{3}$, lúc đó $\text{GTLN}(xyz) = \left(\frac{s}{3} \right)^3$.

• Xét trường hợp $a > \frac{s}{3}$.

Theo BĐT Cauchy : $xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2$ (*)

Ta có : $x + y + a \leq x + y + z = s < 3a \Rightarrow x + y < 2a \Rightarrow \frac{x+y}{2} < a$.

Áp dụng cách giải 3 từ $\frac{x+y}{2} < a \leq z$ có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+y}{2} - a \right) (z - a) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x+y}{2} \right) z \leq a \left(\frac{x+y}{2} + z - a \right) \quad (**) \end{aligned}$$

Từ (*), (**) và sử dụng BĐT Cauchy có

$$\begin{aligned} xyz & \leq \left(\frac{x+y}{2} \right) \left(\frac{x+y}{2} \right) z \leq a \left(\frac{x+y}{2} \right) \left(\frac{x+y}{2} + z - a \right) \\ & \leq \left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z - a}{2} \right)^2 = a \left(\frac{s-a}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $z = a$ và $x = y = \frac{s-a}{2}$,

lúc đó $\text{GTLN}(xyz) = a \left(\frac{s-a}{2} \right)^2$.

Kết quả của bài toán 3 có thể không xảy ra như trên nếu ta thêm điều kiện $x < \frac{s-a}{2} < y$.

Bài toán 4. Phát biểu như bài toán 3 và thêm điều kiện :

$$(3) y \geq b \text{ với } b \text{ là số dương cho trước, } b \leq a < s.$$

Lời giải

• Nếu $b \leq \frac{s-a}{2}$ thì giải như bài toán 3.

• Xét trường hợp $b > \frac{s-a}{2} \Leftrightarrow s < a + 2b$.

Lúc đó

$$x = s - (y + z) < s - (a + b) < a + 2b - (a + b) = b.$$

Áp dụng cách giải 3 với $x < b \leq y$, ta có

$$(x-b)(y-b) \leq 0 \Leftrightarrow xy \leq b(x+y-b) \quad (***)$$

Lại có $x + y - b = s - z - b < s - a - b < (a + 2b) - (a + b) = b \leq a$.

Từ $x + y - b < a \leq z$ có $(x + y - b - a)(z - a) \leq 0 \Leftrightarrow (x + y - b)z \leq a(x + y - b + z - a) = a(s - a - b)$.

Từ đó và (***) suy ra

$$xyz \leq b(x + y - b)z \leq ba(s - a - b).$$

Đẳng thức xảy ra khi $z = a, y = b$ và $x = s - a - b$, lúc đó $\text{GTLN}(xyz) = ab(s - a - b)$.

Kết luận của bài toán 4 :

• Nếu $s \geq 3a$ thì $\text{GTLN}(xyz) = \left(\frac{s}{3} \right)^3$.

• Nếu $a + 2b \leq s < 3a$ thì $\text{GTLN}(xyz) = a \left(\frac{s-a}{2} \right)^2$.

• Nếu $s < a + 2b$ thì $\text{GTLN}(xyz) = ab(s - a - b)$.

Bạn hãy phát biểu bài toán 4 khi thay điều kiện (2) và (3) bởi $z \leq a$ và $y \leq b$ với $a \leq b < s$.

Như vậy từ một bài toán tìm cực trị đại số với các biến có một điều kiện ta đã đề xuất và giải bài toán cực trị đại số với các biến bị ràng buộc bởi nhiều điều kiện hơn.

Mời các bạn giải các bài tập sau.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của $xy + yz + zx$ với x, y, z thoả mãn điều kiện của bài toán 4.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của tích xyz với x, y, z, t là các số dương thoả mãn các điều kiện : $x + y + z + t = s$; $t \geq a$; $z \geq b$; $y \geq c$ trong đó s, a, b, c là các số dương đã cho và $c < b < a < s$.

VỀ ĐỊNH LÝ STEINER – LEHMUS

LÊ TRƯỜNG TÙNG (Hà Nội)

Năm 1840, S.L. Lehmus gửi cho nhà hình học Thụy Điển J. Steiner định lý sau đây với yêu cầu đưa ra một cách chứng minh hình học thuần túy : *Tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau là tam giác cân.* Định lý này về sau được mang tên Steiner – Lehmus.

Trong chứng minh của mình, Steiner sử dụng công thức sau : Nếu d_a, d_b, d_c là các đường phân giác của ba góc tương ứng với ba cạnh đối diện a, b, c thì :

$$\begin{aligned} d_a^2 &= bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) \\ d_b^2 &= ca \left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} \right) \\ d_c^2 &= ab \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

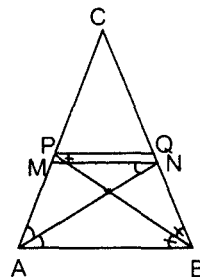
Khi ấy, đẳng thức $d_a^2 = d_b^2$ sau khi biến đổi tương đương thì được

$$c(a+b+c)((a+b+c)(c^2+ab)+2abc)(a-b) = 0.$$

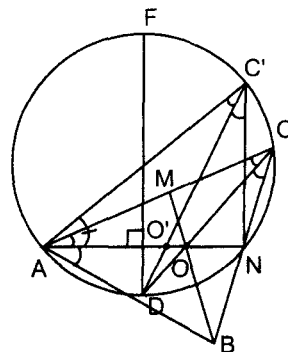
Từ đây suy ra $a = b$. Cách chứng minh này gọn, tuy nhiên phải dùng đến công thức (1) và không mang đặc tính hình học. Bởi thế, sau khi chứng minh trên được công bố, nhiều người lao vào tìm cách chứng minh khác. Trong những năm tiếp theo, hàng loạt các phương pháp chứng minh khác được đưa ra, tuy vậy các phương pháp này phải kẻ thêm nhiều đường và kèm theo tính toán khá phức tạp.

Đến năm 1939, một nữ sinh lớp 10 ở Matxcova (Liên Xô) tên là Lida Kopeikina tìm được một cách chứng minh khá đơn giản sau đây.

Giả sử hai đường phân giác AN và BP bằng nhau. Kẻ NM và PQ song song với AB , cắt AC và BC theo thứ tự tại M, Q (h. 1). Ta sẽ chứng minh PQ và MN trùng nhau bằng phản chứng. Giả sử MN gần AB hơn PQ , khi đó $MN > PQ$. Do $\widehat{PBQ} = \widehat{PBA} = \widehat{BPQ}$ nên tam giác PBQ cân và $PQ = QB$. Tương tự $AM = MN$. Hai tam giác cân PBQ và AMN có cạnh đáy bằng nhau, cạnh bên $PQ < MN$ nên $\widehat{PQB} > \widehat{AMN} \Rightarrow \widehat{QBA} < \widehat{MAB}$, từ đây suy ra trong hình thang $AMNB$ có $AM < BN$, mà $AM = MN, PQ = QB, MN > PQ, QB > BN$, dẫn đến mâu thuẫn. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ MN và PQ trùng nhau. Khi đó $AMNB$ là hình thang cân nên $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$.



Hình 1



Hình 2

Một năm sau (năm 1940) một học sinh lớp 8 cũng ở Matxcova tên là Vòlòdia Bolchianxki tìm ra một cách chứng minh khác cũng khá đẹp. Giả sử O là giao điểm hai đường phân giác bằng nhau AN và BM (h.2) khi đó CO là phân giác của góc $\widehat{ACB}$. Ta chuyển về xét hai tam giác ANC và BMC có góc $\widehat{ACB}$ chung, $AN = BM$, đường phân giác ở đỉnh C là CO chung thì hai tam giác ANC và BMC bằng nhau. Để làm điều đó ta vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC với đường kính DF vuông góc với AN tại trung điểm của AN . Vẽ dây AC' sao cho $\widehat{NAC'} = \widehat{CBM}$ và C', C nằm cùng phía đối với đường thẳng AN . Ta có $\widehat{AC'N} = \widehat{ACN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AN}$) nên $\widehat{ANC'} = 180^\circ - \widehat{AC'N} - \widehat{NAC'} = 180^\circ - \widehat{ACN} - \widehat{CBM} = \widehat{BMC}$, suy ra $\triangle BMC = \triangle ANC'$ (c.g.c) (1). AN cắt DC và DC' theo thứ tự tại O và O' . Nếu C khác C' , chẳng hạn cung $\widehat{DC}$ bé hơn cung $\widehat{DC'}$ thì $DO > DO'$. Do $DC < DC'$ nên $CO < C'O'$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $CO = C'O'$. Chứng minh tương tự khi cung $\widehat{DC}$ lớn hơn cung $\widehat{DC'}$. Vậy C' phải trùng với C , từ (1) suy ra $BC = AC$.

Hiện nay L. Kopeikina và V. Bolchianxki là hai giáo sư toán học có tên tuổi ở Liên Xô.

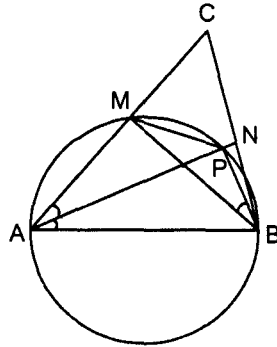
Năm 1961, cuốn "Nhập môn hình học" của giáo sư Canada tên là H.S.M. Coxeter được in ra và giới thiệu trên tạp chí Scientific American. Phần nói khá hay về định lí Steiner – Lehmus trong bài giới thiệu này lại lôi kéo hàng trăm bạn đọc lao vào tìm cách chứng minh mới. Cách chứng minh của hai kĩ sư người Anh là G. Jylbert và D. Mac – Donnell được đánh giá là đơn giản nhất và được công bố trên tạp chí American Mathematical Monthly năm 1963. Cách chứng minh này dựa vào *bổ đề* sau :

Trong tam giác ABC , nếu $\widehat{CAB} < \widehat{CBA}$ thì đường phân giác AN lớn hơn đường phân giác BM . Chứng minh *bổ đề* này như sau :

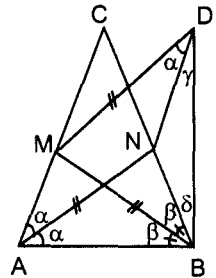
Lấy điểm P trên đoạn AN sao cho $\widehat{MBP} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$ (h.3). Do $\widehat{MBP} = \widehat{MAP}$ nên bốn điểm A, M, P, B nằm trên một đường tròn.

Góc $\widehat{MAB}$ bé hơn góc $\widehat{PBA}$ nên cung $\widehat{MPB}$ bé hơn cung $\widehat{AMP}$ tức $MB < AP$, suy ra $MB < AP < AN$.

Định lí Steiner – Lehmus suy ra trực tiếp từ *bổ đề* vừa chứng minh.



Hình 3



Hình 4

Trong một thời gian dài, cách chứng minh trên được xem là đơn giản nhất. Gần đây, cuối năm 1982 trên tạp chí The Mathematical Gazette của Anh lại công bố một cách chứng minh mới bằng phản chứng rất đơn giản của R.W. Hogg :

Giả sử hai đường phân giác AN và BM bằng nhau. Dựng hình bình hành $AMDN$ và kí hiệu các góc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ như trên hình 4. Do tam giác BMD cân tại M nên

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta \quad (2)$$

Nếu như $\alpha > \beta$ thì xét hai tam giác ABN và BAM có AB chung, $AN = BM$ và $\widehat{BAN} > \widehat{ABM}$ nên $BN > AM$ mà $AM = ND$, do đó $\gamma > \delta$, từ đây $\alpha + \gamma > \beta + \delta$, mâu thuẫn với (2). Tương tự trường hợp $\alpha < \beta$ không thể xảy ra, tức $\alpha = \beta$ (đpcm).

Các bạn thân mến ! Với khát vọng vươn tới cái đơn giản nhất, gần 150 năm trôi qua để đưa từ cách chứng minh của Steiner tới cách chứng minh của Hogg, và chắc rằng quá trình này không dừng lại ở đây.

Bây giờ, mời các bạn giải một vài bài tập sau đây :

Bài 1. Sử dụng công thức cosin, chứng minh công thức (1).

Bài 2. Chứng minh công thức tổng quát hơn công thức (1) : Cho tam giác ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, D là một điểm trên cạnh BC , $AD = p$, $BD = m$, $CD = n$. Chứng minh rằng

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$$

(Định lí Stewart)

Bài 3. Giải thích vì sao cách chứng minh của Jylbert và Mac–Donnell không áp dụng được

cho trường hợp AN và BM là hai đường phân giác ngoài ?

Bài 4. Trong tam giác ABC , $\hat{A} = 12^\circ$, $\hat{B} = 120^\circ$, AN và BM là hai đường phân giác ngoài. Không sử dụng các hàm số lượng giác, chứng minh $AN = BM$.

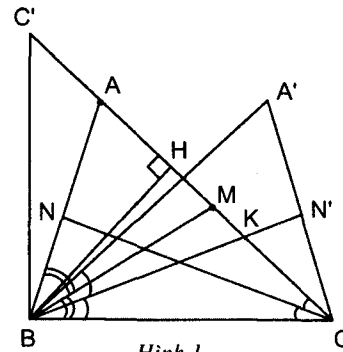
TRỞ LẠI ĐỊNH LÍ STEINER – LEHMUS

NGÔ VĂN THÁI (Thái Bình)

Định lí STEINER – LEHMUS : Tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau là tam giác cân.

Đây là một điều kiện để nhận biết một tam giác là tam giác cân, nhưng tại sao lại không có mặt trong chương trình hình học 7 (có thể dưới dạng bài tập) ? Qua nghiên cứu bài giới thiệu về định lí STEINER – LEHMUS của tác giả Lê Trường Tùng đăng trên báo Toán học và Tuổi trẻ tháng 1 năm 1987 tôi thấy các cách chứng minh định lí rất đơn giản và gọn, nhưng đều phải sử dụng đến kiến thức về tứ giác hoặc kiến thức về đường tròn. Trong bài viết này tôi xin giới thiệu thêm một cách chứng minh khác, tuy rằng chứng minh đó chưa phải là gọn nhất nhưng nó chỉ cần sử dụng kiến thức toán lớp 8.

Theo giả thiết tam giác ABC có các đường phân giác trong BM và CN bằng nhau. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ thì $\widehat{ACB} < 90^\circ$. Kẻ $BH \perp AC$ tại H và lấy điểm C' sao cho H là trung điểm của CC' . Xét hai trường hợp sau.

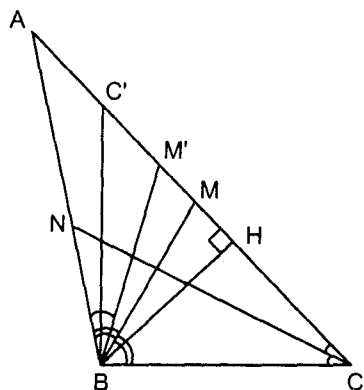


Hình 1

1) Nếu $BA \leq BC$ hay $\widehat{BAC} \geq \widehat{BCA}$ thì $\widehat{BAC} \geq \widehat{BC'C}$ (vì $\widehat{BC'C} = \widehat{BCA}$) nên $\widehat{ABC} \leq \widehat{CBC'}$ $\Rightarrow \widehat{MBC} \leq \widehat{HBC}$ hay M nằm trên đoạn HC (h.1). Dựng tam giác $A'BC$ sao cho $\widehat{A'BC} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{A'CB} = \widehat{ABC}$ thì $\triangle A'BC = \triangle ABC$. Gọi BN' là đường phân giác của tam giác $A'BC$ thì $BN = BN'$. Theo giả thiết giả sử thì $\widehat{A'CB} > \widehat{ACB}$ nên BN' cắt AC tại K .

Từ đó $BN' > BK > BM$, suy ra $CN > BM$, trái với giả thiết.

2) Nếu $BA > BC$ hay $\widehat{BAC} < \widehat{BCA}$ thì $\widehat{BAC} < \widehat{BC'C}$ và điểm M nằm trên đoạn HA (h.2). Dựng tam giác ABM' với M' thuộc tia AC sao cho $\widehat{ABM'} = \widehat{ACN}$ thì theo điều giả sử $\widehat{ACB} < \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABM'} < \widehat{ABM}$ nên M' phải thuộc đoạn AM .



Hình 2

$$\text{Do } \triangle ABM' \sim \triangle ACN \text{ (g.g) nên } \frac{BA}{BM'} = \frac{CA}{CN}$$

mà $CA > BA$, do đó $CN > BM'$.

Mặt khác $BM' > BM$, dẫn đến $CN > BM$, trái với giả thiết.

Vậy điều giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ là không xảy ra, nghĩa là phải có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

SỬA SAI THÀNH... CHƯA ĐÚNG

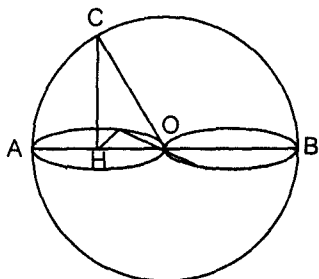
LÊ NGỌC THÀNH VINH (THPT Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Trong bài "Làm thế nào để dự đoán hình dạng của tập hợp điểm?" đăng trên Tạp chí THPT, số 210, 12.1994, tác giả đã phê phán một số tài liệu toán hiện hành về vấn đề hướng dẫn học sinh dự đoán tập hợp điểm. Sau đó tác giả đưa ra cách khắc phục: vẽ ba điểm khác nhau của tập hợp điểm, nếu ba điểm này thẳng hàng thì tập hợp điểm có dạng thẳng.

Cách đoán nhận này cũng chưa chính xác. Tôi xin nêu hai thí dụ sau.

Thí dụ 1. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB cố định và một điểm C chuyển động trên đường tròn. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB . Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHO .

Tập hợp là bốn cung chứa góc 135° vẽ qua các đoạn AO hoặc OB , và ta có thể dễ dàng tìm được bộ ba điểm thuộc tập hợp mà cả ba điểm đó thẳng hàng (h.1).

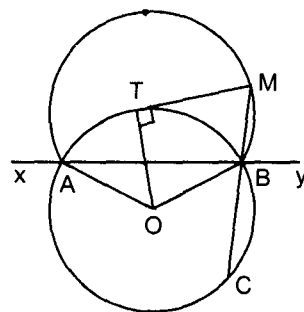


Hình 1

Thí dụ 2. Cho đường tròn tâm O , dây AB cố định. Tìm tập hợp những điểm M (trong mặt phẳng chứa đường tròn đó) thoả mãn: $MA \cdot MB = MT^2$ với MT là tiếp tuyến của đường tròn tâm O .

Lời giải bài toán này được đăng trên báo THPT như sau:

Nếu Ax là tia đối của tia AB và By là tia đối của tia BA thì dễ thấy hai tia Ax và By thuộc tập hợp phải tìm (h.2).



Hình 2

Giả sử M không nằm trên đường thẳng AB (hiển nhiên M

nằm ngoài đường tròn (O) để tồn tại tiếp tuyến MT tới đường tròn). Gọi C là giao điểm (khác B) của MB với đường tròn (O) thì $MB \cdot MC = MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \triangle MAC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{ACM}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ trong đó $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (không đổi).

M thuộc hai cung chứa góc nhìn đoạn AB dưới một góc $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ không đổi. (phần ngoài đường tròn (O)).

Như vậy, tập hợp M gồm hai tia Ax, By và hai cung chứa góc $\widehat{AMB}, \widehat{ACB}$. Trong tập hợp này, tồn tại bốn điểm thẳng hàng, cũng tồn tại bốn điểm trong đó có ba điểm không thẳng hàng.

Thực ra, việc dự đoán tập hợp không chỉ dừng lại ở cách làm thủ công mà các sách mà bài báo đã nêu, mà phải kết hợp với sự nỗ lực của các thao tác tư duy : nghiên cứu tính đối xứng của tập hợp, tìm các điểm "vô tận" của tập hợp, dựa vào các phép biến hình... hy vọng tìm được hình dạng tương đối đúng để xác định tập hợp cần tìm.

ĐỊNH LÝ BỐN ĐIỂM VÀ CÁCH CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

VÕ KIM HUỆ (Cần Thơ)

MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ PYTHAGORE VÀ ỨNG DỤNG

Chúng ta đã quá quen thuộc với định lý cho tam giác vuông : *Bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh vuông góc*.

Nếu xem định lý Pythagore cho ba điểm A, B, C thì có thể phát biểu như sau.

Định lý ba điểm.

Với ba điểm A, B, C thì AB vuông góc với AC khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Ta có thể mở rộng định lý cho bốn điểm như sau.

Định lý bốn điểm.

Với bốn điểm A, B, C, D thì AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Khi A trùng D ta thấy lại định lý Pythagore cho ba điểm.

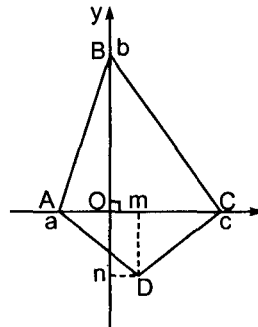
Chứng minh

Việc tìm tòi chứng minh định lý bốn điểm cũng rất hấp dẫn vì sự đa dạng của các trường hợp cần phải xét đến.

Sau đây là cách chứng minh định lý bốn điểm bằng phương pháp tọa độ và dựa vào định lý

Pythagore cho ba điểm. Chú ý rằng vị trí của bốn điểm A, B, C, D là tùy ý (không đòi hỏi $ABCD$ là tứ giác lồi) nên sử dụng phương pháp tọa độ tránh được việc xét các vị trí tương đối của bốn điểm này.

Chọn AC là trục hoành, ta có : $A(a; 0); C(c; 0)$. Chọn đường thẳng vuông góc với AC đi qua B làm trục tung ta có : $B(0; b)$. Giả sử $D(m; n)$ (h.1)



Hình 1

Ta có

$$AB^2 = a^2 + b^2$$

$$CD^2 = (c - m)^2 + n^2 = c^2 - 2cm + m^2 + n^2$$

$$AD^2 = (a - m)^2 + n^2 = a^2 - 2am + m^2 + n^2$$

$$BC^2 = b^2 + c^2$$

Từ bốn đẳng thức trên ta có

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow cm = am.$$

Vì A khác C nên $a \neq c$, do đó $m = 0$ hay D nằm trên trục tung.

Vậy AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Hệ quả 1. Trong tam giác ABC thì AH là đường cao khi và chỉ khi $AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2$.

Hệ quả 2. Cho tứ giác lõm $ABCD$. Nếu tổng bình phương hai cạnh đối diện của tứ giác bằng tổng bình phương hai đường chéo thì hai cạnh đối diện còn lại của tứ giác vuông góc với nhau và ngược lại, nghĩa là

AD vuông góc với BC khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

Hệ quả 3. H là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $HA^2 + BC^2 = HB^2 + AC^2 = HC^2 + AB^2$.

Một số bài toán giải bằng định lý bốn điểm

Bài toán 1. Cho đường gấp khúc khép kín $AEBFCD$ thỏa mãn $AD = AE$, $BE = BF$, $CF = CD$. Vẽ các đường thẳng $EM \perp AB$, $FN \perp BC$, $DP \perp CA$. Chứng minh rằng ba đường thẳng EM , FN , DP đồng quy.

Nhận xét

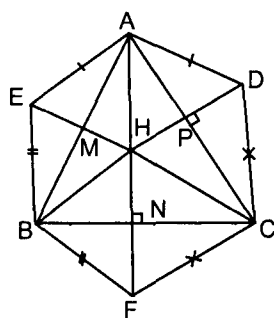
Bài toán trên đây nếu xét đầy đủ các trường hợp xảy ra để chứng minh theo cách thông thường thì rất vất vả và dễ thiếu sót, chẳng hạn khi $AEBFCD$ là lục giác lõm.

Chứng minh.

Gọi H là giao điểm của hai đường vuông góc FN và DP (h.2). Theo định lý bốn điểm cho B, H, C, F và cho A, H, C, D ta có

$$HB^2 + CF^2 = HC^2 + BF^2 \quad (1)$$

$$HC^2 + AD^2 = HA^2 + CD^2 \quad (2)$$



Hình 2

Từ (1) và (2) có $HB^2 + AD^2 = HA^2 + BF^2$ (vì $CD = CF$)

mà $AD = AE$ và $BE = BF$

nên $HB^2 + AE^2 = HA^2 + BE^2$.

Do đó theo định lý bốn điểm cho A, E, B, H ta có EH vuông góc với AB hay ba đường thẳng EM, FN, DP đồng quy tại H .

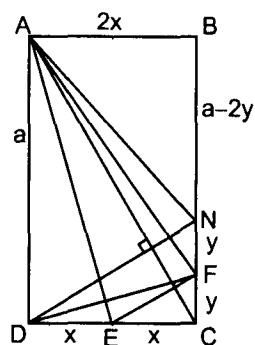
Bài toán 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Đường thẳng đi qua D vuông góc với đường chéo AC cắt BC tại N .

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của DC và CN . Chứng minh rằng AE vuông góc với DF .

Chứng minh.

Đặt $DE = EC = x$, $CF = FN = y$, $AD = BC = a$. Ta có : $AB = 2x$, $BN = a - 2y$, $BF = a - y$. (h.3)

Áp dụng định lý bốn điểm cho A, D, C, N ta có DN vuông góc AC



Hình 3

$$\Leftrightarrow AD^2 + CN^2 = DC^2 + AN^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4y^2 = 4x^2 + 4x^2 + (a - 2y)^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 = 4ay. \quad (3)$$

$$\text{Ta có : } AD^2 + EF^2 = DE^2 + AF^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 + y^2 = x^2 + 4x^2 + (a - y)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 2ay \quad (4)$$

Từ (3) và (4) và áp dụng định lý bốn điểm cho A, D, E, F ta có : AE vuông góc với DF .

Bài toán 3. Cho ngũ giác $ABCDE$ với $AB = AE$, $DE = DC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{AED} = 90^\circ$.

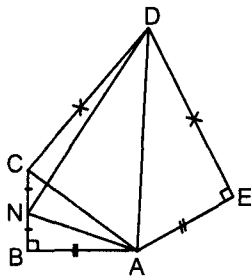
Gọi N là trung điểm của BC . Chứng minh rằng AC vuông góc với DN .

Chứng minh. Ta có (h.4) :

$$\begin{aligned} NC^2 + AD^2 &= NB^2 + AE^2 + ED^2 \\ &= NB^2 + AB^2 + DC^2 \\ &= AN^2 + DC^2. \end{aligned}$$

Theo định lí bốn điểm cho A, D, C, N ta có AC vuông góc với DN .

Chú ý rằng ta không quan tâm đến ngũ giác $ABCDE$ lồi, lõm, đơn hoặc không đơn.



Hình 4

Qua ba bài toán trên đây, ta thấy việc sử dụng định lí bốn điểm có ưu thế rõ rệt đối với các bài toán mà việc xét tất cả các khả năng xảy ra là phức tạp và dễ thiếu các vị trí tương đối của các hình (bài toán 1 và bài toán 3), ngoài ra phương pháp này giúp ta định hướng rõ ràng cách giải bài toán (bài 2 và các bài luyện tập). Dĩ nhiên ta có thể sử dụng định lí bốn điểm vào các bài toán chứng minh hai đường thẳng vuông góc, kể cả các bài toán khi giải mới tạo thêm hai đường thẳng vuông góc.

Mong muốn của tác giả sau bài viết này là được các bạn yêu toán ứng dụng định lí bốn điểm như là một phương pháp để giải quyết một lớp các bài toán chứng minh "hai đường thẳng vuông góc".

Chúc các bạn phát hiện nhiều bài toán hay khi sử dụng phương pháp này.

MỘT SỐ BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tam giác cân ABC đỉnh A . Gọi H là trung điểm của BC , D là hình chiếu của H lên AC . M là trung điểm của HD .

Chứng minh rằng AM vuông góc với BD .

(Thi chọn học sinh giỏi Cần Thơ)

Bài 2. Tam giác ABC có điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, $AB = AC$, D là trung điểm của AB và E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh rằng OE vuông góc với CD .

(Thi Olympic toán Anh 1983)

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$, I là điểm bất kì trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E . Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M . Chứng minh rằng đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM .

(Thi chọn học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh 93 – 94)

Bài 4. Trên cạnh BC của hình vuông $ABCD$ ta lấy đoạn $BE = \frac{BC}{3}$, trên cạnh DC kéo dài ta lấy đoạn $CF = \frac{BC}{2}$. Chứng minh rằng giao điểm của AE và BF nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

(Thi vô địch Hungari 1951)

Bài 5. Cho ngũ giác $ABCDE$ với $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$; $AE = BC$. Chứng minh ba đường thẳng đi qua ba đỉnh A, B, D tương ứng vuông góc với các cạnh CD, DE và AB thì đồng quy.

KHI ĐẶC BIỆT HOÁ BÀI TOÁN

VŨ HỮU BÌNH (Hà Nội)

Chúng ta bắt đầu từ bài toán sau.

Bài toán 1. *Tính cạnh huyền của một tam giác vuông biết đường cao ứng với cạnh huyền có độ dài bằng h và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r .*

Lời giải.

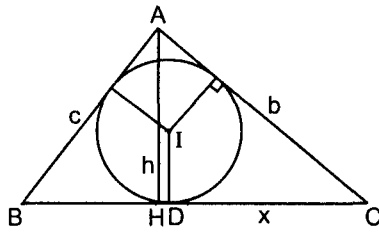
Xét $\triangle ABC$ vuông ở A (h.1).

Gọi $BC = x$.

Ta đặt $AC = b$,

$AB = c$. Cần

tính x theo h và r .



Hình 1

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = x^2 & (1) \\ bc = hx & (2) \\ b + c - x = 2r & (3) \end{cases}$$

Từ (3) có $b + c = x + 2r$.

Bình phương hai vế được

$$b^2 + c^2 + 2bc = x^2 + 4r^2 + 4xr.$$

Từ (1) và (2) có: $x^2 + 2hx = x^2 + 4r^2 + 4xr$

$$\Rightarrow hx = 2r^2 + 2rx$$

$$\Rightarrow x = \frac{2r^2}{h - 2r}.$$

Đặc biệt hoá bài toán 1 với $h = 5, r = 2$, ta có

Bài toán 2. *Tính cạnh huyền của một tam giác vuông biết đường cao ứng với cạnh huyền bằng 5cm và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2cm.*

Áp dụng kết quả bài toán 1, ta được:

$$x = \frac{2 \cdot 2^2}{5 - 2 \cdot 2} = 8. \text{ Cạnh huyền của tam giác vuông bằng 8cm.}$$

Chớ vội bằng lòng với sự đặc biệt hoá trên. Ta thử phát biểu bài toán 2 dưới một dạng khác, tỉ mỉ hơn:

Nếu có một tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền bằng 5cm và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2cm thì tam giác đó có cạnh huyền bằng 8cm.

Khi diễn đạt bài toán như trên, nảy ra một câu hỏi: Liệu có tồn tại một tam giác vuông như vậy không?

Để trả lời câu hỏi trên, ta hãy tính tiếp các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

$$\text{Từ (1) có } b^2 + c^2 = 8^2 = 64.$$

$$\text{Từ (2) có } bc = 5 \cdot 8 = 40.$$

Suy ra

$$(b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 64 - 80 = -16 (!).$$

Như vậy không tồn tại tam giác vuông thỏa mãn giả thiết của bài toán 2, tức là không tồn tại tam giác vuông nào có đường cao ứng với cạnh huyền $h = 5\text{cm}$ và bán kính đường tròn nội tiếp $r = 2\text{cm}$.

Bây giờ chúng ta đi sâu thêm về quan hệ giữa h và r trong tam giác vuông. Ta có

Bài toán 3. *Chứng minh rằng trong tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền bằng h và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r , ta có*

$$\text{bất đẳng thức } 2 < \frac{h}{r} \leq \sqrt{2} + 1 \quad (4)$$

Lời giải. (h.1) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Ta có $ah = (a + b + c)r$ (cùng bằng $2S$). Suy ra

$$\frac{h}{r} = \frac{a + b + c}{a} > \frac{a + a}{a} = 2.$$

$$\text{Vậy } \frac{h}{r} > 2.$$

Ta lại có $AH \leq AI + ID$ (I là tâm đường tròn nội tiếp) nên

$$h \leq r\sqrt{2} + r \Rightarrow \frac{h}{r} \leq \sqrt{2} + 1.$$

Bất đẳng thức (4) được chứng minh.

Ta trở lại bài toán 2.

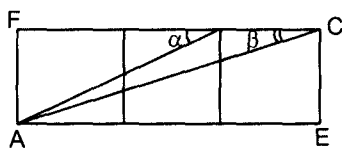
Trong đề bài của bài toán này, ta có $\frac{h}{r} = \frac{5}{2} > \sqrt{2} + 1$, vi phạm quan hệ được nêu trong bất đẳng thức (4).

Như vậy, khi thay các chữ bằng các số để đặc biệt hoá bài toán, cần lưu ý kiểm tra xem các số thay vào có thoả mãn các quan hệ ràng buộc giữa các chữ trong bài toán hay không, hình được nêu trong bài toán có tồn tại hay không.

Đặc biệt hoá một bài toán đúng là đơn giản hơn nhiều so với tổng quát hoá bài toán đó. Nhưng... hãy thận trọng khi đặc biệt hoá bài toán!

HÃY GIẢI MỘT BÀI TOÁN THEO NHỮNG CÁCH NHÌN KHÁC NHAU

Ở một kì thi toán lớp 9, trong đề ra có bài toán sau : "Cho hình chữ nhật $AECF$ tạo bởi ba hình vuông bằng nhau, xếp kế nhau như hình 1. Chứng minh rằng $\alpha + \beta = 45^\circ$ ".

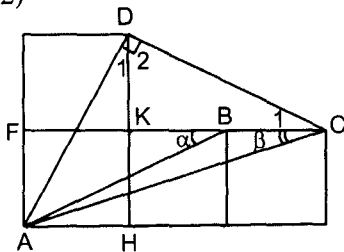


Hình 1

Nếu biết khai thác bài toán với những góc độ khác nhau ta sẽ có nhiều cách giải. Dưới đây trình bày tóm tắt một số cách giải với chú ý rằng các hình vuông được vẽ thêm đều bằng hình vuông đã cho.

Cách 1. Tạo tam giác vuông cân.

1.a) (h.2)



Hình 2

- $\triangle AHD = \triangle DKC = \triangle AFB$ (c.g.c)

NGUYỄN MINH THÔNG (Vĩnh Phúc)

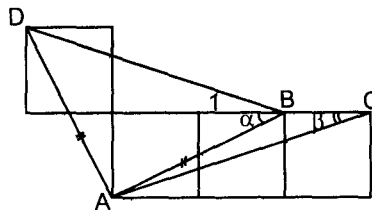
$$\Rightarrow D_1 = \widehat{C}_1 = \alpha.$$

- $DA = DC$ và $\widehat{D} = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2$
 $= \widehat{C}_1 + \widehat{D}_2 = 90^\circ$.

Vậy $\triangle ADC$ vuông cân và

$$\alpha + \beta = \widehat{C}_1 + \beta = 45^\circ.$$

1.b) (h.3)

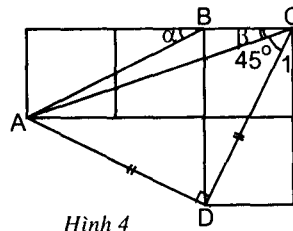


Hình 3

- $\widehat{B}_1 = \beta$.

- $\triangle DAB$ vuông cân nên $\alpha + \beta = \alpha + \widehat{B}_1 = 45^\circ$.

1.c) (h.4)



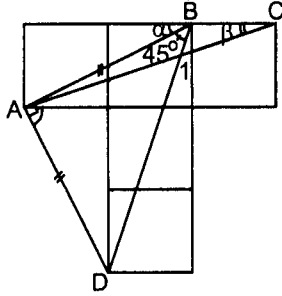
Hình 4

- $\widehat{C}_1 = \alpha$.

- $\triangle ADC$ vuông cân nên $\widehat{ACD} = 45^\circ$.

Vậy $\alpha + \beta = 45^\circ$.

1.d) (h.5)



Hình 5

- $\widehat{B}_1 = \beta$.

- $\triangle BAD$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{ABD} = 45^\circ$.

- Vậy $\alpha + \beta = \alpha + \widehat{B}_1 = 45^\circ$.

Cách 2. Xét các tam giác đồng dạng.

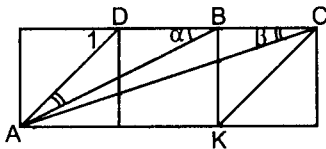
2.a) (h.6)

$\triangle ADB \sim \triangle CDA$ vì $\widehat{ADB}$ chung và

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DB}{DA}. \text{ Vậy } \widehat{DAB} = \widehat{DCA} = \beta.$$

Do đó $\alpha + \beta = \alpha + \widehat{DAB} = \widehat{D}_1 = 45^\circ$

2.b) (h.6)



Hình 6

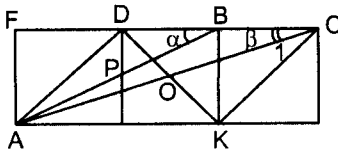
$\triangle ADB \sim \triangle AKC$ vì $\widehat{ADB} = \widehat{AKC} = 135^\circ$

và $\frac{AD}{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DB}{KC}$. Suy ra $\alpha = \widehat{KCA}$.

Vậy $\alpha + \beta = \widehat{KCA} + \beta = 45^\circ$.

Cách 3. Xét các tỉ số lượng giác.

3.a) (h.7)



Hình 7

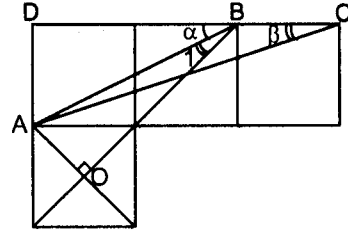
$ADCK$ là hình bình hành nên AC cắt DK tại trung điểm O của mỗi đường.

Ta có $\tan \alpha = \frac{1}{2} = \tan \widehat{C}_1$ (hoặc $\triangle BDP \sim$

$\triangle CKO \Rightarrow \alpha = \widehat{C}_1$ (ở đây $0^\circ < \alpha, \widehat{C}_1 < 45^\circ$).

Vậy $\alpha + \beta = \widehat{C}_1 + \beta = 45^\circ$.

3.b) (h.8)



Hình 8

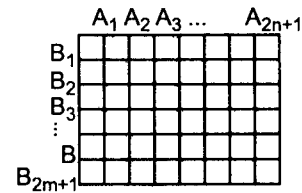
- $\tan \beta = \frac{1}{3} = \tan \widehat{B}_1$ (hoặc $\triangle CDA \sim$

$\triangle BOA$) nên $\beta = \widehat{B}_1$ ($0^\circ < \beta; \widehat{B}_1 < 45^\circ$).

Vậy $\alpha + \beta = \alpha + \widehat{B}_1 = 45^\circ$.

Cuối cùng, cần nói thêm rằng ở mỗi cách giải trên ta còn có thể nêu thêm một số lời giải khác nữa. Khai thác các cách giải trên ta nêu ra bài toán tổng quát sau.

"Cho hình chữ nhật tạo bởi $(2m+1) \times (2n+1)$ (với $n > m$) hình vuông bằng nhau xếp kề nhau như hình vẽ



Hình 9

Chứng minh rằng

$$\widehat{OA_{n+m+1}B_{n-m}} + \widehat{OA_{2n+1}B_{2m+1}} = 45^\circ.$$

Bài toán ban đầu chỉ là trường hợp riêng của bài này ứng với $n = 1, m = 0$.

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN

ĐÀM HIẾU CHIẾN (THCS Trung Vương – Hà Nội)

Để có thể phát triển khả năng tư duy và sáng tạo trong việc học toán và giải toán, thì việc tìm ra kết quả của một bài toán chưa có thể coi là kết thúc được, mà cần phải tiến hành "mổ xẻ", phân tích khai thác bài toán đó.

Nhưng khai thác một bài toán như thế nào ? Chúng ta bắt đầu từ một bài toán sau.

Bài toán 1. Từ một điểm M thuộc đáy BC của tam giác cân ABC ($AB = AC$), vẽ ME , MF theo thứ tự vuông góc với AB , AC ($E \in AB$, $F \in AC$). Chứng minh rằng tổng $ME + MF$ là không đổi khi M di động trên cạnh BC .

Vài cách giải tóm tắt của bài toán trên

Để chứng minh $ME + MF$ là không đổi, ta có thể giải theo hai hướng giải như sau.

1. Hướng giải thứ nhất (Đặc biệt hoá)

Gọi BH , CK là các đường cao của $\triangle ABC$ cân thì $BH = CK = h$ không đổi.

Chọn M trùng với B thì $ME = 0$ và $MF = BH$

Ta có $ME + MF = BH$ (h.1)

Tương tự, nếu M trùng với C thì $ME = CK$ và $MF = 0$ nên $ME + MF = CK$.

Ta có các cách giải sau.

Cách giải thứ nhất (C1)

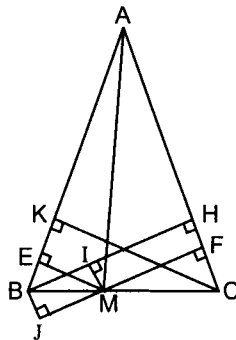
Vẽ đường cao BH và vẽ $MI \perp BH$ (h.1).

$$\triangle BME \cong \triangle MBI$$

$$\Rightarrow ME = BI.$$

$$\text{Ta có } ME + MF =$$

$$BI + IH = BH = h.$$



Hình 1

• Cách giải thứ hai (C2)

Vẽ đường cao BH và vẽ BJ vuông góc với đường thẳng FM (h.1).

$$\triangle BME \cong \triangle BMJ \Rightarrow ME = MJ.$$

$$\text{Ta có } ME + MF = MJ + MF = JF = BH = h.$$

• Cách giải thứ ba (C3) (h.1)

Vẽ đường cao BH và nối AM . Kí hiệu S là diện tích tam giác

$$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow ME \cdot AB + MF \cdot AC = BH \cdot AC$$

$$\Rightarrow ME + MF = BH = h.$$

2. Hướng giải thứ hai

• **Cách giải thứ tư (C4)** Gọi M , M' là hai điểm bất kì thuộc cạnh BC , giả sử M' nằm giữa C và M (h.2). Vẽ $M'E' \perp AB$, $M'F' \perp AC$.

Vẽ $MI \perp M'E'$, $MI' \perp M'F'$

$$\triangle MIM' \cong \triangle M'I'M \Rightarrow$$

$$MI' = MI.$$

$$\text{Ta có } ME + MF =$$

$$E'I + MI' + I'F$$

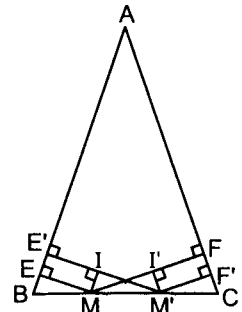
$$= E'I + MI + I'F$$

$$= M'E' + M'F'.$$

Do M và M' là hai điểm bất kì thuộc BC , nên ta kết luận được

$ME + MF$ là không đổi.

Bây giờ, ta chuyển sang trọng tâm của vấn đề là khai thác bài toán trên như thế nào ?



Hình 2

Khai thác bài toán trên

Trước hết, ta viết lại giả thiết của bài toán như sau :

$$\begin{cases} M \in BC & (1) \\ \Delta ABC \text{ có } AB = AC & (2) \\ ME \perp AB, MF \perp AC & (3) \end{cases}$$

Để khai thác bài toán trên, ta có thể tiến hành phân tích, "mổ xẻ" và biến đổi các giả thiết và kết luận.

1. Khai thác kết luận

• Theo cách giải (C1) (h.1), khi chứng minh $\Delta BME = \Delta MBI$ ta còn có được $BE = MI = HF$.

Do đó

$$\begin{aligned} AE + AF &= (AB - BE) + (AH + HF) \\ &= AB + AH \text{ là không đổi,} \end{aligned}$$

Từ đó và kết quả bài toán 1 suy ra $ME + EA + AF + FM = c$ không đổi.

Vậy có thể chứng minh chu vi tứ giác $AEMF$ không đổi.

• Mặt khác cũng từ cách giải (C1) (h.1) ta có

$$\begin{aligned} |AE - CF| &= |(AB - BE) - (AC - AF)| \\ &= |AF - BE| = |AF - HF| = AH \text{ không đổi.} \end{aligned}$$

Như vậy từ giả thiết của bài toán trên có thể chứng minh thêm được :

1) Chu vi tứ giác $AEMF$ không đổi.

2) $|AE - CF|$ không đổi.

2. Thay đổi giả thiết (1)

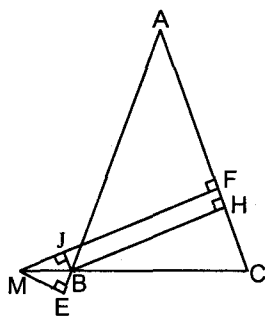
• Giữ nguyên giả thiết (2) và (3). Kiểm tra kết luận.

• Giả thiết (1) được thay như thế nào ?

Ta bỏ dữ kiện M thuộc đoạn thẳng BC và thay bằng M thuộc đường thẳng BC .

Giả sử M thuộc tia đối của tia BC (h.3).

Theo cách giải (C2) vẽ $BJ \perp MF$ ta được $MJ = ME$ và $JF = BH$. Vậy $MF - ME = MF - MJ = BH = h$ không đổi.



Hình 3

Nếu lấy M thuộc tia đối của tia CB ta cũng có kết quả $ME - MF = CK = h$ không đổi. Ta có

Bài toán 2.

Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Lấy điểm M nằm trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn BC . Gọi E, F là chân đường vuông góc hạ từ điểm M xuống đường thẳng AB, AC theo thứ tự. Chứng minh rằng $|ME - MF|$ là không đổi.

3. Thay đổi giả thiết (2)

• Giữ nguyên giả thiết (1) và (3). Kiểm tra kết luận.

• Giả thiết (2) được thay như thế nào ?

Ta bỏ dữ kiện ΔABC cân tại đỉnh A .

Tổng quát hoá giả thiết

(2) ta có ΔABC không cân.

Giả sử $AB > AC$ (h.4).

Theo cách giải (C1) vẽ $MI \perp BH$ ta được $MI \parallel AC$ và $MF = IH$. Ta còn phải so sánh ME và BI .

Để dàng chỉ ra được $AB > AC \Rightarrow \widehat{ABC} < \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABC} < \widehat{BMN} \Rightarrow BN > NM \Rightarrow ME < BI$.

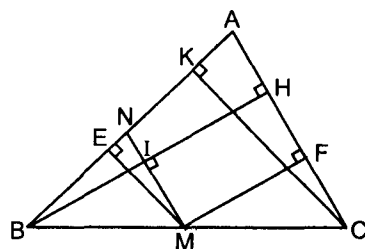
(Chú ý rằng "Trong một tam giác, đường cao thuộc cạnh lớn thì nhỏ thua đường cao thuộc cạnh nhỏ").

Khi M trùng với B thì $ME + MF = BH$.

Vậy $ME + MF \leq BH$.

Tương tự cũng có $ME + MF \geq CK$.

Ta có bất đẳng thức kép $CK \leq ME + MF \leq BH$. Ta dẫn đến



Hình 4

Bài toán 3.

Cho tam giác ABC với $AB > AC$ và các đường cao BH , CK . Lấy điểm M trên cạnh BC . Gọi E , F là chân đường vuông góc hạ từ điểm M xuống AB , AC theo thứ tự. Chứng minh rằng $CK \leq ME + MF \leq BH$.

Từ đó có thể đề xuất bài toán sau.

Cho tam giác ABC với $AB > AC$. Gọi E , F là chân đường vuông góc hạ từ điểm M nào đó thuộc cạnh BC xuống AB , AC theo thứ tự.

Tìm vị trí điểm M thuộc đoạn BC sao cho

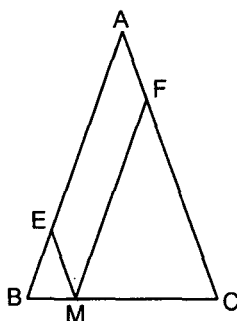
- $ME + MF$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- $ME + MF$ đạt giá trị lớn nhất.

4. Thay đổi giả thiết (3)

• Giữ nguyên giả thiết (1) và (2). Kiểm tra, kết luận.

• Thay giả thiết (3) như thế nào ?

Ta bỏ dữ kiện $ME \perp AB$, $MF \perp AC$ và thay bằng dữ kiện $ME \parallel AC$, $MF \parallel AB$ (h.5).



Hình 5

Vì $AEMF$ là hình bình hành, nên

$$AF = ME = BE.$$

Tương tự

$$AE = MF = FC.$$

Suy ra $ME + MF = AF + FC = AC$ không đổi.

Hơn nữa $AE + EM + MF + AF = AB + AC$ không đổi. Từ đó ta có được

Bài toán 4.

Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Lấy điểm M trên cạnh BC . Kẻ $ME \parallel AC$ và $MF \parallel AB$ với E thuộc AB , F thuộc AC . Chứng minh rằng

- $ME + MF$ là không đổi.
- Chu vi tứ giác $AEMF$ không đổi.

Các bạn hãy thử lấy bài toán 4 làm bài toán gốc và khai thác tương tự để có các bài toán khác.

Cơ sở lí luận của phương pháp khai thác một bài toán như trên là ở chỗ thay đổi dữ kiện của giả thiết hoặc kết luận bằng phương pháp đặc biệt hoá, tổng quát hoá và phương pháp tương tự.

TỪ KẾT QUẢ CỦA MỘT BÀI TOÁN

NGUYỄN NGỌC NAM (Hà Tây)

Từ kết quả hay hướng giải của một bài toán ta có thể khai thác sâu các kết quả và sẽ tìm thêm được các bài toán mới. Các bài toán này giúp chúng ta củng cố nhiều kiến thức, sáng tạo hơn trong mỗi bài và tìm được mối liên hệ, phương pháp giải đối với mỗi dạng toán. Để minh hoạ ta xuất phát từ bài toán sau.

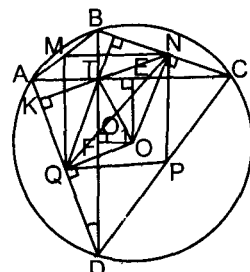
Bài toán gốc.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và AC vuông góc với BD tại T (T khác tâm O). Chứng minh rằng 8 điểm sau đây cùng nằm trên một đường tròn : trung điểm

của các cạnh của tứ giác và chân các đường vuông góc hạ từ T xuống các cạnh. Tính bán kính đường tròn đó theo R và d ($OT = d$).

Lời giải.

Gọi trung điểm của các cạnh AB , BC , CD , DA lần lượt là M , N , P , Q thì $MNPQ$ là hình chữ nhật nội tiếp đường tròn đường kính MP hoặc NQ (h.1).



Hình 1

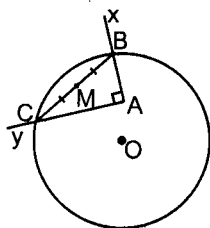
Đường thẳng TN cắt AD tại K thì $\widehat{TAD} + \widehat{ATK} = \widehat{CBD} + \widehat{NTC} = \widehat{CBT} + \widehat{NCT} = 90^\circ$ nên dễ thấy $TN \perp AD$, do đó K nằm trên đường tròn đường kính NQ . Lập luận tương tự với chân các đường vuông góc khác.

Hạ $OE \perp AC$; $OF \perp BD$ thì $AE = EC = MN$; $BF = FD = MQ$. Ta có $NQ^2 = MN^2 + MQ^2 =$
 $= AE^2 + BF^2 = (R^2 - OE^2) + (R^2 - OF^2)$
 $= 2R^2 - (OE^2 + OF^2) = 2R^2 - OT^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow NQ = \sqrt{2R^2 - d^2}.$

Vậy bán kính của đường tròn đi qua 8 điểm trên bằng $r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}.$

• Từ bài toán trên ta nhận thấy: $QONT$ là hình bình hành nên trung điểm O_1 của TO đồng thời là trung điểm của QN hay tâm của đường tròn đi qua M, N, P, Q chính là trung điểm của TO .

Như vậy, nếu T cố định thì O_1 cố định và $d = TO$ không đổi nên $r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$ không đổi. Từ đó ta có thể đề xuất bài toán quỹ tích sau (h.2).



Hình 2

Bài toán 1. Cho đường tròn tâm O , A là điểm cố định nằm trong đường tròn (A khác tâm O). Góc vuông xAy có hai cạnh cắt đường tròn (O) ở B và C . Tìm quỹ tích trung điểm M của dây BC khi góc vuông xAy quay quanh điểm A .

• Từ lời giải bài toán gốc (h.1) ta có

$$NQ^2 = MN^2 + MQ^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2$$

$$= 4NQ^2 = 8R^2 - 4d^2. \quad (1)$$

Do $TA \cdot TC = TB \cdot TD = R^2 - d^2$ nên

$$AC^2 + BD^2 = (TA + TC)^2 + (TB + TD)^2$$

$$= TA^2 + TB^2 + TC^2 + TD^2 + 2(TA \cdot TC + TB \cdot TD)$$

$$= TA^2 + TB^2 + TC^2 + TD^2 + 4(R^2 - d^2).$$

Từ đó và (1) có $TA^2 + TB^2 + TC^2 + TD^2$

$$= 8R^2 - 4d^2 - 4R^2 + 4d^2 = 4R^2 \quad (2)$$

Từ kết quả (1) và (2) ta có thêm bài toán sau.

Bài toán 2. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm T (T khác tâm O) nằm trong đường tròn. Chứng minh rằng khi hai dây AC và BD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau tại T thì

1) $AC^2 + BD^2$ là không đổi.

2) $TA^2 + TB^2 + TC^2 + TD^2$ là không đổi.

• Khai thác thêm ta có

$$OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2 =$$

$$= \left(R^2 - \frac{1}{4}AB^2\right) + \left(R^2 - \frac{1}{4}BC^2\right) +$$

$$+ \left(R^2 - \frac{1}{4}CD^2\right) + \left(R^2 - \frac{1}{4}DA^2\right)$$

$$= 4R^2 - \frac{1}{2}(TA^2 + TB^2 + TC^2 + TD^2)$$

$$= 4R^2 - 2R^2 = 2R^2.$$

Đẳng thức này không phụ thuộc vào d mặc dù giao điểm T có thể thay đổi. Ta có bài toán sau.

Bài toán 3. Cho đường tròn tâm O bán kính R . Hai dây AC và BD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau. Chứng minh rằng tổng bình phương khoảng cách từ điểm O đến các dây AB, BC, CD, DA là không đổi.

• Lưu ý rằng trong các bài toán trên, hai dây AC và BD luôn cắt nhau tại điểm nằm trong đường tròn. Nếu hai đoạn AC và BD không cắt nhau mà hai đường thẳng chứa hai dây đó vuông góc với nhau tại một điểm T cố định nằm ngoài đường tròn thì kết quả còn đúng không?

Các bạn hãy chứng minh tương tự như trên để thấy các hệ thức (1), (2) vẫn đúng. Ta có bài

toán sau tổng quát hơn (không yêu cầu điểm T nằm bên trong đường tròn).

Bài toán 4. Cho đường tròn tâm O bán kính R . Hai cát tuyến AC và BD vuông góc với nhau tại một điểm T cố định. Chứng minh rằng khi hai cát tuyến trên thay đổi thì

- 1) $AC^2 + BD^2$ là không đổi ;
- 2) $TA^2 + TB^2 + TC^2 + TD^2$ là không đổi.

• Đi sâu thêm ta có (h.1) :

$$\begin{aligned}(AC + BD)^2 &= AC^2 + BD^2 + 2AC \cdot BD = \\&= 8R^2 - 4d^2 + 8AE \cdot DF \\&= 8R^2 - 4d^2 + 8\sqrt{(R^2 - OE^2)(R^2 - OF^2)} \\&= 8R^2 - 4d^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2 + OE^2 \cdot OF^2}\end{aligned}$$

Nếu T cố định thì d không đổi. Lúc đó giá trị $AC + BD$ phụ thuộc vào tích $OE^2 \cdot OF^2$ nên $AC + BD$ lớn nhất $\Leftrightarrow OE^2 \cdot OF^2$ lớn nhất.

Mà $OE^2 + OF^2 = d^2$ nên $OE^2 \cdot OF^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow OE = OF$ (hay $OETF$ là hình vuông). Vậy $AC + BD$ lớn nhất khi và chỉ khi AC và BD tạo với OT các góc bằng nhau và bằng 45° .

Ta có bài toán 5.

Bài toán 5. Cho điểm T cố định trong đường tròn (O) (T khác tâm O). Tìm vị trí của hai dây AB và CD đi qua T và vuông góc với nhau để tổng độ dài $AB + CD$ lớn nhất.

Cuối cùng tôi xin đề nghị các bạn hãy tìm các lời giải hay hơn cho các bài toán ở trên.

TỪ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC LỚP 9

LÊ QUỐC HÁN (Khoa Toán, ĐHSPT Vinh)

Trong tác phẩm nổi tiếng "Giải bài toán như thế nào ?", Polya G. cho rằng : "Ví như dòng sông nào cũng bắt nguồn từ những con suối nhỏ, mỗi bài toán dù khó đến đâu cũng có nguồn gốc từ những bài toán đơn giản, có khi rất quen thuộc đối với chúng ta". Vì vậy, trong quá trình tìm tòi lời giải các bài toán, việc tìm hiểu xuất xứ của chúng sẽ giúp chúng ta nảy sinh ra những "ý chói lọi", (từ của Pôlya) đôi lúc còn tìm được đúng chìa khoá để giải các bài toán đó. Đặc biệt, nếu phát hiện ra bài toán cần giải có nguồn gốc từ một bài toán trong sách giáo khoa (SGK), thì tình huống càng trở nên thú vị hơn.

Xin hãy lấy một thí dụ. Cách đây không lâu, trong một kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 toàn quốc, có bài toán hình học khá khó như sau (h.1).

Bài toán 1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn và một điểm M trên cung BC không

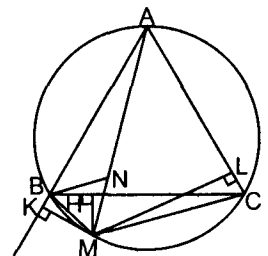
chứa A . Gọi H, L, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, CA, AB . Chứng minh hệ thức

$$\frac{1}{MH} = \frac{1}{ML} + \frac{1}{MK}.$$

Cái khó của bài toán này là các đại lượng hình học nằm ở mẫu thức, và việc chứng minh các hệ thức như vậy không quen thuộc đối với học sinh ở bậc trung học cơ sở. Tuy nhiên, bài toán này liên quan với một bài toán quen thuộc trong SGK hình học lớp 9.

Bài toán 2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn và một điểm M trên cung BC không chứa A . Chứng minh hệ thức

$$MA = MB + MC$$



Hình 1

Giải bài toán này khá đơn giản (h.1). Trên MA lấy điểm N sao cho $MN = MB$. Khi đó hai tam giác MBC và NBA bằng nhau nên $MC = NA$. Do đó $MB + MC = MN + NA = MA$.

Điều thú vị ở đây là từ kết quả bài toán thứ hai, dễ dàng suy ra kết quả của bài toán thứ nhất. Thật vậy từ sự đồng dạng của các cặp tam giác MHC , MKA và MHB , MLA suy ra

$$MC = \frac{MH \cdot MA}{MK} \text{ và } MB = \frac{MH \cdot MA}{ML} \quad (1)$$

Thay các hệ thức này vào hệ thức $MA = MB + MC$ và rút gọn, ta được hệ thức

$$\frac{1}{MH} = \frac{1}{ML} + \frac{1}{MK}.$$

Phân tích các bài toán trên, ta thấy giả thiết tam giác ABC đều phải chăng là quá chặt? Lập tức nảy sinh vấn đề: Nếu tam giác ABC tùy ý thì sẽ thu được kết quả tương tự như thế nào? Lúc đó dễ thấy các hệ thức ở (1) vẫn đúng, còn hệ thức $MA = MB + MC$ không luôn luôn xảy ra, nhưng theo định lý Ptolemy đối với tứ giác nội tiếp $ABMC$ ta có hệ thức

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB \quad (2)$$

Thay các hệ thức ở (1) vào (2), ta có

$$\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{ML} + \frac{AB}{MK}$$

và ta thu được bài toán sau, tổng quát hơn bài toán đầu tiên.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn và một điểm M trên cung BC không chứa A . Gọi H, L, K là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, CA, AB . Chứng minh hệ thức

$$\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{ML} + \frac{AB}{MK}.$$

Đây là một bài toán đã được ra trong một kỳ thi Olympic toán ở Mỹ và là hệ thức thứ 10 đã được nêu lên trong bài báo "Tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn" (THTT, số 252, tháng 6 năm 1998). Cũng trong bài báo này, tôi đề nghị các bạn giải hộ bài toán tương tự.

" $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi các chân đường vuông góc hạ từ D đến BC, CA, AB cùng nằm trên một đường thẳng" (Hệ thức 6). Rất vui vì bạn Ngô Văn Thái đã nêu ra cách giải

khá đẹp cho bài toán này (trong bài "Bàn tiếp về điều kiện để tứ giác nội tiếp", THTT, số 258, tháng 12/1998).

Ở đây xin nêu lên một điều kiện cần và đủ khác để một tứ giác là nội tiếp.

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi H, L, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D đến AB, BC, CA . Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi

$$\frac{CA}{DK} = \frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DL}.$$

Điều kiện cần được suy ra từ bài toán 3. Ta chứng minh điều kiện đủ. Gọi D' là giao điểm của BD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó tứ giác $ABCD'$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\frac{AB}{D'H'} + \frac{BC}{D'L'} = \frac{CA}{D'K'} \quad (3)$$

trong đó H', L', K' lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ D' đến AB, BC, CA (h.2)

$$\text{Mặt khác } \frac{D'H'}{DH} = \frac{D'B}{DB} = \frac{D'L'}{DL}$$

$$\text{nên } D'H' = \frac{D'B \cdot DH}{DB} \text{ và } D'L' = \frac{D'B \cdot DL}{DB} \quad (4)$$

$$\text{Thay (4) vào (3) ta có } \frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DL} =$$

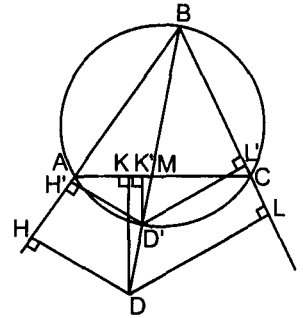
$$\frac{CA \cdot D'B}{DB \cdot D'K'} \text{ mà } \frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DL} = \frac{CA}{DK} \text{ (giả thiết) nên}$$

$$\frac{D'B}{DB} = \frac{D'K'}{DK} = \frac{D'M}{DM} \text{ trong đó } M \text{ là giao điểm}$$

của DB với AC . Theo tính chất tỉ lệ thức, ta có:

$$\frac{|DB - D'B|}{DB} = \frac{|DM - D'M|}{DM} \Rightarrow \frac{DD'}{DB} = \frac{DD'}{DM} \text{ mà}$$

$DB > DM$ nên $DD' = 0$ suy ra D' trùng với D . Do đó $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.



Hình 2

Để kết thúc, tôi xin tâm sự với các bạn rằng việc học tập các kiến thức trong sách giáo khoa nói chung và giải các bài tập trong các sách ấy là hết sức cần thiết, vì chúng chính là những con suối nhỏ, giúp chúng ta tạo ra những con sông lớn, con sông sáng tạo trong học tập bây giờ và phát minh, nghiên cứu khoa học sau này.

Mời các bạn cùng tìm các bài tập trong sách giáo khoa toán ở bậc trung học cơ sở có liên quan bài toán sau đây và tìm lời giải của chúng.

Bài toán 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Cắt tuyến đi qua A cắt hai đường tròn (O) và (O') tại M và N . Tìm tập hợp các trung điểm của MN khi cát tuyến quay quanh điểm A .

TỪ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

TẠ TOÀN - ĐỖ TIẾN HẢI (TP Hồ Chí Minh)

Ta xuất phát từ 2 bất đẳng thức (BĐT) đại số rất quen thuộc sau đây.

BĐT 1. Với các số dương a, b, c có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 \\ &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 - 9 \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2\right) \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ac} \geq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a - b = b - c = c - a = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

BĐT 2. Với các số dương a, b, c có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$$\begin{aligned} \text{Lời giải. } & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \\ &= \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3 \\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\ &= \frac{1}{2}[(b+c) + (c+a) + (a+b)] \times \\ & \quad \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

do áp dụng BĐT 1.

Đẳng thức xảy ra khi $b+c = c+a = a+b \Leftrightarrow a = b = c$.

Có thể vận dụng hai bất đẳng thức trên vào giải và sáng tạo ra các bài toán chứa bất đẳng thức hình học hoặc tìm cực trị hình học.

Bài toán 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Gọi đường vuông góc từ điểm M nằm trong tam giác đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là MD, ME, MF . Xác định vị trí của M để:

a) $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính giá trị đó.

b) $\frac{1}{MD+ME} + \frac{1}{ME+MF} + \frac{1}{MF+MD}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Lời giải.

Gọi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ là đường cao của tam giác đều ABC và đặt $MD = x, ME = y, MF = z$. Ta có

$$S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}$$

$$\Leftrightarrow ah = ax + ay + az \Leftrightarrow x + y + z = h$$

không đổi.

a) Áp dụng BĐT 1 có

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{h} = \frac{6\sqrt{3}}{a}.$$

b) Áp dụng BĐT 2 có

$$(x+y+y+z+z+x)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{9}{2h} = \frac{3\sqrt{3}}{a}.$$

Trong cả hai trường hợp đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, lúc đó M là tâm của ΔABC .

Bài toán 2. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC có ba góc nhọn với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 . Chứng minh rằng

$$a) \frac{AA_1}{HA_1} + \frac{BB_1}{HB_1} + \frac{CC_1}{HC_1} \geq 9$$

$$b) \frac{HA_1}{HA} + \frac{HB_1}{HB} + \frac{HC_1}{HC} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Gọi diện tích các tam giác ABC, HBC, HAC, HAB lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì $S = S_1 + S_2 + S_3$.

$$a) \text{ Dễ thấy : } \frac{HA_1}{AA_1} = \frac{S_1}{S} ; \frac{HB_1}{BB_1} = \frac{S_2}{S} ;$$

$$\frac{HC_1}{CC_1} = \frac{S_3}{S}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1} = 1.$$

$$\text{Áp dụng BĐT 1 được } \frac{AA_1}{HA_1} + \frac{BB_1}{HB_1} + \frac{CC_1}{HC_1} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{HA_1}{AA_1} = \frac{HB_1}{BB_1} = \frac{HC_1}{CC_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$, lúc đó H vừa là trực tâm, vừa là trọng tâm của ΔABC nên ABC là tam giác đều.

$$b) \text{ Từ } \frac{HA_1}{AA_1} = \frac{S_1}{S} \text{ có}$$

$$\frac{HA_1}{HA} = \frac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \frac{S_1}{S - S_1} = \frac{S_1}{S_2 + S_3}.$$

$$\text{Tương tự : } \frac{HB_1}{HB} = \frac{S_2}{S_1 + S_3} ; \frac{HC_1}{HC} = \frac{S_3}{S_1 + S_2}.$$

$$\text{Áp dụng BĐT 2 có } \frac{HA_1}{HA} + \frac{HB_1}{HB} + \frac{HC_1}{HC} \geq \frac{3}{2}.$$

Lập luận như trên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC là tam giác đều.

Bài toán 3. Xét tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt đường tròn (O) lần nữa tại D, E, F . Xác định dạng của tam giác ABC sao cho :

$$a) \frac{AA_1}{DA_1} + \frac{BB_1}{EB_1} + \frac{CC_1}{FC_1} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Tính giá trị đó.

$$b) \frac{AA_1}{AD} + \frac{BB_1}{BE} + \frac{CC_1}{CF} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trực tâm của ΔABC . Dễ dàng chứng minh được $HA_1 = DA_1 ; HB_1 = EB_1 ; HC_1 = FC_1$.

a) Áp dụng bài toán 2. Tổng đang xét đạt giá trị nhỏ nhất là 9 khi ΔABC là tam giác đều.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{AD}{AA_1} + \frac{BE}{BB_1} + \frac{CF}{CC_1} &= \\ &= 1 + \frac{HA_1}{AA_1} + 1 + \frac{HB_1}{BB_1} + 1 + \frac{HC_1}{CC_1} = 4 \\ \text{suy ra } \frac{AA_1}{AD} + \frac{BB_1}{BE} + \frac{CC_1}{CF} &\geq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài toán 4. Trong các tam giác ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính r , hãy xác định dạng của tam giác sao cho tổng độ dài ba đường cao đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Lời giải. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Lập luận tương

tự bài toán 2 được: $\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1$.

Áp dụng BĐT 1 có:

$$h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) r \geq 9r.$$

Đẳng thức xảy ra khi $h_a = h_b = h_c = 3r$, $h_a + h_b + h_c = 9r$, lúc đó $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và M là điểm nằm trong tam giác. Kẻ AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Xác định vị trí của điểm M để

$$\text{a) } \frac{AA_1}{MA_1} + \frac{BB_1}{MB_1} + \frac{CC_1}{MC_1} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Tính giá trị đó.

$$\text{b) } \frac{MA}{MA_1} \cdot \frac{MB}{MB_1} \cdot \frac{MC}{MC_1} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải. Gọi diện tích các tam giác ABC, MBC, MAC, MAB lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì $S = S_1 + S_2 + S_3$.

$$\text{a) Lập luận tương tự bài toán 2 có } \frac{AA_1}{MA_1} + \frac{BB_1}{MB_1} + \frac{CC_1}{MC_1} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$, lúc đó M là trọng tâm $\triangle ABC$.

$$\text{b) Đặt } \frac{AA_1}{MA_1} = x \text{ thì } \frac{MA}{MA_1} = \frac{AA_1}{MA_1} - 1 = x - 1.$$

$$\text{Tương tự } \frac{MB}{MB_1} = \frac{BB_1}{MB_1} - 1 = y - 1,$$

$$\frac{MC}{MC_1} = \frac{CC_1}{MC_1} - 1 = z - 1.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow xy + yz + zx = xyz.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } \frac{MA}{MA_1} \cdot \frac{MB}{MB_1} \cdot \frac{MC}{MC_1} &= (x-1)(y-1)(z-1) \\ &= xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1 = x + y + z - 1 \\ &= (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 1 \geq 9 - 1 = 8. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$, lúc đó M là trọng tâm của $\triangle ABC$. (Đây là cách chứng minh khác của bài T5/252 có lời giải ở số 256 (10.1998)).

Bài tập tự luyện. Cho tam giác ABC với các phân giác AA_1, BB_1, CC_1 . Gọi a_1, b_1, c_1 lần lượt là các khoảng cách từ A_1 đến AB, B_1 đến BC, C_1 đến CA . Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài ba đường cao của tam giác kẻ từ A, B, C . Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} \geq \frac{3}{2}.$$

NHẬN XÉT LỜI GIẢI BÀI TOÁN NHƯ THẾ NÀO ?

NGUYỄN VĂN VĨNH (ĐHSP TP Hồ Chí Minh)

Học toán như thế nào, đó là vấn đề khá rộng. Trong bài này, xin bàn về một khía cạnh. Đối với lời giải của một bài toán có ba yêu cầu mang tính chất bắt buộc là :

- Lời giải không có sai lầm.
- Lập luận phải có căn cứ.
- Lời giải phải đầy đủ, không thiếu, không thừa.

Bốn yêu cầu sau đây cũng rất quan trọng đối với việc rèn luyện tư duy logic, phương pháp học toán thông minh, sáng tạo :

- Lời giải cần ngắn gọn, đơn giản, hay nhất.
- Lời giải phải rõ ràng, sáng sủa và hợp lí cả về nội dung lẫn hình thức trình bày.
- Cần biết giải thích con đường dẫn đến lời giải, làm cho lời giải dễ hiểu, nhất là khi trình bày miệng lời giải.
- Biết cách nhận xét, khái quát hoá lời giải, mở rộng bài toán, phát hiện thêm các bài toán mới.

Trong bài này chúng tôi muốn trao đổi cùng các bạn về yêu cầu phải biết nhận xét, khái quát hoá lời giải, mở rộng bài toán và phát hiện thêm các bài toán mới.

Chúng ta bắt đầu từ bài toán 1 (h.1).

Bài toán 1. Cho hình vuông $ABCD$. T là một điểm bất kì ở trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E . Đường thẳng CT cắt đường thẳng AE tại M .

Chứng minh rằng đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM .

(Đề thi chọn học sinh giỏi
Tp Hồ Chí Minh, vòng 2, 1993 – 1994)

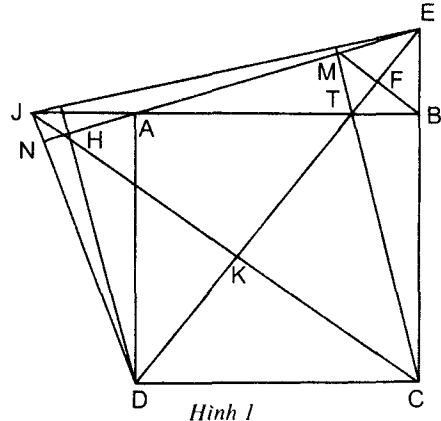
Lời giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm J sao cho $AJ = BE$ (h.1). AE cắt JC tại H và cắt JD tại N .

Ta có

$$\Delta EBA = \Delta JAD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{JAN} + \widehat{AJN} = \widehat{EAB} + \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp DJ.$$

$$\text{Ta có : } \Delta JBC = \Delta ECD \text{ (c.g.c)} \\ \Rightarrow \widehat{CEK} + \widehat{ECK} = \widehat{BJC} + \widehat{ECK} = 90^\circ \Rightarrow JC \perp DE$$



Hình 1

Vậy H là trực tâm của tam giác DEJ . Dễ thấy T là trực tâm của tam giác CEJ , do đó đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng JE .

$$\left. \begin{array}{l} CM \perp JE \\ DH \perp JE \end{array} \right\} \Rightarrow CM \text{ song song với } DH.$$

$$\text{Tam giác } EDH \text{ có } TM \parallel DH, \text{ suy ra } \frac{ME}{MH} = \frac{TE}{TD} \quad (1)$$

$$\text{Tam giác } ECD \text{ có } TB \parallel DC, \text{ suy ra } \frac{BE}{BC} = \frac{TE}{TD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{ME}{MH} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BM \parallel CH.$$

$$\left. \begin{array}{l} BM \parallel CH \\ CH \perp DE \end{array} \right\} \Rightarrow BM \perp DE \text{ (đpcm).}$$

Sau khi giải xong bài toán 1, ta có nhận xét : Với T là điểm bất kì lấy trên cạnh AB (T khác A và B), ta luôn luôn nhận được kết quả là BM vuông góc với DE . Nói cách khác, nếu hình vuông $ABCD$ cố định, điểm T di động trên cạnh

AB (T khác A và B) thì $\widehat{BFD} = 90^\circ$, hay là điểm F chạy trên đường tròn đường kính BD (chưa xét giới hạn). Với cách nhìn nhận như vậy, chúng ta đi tới bài toán sau.

Bài toán 2. Cho hình vuông $ABCD$ cố định. Lấy điểm T trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E . Đường thẳng CT cắt đường thẳng AE tại M . Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F .

Tìm quỹ tích điểm F khi điểm T di động trên cạnh AB .

Từ lời giải bài toán 1 ta thấy quỹ tích của điểm F là một phần tư đường tròn đường kính BD chắn cung AB , loại trừ các điểm A và B .

Sau khi giải xong Bài toán 2, chắc các bạn sẽ tự hỏi :

Khi điểm T trên cạnh AB thì $\widehat{BFD} = 90^\circ$.

Nếu T là một điểm bất kì trên tia AB (T khác A) thì kết quả còn đúng hay không ?

Câu trả lời là kết quả vẫn còn đúng. Và dẫn đến bài toán sau.

Bài toán 3. Cho hình vuông $ABCD$ cố định. Lấy điểm T trên tia AB (T khác A). Tia DT cắt tia CB tại E . Đường thẳng CT cắt đường thẳng AE tại M . Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F .

Tìm quỹ tích điểm F khi điểm T di động trên tia AB .

Trong trường hợp điểm B nằm giữa hai điểm A và T , các bạn chỉ việc chọn điểm J trên cạnh AB sao cho $AJ = BE$. Sau đó, chứng minh tương tự như bài toán 1 sẽ nhận được kết quả $\widehat{BFD} = 90^\circ$.

Quỹ tích là nửa đường tròn đường kính AC bỏ điểm A và C .

Việc chuyển từ bài toán 1 sang các bài toán 2 và bài toán 3 sẽ được định hình ngay, nếu như các bạn sử dụng phương pháp tọa độ để giải bài toán 1.

Thật vậy, chọn hệ trục tọa độ như sau : Trục DC là trục hoành, trục DA là trục tung.

Để cho gọn ta chọn đơn vị $1 = DC = DA$.

Đặt $\widehat{CDE} = m^\circ$.

Ta có, trong hệ tọa độ đã chọn, các điểm $A(0; 1), B(1; 1), C(1; 0), D(0; 0), E(1; \tan m^\circ), T(\cot m^\circ; 1)$;

Khi đó phương trình đường thẳng AE là
$$\frac{y-1}{\tan m^\circ - 1} = \frac{x-0}{1-0}$$

hay là : $y = (\tan m^\circ - 1)x + 1$.

Phương trình đường thẳng CT là :

$$\frac{y-1}{0-1} = \frac{x-\cot m^\circ}{1-\cot m^\circ}$$

hay là : $y = \frac{x-1}{\cot m^\circ - 1}$.

Từ đó suy ra giao điểm M của các đường thẳng AE và CT có tọa độ

$$x = \frac{\cot m^\circ}{\cot m^\circ + \tan m^\circ - 1}$$

$$y = \frac{1 - \tan m^\circ}{(\cot m^\circ - 1)(\cot m^\circ + \tan m^\circ - 1)}$$

Viết phương trình đường thẳng BM , ta suy ra được đường thẳng BM có hệ số góc $k = -\cot m^\circ$.

Đường thẳng DE có hệ số góc là $\tan m^\circ$.

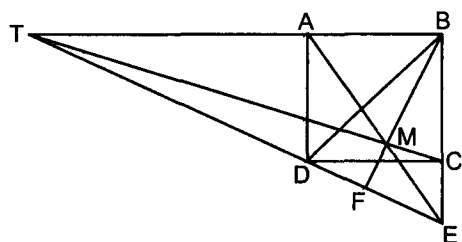
Từ đó suy ra : đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM . Sử dụng phương pháp tọa độ giải bài toán 1, bạn có thể nhận xét ngay được : góc $\widehat{CDE} = m^\circ$ có thể được xác định một cách tùy ý chỉ cần m° khác với 90° và 0° (để $\tan m^\circ$ và $\cot m^\circ$ xác định) ta vẫn có hai đường thẳng DE và BM vuông góc với nhau.

Chúng ta đi tới

Bài toán 4. Cho hình vuông $ABCD$ cố định. Lấy điểm T trên đường thẳng AB (T khác A). Đường thẳng DT cắt đường thẳng CB tại E . Đường thẳng CT cắt đường thẳng AE tại M . Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F .

Tìm quỹ tích của điểm F khi điểm T di động trên đường thẳng AB .

Bây giờ chúng ta xét bài toán dưới một góc độ khác (h.2).



Hình 2

Xét một vị trí của điểm T trên tia đối của tia AB . Nếu xem BD là phân giác của góc vuông TBE của tam giác TBE , còn BF là đường cao thuộc cạnh huyền, chúng ta đi tới

Bài toán 5. Cho tam giác TBE ($\widehat{B} = 90^\circ$). Vẽ đường phân giác BD và đường cao BF . Từ D dựng DA và DC theo thứ tự vuông góc với cạnh TB và cạnh BE (A trên TB và C trên BE).

Chứng minh rằng các đường thẳng TC , AE và BF cắt nhau tại một điểm.

Các bài toán 2, 3, 4, 5 tương tự với bài toán 1. Việc giải bài toán 1 có thể giúp chúng ta giải các bài toán khác tương tự với nó.

Nhà sư phạm và là nhà toán học nổi tiếng người Mỹ (gốc Hungari) Polya có nhận xét : "Trong toán học sơ cấp cũng như trong toán học cao cấp, *phép tương tự* có lẽ là có mặt trong mọi phát minh. Trong một số phát minh *phép tương tự* chiếm vai trò quan trọng hơn cả".

Còn đối với nhà thiên văn tài ba Kepler (người Đức), người đã phát minh ra ba định luật nổi tiếng trong thiên văn học mang tên Kepler thì : "Tôi vô cùng biết ơn các *phép tương tự*, những người thầy đáng tin cậy nhất của tôi. Các *phép tương tự* đã giúp tôi khám phá ra các bí mật của tự nhiên, đã giúp tôi vượt qua được mọi trở ngại".

Quá trình khái quát hoá dựa trên sự vận dụng phép tương tự gắn liền với "phòng thí nghiệm" của tư duy sáng tạo. Có thể nói, đó là một trong những phương tiện quan trọng nhất của việc tự giáo dục, tức là việc mở rộng và đào sâu kiến thức đã có.

Phương pháp học tập khoa học này, đòi hỏi sự nỗ lực của bản thân các bạn, trên cơ sở đã nắm vững các phương pháp, đường lối giải những bài toán đã có.

PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

NGÔ THẾ PHIỆT (Đà Nẵng)

Các bạn đều rất quen thuộc công thức tính diện tích S của một tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, đường cao $AH = h_a$ như sau :

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Đặc biệt nếu tam giác là tam giác đều cạnh a thì

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Từ các công thức rất đơn giản đó chúng ta có thể giải một số bài toán khó.

I. Tính tỉ số hình học

Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh BC , CA và AB của tam giác lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại P .

a) Chứng minh rằng

$$\frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{AB_1}{B_1C}.$$

b) Chứng minh định lí Ceva :

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Lời giải. a) Hạ $AA_2 \perp BB_1$ và $CC_2 \perp BB_1$ (h.1). Ta có

$$2S_{ABP} = BP \cdot AA_2.$$

$$2S_{BCP} = BP \cdot CC_2.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{AA_2}{CC_2}.$$

Mặt khác $\triangle AB_1A_2$ đồng dạng với $\triangle CB_1C_2$ nên

$$\frac{AA_2}{CC_2} = \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{AB_1}{B_1C} \quad (1)$$

b) Chứng minh tương tự được

$$\frac{S_{ACP}}{S_{ABP}} = \frac{CA_1}{A_1B} \quad (2) \text{ và } \frac{S_{BCP}}{S_{ACP}} = \frac{BC_1}{C_1A} \quad (3)$$

Nhân theo từng vế của (1), (2) và (3) ta suy ra

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

II. Chứng minh hai đại lượng hình học bằng nhau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$, các đường cao từ đỉnh A, B, C tương ứng là h_a, h_b và h_c . Gọi S là diện tích và r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng

$$a) S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$$

$$b) \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Lời giải

a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Ta có :

$$S = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}$$

$$\Rightarrow 2S = cr + ar + br = (a + b + c)r \quad (4)$$

b) Từ (4) suy ra

$$\frac{2S}{r} = a + b + c \quad (5)$$

Mặt khác ta có

$$a = \frac{2S}{h_a}, \quad b = \frac{2S}{h_b}, \quad c = \frac{2S}{h_c}$$

$$\text{nên } a + b + c = 2S \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \quad (6)$$

So sánh (5) và (6) ta có

$$2S \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = \frac{2S}{r} \quad (7)$$

Rút gọn $2S$ ở hai vế của (7) ta có hệ thức phải chứng minh.

III. Chứng minh bất đẳng thức hình học

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và điểm O bên trong tam giác. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi các khoảng cách từ O đến tam giác là $OM = d_a$, $ON = d_b$, $OP = d_c$, và khoảng cách từ O đến các đỉnh A, B, C là $OA = R_a$, $OB = R_b$, $OC = R_c$. Chứng minh rằng

$$a) a.R_a \geq c.d_c + b.d_b$$

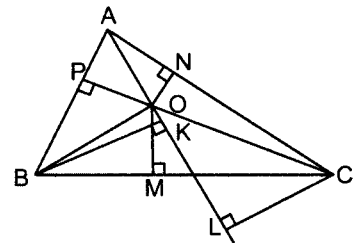
$$b) R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

(Bất đẳng thức Erdős)

(Đề 48 câu II – bộ đề thi Tuyển sinh ĐH)

Lời giải

1) Hạ BK và CL vuông góc với AO (h.2). Đặt $a_1 = BK$ và $a_2 = CL$ ta có $a_1 + a_2 \leq a$ (vì cạnh góc vuông phải nhỏ hơn cạnh huyền)



Hình 2

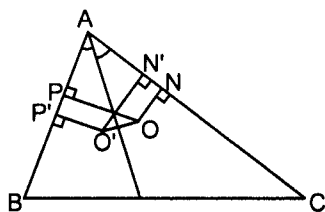
$$\text{Từ đó } \frac{a_1.R_a}{2} + \frac{a_2.R_a}{2} \leq \frac{a.R_a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{AOB} + S_{AOC} \leq \frac{a.R_a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{c.d_c}{2} + \frac{b.d_b}{2} \leq \frac{a.R_a}{2}$$

$$\Rightarrow a.R_a \geq b.d_b + c.d_c. \quad (8)$$

2) Bây giờ ta lấy điểm O' đối xứng với O qua phân giác góc BAC (h.3). Ta có :
 $O'A = OA = R_a$
 và $OP = O'N'$,
 $ON = O'P'$.



Hình 3

Vậy áp dụng công thức (1) cho O' ta có
 $a.R_a \geq b.d_c + c.d_b$

$$\text{suy ra } R_a \geq \frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a} \quad (9)$$

Tương tự có

$$R_b \geq \frac{ad_c}{b} + \frac{cd_a}{b} \quad (10)$$

$$R_c \geq \frac{ad_b}{c} + \frac{bd_a}{c} \quad (11)$$

Cộng theo từng vế của (9), (10) và (11) ta được

$$\begin{aligned} R_a + R_b + R_c &\geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)d_c + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)d_b + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)d_a. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc với các số dương x, y là $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$$\text{suy ra } R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \frac{a}{c} = \frac{c}{a},$

$\frac{b}{c} = \frac{c}{b}$, nghĩa là xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay khi $\triangle ABC$ đều.

Đến đây các bạn đã làm quen với phương pháp diện tích. Các bạn hãy bắt tay vào việc giải các bài toán sau đây.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Từ O dựng các đường thẳng DE, FK, MN tương ứng song song với AB, AC, BC sao cho F, M nằm trên AB ; E, K nằm trên BC ; N, D nằm trên AC . Chứng minh rằng

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BM}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều. Lấy điểm P tùy ý trong $\triangle ABC$. Từ O hạ các đường vuông góc PD, PE, PF lần lượt tới các cạnh BC, CA, AB . Tính tỉ số

$$\frac{PB + PE + PF}{BD + CE + AF}.$$

Bài 3. Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp của $\triangle ABC$ tương ứng với các góc A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đó.

a) Chứng minh rằng $S = pr = (p - a)r_a$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Chân các đường cao kẻ từ A, B, C theo thứ tự là A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng

$$\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \geq 6.$$

Với tam giác nào thì xảy ra dấu đẳng thức ?

(Đề 144 câu V - Bộ đề thi tuyển sinh ĐH)

GIẢI ĐƯỢC BÀI TOÁN CHƯA HẸN LÀ KẾT THÚC

ĐẶNG VĂN BIỂU

(GV THCS Đông Dư, Gia Lâm, Hà Nội)

Tìm được lời giải một bài toán thì thật sung sướng nhưng nếu quá vui mà dừng lại để toạ hưởng thì thật là đáng tiếc vì còn biết bao điều mới lạ vẫn còn ẩn dấu trong đó. Nếu ta biết khai thác bài toán vừa giải bằng cách xét các trường hợp tương tự, khái quát hoá thì chắc chắn sẽ khám phá được những bài toán mới thú vị. Xin bắt đầu từ bài toán đơn giản dưới đây.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm nào đó thuộc cạnh BC . Lấy các điểm D trên AC và E trên AB sao cho $MD \parallel AB$ và $ME \parallel AC$ (nếu M trùng B thì lấy D trùng A , nếu M trùng C thì lấy E trùng A). Giả sử diện tích các tam giác MBE và MCD là $S_{MBE} = c^2$, $S_{MCD} = b^2$. Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = (b + c)^2 \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $S_{ABC} = x^2$.

Trên hình 1 dễ thấy $\triangle MBE \sim \triangle CBA$ nên

$$\frac{c}{x} = \frac{MB}{BC}.$$

$$\triangle MCD \sim \triangle BCA \text{ nên } \frac{b}{x} = \frac{MC}{BC}.$$

$$\text{Từ đó } \frac{b+c}{x} = \frac{MB+MC}{BC} = 1 \Rightarrow x = b+c$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = x^2 = (b+c)^2$$

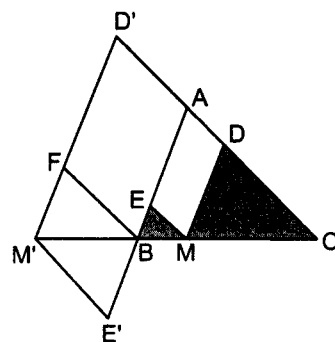
$$\text{hay } \sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{MCD}} + \sqrt{S_{MBE}}.$$

Từ kết quả bài toán 1 suy ra ngay $S_{ADME} = 2bc$. Dễ thấy kết quả trên vẫn đúng khi M trùng với B ($c = 0$) hoặc M trùng với C ($b = 0$).

Bài toán đã giải xong. Nhưng nếu suy nghĩ thêm sẽ xuất hiện câu hỏi: Nếu M' nằm trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn BC , chẳng hạn M' thuộc tia đối của tia BC thì diện tích các tam giác ABC , $M'BE'$, $M'CD'$ liên hệ với nhau theo hệ thức nào?

Dựng hình bình hành $M'E'BF$

(h.1) thì $S_{M'BF} = S_{M'BE'} = c^2$. Đặt $S_{M'CD'} = b^2$. Áp dụng kết quả BT 1 coi điểm B thuộc cạnh $M'C$ của $\triangle D'M'C$ thì

$$b = x + c \Rightarrow S_{ABC} = x^2 = (b - c)^2.$$


Hình 1

Tương tự khi M thuộc tia đối của tia CB thì $S_{ABC} = (c - b)^2$. Ta có

Bài toán 2. Với giả thiết như bài toán 1, chỉ khác là điểm M nằm trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn BC thì

$$S_{ABC} = (b - c)^2 \quad (2)$$

Ta lại xét nếu điểm M nằm bên trong $\triangle ABC$ thì sẽ có hệ thức gì giữa diện tích các tam giác tạo thành bởi các đường thẳng qua M mà song song với các cạnh của $\triangle ABC$?

Bài toán 3. Qua điểm M nằm trong $\triangle ABC$ kẻ các đường thẳng $DK \parallel AB$, $EF \parallel AC$, $PQ \parallel BC$ (D và Q thuộc AC , E và P thuộc AB , K và F thuộc BC). Giả sử $S_{MPE} = c^2$, $S_{MQD} = b^2$, $S_{MKF} = a^2$. Tính S_{ABC} theo a, b, c .

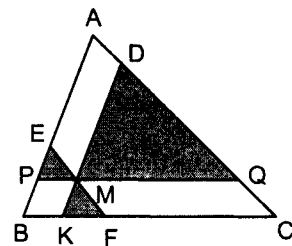
Lời giải. (h.2)

Cách 1. Áp dụng kết quả BT 1 ta có

$$S_{APQ} = (b + c)^2,$$

$$S_{BEF} = (c + a)^2,$$

$$S_{DKC} = (a + b)^2.$$



Hình 2

Dễ thấy

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{APQ} + S_{BEF} + S_{DKC} - \\ &- S_{MPE} - S_{MQD} - S_{MKF} \\ &= (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2 - c^2 - b^2 - a^2 \\ &= (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Ngoài ra có

$$S_{AEMD} = 2bc, \quad S_{BKMP} = 2ca,$$

$$S_{CQMF} = 2ab.$$

Hệ thức $S_{ABC} = (a+b+c)^2$ (3) thật đẹp, phải không các bạn !

Khi M thuộc cạnh BC thì $a = 0$, và ta thấy lại kết quả bài toán 1.

Cách 2. Đặt $S_{ABC} = x^2$.

$$\text{Từ } \triangle MKF \sim \triangle ABC \text{ có } \frac{KF}{BC} = \frac{a}{x}$$

$$\triangle DMQ \sim \triangle ABC \text{ có } \frac{MQ}{BC} = \frac{b}{x}$$

$$\triangle EPM \sim \triangle ABC \text{ có } \frac{MP}{BC} = \frac{c}{x}.$$

Từ các đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{x} &= \frac{KF + MQ + MP}{BC} \\ &= \frac{KF + FC + BK}{BC} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = a+b+c$$

$$\text{hay } S_{ABC} = (a+b+c)^2.$$

Còn M nằm ngoài $\triangle ABC$ như ở hình 3 thì sao ?

Trường hợp M thuộc góc xAy

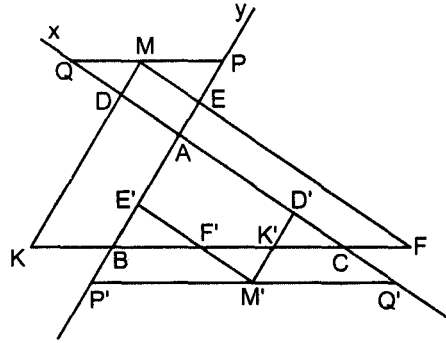
Sử dụng kí hiệu và lập luận tương tự cách 2 lời giải BT 3 ta thấy (h.3) các tam giác MKF , EPM , DMQ đều đồng dạng với $\triangle ABC$ nên có

$$\frac{a}{x} = \frac{KF}{BC}, \quad \frac{c}{x} = \frac{MP}{BC}, \quad \frac{b}{x} = \frac{MQ}{BC}, \quad \text{từ đó}$$

$$\frac{a-b-c}{x} = \frac{KF - MQ - MP}{BC} = \frac{KF - CF - KB}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow x = a-b-c.$$

Vậy $S_{ABC} = (a-b-c)^2$. Khi M thuộc Ax hoặc thuộc Ay thì $b = 0$ hoặc $c = 0$ ta thấy lại kết quả bài toán 2.



Hình 3

Trường hợp M' thuộc góc BAC nhưng nằm ngoài $\triangle ABC$

Lập luận tương tự như trên ta có (h.3)

$$S_{ABC} = x^2 = (b+c-a)^2$$

Khi M thuộc cạnh BC thì $a = 0$, ta thấy lại kết quả bài toán 1.

Khi M nằm ngoài $\triangle ABC$ mà ở các miền khác hai trường hợp trên ta cũng có các hệ thức tương tự. Ta đã chứng minh được bài toán sau.

Bài toán 4. Cho điểm M nằm ngoài $\triangle ABC$, M thuộc góc BAC hoặc góc đối đỉnh của góc BAC . Qua M kẻ các đường thẳng $DK \parallel AB$, $EF \parallel AC$, $PQ \parallel BC$ (D và Q thuộc đường thẳng AC , E và P thuộc đường thẳng AB , K và F thuộc đường thẳng BC). Giả sử $S_{MPE} = c^2$, $S_{MQD} = b^2$, $S_{MKF} = a^2$, thế thì $S_{ABC} = (b+c-a)^2$.

Tóm lại từ bài toán 1 khá đơn giản ta dần đến xét các bài toán 3 và 4 tổng quát hơn, xét đủ các vị trí tương đối của M đối với tam giác ABC . Các bạn hãy thử giải bài toán dưới đây rồi tìm ra những bài toán mới tổng quát hơn.

Bài toán. Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm nào đó thuộc cạnh BC . Lấy các điểm D trên AC và E trên AB sao cho $MD \parallel AB$ và $ME \parallel AC$. Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = \frac{BA}{BE} \cdot S_{MBE} + \frac{CA}{CD} \cdot S_{MCD}$$

THAY ĐỔI ĐIỀU KIỆN THỨ YẾU TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP. Hồ Chí Minh)

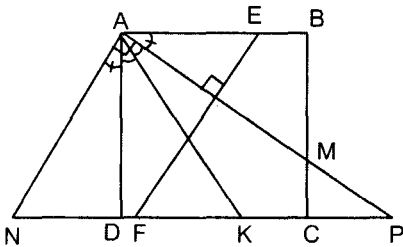
Khi nghiên cứu kĩ chứng minh các bài toán hình học ta thấy một số điều kiện là thiết yếu, còn một số điều kiện khác đóng vai trò thứ yếu, không có ảnh hưởng lớn đến phương pháp giải. Nếu thay đổi điều kiện thứ yếu này ta sẽ hiểu thực chất mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận, từ đó sẽ dẫn đến bài toán tổng quát hơn. Xin minh họa điều trên qua các bài toán dưới đây.

Bài toán 1. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh BC . Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại P . Đường thẳng EF vuông góc với AM trong đó E, F tương ứng nằm trên AB, CD . Đường phân giác của góc DAM cắt CD tại K . Chứng minh rằng

a) $EF = BM + DK$

b) $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AP^2}$.

Lời giải (h.1)



Hình 1

a) Kẻ $AN \perp AM$, cắt đường thẳng CD tại N thì $ANFE$ là hình bình hành nên $EF = AN$ (1)

Ta có $\widehat{DAN} = \widehat{BAM}$, $AD = AB$, $\widehat{ADN} = \widehat{ABM} = 90^\circ$ nên $\triangle ADN = \triangle ABM \Rightarrow BM = ND$, $AN = AM$ (2)

Mặt khác có $\widehat{NAK} = \widehat{KAD} + \widehat{DAN} = \widehat{KAM} + \widehat{BAM} = \widehat{KAB} = \widehat{AKN}$ nên $NA = NK$ (3)

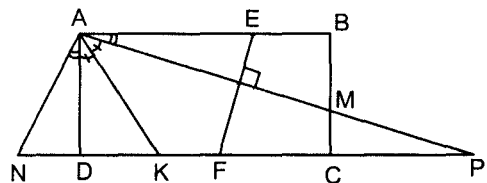
Kết hợp (1) (2) (3) ta có $EF = AN = NK = ND + DK = BM + DK$.

b) Ta có $\widehat{NAP} = 90^\circ$. Trong $\triangle NAP$ vuông tại A với đường cao AD ta có

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2}.$$

Từ đó và (2) suy ra $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AP^2}$.

Nhận xét. Điều mấu chốt trong đường lối giải trên là vẽ thêm $\triangle ADN$ để có $\triangle ADN = \triangle ABM$. Nếu ở đề bài thay điều kiện $ABCD$ từ hình vuông trở thành hình chữ nhật (h.2) thì trong lời giải sẽ có $\triangle ADN \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{DN}{BM} = \frac{AD}{AB} = t$ ($t > 0$). Lúc đó ta có



Hình 2

a) $EF = AN = NK = ND + DK = t.BM + DK$

b) $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2}$

suy ra $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{t^2}{AP^2}$.

Ta có bài toán tổng quát hơn bài toán 1 như sau.

Bài toán 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = t.AB$ ($t > 0$). Lấy điểm M trên cạnh BC . Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại P .

Đường thẳng EF vuông góc với AM trong đó E, F tương ứng nằm trên AB, CD . Đường phân giác của góc DAM cắt CD tại K . Chứng minh rằng

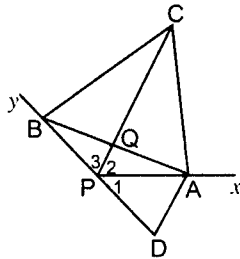
a) $EF = t.BM + DK$

b) $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{t^2}{AP^2}$.

Bài toán 3. Cho góc $\widehat{xPy} = 120^\circ$ và điểm A nằm trên tia Px . Dựng tam giác đều ABC sao cho B thuộc tia Py và C thuộc tia phân giác của góc xPy . Gọi Q là giao điểm của AB và PC . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}.$$

Lời giải. Lấy điểm D trên tia đối của tia Py sao cho $PD = PA$ (h.3). Do $\widehat{APD} = \widehat{P}_1 = 60^\circ$ nên $\triangle APD$ là đều $\Rightarrow PD = PA = AD$ (4)



Hình 3

Ta có $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2 = \widehat{P}_3 = 60^\circ$. Trong $\triangle ABD$ có $PQ \parallel DA$ nên theo ĐL Thales thì

$$\frac{PB}{PQ} = \frac{DB}{DA} = \frac{PB + PD}{DA} = \frac{PB}{DA} + \frac{PD}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{1}{DA} + \frac{PD}{DA \cdot PB} \quad (5)$$

Từ (4), (5) có $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}$ (6)

Nhận xét. Điều mấu chốt trong đường lối giải trên là vẽ thêm $\triangle APD$ đều để có $PQ \parallel AD$. Nếu thay điều kiện góc $\widehat{xPy}$ từ 120° trở thành α ($0^\circ < \alpha, 180^\circ$), thì góc $\widehat{P}_1 = \widehat{APD} = 180^\circ - \alpha$ không đổi. Điều kiện $\triangle ABC$ đều cho phép xác định được điểm C khi biết điểm B trên tia Py , lúc đó không cần yêu cầu điểm C thuộc tia phân giác của góc xPy .

Ta xét hai trường hợp mở rộng bài toán 3.

a) Giả sử điểm C nằm bên trong góc xPy (h.3). Kẻ $AD \parallel PC$ cắt đường thẳng PB tại D .

Gọi AH, DK lần lượt là đường cao của $\triangle APD$ (có thể không đều) thì :

$$PA \sin P_1 = AH = DA \sin P_3 = DA \sin(\alpha - P_2) \quad (7)$$

$$PD \sin P_1 = DK = DA \sin \widehat{PAD} = DA \sin P_2 \quad (8)$$

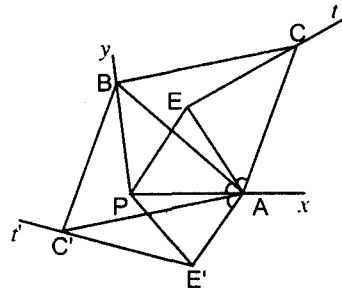
Vì $PQ \parallel AD$ nên vẫn có (5). Thay (7), (8) vào (5) được $\frac{1}{PQ} = \frac{\sin(\alpha - P_2)}{PA \sin P_1} + \frac{\sin P_2}{PB \sin P_1}$ (9)

Trường hợp riêng của hệ thức (9) là hệ thức (6) khi $\alpha = 120^\circ$ và $P_1 = P_2 = P_3 = 60^\circ$.

Khi cho $\alpha = 90^\circ$ hệ thức (9) trở thành

$$\frac{1}{PQ} = \frac{\cos P_2}{PA} + \frac{\sin P_2}{PB}.$$

b) Ta xét xem khi $\widehat{xPy} = \alpha$ thì điểm C nằm trên đường nào ? Dựng bốn tam giác đều ABC và ABC', PAE và PAE' , thì điểm E, E' cố định (h.4). Ta có $AC = AB = AC', \widehat{EAC} = \widehat{PAB} = \widehat{E'AC'}, AE = AP = AE'$ nên $\triangle AEC = \triangle APB = \triangle AE'C'$. Từ đó $\widehat{AEC} = \widehat{APB} = \widehat{AE'C'} = \alpha$.



Hình 4

Như vậy khi $\triangle ABC$ và $\triangle ABC'$ là đều còn B chạy trên tia Py thì điểm C chạy trên tia Et và điểm C chạy trên tia Et và điểm E' chạy trên tia $E't'$. (Các bạn tự chứng minh phần đảo).

Ta có bài toán tổng quát hơn bài toán 3 như sau.

Bài toán 4. Cho góc $\widehat{xPy} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) và điểm A nằm trên tia Px . Dựng tam giác đều ABC sao cho B thuộc tia Py . Gọi Q là giao điểm của AB và PC .

a) Với C là điểm nằm trong góc xPy , chứng minh rằng

$$\frac{\sin \widehat{APB}}{PQ} = \frac{\sin \widehat{BPC}}{PA} + \frac{\sin \widehat{APC}}{PB}$$

b) Tìm quỹ tích của điểm C khi điểm B di động trên tia Py .

Các bạn hãy thử thay đổi điều kiện thứ yếu trong bài toán hình học nào đó để sáng tạo ra bài toán mới.

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC VỀ TỈ SỐ DIỆN TÍCH

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

(GV THCS Đa Tốn - Gia Lâm, Hà Nội)

Trong bài viết này, chúng ta sẽ đề cập đến một ứng dụng của một hệ thức hình học xuất phát từ công thức tính diện tích $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ và được phát biểu như sau.

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC tại B', C' thì

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} \quad (1)$$

Việc chứng minh hệ thức (1) khá dễ dàng và xin nhường cho bạn đọc. Dưới đây thông qua một số bài toán, chúng tôi muốn chỉ ra rằng sử dụng hệ thức (1) có thể giải được một số bài toán hình học khá ngắn gọn.

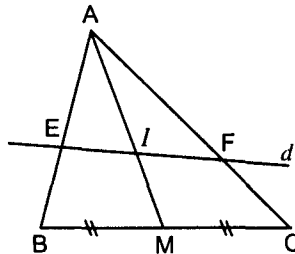
Bài toán 1. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Một đường thẳng d cắt cạnh AB, AC và AM lần lượt tại E, F và I . Chứng minh rằng

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF} = 2 \frac{AM}{AI}$$

Lời giải. (hình 1)

Do $S_{ABC} = 2S_{ABM} = 2S_{ACM}$ nên sử dụng hệ thức (1) có

$$\frac{2AE \cdot AF}{AB \cdot AC} = \frac{2S_{AEF}}{S_{ABC}}$$



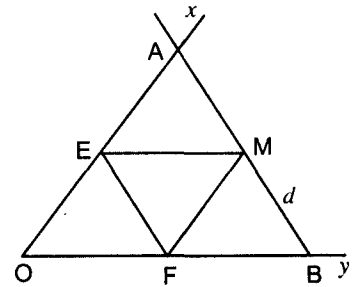
Hình 1

$$= \frac{2S_{AEI}}{2S_{ABM}} + \frac{2S_{AIF}}{2S_{ACM}} = \frac{AE \cdot AI}{AB \cdot AM} + \frac{AF \cdot AI}{AC \cdot AM}$$

Từ đó $\frac{AI \cdot AC}{AM \cdot AF} + \frac{AI \cdot AB}{AM \cdot AE} = 2$. Suy ra đpcm.

Bài toán 2. Cho góc xOy nhọn và điểm M nằm trong góc đó. Đường thẳng d đi qua M cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B . Xác định vị trí đường thẳng d để diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Qua M kẻ $ME \parallel Oy$ và cắt Ox tại E , kẻ $MF \parallel Ox$ và cắt Oy tại F thì E, F cố định (h.2). Theo hệ thức (1) và sử dụng bất đẳng thức



Hình 2

$4xy \leq (x+y)^2$ có

$$\frac{S_{OEF}}{S_{OAB}} = \frac{OE \cdot OF}{OA \cdot OB}$$

$$\leq \frac{1}{4} \left(\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{BM}{AB} + \frac{AM}{AB} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow S_{OAB} \geq 4 \cdot S_{OEF}$, mà S_{OEF} không đổi nên

S_{OAB} nhỏ nhất bằng $4S_{OEF}$ khi $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB}$ hay $d \parallel EF$.

Bài toán 3. Trên ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt lấy M, N, P sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k$.

Tìm k để $S_{MNP} = \frac{5}{8} S_{ABC}$.

Lời giải. (hình 3)

Từ giả thiết có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC}$$

$$= \frac{CP}{CA} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{và } \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{BC}$$

$$= \frac{PA}{AC} = \frac{1}{k+1}.$$

Từ hệ thức (1) có

$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{k}{(k+1)^2}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{k}{(k+1)^2};$$

$$\frac{S_{CNP}}{S_{ABC}} = \frac{k}{(k+1)^2}. \text{ Từ đó có } \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$$

$$= \frac{S_{ABC} - S_{AMP} - S_{BMN} - S_{CNP}}{S_{ABC}}$$

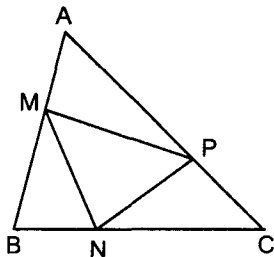
$$= 1 - 3 \frac{k}{(k+1)^2}.$$

$$\text{Để có } \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{5}{8} \text{ thì } 1 - \frac{3k}{(k+1)^2} = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2 = 8k \Leftrightarrow k^2 - 6k + 1 = 0.$$

Bài toán có hai nghiệm $k_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ và $k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{BM}{CM} = \frac{CN}{DN} = k$. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của AM, AN với BD .



Hình 3

a) So sánh diện tích của $PMNQ$ và APQ

b) Tính diện tích tam giác AMN theo k theo diện tích của $ABCD$.

Lời giải. (h.4)

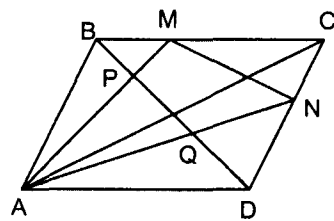
a) Áp dụng hệ thức (1) có

$$\begin{aligned} \frac{S_{AMN}}{S_{APQ}} &= \frac{AM \cdot AN}{AP \cdot AQ} \\ &= \frac{AP+PM}{AP} \cdot \frac{AQ+QN}{AQ} = \left(1 + \frac{PM}{AP}\right) \left(1 + \frac{QN}{AQ}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

Theo giả thiết có

$$\begin{aligned} \frac{BC}{BM} &= \frac{BM+CM}{BM} \\ &= 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{DC}{DN} &= \frac{DN+CN}{DN} \\ &= 1 + 2k \quad (4) \end{aligned}$$



Hình 4

Theo định lý Thales và (3), (4) thì

$$\begin{aligned} \frac{PM}{AP} &= \frac{BM}{AD} = \frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \text{ và} \\ \frac{QN}{AQ} &= \frac{DN}{AB} = \frac{DN}{DC} = \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

Thay vào (2) được

$$\begin{aligned} \frac{S_{AMN}}{S_{APQ}} &= \left(1 + \frac{k}{k+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{2k+1}{k+1} \cdot \frac{2(k+1)}{2k+1} = 2, \end{aligned}$$

suy ra $S_{PMNQ} = S_{APQ}$.

b) Chú ý rằng $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2S_{ADC} = 2S_{CBD}$.

Áp dụng hệ thức (1) và (3) có

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} &= \frac{BA \cdot BM}{BA \cdot BC} = \frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \\ \frac{S_{ADN}}{S_{ADC}} &= \frac{DA \cdot DN}{DA \cdot DC} = \frac{DN}{DC} = \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \frac{CB}{CM} = 1 + k, \quad \frac{DC}{CN} = \frac{2k+1}{2k}$$

Từ đó và từ hệ thức (1) có

$$\begin{aligned}\frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} &= \\&= \frac{S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN}}{S_{ABCD}} \\&= 1 - \frac{S_{ABM}}{2S_{ABC}} - \frac{S_{ADN}}{2S_{ADC}} - \frac{S_{CMN}}{2S_{CBD}} \\&= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{2k}{(k+1)(2k+1)} \right) \\&= \frac{2k^2 + 2k + 1}{2(k+1)(2k+1)}.\end{aligned}$$

Sử dụng hệ thức (1) sẽ thuận lợi khi giải một số bài tập sau.

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, G, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . Tính diện tích đa giác là phần chung của các tứ giác $AGCF, BGDK, CEAK, DEBF$ theo diện tích của hình bình hành.

Bài 2. Trên các cạnh AB, BC của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm E, F (khác các đỉnh). Gọi D là giao điểm của AF và CE . Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{S_{BEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{DEF}}{S_{DAC}}.$$

Bài 3. Trên cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$ lần lượt lấy các điểm P, Q, R, S sao

$$\text{cho } \frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RD} = \frac{DS}{SA} = k. \text{ Xác định } k \text{ sao}$$

$$\text{cho } S_{PQRS} = \frac{5}{9} S_{ABCD}.$$

Bài 4. Cho góc xOy và điểm M nằm trong đó, một đường thẳng d qua M cắt Ox, Oy theo

$$\text{thứ tự tại } A, B. \text{ Chứng minh rằng } \frac{S_{OMA} \cdot S_{OMB}}{S_{OAB}}$$

có giá trị không phụ thuộc vào cách chọn đường thẳng d .

RÈN LUYỆN NĂNG LỰC TƯ DUY THÔNG QUA VIỆC KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT Năng khiếu Hà Tĩnh)

Việc tìm ra lời giải một bài toán nhiều khi không phải là quá khó, nhưng thực ra sau mỗi bài toán có biết bao điều lí thú. Nếu người thầy không biết khơi dậy ở học sinh óc tò mò, sự tìm tòi khám phá những gì ẩn sau mỗi bài toán mà chỉ giải xong bài toán là kết thúc thì việc dạy học trở nên nhạt nhẽo. Điều quan trọng là nếu sau mỗi bài toán tìm được một chuỗi bài toán liên quan từ dễ đến khó thì có thể rèn luyện năng lực tư duy sáng tạo cho học sinh, đồng thời kiến thức sẽ được mở rộng hơn, hệ thống hơn. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

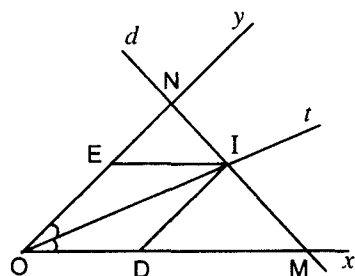
Bài toán 1. (bài toán gốc). Cho góc xOy và một điểm I cố định trên tia phân giác Ot . Đường

thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I , cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng giá

trị của biểu thức $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ là hằng số.

Lời giải.

Dựng hình thoi $ODIE$ với D, E thuộc Ox, Oy tương ứng (h.1). Lúc đó các điểm D, E cố định và $OD = a$ không đổi.



Hình 1

Ta có

$$\frac{a}{OM} + \frac{a}{ON} = \frac{IE}{OM} + \frac{ID}{ON} = \frac{IN}{MN} + \frac{IM}{MN} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{a} \text{ (đpcm).}$$

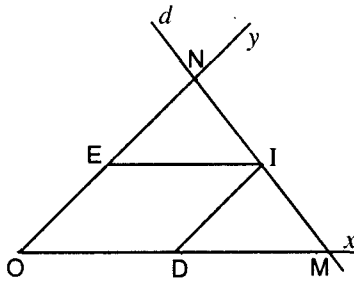
Ta có thể khái quát hoá bài toán khi xét điểm I nằm trong góc xOy .

Bài toán 2. Cho góc xOy và một điểm I cố định nằm trong góc đó. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I , cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại M , N . Lấy điểm D , E trên các tia Ox , Oy sao cho $ID \parallel Oy$ và $IE \parallel Ox$. Đặt $OD = a$, $OE = b$.

Chúng minh rằng $\frac{a}{OM} + \frac{b}{ON} = 1$.

Chú ý rằng D , E cố định nên a , b không đổi (h.2). Chúng minh tương tự bài toán 1.1.

Tiếp tục cho điểm I chuyển từ miền trong góc xOy ra miền ngoài góc đó ta có bài toán sau.



Hình 2

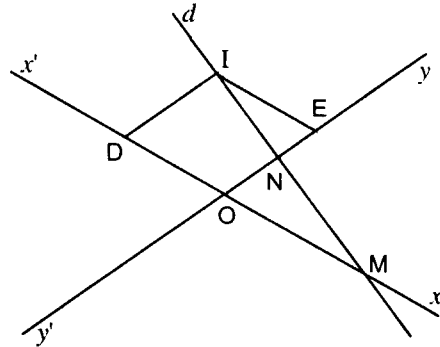
Bài toán 3. Cho hai đường thẳng $x'x$ và $y'y$ cắt nhau tại điểm O . Một điểm I cố định nằm ngoài các góc xOy , $x'Oy'$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I , cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại M , N . Lấy các điểm D , E trên các đường thẳng $x'x$, $y'y$ sao cho $ID \parallel y'y$ và $IE \parallel x'x$. Đặt $OD = a$, $OE = b$. Chúng minh rằng $\frac{a}{OM} - \frac{b}{ON}$ luôn là hằng số.

Chúng minh tương tự các bài toán trên, chú ý rằng (h.3) nếu điểm I nằm trong góc $x'Oy'$ thì

$\frac{a}{OM} - \frac{b}{ON} = -1$, còn nếu điểm I nằm trong góc $y'Ox$ thì $\frac{a}{OM} - \frac{b}{ON} = 1$.

Một cách biến đổi bài toán là xét mệnh đề đảo của các bài toán 2 và 3. Để làm giảm mức độ phức tạp của giả thiết có thể chuyển việc xét biểu thức chứa hai tham số a , b về biểu thức

chứa một tham số $k = \frac{b}{a}$ như sau.



Hình 3

Bài toán 4. Cho hai đường thẳng $x'x$ và $y'y$ cắt nhau tại điểm O . Đường thẳng d thay đổi cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại M , N . Nếu tồn tại số k sao cho $\frac{1}{OM} + \frac{k}{ON}$ luôn bằng một hằng số khác 0 thì đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Giả sử $\frac{1}{OM} + \frac{k}{ON} = \frac{1}{a}$.

a) Xét trường hợp $k > 0$, lúc đó $a > 0$. Dựng điểm D trên tia Ox sao cho $OD = a$ thì $OD < OM$ (h.2). Kẻ $DI \parallel Oy$ và cắt đoạn thẳng MN tại I . Lấy điểm E trên tia Oy sao cho $OE = ID$ thì $ODIE$ là hình bình hành. Chúng minh tương tự các bài toán 1, 2 ta có $\frac{OD}{OM} + \frac{OE}{ON} = 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{OM} + \frac{OE}{OD.ON} = \frac{1}{OD}$. Từ đó và giả thiết suy ra $\frac{OE}{OD} = k \Rightarrow OE = k.OD = k.a > 0$. Vậy D, E đều là điểm cố định nên I là điểm cố định nằm trong góc xOy .

b) Với trường hợp $k < 0$. Cần xét $a > 0$ hoặc $a < 0$. Chứng minh dành cho bạn đọc.

c) Với $k = 0$ thì M là điểm cố định cần tìm.

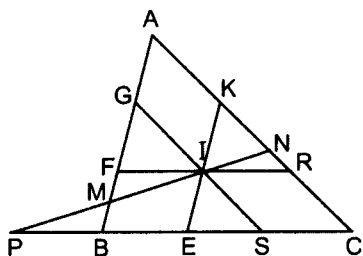
Chú ý rằng khi $\frac{1}{OM} + \frac{k}{ON} = 0$ thì $\frac{ON}{OM} = -k$ nên các đường thẳng d song song với nhau.

Ta lại có thể thay đổi giả thiết bằng cách xét một điểm cố định nằm trong ba góc trong của một tam giác.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I , cắt các cạnh AB, AC và tia CB lần lượt tại M, N và P . Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau là không đổi.

$$\frac{AB}{AM.BM} + \frac{AC}{AN.CN} - \frac{BC}{BP.CP}$$

Lời giải. Dựng các hình thoi $AGIK, BEIF, CRIS$ (h.4). Do $\widehat{BMP} = \widehat{FMI} > \widehat{MBI} = \widehat{IBE} = \widehat{BIF} > \widehat{FIM} = \widehat{BPM} \Rightarrow BP > BM$.



Hình 4

Đặt $AG = m, BE = p, CR = n$. Theo bài toán 2, 3 ta có

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{CN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{BM} - \frac{1}{BP} = \frac{1}{p}.$$

Cộng các hệ thức này theo từng vế rồi biến đổi ta có điều phải chứng minh.

Đặt biệt hoá bài toán 5 ta có bài toán 6.

Bài toán 6. Với giả thiết của bài toán 5, trong tam giác ABC đều, cạnh bằng a , chứng minh rằng

$$a) \frac{1}{AM.BM} + \frac{1}{AN.CN} - \frac{1}{BP.CP} = \frac{9}{a^2}$$

$$b) \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IN^2} + \frac{1}{IP^2} = \frac{18}{a^2}.$$

Tiếp tục phát triển các bài toán trên ta có

Bài toán 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường thẳng d thay đổi, cắt các đoạn thẳng AB, AD, AC lần lượt tại các điểm M, N, P . Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AP}$.

Bài này dành cho bạn đọc tự giải. Mời các bạn tiếp tục khai thác thêm các bài toán mới.

VỀ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

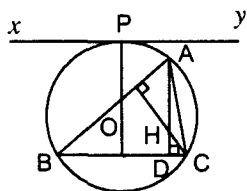
NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Cực trị hình học là một đề tài luôn hấp dẫn những người yêu toán.

Bài viết này nhằm trao đổi cùng bạn đọc xung quanh một bài toán đơn giản về cực trị hình học, giúp ta giải một số bài toán khác khá hay.

Bài toán gốc

Cho đường tròn tâm O bán kính R , dây cung BC (khác đường kính) và A là điểm chuyển động trên cung lớn $\widehat{BC}$. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác ABC lớn nhất.



Hình 1

Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là một cách giải điển hình. Gọi P là điểm chính giữa của cung lớn $\widehat{BC}$ (h.1). Vẽ tiếp tuyến xy của đường tròn (O) tại P .

Suy ra mọi điểm A thuộc cung lớn $\widehat{BC}$ đều nằm giữa hai đường thẳng song song xy và BC ; nên A khác P thì khoảng cách từ A đến BC nhỏ hơn khoảng cách từ P đến BC , do đó $S_{ABC} < S_{PBC}$ (sử dụng kí hiệu diện tích tam giác ABC là S_{ABC}) suy ra S_{ABC} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi A trùng với P .

Trong bài viết này ta xét dây cung BC khác đường kính của đường tròn.

Nếu thay cung lớn $\widehat{BC}$ bởi cung nhỏ $\widehat{BC}$ thì xét tương tự. Nếu A chạy trên cả đường tròn thì phải so sánh hai giá trị tìm được.

Từ bài toán gốc có thể khai thác để dẫn đến các bài toán mới.

Bài toán 1. Trong tất cả các tam giác ABC có độ dài cạnh BC và góc BAC không đổi, tìm tam giác có đường cao AD lớn nhất.

Từ bài toán gốc nếu lấy hai điểm E, F cố định trên đường thẳng BC thì S_{AEF} lớn nhất khi và chỉ khi A trùng với P .

Ta có bài toán 2.

Bài toán 2. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O); E và F là hai điểm cố định thuộc đường thẳng BC , A là điểm chuyển động trên cung lớn $\widehat{BC}$. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác AEF đạt giá trị lớn nhất.

Ta lại biết khi A chuyển động trên cung lớn $\widehat{BC}$ thì tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC chuyển động trên cung chứa góc $\alpha = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}$ dựng trên đoạn BC , nằm cùng phía với điểm A đối với đường thẳng BC .

Do đó S_{IBC} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow I \equiv I' \Leftrightarrow A \equiv P$ (I' là điểm chính giữa của cung chứa góc α)

Ta có bài toán 3 sau.

Bài toán 3. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O). A là điểm chuyển động trên cung lớn $\widehat{BC}$, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác IBC đạt giá trị lớn nhất.

Và nếu chú ý rằng khi A chuyển động trên cung lớn $\widehat{BC}$ thì trực tâm H thuộc cung chứa góc $\beta = 180^\circ - \widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC , nằm cùng phía với điểm A đối với đường thẳng BC .

Do đó S_{HBC} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv H' \Leftrightarrow A \equiv P$. (H' là điểm chính giữa của cung chứa góc β). Ta có bài toán 4 sau.

Bài toán 4. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O), A là điểm chuyển động trên cung lớn $\widehat{BC}$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác HBC đạt giá trị lớn nhất.

Nếu gọi K là trung điểm của BC thì dễ dàng chứng minh được $AH = 2OK$ (không đối), AD là đường cao của tam giác ABC thì AD lớn nhất $\Leftrightarrow HD$ lớn nhất. Ta lại có bài toán mới.

Bài toán 5. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O) , A là điểm chuyển động trên cung lớn $\widehat{BC}$. Gọi H là trực tâm và AD là đường cao của tam giác nhọn ABC . Xác định vị trí của điểm A để đoạn thẳng HD có độ dài lớn nhất.

Gọi AD, BE, CG là các đường cao của tam giác ABC với H là trực tâm.

Từ tam giác AEG đồng dạng với tam giác ABC , suy ra $GE = BC \cos A$, hoặc từ $R \cdot GE = R \cdot AH \sin A = 2OM \cdot R \sin A = OM \cdot a$, trong đó M là trung điểm của BC , ta chứng minh được $S_{ABC} = \frac{R}{2}(DE + EG + GD)$, suy ra chu vi tam giác DEG lớn nhất $\Leftrightarrow S_{ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow A \equiv P$. Ta đến với bài toán sau.

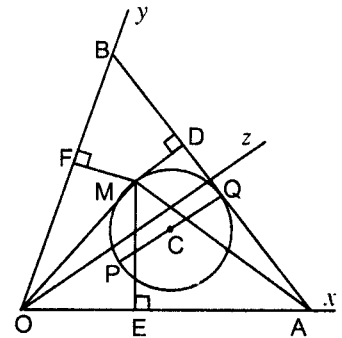
Bài toán 6. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O) , A là điểm chuyển động trên cung lớn BC . Gọi AD, BE, CG là các đường cao của tam giác ABC . Xác định vị trí của điểm A để tam giác DEG có chu vi lớn nhất.

Bài toán sau đây (bài 4, thi học sinh giỏi toán quốc gia lớp 9, 1995 – 1996) có thể đưa về bài 2 ở trên.

Bài toán 7. Cho đường tròn tâm C nằm trong góc xOy mà đường tròn (C) không có điểm chung với các cạnh của góc xOy . Hãy tìm trên đường tròn (C) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc xOy là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải.

Gọi Oz là tia phân giác của góc xOy và PQ là đường kính của đường tròn (C) mà $PQ \parallel Oz$. Giả sử P ở gần điểm O hơn (h.2). Từ Q kẻ đường thẳng $AB \perp PQ$, cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A, B . Gọi $MD,$



Hình 2

ME, MF tương ứng là các đoạn thẳng vuông góc với AB, OA, OB . Chú ý rằng AB và $OA = OB$ không đổi, S_{OAB} không đổi. Từ $S_{OAB} = S_{MOA} + S_{MOB} + S_{MAB}$ suy ra $ME + MF$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MD lớn nhất, điều này xảy ra khi M trùng với điểm P .

Trong bài toán này cũng có thể tìm điểm M để $ME + MF$ lớn nhất.

"Gia công" bài toán gốc, ta có bài toán hay sau.

Bài toán 8. Trong tất cả các tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

"Họ hàng" với bài toán gốc là bài toán sau.

Bài toán 9. Cho đường tròn (O) , dây cung BC và A là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ) BC . Xác định vị trí của điểm A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Các bạn hãy tìm nhiều lời giải cho bài toán 9 và tìm các bài toán mà khi sử dụng kết quả bài toán 9 có thể cho lời giải đẹp.

PHÁT TRIỂN TỪ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

LÊ DUY NINH

(Nguyên GV trường ĐHSP Hà Nội 2)

Trong bài báo này chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn một số kết quả khai thác từ một bài toán giúp bạn đọc hiểu được rõ quá trình tạo lập bài toán mới từ bài toán ban đầu, tìm được

nguồn gốc của bài toán và bước đầu làm quen với tập duyệt sáng tạo toán học. Trước hết ta hãy xét một kết quả hết sức quen thuộc.

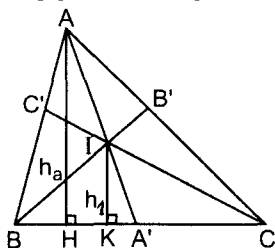
Bài toán 1. Cho tam giác ABC và điểm I trong tam giác đó. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C' . Chứng minh rằng

$$\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} = 1 \quad (1)$$

Lời giải. Gọi S_1, S_2, S_3, S là diện tích các tam giác IBC, ICA, IAB và ABC theo thứ tự. Khi đó ta có các hệ thức về tỉ số diện tích

$$\frac{IA'}{AA'} = \frac{h_1}{h_a} = \frac{S_1}{S}; \quad \frac{IB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}; \quad \frac{IC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}. \quad \text{Vậy}$$

$$\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = 1 \text{ (dpcm).}$$



Từ (1) có
$$\frac{IA}{AA'} + \frac{IB}{BB'} + \frac{IC}{CC'} = 3 - \left(\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} \right) = 2.$$

Vậy
$$\frac{IA}{AA'} + \frac{IB}{BB'} + \frac{IC}{CC'} = 2 \quad (2)$$

A. Vận dụng các hệ thức về tỉ số diện tích và các bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovski để chứng minh được lần lượt các kết quả sau :

$$\frac{AA'}{IA'} + \frac{BB'}{IB'} + \frac{CC'}{IC'} \geq 9 \quad (3)$$

$$\frac{IA}{IA'} + \frac{IB}{IB'} + \frac{IC}{IC'} \geq 6 \quad (4)$$

$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} \geq \frac{3}{2} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) rút ra $\frac{IA}{IA'}, \frac{IB}{IB'}, \frac{IC}{IC'}$ không cùng lớn hơn 2 ; không cùng nhỏ hơn 2

$$\frac{AA'}{IA} + \frac{BB'}{IB} + \frac{CC'}{IC} \geq \frac{9}{2} \quad (7)$$

$$\frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'} \geq 8 \quad (8)$$

$$\frac{AA'}{IA'} \cdot \frac{BB'}{IB'} \cdot \frac{CC'}{IC'} \geq 27 \quad (9)$$

$$\frac{AA'}{IA} \cdot \frac{BB'}{IB} \cdot \frac{CC'}{IC} \geq \frac{27}{8} \quad (10)$$

Ngoài các BĐT từ (1) đến (10) chúng ta còn có các kết quả sau với n là số nguyên dương.

$$\sqrt[n]{\frac{IA}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{IB}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{IC}{IC'}} \geq 3\sqrt[n]{2} \quad (11)$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC}} \geq 3\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \quad (12)$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC'}} \geq 3\sqrt[n]{3} \quad (13)$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA'}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB'}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC'}{CC'}} \leq 2\sqrt[n]{3} \quad (14)$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC}{CC'}} \leq 2\sqrt[n]{6} \quad (15)$$

Dấu đẳng thức xảy ra trong mỗi BĐT trên khi và chỉ khi I là trọng tâm ΔABC . Xin hướng dẫn chứng minh một số BĐT.

• Áp dụng BĐT Cauchy và BĐT (8) ta có BĐT (11) khi $n = 2$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{IA}{IA'}} + \sqrt{\frac{IB}{IB'}} + \sqrt{\frac{IC}{IC'}} \\ & \geq 3\sqrt{\sqrt{\frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'}}} \geq 3\sqrt{\sqrt{8}} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

• Từ (1) và BĐT (10) ta có BĐT (12) khi $n = 2$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{AA'}{IA}} + \sqrt{\frac{BB'}{IB}} + \sqrt{\frac{CC'}{IC}} \\ & \geq 3\sqrt{\sqrt{\left(\frac{AA'}{IA}\right)\left(\frac{BB'}{IB}\right)\left(\frac{CC'}{IC}\right)}} \geq 3\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

• Áp dụng BĐT Bunyakovski và (1) ta được BĐT (14) khi $n = 1$.

$$\begin{aligned} & 1. \sqrt{\frac{IA'}{AA'}} + 1. \sqrt{\frac{IB'}{BB'}} + 1. \sqrt{\frac{IC'}{CC'}} \\ & \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2) \left(\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} \right)} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Mời các bạn chứng minh tiếp các BĐT còn lại.

B. Ta có thể mở rộng các bài toán nêu trên sang không gian bằng phương pháp tương tự.

Bài toán trong không gian được chứng minh nhờ áp dụng hệ thức tỉ số thể tích giống như việc áp dụng hệ thức tỉ số diện tích trong hình học phẳng. Cách làm này góp phần rèn luyện kỹ năng chuyển hoá các tính chất hình học giữa mặt phẳng và không gian, từ đó thấy được mối liên hệ khăng khít giữa hai loại bài tập hình học này.

Bài toán 2. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm I nằm trong tứ diện đó. Các đường thẳng AI, BI, CI, DI cắt các mặt đối diện lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng

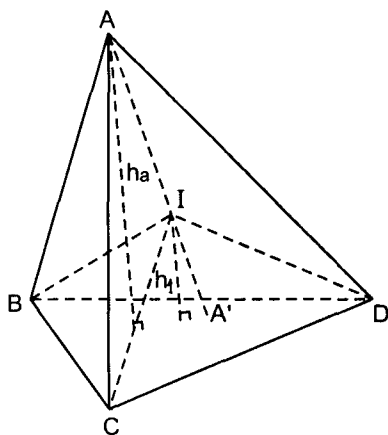
$$\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} + \frac{ID'}{DD'} = 1 \quad (1')$$

Lời giải.

$$\frac{IA'}{AA'} = \frac{h_I}{h_A} = \frac{V_{IBCD}}{V_{ABCD}}, \quad \frac{IB'}{BB'} = \frac{V_{IACD}}{V_{ABCD}};$$

$$\frac{IC'}{CC'} = \frac{V_{IABD}}{V_{ABCD}}, \quad \frac{ID'}{DD'} = \frac{V_{IABC}}{V_{ABCD}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} + \frac{ID'}{DD'} &= \\ &= \frac{V_{IBCD} + V_{IACD} + V_{IABD} + V_{IABC}}{V_{ABCD}} = 1 \end{aligned}$$



Tương tự như ở phần I, chúng ta có các kết quả sau với n là số nguyên dương :

$$\frac{IA}{AA'} + \frac{IB}{BB'} + \frac{IC}{CC'} + \frac{ID}{DD'} = 3 \quad (2')$$

$$\frac{AA'}{IA'} + \frac{BB'}{IB'} + \frac{CC'}{IC'} + \frac{DD'}{ID'} \geq 16 \quad (3')$$

$$\frac{IA}{IA'} + \frac{IB}{IB'} + \frac{IC}{IC'} + \frac{ID}{ID'} \geq 12 \quad (4')$$

$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} + \frac{ID'}{ID} \geq \frac{4}{3} \quad (5')$$

$\frac{IA}{IA'}, \frac{IB}{IB'}, \frac{IC}{IC'}, \frac{ID}{ID'}$ không cùng lớn hơn 3, không cùng nhỏ hơn 3

$$\frac{AA'}{IA} + \frac{BB'}{IB} + \frac{CC'}{IC} + \frac{DD'}{ID} \geq \frac{16}{3} \quad (7')$$

$$\frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'} \cdot \frac{ID}{ID'} \geq 81 \quad (8')$$

$$\frac{AA'}{IA'} \cdot \frac{BB'}{IB'} \cdot \frac{CC'}{IC'} \cdot \frac{DD'}{ID'} \geq 256 \quad (9')$$

$$\frac{AA'}{IA} \cdot \frac{BB'}{IB} \cdot \frac{CC'}{IC} \cdot \frac{DD'}{ID} \geq \frac{256}{81} \quad (10')$$

$$\sqrt[n]{\frac{IA}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{IB}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{IC}{IC'}} + \sqrt[n]{\frac{ID}{ID'}} \geq 4\sqrt[n]{3} \quad (11')$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC}} + \sqrt[n]{\frac{DD'}{ID}} \geq 4\sqrt[n]{\frac{4}{3}} \quad (12')$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC'}} + \sqrt[n]{\frac{DD'}{ID'}} \geq 4\sqrt[n]{4} \quad (13')$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA'}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB'}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC'}{CC'}} + 2\sqrt[n]{\frac{ID'}{DD'}} \leq 2\sqrt[n]{4^{2n-1}} \quad (14')$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC}{CC'}} + 2\sqrt[n]{\frac{ID}{DD'}} \leq 2\sqrt[n]{3 \cdot 4^{2n-1}} \quad (15')$$

Xin mời các bạn tự chứng minh các bất đẳng thức (1') – (15'). Rất mong các bạn tìm được các kết quả tương tự giữa hình học phẳng và hình học không gian từ các bài toán khác.

LTS : Toà soạn nhận được một số kết quả tương tự, cùng nội dung với bài báo này của bạn Nguyễn Hữu Hậu, K38D, khoa Toán, ĐH Vinh. Mong nhận được các bài báo khác của bạn.

NHÌN BÀI TOÁN TỪ NHIỀU HƯỚNG

Phân một VẤN ĐỀ NGHIỆM VÀ NGHIỆM KÉP CỦA PHƯƠNG TRÌNH

VỀ LỜI GIẢI CỦA MỘT BÀI TOÁN CƠ BẢN

TRẦN TỬ QUẢNG

(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An)

Trong các kì thi tuyển sinh vào đại học, ta thường gặp các bài toán xét phương trình bậc hai có ít nhất một nghiệm trong một khoảng hoặc một đoạn, chẳng hạn :

Xác định a để phương trình

$$(a+1)x^2 - (8a+1)x + 6a = 0$$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

(Đề 18 câu II, Bộ đề tuyển sinh vào Đại học)

Lời giải bài này trong cuốn *Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào Đại học* quá vắn tắt nên học sinh không rõ muốn giải trọn vẹn thì phải xét những trường hợp nào với điều kiện gì.

Lời giải thứ hai của bài này trong cuốn *Giải đề thi tuyển sinh đại học – chuyên đề Đại số* (NXB Tp. Hồ Chí Minh) viết :

Phương trình

$$f(x) = (a+1)x^2 - (8a+1)x + 6a = 0$$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a+1=0 & \text{có một nghiệm} \\ -(8a+1)x+6a=0 & \text{thuộc } (0; 1) \\ a+1 \neq 0 \\ \Delta=0 \\ x=\frac{8a+1}{2(a+1)} \in (0; 1) \\ a+1 \neq 0 \\ f(0).f(1) < 0. \end{array} \right.$$

.....

Cả hai lời giải trên đều dẫn tới đáp số đúng là : *mọi* $a \neq 0$, tuy nhiên việc ghi điều kiện cần và đủ ở lời giải thứ hai là chưa chuẩn xác.

Về vấn đề này, khi xét trường hợp tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm, một số sách có nêu định lí :

Điều kiện để tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm, trong đó có một nghiệm nằm trong $(\alpha; \beta)$, còn nghiệm kia nằm ngoài, là $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

(Cuốn 1 : Một số phương pháp chọn lọc để giải các bài toán sơ cấp, tập I, của khối PTCT-ĐH TH HN 1983, cuốn 2 : Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình của Đ.H.T.1997).

Thực ra điều kiện $f(\alpha).f(\beta) < 0$ là điều kiện cần và đủ để $f(x)$ có một nghiệm thuộc $(\alpha; \beta)$ và một nghiệm nằm ngoài $[\alpha; \beta]$.

Như vậy ngoài các điều kiện ở lời giải thứ hai nói trên, ta cần xét thêm hai trường hợp sau (trong trường hợp tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt với S là tổng hai nghiệm đó) :

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ a.f(\beta) > 0 ; \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} f(\beta) = 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} < \beta \end{cases}$$

Như vậy :

Điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$, $S = -\frac{b}{a}$ nếu $a \neq 0$, chỉ có một nghiệm thuộc khoảng $(\alpha; \beta)$ là :

$$\begin{cases} a = 0 \\ x = \frac{-c}{b} \in (\alpha; \beta) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ f(\alpha).f(\beta) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ f(\alpha) = 0 \\ a.f(\beta) > 0 ; \frac{S}{2} > \alpha \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ f(\beta) = 0 \\ a.f(\alpha) > 0 ; \frac{S}{2} < \beta \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a \neq 0, \Delta = 0 \\ x = \frac{-b}{2a} \in (\alpha; \beta) \end{cases} \quad (5)$$

Trong thực hành giải hai loại toán này, ta nên xử lí các trường hợp (3), (4) bằng cách giải

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ để tìm giá trị cụ thể của tham số, rồi thay giá trị này vào phương trình ban đầu sẽ được phương trình bậc hai với hệ số thực, sau đó giải phương trình này và kiểm tra xem có một nghiệm nằm trong khoảng $(\alpha; \beta)$ còn nghiệm kia nằm ngoài khoảng đó hay không.

Chẳng hạn hãy áp dụng điều kiện cần và đủ nêu trên vào thí dụ sau :

Tìm m để phương trình

$$mx^2 + (7 - 8m)x + 6(m - 1) = 0$$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.

(Đề thi vào Học viện quân sự 1995)

Lời giải. Đặt $f(x) = mx^2 + (7 - 8m)x + 6(m - 1)$

1) Xét với $m = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có dạng $7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7} \in (0; 2)$. Vậy $m = 0$

thoả mãn điều kiện bài toán.

2) Với $m \neq 0$, phương trình $f(x) = 0$ có $\Delta(x) = 40m^2 - 88m + 49$, tam thức này có $\Delta(m) = 7740 - 7840 < 0$ nên $\Delta(x) > 0$, do đó phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} f(0).f(2) < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ m.f(2) > 0 \\ \frac{8m - 7}{2m} > 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ m.f(0) > 0 \\ \frac{8m - 7}{2m} < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$* \text{ Giải (6) : } 6(m - 1)(8 - 6m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}$$

* Giải (7) : $f(0) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ nên $f(x) = 0$ có dạng $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ thoả mãn điều kiện

bài toán : có đúng một nghiệm $1 \in (0; 2)$ còn nghiệm kia $0 \notin (0; 2)$.

* Giải (8) : $f(2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$ nên $f(x) = 0$

có dạng $4x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 2 \end{cases}$ thoả mãn

điều kiện bài toán : có đúng một nghiệm $\frac{3}{4} \in (0; 2)$

còn nghiệm kia $2 \notin (0; 2)$.

Vậy các giá trị tham số m thoả mãn đề bài

$$\text{là : } \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Lưu ý : Nếu sử dụng điều kiện $f(\alpha).f(\beta) < 0$

$$\text{ta chỉ tìm được các giá trị } \begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Rất mong các bạn tiếp tục trao đổi thêm về vấn đề này.

QUỸ TÍCH ĐẠI SỐ

NGUYỄN PHÚ CHIẾN (Hà Nội)

Trong các kì thi vào đại học, chúng ta thường gặp những bài toán có dạng : Trên mặt phẳng toạ độ tìm quỹ tích điểm $M(x; y)$ thoả mãn tính chất T .

Ta gọi đó là *bài toán quỹ tích đại số*.

Để hiểu rõ hơn về lớp bài toán này, chúng tôi đưa ra một số phương pháp giải bài toán quỹ tích đại số.

A. LÝ THUYẾT

Khi giải bài toán quỹ tích đại số ta thường xét ba vấn đề :

1) Điểm chạy $M(x; y)$ có phụ thuộc tham số không ?

2) Tính chất T (điều kiện quỹ tích) mà điểm chạy $M(x; y)$ phải thoả mãn cần biểu thị qua phương trình (hay bất phương trình) của x, y như thế nào ?

3) Giới hạn quỹ tích Q của M (Phần đảo của bài toán quỹ tích) : Q có thể là một đường, một miền nào đó trên mặt phẳng toạ độ hoặc chỉ gồm một số điểm rời rạc.

• Nếu Q là một đường thì giữa các toạ độ $(x; y)$ của các điểm thuộc Q phải có một hệ thức nào đó $F(x; y) = 0$, hệ thức ấy chính là

phương trình của đường Q và gọi là phương trình quỹ tích.

• Nếu Q là một miền trên R^2 thì giữa các toạ độ $(x; y)$ của các điểm thuộc Q thường có liên hệ dưới dạng bất phương trình. Để chỉ ra miền Q , ta phải viết được phương trình các đường biên của Q .

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH ĐẠI SỐ

Trường hợp 1. Điểm chạy $M(x; y)$ phụ thuộc tham số m .

Bước 1. Biểu diễn các toạ độ của điểm chạy qua tham số m dựa vào điều kiện T , ta có hệ :

$$\begin{cases} x = x(m) & (1) \\ y = y(m) & (2) \end{cases}$$

Bước 2. Khử m từ hệ (1) và (2) được hệ thức liên hệ giữa x, y là phương trình quỹ tích

$$F(x, y) = 0 \quad (3)$$

Bước 3. Giới hạn quỹ tích.

• Nếu tham số m biến thiên tuỳ ý thì quỹ tích là toàn bộ đường cong cho bởi phương trình (3). Ký hiệu đường cong đó là (d_1) .

• Nếu tham số m chỉ biến thiên trong miền (α) thì từ (1) suy ra x chỉ biến thiên trong miền (α_1) .

Ta xét $\min x(m)$, $\max x(m)$ để chỉ ra quỹ tích chỉ là một phần của đường (d_1) vẽ trong (α_1) .

Trường hợp 2. Điểm chạy $M(x; y)$ không phụ thuộc tham số m .

Bước 1. Chuyển từ điều kiện quỹ tích T đối với điểm chạy $M(x; y)$ về điều kiện đối với các tọa độ $(x; y)$ của nó.

Bước 2. Giải điều kiện ấy để tìm ra hệ thức hoặc bất đẳng thức liên hệ trực tiếp giữa x, y .

Chú ý. Quỹ tích trong trường hợp này thường là miền.

C. CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1. Cho họ đường cong $y = x - 2 + \frac{m}{x}$ (4).

Tìm quỹ tích điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị.

Lời giải. Miền xác định là mọi $x \neq 0$.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{m}{x^2} = \frac{x^2 - m}{x^2}.$$

Để tồn tại giá trị cực đại, cực tiểu, phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt: $x^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt (nghiệm phải khác 0) $\Leftrightarrow m > 0$ (α).

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{m} \text{ hoặc } x = -\sqrt{m}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	↗ ↘ CD			↘ ↗ CT		

Quỹ tích điểm cực đại : Từ bảng ta thấy điểm cực đại có hoành độ $x = -\sqrt{m} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ m = x^2 \end{cases} (\alpha_1)$

Do điểm cực đại nằm trên đồ thị hàm số (4) nên ta có phương trình quỹ tích là $y = x - 2 + \frac{x^2}{x} = 2x - 2$.

Do x phải thỏa mãn (α_1) nên quỹ tích điểm cực đại là một phần của đường thẳng $y = 2x - 2$ có hoành độ $x < 0$.

Quỹ tích điểm cực tiểu : Từ bảng ta thấy điểm cực tiểu có hoành độ $x = \sqrt{m} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m = x^2 \end{cases} (\alpha_2)$

Do điểm cực tiểu nằm trên đồ thị hàm số (4) nên ta có phương trình quỹ tích là $y = x - 2 + \frac{x^2}{x} = 2x - 2$. Do x phải thỏa mãn (α_2) nên quỹ tích điểm cực tiểu là một phần của đường thẳng $y = 2x - 2$ có hoành độ $x > 0$.

Thí dụ 2. Cho Parabol $y = x^2$.

Tìm m để đường thẳng $y = mx - m$ cắt parabol tại hai điểm A, B và tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Lời giải. Đường thẳng $y = mx - m$ cắt $y = x^2$ tại hai điểm $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - mx + m = 0$ có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq 0 \text{ hoặc } 4 \leq m \quad (\alpha)$$

Gọi $I(x; y)$ là điểm thuộc quỹ tích cần tìm với điều kiện (α) ta có : $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{m}{2} \text{ (theo định lý Viète)}$$

$$\Rightarrow m = 2x.$$

Do $I(x; y)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = mx - m$ nên ta được quỹ tích điểm $I(x; y)$ là $y = 2x(2x - 1) = 2x^2 - 2x$.

Do m thỏa mãn (α) nên $\frac{m}{2} \leq 0$ hoặc $2 \leq \frac{m}{2}$ suy ra $x \leq 0$ hoặc $2 \leq x$ (α_1).

Vậy quỹ tích cần tìm là phần parabol có phương trình $y = 2x^2 - 2x$ vẽ trong (α_1).

Thí dụ 3. Tìm quỹ tích giao điểm của họ đường cong $y = \frac{x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1}{x^2 + m^2 - m + 1}$ với Ox , Oy .

Lời giải. Gọi $A(0; y)$ là giao điểm của đồ thị đã cho với Oy . Khi đó phương trình (với $x = 0$)

dạng $y = \frac{m^2 + m + 1}{m^2 - m + 1}$ (ẩn m) có nghiệm $\Leftrightarrow$

Phương trình $(m^2 - m + 1)y = m^2 + m + 1$ có nghiệm

(vì $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi m)

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(y-1)m^2 - (y+1)m + y - 1 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ y+1 \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-1 \neq 0 \\ \Delta = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 1$ hoặc $\begin{cases} y \neq 1 \\ (y-3)(3y-1) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 1$ hoặc $\begin{cases} y \neq 1 \\ \frac{1}{3} \leq y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 3 \quad (\alpha)$

Vậy quỹ tích giao điểm của họ đường cong với Oy là một đoạn trên trục Oy có tung độ thỏa mãn (α) .

Gọi $B(x; 0)$ là giao điểm của đồ thị đã cho với Ox . Khi đó phương trình

$$\frac{x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1}{x^2 + m^2 - m + 1} = 0 \text{ có nghiệm}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1 = 0$ có nghiệm

(vì $x^2 + m^2 - m + 1 = x^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

với mọi x, m)

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m^2 + (2x+1)m + x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta = (2x+1)^2 - 4(x^2 - x + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 8x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{8} \quad (\alpha_1)$

Vậy quỹ tích giao điểm của họ đường cong với Ox là một khoảng trên trục Ox có hoành độ thỏa mãn (α_1) .

Thí dụ 4. Tìm quỹ tích những điểm trên mặt phẳng tọa độ có khoảng cách đến đường thẳng

$y = -\frac{1}{4}$ và đến điểm $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ là bằng nhau.

Lời giải. Gọi $A(x; y)$ là điểm thuộc quỹ tích.

Khi đó $\left|y + \frac{1}{4}\right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$ (do cả hai vế

đều không âm)

$\Leftrightarrow y = x^2$.

Vậy quỹ tích cần tìm là parabol $y = x^2$.

Thí dụ 5. Cho hàm số $y = x^2$

a) Tìm quỹ tích những điểm mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị.

b) Tìm quỹ tích những điểm mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới đồ thị.

Lời giải. a) Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm thuộc quỹ tích.

Tiếp tuyến là đường thẳng (d) qua $A(x_0; y_0)$ nên có phương trình $y = k(x - x_0) + y_0$.

(d) là tiếp tuyến tới đồ thị đã cho

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 = k(x - x_0) + y_0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0 \quad (1)$

có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta = k^2 - 4(kx_0 - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 4kx_0 + 4y_0 = 0 \quad (2)$

Ta cần tìm x_0, y_0 để (1) có nghiệm kép với hai giá trị của k .

⇔ Ta cần tìm x_0, y_0 để (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (2x_0)^2 - 4y_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow y_0 < x_0^2.$$

Vậy quỹ tích những điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị là những điểm nằm dưới parabol $y = x^2$.

b) Gọi $B(x_0; y_0)$ là những điểm mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới đồ thị. Gọi k_1, k_2 là các hệ số góc của hai tiếp tuyến ấy.

Khi đó phương trình (1) có nghiệm kép với k_1, k_2 thoả mãn $k_1 k_2 = -1$

⇔ phương trình (2) có hai nghiệm k_1, k_2 thoả mãn $k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{4y_0}{1} = -1 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{4}$.

Vậy quỹ tích cần tìm là đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$.

D. BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Tìm quỹ tích tâm đối xứng của họ đường cong

$$y = \frac{mx + 2}{x + m - 1}.$$

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

a) Tìm quỹ tích những điểm có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị.

b) Tìm quỹ tích những điểm có thể kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới đồ thị.

Bài 3. Cho họ đường cong

$$y = \frac{2mx + m^2 + 2m}{2(x + m)} \quad (H_m)$$

Tìm quỹ tích những điểm trên mặt phẳng toạ độ mà có đúng một đường cong của họ (H_m) đi qua.

Bài 4. Giả sử hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + b \end{cases} \text{ luôn có nghiệm duy nhất với}$$

cặp số $(a; b)$ nào đó.

Gọi nghiệm đó là $(x_0; y_0)$.

Tìm quỹ tích của điểm $M(x_0; y_0)$ khi a, b biến thiên.

Bài 5. Cho $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$. Tìm quỹ tích những điểm thuộc Oy mà từ đó có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

BẬC CỦA THAM SỐ VÀ HÌNH BAO CỦA HỌ ĐƯỜNG THẲNG

$$y = f(x, m)$$

PHẠM BẢO (Hà Nội)

Khi nghiên cứu hàm số đa thức $y = f(x, m)$, ta đã biết nếu bậc cao nhất của đối số x là bậc nhất thì đồ thị là một họ đường thẳng, bậc hai thì đồ thị là một họ đường cong parabol, bậc ba thì đồ thị là một họ đường cong bậc ba, v.v... Như vậy bậc cao nhất của đối số x quyết định dạng của đồ thị. Còn bậc của tham số m , nếu thay đổi nó có ý nghĩa gì đối với họ đồ thị?

Để trả lời cho câu hỏi này, ta hãy nghiên cứu họ đường thẳng $y = f(x, m)$ với tham số m có bậc khác nhau.

1. Họ đường thẳng có tham số bậc nhất

Họ đường thẳng này có một trong hai dạng sau:

$$y = mx + a \quad (\mathcal{A}) \text{ hoặc } y = ax + m \quad (\mathcal{B})$$

(a là hằng số, m là tham số)

Khi m thay đổi họ ($\mathcal{A}$) là một chùm đường thẳng quay quanh điểm $A(0; a)$ cố định; họ ($\mathcal{B}$) là một dãy đường thẳng song song có hệ số góc là $\tan \alpha = a$ và đi qua điểm $(0; m)$.

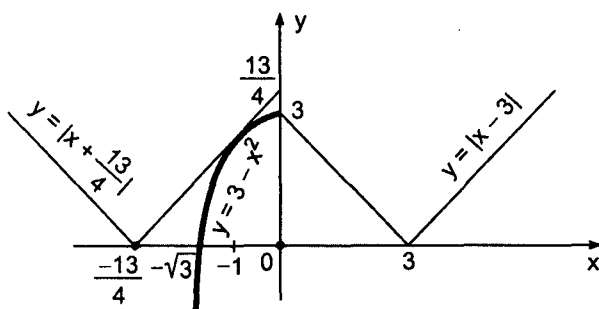
Nhờ tính chất này ta có thể giải được những bài toán dạng sau.

Bài toán 1. *Tìm những giá trị của a sao cho ứng với mỗi giá trị của a bất phương trình sau đây có nghiệm âm*

$$x^2 + |x - a| < 3 \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) ta có $3 - x^2 > |x - a|$.

Vì vế phải dương nên bất phương trình chỉ có nghiệm âm khi $-\sqrt{3} < x < 0$. Lúc đó đồ thị hàm số $y = 3 - x^2$ là một cung của parabol $y = 3 - x^2$ với $-\sqrt{3} < x < 0$. Vế phải $y = |x - a|$ là họ đường gấp khúc hình chữ "V" có đỉnh $(a; 0)$ chạy trên trục hoành. Nghiệm của bất phương trình là những giá trị của x làm cho đường gấp khúc nằm phía dưới cung parabol (h.1).



Hình 1

Nhánh $y = x - a$ của đường gấp khúc nằm dưới parabol khi $a > -\frac{13}{4}$ (khi $a = -\frac{13}{4}$, $y = x - a$ tiếp xúc với $y = 3 - x^2$); nhánh $y = a - x$ của đường gấp khúc nằm phía dưới parabol khi $a < 3$. Vậy đáp số của bài toán là $-\frac{13}{4} < a < 3$.

2. Họ đường thẳng có tham số bậc hai

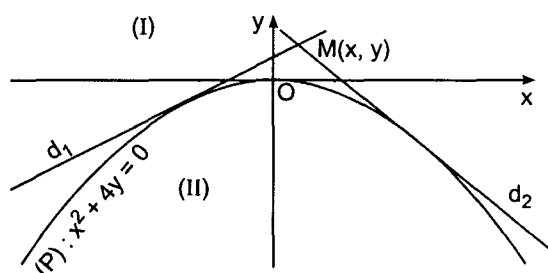
Họ đường thẳng này có một trong hai dạng sau:

$$y = mx + m^2 \quad (\mathcal{C}) \text{ hoặc } y = m^2x + m.$$

Ta chỉ xét dạng $y = mx + m^2$ ($\mathcal{C}$). Với điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng toạ độ nếu phương trình ($\mathcal{C}$): $m^2 + mx - y = 0$ có hai nghiệm phân biệt m_1, m_2 thì có hai đường thẳng $d_1: y = m_1x + m_1^2$ và $d_2: y = m_2x + m_2^2$ cùng đi qua M . Nếu ($\mathcal{C}$) có nghiệm kép $m_1 = m_2$ thì hai đường thẳng d_1, d_2 trùng nhau cùng đi qua M . Nếu ($\mathcal{C}$) vô nghiệm thì không có đường thẳng nào qua M . Việc tồn tại các đường thẳng d_1, d_2 tùy thuộc vào dấu của biệt thức $\Delta_m = x^2 + 4y$. Khi

$\Delta_m = 0$ ta có $y = -\frac{x^2}{4}$ và đồ thị của nó là

parabol P ứng với ($\mathcal{C}$) khi coi m là biến. Parabol này chia mặt phẳng toạ độ thành hai miền: miền (I) là tập hợp những điểm M ở phía trên parabol ứng với những giá trị của x, y thoả mãn bất đẳng thức $\Delta_m = x^2 + 4y > 0$. Tại mọi điểm trong miền này đều có thể kẻ được hai đường thẳng d_1, d_2 tiếp xúc với P . Miền (II) là tập hợp những điểm M ở phía dưới P ứng với những giá trị x, y thoả mãn $\Delta_m = x^2 + 4y < 0$.



Hình 2

Tại mọi điểm trong miền này không thể kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với P . Còn chính trên P là tập hợp những điểm M có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn phương trình $x^2 + 4y = 0$. Tại mỗi điểm của P có một đường thẳng duy nhất tiếp xúc với P (h.2). Trong trường hợp này người ta gọi P là hình bao của họ đường thẳng $y = mx + m^2$. Suy rộng ra ta có định nghĩa

Hình bao của họ đường thẳng $y = f(x, m)$ với tham số m là đường mà tại mỗi điểm của nó đều tiếp xúc với ít nhất một đường thẳng của họ $y = f(x, m)$.

có hai nghiệm trong đó ít nhất phải có nghiệm kép (bạn đọc tự suy luận lấy) thì qua M có hai đường thẳng. Nếu (I) có một nghiệm duy nhất thì qua M có một đường thẳng. Để tìm được hình bao của họ (I) ta hãy tìm điều kiện để phương trình (I) có nghiệm kép.

Theo định lí Bézout nếu α là nghiệm kép của phương trình $f(x) = 0$ thì $f(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$.

Do đó α cũng là nghiệm của phương trình

$$f'(x) = 0 \text{ hay } 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x) = 0,$$

từ đó nếu m là nghiệm kép của (I) thì nó thỏa mãn hệ :

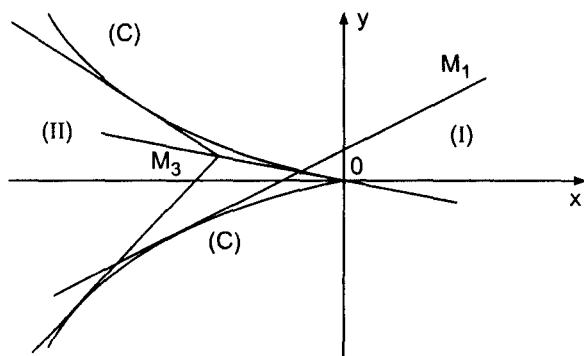
$$\begin{cases} m^3 + mx - y = 0 \\ 3m^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3m^2 \\ y = -2m^3. \end{cases}$$

Khử m để tìm mối liên hệ giữa x, y ta được

$$27y^2 + 4x^3 = 0. \text{ Với mọi } x \leq 0 \text{ ta có}$$

$$y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{-x^3} \quad (5)$$

đây chính là phương trình hình bao của họ (IV). Bằng phương pháp khảo sát thông thường ta được đồ thị của (5) là đường cong (C) như ở hình 4.



Hình 4

Hình bao (C) chia mặt phẳng thành hai miền : miền (I) bên phải (C) là tập hợp những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn $4x^3 + 27y^2 > 0$, tại mỗi điểm trong miền này (chẳng hạn điểm M_1) chỉ có một đường thẳng tiếp xúc với (C). Miền (II) bên trái (C) là tập hợp những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn

$4x^3 + 27y^2 < 0$, tại mỗi điểm trong miền này (chẳng hạn điểm M_3) có thể kẻ được ba đường thẳng tiếp xúc với (C) ứng với ba nghiệm m_1, m_2, m_3 . Còn chính trên (C) : $4x^3 + 27y^2 = 0$, với mỗi $M(x; y)$ có thể kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) ứng với hai nghiệm m_1 và $m_2 = m_3$.

Từ sự nghiên cứu hình bao của họ đường thẳng (I) ta được kết quả "thứ vị" sau đây : Phương trình bậc ba $x^3 + px + q = 0$ (xem p như x, q như $-y$ trong phương trình (I) ta được phương trình $m^3 + mp - q = 0$ (E) có nghiệm hay không tùy thuộc ở biệt thức $\delta = 4p^3 + 27q^2$. Với

$\delta > 0$ phương trình (E) có một nghiệm duy nhất,

$\delta = 0$ phương trình (E) có hai nghiệm (một đơn, một kép),

$\delta < 0$ phương trình (E) có ba nghiệm phân biệt.

Bài toán 4

1. Tìm giá trị của m để phương trình

$$\frac{x^3}{3} - m(x + 1) = 0 \quad (6)$$

có ba nghiệm khác nhau.

(Đề thi đại học năm 1976)

2. Với giá trị nào của m đồ thị hàm số

$$y = x^3 - 1 + m(x - 1) \quad (7)$$

tiếp xúc với trục hoành.

(Đề thi đại học năm 1975)

3. Với giá trị nào của k phương trình

$$kx^3 + (2 - k)x + 2 = 0 \quad (8)$$

có một nghiệm duy nhất.

Lời giải. 1. Phương trình (6) viết lại là

$x^3 - 3mx - 3m = 0$ để có ba nghiệm phân biệt thì biệt thức

$$\delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3m)^3 + 27(-3m) \text{ phải âm}$$

$$\text{hay } m^2(9 - 4m) < 0 \Rightarrow m > \frac{9}{4}.$$

2. Để đồ thị hàm số (7) tiếp xúc với trục hoành thì phương trình

$x^3 - 1 + m(x - 1) = 0$ hay $x^3 + mx - (m + 1) = 0$ phải có nghiệm kép, do đó biệt thức $\delta = 4m^3 + 27(m + 1)^2 = 0$, dễ thấy được phương trình này có nghiệm $m = -3$ và $m = -\frac{3}{4}$.

3. Để phương trình (8) có một nghiệm duy nhất ta xét :

a) Nếu $k = 0$ thì (8) trở thành $2x + 2 = 0$ và có nghiệm duy nhất $x = -1$.

b) Nếu $k \neq 0$ thì (8) trở thành

$$x^3 + \left(\frac{2}{k} - 1\right)x + \frac{2}{k} = 0.$$

Để nó có nghiệm duy nhất thì biệt thức

$\delta = 4\left(\frac{2}{k} - 1\right)^3 + 27\left(\frac{2}{k}\right)^2 > 0$. Đặt $\frac{2}{k} = t$ ta được

$$4t^3 + 15t^2 + 12t - 4 = (4t - 1)(t + 2)^2 > 0,$$

$$\text{do đó } t > \frac{1}{4} \text{ hay } \frac{2}{k} > \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < k < 8.$$

Vậy phương trình (8) có nghiệm duy nhất khi

$$0 \leq k \leq 8.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho hàm số

$$y = \frac{(m - 2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m}$$

a) Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

b) Tìm các điểm trên mặt phẳng mà đồ thị không đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

(Đề số 57 – Đề thi tuyển sinh vào đại học)

Bài 2. Xác định m để phương trình

$$x^3 + mx^2 - 1 = 0 \text{ có một nghiệm duy nhất.}$$

Hướng dẫn. Đặt $t = x + \frac{m}{3}$.

Bài 3. Cho một góc vuông xOy . Một đường thẳng d thay đổi cắt Ox tại A , Oy tại B tạo thành tam giác ABC có diện tích không đổi S . Chứng minh rằng các đường thẳng d đó luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

TRẦN PHƯƠNG (Hà Nội)

Trong các kì thi tuyển sinh vào đại học và trong Bộ đề Toán thi tuyển sinh ta thường gặp các dạng toán sau đây.

Chứng minh họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$ với m là tham số, luôn tiếp xúc với một đường (D) cố định.

Xin giới thiệu bốn phương pháp giải dạng toán này.

1. Phương pháp nghiệm kép

Giả sử họ đường cong (C_m) tiếp xúc với đường (D) có phương trình $y = g(x)$. Khi đó

trong phạm vi chương trình phổ thông bài toán được thoả mãn khi $f(x, m) = g(x)$ có nghiệm kép với mọi m . Từ điều kiện này ta sẽ tìm được $g(x)$.

2. Phương pháp tìm điểm cố định

Bước 1. Tìm điểm cố định (nếu có)

$$M_0(x_0; y_0) \in (C_m) : y = f(x, m).$$

Bước 2. Chứng minh $f'(x_0, m) = k$ không đổi.

Bước 3. Kết luận (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = k(x - x_0) + y_0$.

3. Phương pháp tách bộ phận nghiệm kép

Bước 1. Biến đổi

$$f(x, m) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\lambda(x, m)} + \gamma(x) \text{ trong đó}$$

$2 \leq k \in \mathbb{N}$ và $\gamma(x)$ không chứa m (*).

Bước 2. Xét phương trình tương giao $f(x, m) = \gamma(x) \Leftrightarrow [\alpha(m)x + \beta(m)]^k = 0$ có nghiệm kép $x_0 = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$.

Bước 3. Kết luận (C_m) luôn tiếp xúc với đường cố định (D) có phương trình $y = \gamma(x)$ tại tiếp điểm $M_0(x_0; \gamma(x_0))$.

4. Phương pháp tìm tập hợp điểm mà họ đường con không đi qua

Bước 1. Tìm tập hợp điểm mà họ đường con không đi qua, chẳng hạn tọa độ của các điểm này thỏa mãn bất phương trình $\alpha(x, y) < \beta(x, y)$.

Bước 2. Dự đoán đường con cố định (D) có phương trình $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$.

Bước 3. Chứng minh (C_m) : $y = f(x, m)$ luôn tiếp xúc với (D) : $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$.

Bình luận.

1. Phương pháp 1 (thường sử dụng trong Bộ đề Toán) là phương pháp tư duy theo lối kinh điển tức là : Nói đến sự tiếp xúc là phải nghĩ ngay đến yếu tố nghiệm kép. Đây là phương pháp giải cơ bản đối với dạng bài toán mà biết trước dạng của đường cố định (D) .

Tuy nhiên cách giải này dài, tính toán phức tạp, dễ nhầm lẫn và đặc biệt nó không thích hợp với các bài toán chưa cho biết dạng của đường cố định (D) .

2. Phương pháp 2 chỉ sử dụng được khi họ (C_m) chứa đựng yếu tố luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định. Nếu sử dụng được thì việc tính toán sẽ đơn giản hơn so với phương pháp 1.

3. Phương pháp 3 cho cách giải rất ngắn gọn và độc đáo. Điểm khác biệt cơ bản so với hai phương pháp trên là phương pháp 3 giải quyết

được lớp các bài toán chưa cho biết dạng của đường cố định (D) .

Muốn sử dụng tốt phương pháp này ta cần chú ý các đặc điểm sau :

- Khéo léo biến đổi $f(x, m)$ thành dạng (*) trong bước 1 của phương pháp 3.

- Dự đoán được $\gamma(x)$ theo một trong hai cách :

3.1. Dự đoán $\gamma(x)$ bằng trực quan toán học

3.2. Đặt $g(x, m) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\lambda(x, m)}$. Khi đó

$$\frac{df}{dm} = \frac{dg}{dm} = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^{k-1}}{\varphi(x, m)} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}. \text{ Xét hai khả năng :}$$

a) Nếu $x_0 = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$ là biểu thức có chứa m .

Khi đó ta sẽ xác định $\gamma(x)$ bằng cách sau

Bước 1. Giải phương trình $\frac{df}{dm} = 0 \Rightarrow m = p(x)$.

Bước 2. Vì nghiệm của $\frac{df}{dm} = 0$ cũng là nghiệm của $g(x, m) = 0$ nên thế $m = p(x)$ vào hàm số $y = f(x, m)$ ta nhận được ngay $y = \gamma(x)$.

b) Nếu $x_0 = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)} = a$ (const). Thế $x_0 = a$ vào hàm số $y = f(x, m)$ nhận được $y = b$ (const).

Như vậy ta không xác định được ngay $y = \gamma(x)$ mà chỉ biết một điểm $(a; b)$ thuộc $y = \gamma(x)$ cần tìm.

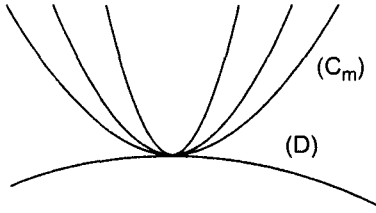
Việc khôi phục $\gamma(x)$ phải sử dụng các biện pháp gián tiếp khác nhau tùy theo tình huống cụ thể của các bài toán.

4. Về mặt hình học ta có các nhận xét sau :

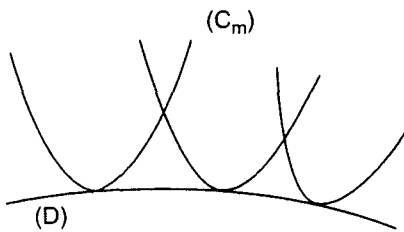
4.1. Nếu $x_0 = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$ không phụ thuộc vào m thì (C_m) luôn tiếp xúc với (D) tại một điểm cố định (h.1).

4.2. Nếu $x_0 = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$ phụ thuộc vào m thì

(C_m) luôn tiếp xúc với (D) tại các điểm di động trên (D) (h.2)

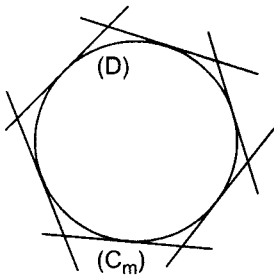


Hình 1

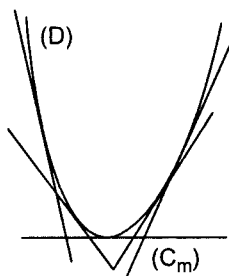


Hình 2

4.3. Phương pháp 4 thường được sử dụng khi (C_m) là họ đường thẳng còn (D) là một đường cong có tính chất của hình lồi. Chẳng hạn (D) là đường tròn, elip, parabol,... Nói chính xác hơn đường cong (D) chia mặt phẳng toạ độ thành hai miền trái dấu ngăn cách bởi đồ thị của (D) (h.3, h.4).



Hình 3



Hình 4

Sau đây là một số thí dụ minh hoạ cho các phương pháp và bình luận trên.

Bài 1. Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m}$$

luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

Lời giải. Phương pháp 1. Họ đồ thị hàm số đã cho luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = ax + b$

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m} =$$

$ax + b$ có nghiệm kép với mọi $m \Leftrightarrow (a-2)x^2 + ((1-a)m + (b-1))x - (b+1)m - 1 = 0$ có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow a \neq 2 \text{ và } \Delta = (1-a)^2 m^2 + (2(1-a)(b-1) + 4(a-2)(b+1))m + (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 = 0 \\ 2(1-b)(b-1) + 4(a-2)(b+1) = 0 \\ (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ (x_0 là nghiệm kép của phương trình bậc hai trên) $\Rightarrow y_0 = x_0 - 1 = -2 \Rightarrow$ Toạ độ tiếp điểm là $(-1; -2)$.

Phương pháp 2. Điểm cố định $M_0(x_0; y_0)$

$$\text{thuộc đồ thị} \Leftrightarrow y_0 = \frac{2x_0^2 + (1-m)x_0 + 1+m}{x_0-m}$$

với mọi m

$$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 - 1)m + x_0 y_0 - 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0$$

với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ x_0 y_0 - 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 - 1 \\ -(x_0 + 1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2. \end{cases}$$

Mặt khác

$$y'(x_0) = \frac{2x_0^2 - 4mx_0 + m^2 - 2m - 1}{(x_0 - m)^2}$$

$$= \frac{(m+1)^2}{(-1-m)^2} = 1.$$

Vậy đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định là tiếp tuyến với đồ thị tại tiếp điểm $(-1; -2)$ có phương trình là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = x - 1$.

Phương pháp 3.

$$y = \frac{(x^2 + 2x + 1) + x^2 - (m + 1)x + m}{x - m}$$

$$= \frac{(x + 1)^2}{x - m} + (x - 1).$$

Vì phương trình $\frac{(x + 1)^2}{x - m} + x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{(x + 1)^2}{x - m} = 0 \text{ có nghiệm kép } x = -1 \text{ nên đồ thị}$$

luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$ tại điểm cố định $(-1; -2)$.

Bài 2 [Đề 92I.3]. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của hàm số

$$y = \frac{(m + 1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 - 2)}{x - m}$$

luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Lời giải. Biến đổi

$$y = (m + 1)x + m(m - 1) + \frac{2}{x - m}$$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên là $y = (m + 1)x + m(m - 1)$.

Phương pháp 1. Giả sử tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + bx + c$, khi đó $ax^2 + bx + c = (m + 1)x + m(m - 1)$ hay phương trình $ax^2 + (b - 1 - m)x + c - m(m - 1) = 0$ có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \text{ và } \Delta = (1 + 4a)m^2 + 2(1 - b - 2a)m + (1 - 2b + b^2 - 4ac) = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4a = 0 \\ 1 - b - 2a = 0 \\ 1 - 2b + b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Parabol phải tìm là } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Phương pháp 3. Bước 1. Dự đoán parabol

(làm nháp). $\frac{dy}{dm} = 2m + (x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 - x}{2}.$$

Thế $m = \frac{1 - x}{2}$ vào phương trình tiệm cận xiên được $y = \left(\frac{1 - x}{2} + 1\right)x + \frac{1 - x}{2}\left(\frac{1 - x}{2} - 1\right)$

$$= \frac{-x^2 + 6x - 1}{4}.$$

Bước 2. Chứng minh điều dự đoán.

Xét phương trình

$$(m + 1)x + m(m - 1) = \frac{-x^2 + 6x - 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + (x - 1)m + \frac{(x - 1)^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{x - 1}{2}\right)^2 = 0 \text{ có nghiệm kép với bất}$$

kì m . Vậy tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$.

Phương pháp 4. Bước 1. Dự đoán. Điểm $M(x; y)$ không thuộc tiệm cận xiên nào $\Leftrightarrow y = (m + 1)x + m(m - 1)$

hay $m^2 + (x - 1)m + (x - y) = 0$ vô nghiệm với mọi m

$$\Rightarrow \Delta = (x - 1)^2 - 4(x - y) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 6x - 1}{4} > y. \text{ Đường cố định có thể}$$

$$\text{là } y = \frac{-x^2 + 6x - 1}{4}.$$

Bước 2. Chứng minh điều dự đoán.

Xét phương trình

$$(m + 1)x + m(m - 1) = \frac{-x^2 + 6x - 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + (x - 1)m + \frac{(x - 1)^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[m + \frac{x-1}{2} \right]^2 = 0 \text{ có nghiệm kép. Vậy}$$

$$\text{parabol cần tìm là } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Bài 3 [Đề 19Va]. Chứng minh rằng họ đường thẳng $(D_\alpha) : x \cos \alpha + y \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Lời giải. Phương pháp 3. Bước 1. Dự đoán.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{df}{d\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0 \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha - 2 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2) \cos \alpha + y \sin \alpha = -1 \\ y \cos \alpha - (x+2) \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \\ \sin \alpha = \frac{y}{(x+2)^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{(x+2)^2 + y^2} \right)^2 = 1$$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 1$. Đường cố định có thể là đường tròn $(x+2)^2 + y^2 = 1$.

Bước 2. Chứng minh điều dự đoán.

Gọi $I(-2; 0)$ là tâm đường tròn $(x+2)^2 + y^2 = 1$, ta có khoảng cách từ I đến D_α bằng $d(I, D_\alpha) = \frac{|-2 \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = 1$.

Vậy họ D_α luôn tiếp xúc với đường tròn $(x+2)^2 + y^2 = 1$.

Phương pháp 4. Bước 1. Dự đoán. Điểm $M(x; y)$ không thuộc họ D_α

$$\Leftrightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha + 1 = 0 \text{ hay}$$

$(x+2) \cos \alpha + \sin \alpha = -1$ vô nghiệm $\alpha \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 < (-1)^2 = 1$. Đường cố định có thể là đường tròn $(x+2)^2 + y^2 = 1$.

Bước 2. Chứng minh giống bước 2 ở trên.

Bài 4. Chứng minh rằng họ đường cong

$$y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx + \frac{3-m^2}{4}$$

luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Lời giải. Phương pháp 3. Bước 1. Dự đoán.

$$\frac{dy}{dm} = x - \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = 2x.$$

Thế $m = 2x$ vào biểu thức hàm số được $y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$. Đây có thể là đường cong cố định.

Bước 2. Chứng minh điều dự đoán.

Xét phương trình

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx + \frac{3-m^2}{4} =$$

$$= x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + \frac{m^2}{4} = \left(x - \frac{m}{2} \right)^2 = 0 \text{ có}$$

nghiệm kép. Vậy họ đường cong đã cho luôn tiếp xúc với đường cong

$$y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1. [Đề 40I.2] Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x + m}{x + m}$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 2. [Đề 102I.2] Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 3. [Đề 41 IV.a] Chứng minh rằng họ đường thẳng $(D_p) : y = (2p+1)x - p^2$ luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Bài 4. [Đề 143I.2] Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = \frac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 5. [Đề 64I] Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 \cos \alpha + x + \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{x + \cos \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi,$$

$k \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol cố định. Tìm quỹ tích tiếp điểm.

Bài 6. [Đề 57I] Cho hàm số

$$y = \frac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m}.$$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Bài 7. [Đề 67I] Cho $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$

($m \neq 0$). Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Bài 8. [Đề 141Va] Chứng minh rằng họ đường thẳng $(C_\alpha) : (x-1)\cos \alpha + (y-1)\sin \alpha - 4 = 0$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Bài 9. Chứng minh rằng họ đường thẳng $(D_m) : y = mx + \frac{a}{m}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

NHÌN LẠI KHÁI NIỆM NGHIỆM KÉP CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÀ VẤN ĐỀ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI TRỤC HOÀNH

DƯƠNG QUỐC VIỆT (Hà Nội)

Chúng ta biết rằng điều kiện để parabol $y = ax^2 + bx + c$ tiếp xúc với trục hoành là phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép và do đó tương đương với biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Đây là kết quả mà bạn đã quen biết từ khi học lớp 10. Tuy ở thời điểm đó sách giáo khoa không định nghĩa chính xác thế nào là parabol tiếp xúc với trục hoành, nhưng nhiều bạn bằng cách vẽ đồ thị đã thấy rằng parabol tiếp xúc với trục hoành khi đỉnh của nó nằm trên trục hoành. Từ kết quả này của đa thức bậc hai, người ta đã sử dụng thành công trong việc giải một số bài toán về các đường conic. Nhưng thật đáng tiếc bởi từ đó không ít người đã sử dụng một cách tùy tiện kết quả trên sang cả các đường cong khác. Hơn thế nữa trong một số cuốn sách các tác giả của nó đã khẳng định không một chút do dự rằng: "*Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép*". Để thấy rõ cái sai trong lập luận trên, bạn hãy bình tĩnh cùng chúng tôi trở lại hai khái niệm rất cơ bản là nghiệm bội

của đa thức và đường cong $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành.

Nghiệm bội của đa thức là gì ?

Từ *kép* nếu theo nghĩa chỉ số lượng thì nó tương đương với *hai*. Đối với phương trình bậc hai số nghiệm tối đa của nó là 2, vì vậy hai nghiệm trùng nhau được gọi là nghiệm kép. Với đa thức bậc cao hơn hai có thể xuất hiện nhiều nghiệm trùng nhau và người ta đã đưa ra khái niệm nghiệm bội để chỉ số lượng các nghiệm giống nhau của đa thức. Ưu thế đặc biệt của đa thức là ở chỗ : Nếu đa thức $P(x)$ nhận α làm nghiệm thì $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ trong đó $Q(x)$ cũng là đa thức. Nhờ kết quả này người ta có thể định nghĩa nghiệm bội của đa thức trên tập số thực như sau :

Đa thức bậc $n \geq 1$ dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ nhận số thực α làm nghiệm bội k (k là số nguyên dương) nếu như $P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$ trong đó $Q(x)$ cũng là một đa thức với $Q(\alpha) \neq 0$.

Trong trường hợp đặc biệt nghiệm bội hai được gọi là nghiệm kép, còn nghiệm bội $k = 1$ được gọi là nghiệm đơn. Nếu kí hiệu $P^{(i)}(x)$ là đạo hàm cấp i của đa thức $P(x)$ thì bạn có thể chứng minh một cách không khó khăn lắm kết quả dưới đây.

Mệnh đề 1. Điều kiện cần và đủ để đa thức $P(x)$ nhận α làm nghiệm bội k là $P(\alpha) = 0, P^{(i)}(\alpha) = 0$ với $k - 1$ giá trị $i = 1, 2, \dots, k - 1$ và $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Khi nào đường cong tiếp xúc với trục hoành ?

Nếu dựa vào định nghĩa tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại một điểm trong các sách Giải tích thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành nếu nó nhận trục hoành làm tiếp tuyến. Nhớ lại rằng, phương trình của trục hoành là $y = 0$ cho nên đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Và ta có mệnh đề sau :

Mệnh đề 2. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình $f(x) = f'(x) = 0$ có nghiệm.

Nếu kết hợp mệnh đề 1 và mệnh đề 2, ta sẽ nhận được kết quả về mối quan hệ giữa tính tiếp xúc với trục hoành của một đa thức và nghiệm bội.

Mệnh đề 3. Đồ thị hàm đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ bậc cao hơn 1 tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi $P(x)$ có nghiệm bội $k (k \geq 2)$ (hay là có ít nhất hai nghiệm trùng nhau).

Nhìn lại những sai lầm

Nếu cho rằng điều kiện để đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép hoặc là có nghiệm bội $k \geq 2$ thì sẽ ra sao ? Sau đây chúng tôi sẽ dẫn ra một vài thí dụ điển hình minh họa cho sai lầm đó.

Thí dụ 1. Đồ thị $y = x^3$ tiếp xúc với trục hoành tại $x = 0$, nhưng phương trình $x^3 = 0$ lại có nghiệm bội 3 chứ đâu là nghiệm kép !

Thí dụ 2. Đồ thị hàm số $y = \sin x - x$ tiếp xúc với trục hoành tại $x = 0$ vì $y(0) = y'(0) = 0$, nhưng có lẽ nào ta lại có phương trình $\sin x - x = 0$ có nghiệm kép hay nghiệm bội !

Một sai lầm tinh tế hơn mà chúng ta có thể tìm thấy trong không ít tài liệu có liên quan đến những bài toán dành cho các bạn ôn thi vào các trường đại học là lập luận sau đây.

Hàm số bậc ba $f(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép.

Điều đó tương đương với : Tam thức $ax^2 + bx + c$ nhận x_0 làm nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức là

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0. \end{cases}$$

Tế nhị là ở chỗ cả hai bước của lập luận trên đều sai nhưng kết quả cuối cùng lại đúng. Thật vậy, bạn hãy cùng chúng tôi xem xét lại từng bước của lập luận này.

Đồ thị của hàm bậc ba $f(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trùng nhau (Mệnh đề 3), điều đó tương đương với

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Nếu cả hai điều kiện của (1) cùng xảy ra thì $f(x)$ nhận x_0 làm nghiệm bội ba.

Bạn cũng có thể dùng Mệnh đề 2 để chứng minh kết quả này. Bây giờ ta chuyển qua xem xét bước 2.

Phương trình bậc ba $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có nghiệm kép thì nghiệm kép đó là x_0 hoặc khác x_0 . Nếu nghiệm kép là x_0 thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ phải có một nghiệm x_0 và một nghiệm khác x_0 . Nếu $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có nghiệm kép khác x_0 thì nghiệm đó chính là nghiệm kép của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Vậy $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Bạn có thể dùng Mệnh đề 1 để kiểm tra kết quả này.

Thí dụ 4. Cho hàm số

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - 2mx + m).$$

(i) Tìm m để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép.

(Đáp số là $m = 0$).

(ii) Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.

(Đáp số là $m = 0$ hoặc $m = 1$).

Điều kiện (1) và điều kiện (2) có lẽ nào lại tương đương !

Các bạn thân mến !

Hoá ra là lập luận : "Điều kiện để đường cong $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tương đương với phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép" chỉ có thể tin cậy được trên các hàm bậc hai, còn đối với các đường cong khác cần phải được xem xét lại cho chuẩn mực.

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ NGHIỆM BỘI CỦA PHƯƠNG TRÌNH

PHẠM NGỌC BỘI (ĐH Vinh)

Trong sách giáo khoa phổ thông, ta mới chỉ đề cập đến khái niệm nghiệm kép của một đa thức, tuy vậy nhiều bài toán lại đòi hỏi các kiến thức liên quan đến khái niệm nghiệm bội (nói riêng là nghiệm kép) của một phương trình.

Thí dụ : Đề 143, I.2 Bộ đề thi tuyển sinh đại học.

Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = \frac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1} \quad (m \neq 0)$$

luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

Phần đầu lời giải là : Gọi $y = a(x+1) + b$ là đường thẳng cần tìm thì phương trình

$$\frac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1} = a(x+1) + b \quad (1)$$

có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$,

hay phương trình bậc hai

$$am(x+1)^2 + (m(1+b) - 1 - a)(x+1) - 1 - b = 0 \quad (2)$$

có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$.

Vì vậy, cần phải hiểu thế nào là nghiệm kép của phương trình và các phép biến đổi nào giữ nguyên nghiệm kép của nó ?

Định nghĩa. Số u được gọi là nghiệm bội n (n là số tự nhiên, $n \geq 2$) của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm đến cấp $n-1$ tại u và số u là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x) \end{cases} \quad (3)$$

với đạo hàm cấp n của $f(x)$, $g(x)$ tại u hoặc không xác định, hoặc xác định nhưng

$$f^{(n)}(u) \neq g^{(n)}(u) \quad (4)$$

Khi $n = 2$ ta gọi nghiệm u là nghiệm kép.

Từ định nghĩa ta thấy ngay : nếu số u là nghiệm bội $k \geq n$ của phương trình $f(x) = g(x)$ thì u sẽ thoả mãn hệ (3).

Ta có một số tính chất sau của nghiệm bội.

Tính chất 1. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số xác định trên D , khi đó đồ thị của chúng tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng $u \in D$ khi và chỉ khi số u là nghiệm bội n ($n \geq 2$) của phương trình $f(x) = g(x)$ (5)

Thật vậy nếu hai đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm $M(u; v)$ thì u là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (6)$$

Vậy số u là nghiệm bội n với $n \geq 2$ của (5).

Ngược lại, nếu số u là nghiệm bội n với $n \geq 2$ của (5) thì u là nghiệm của hệ (3) nhưng $n - 1 \geq 1$ nên hệ (3) có ít nhất hai phương trình của hệ (6). Từ đó hai đồ thị phải tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ u .

Khi tìm nghiệm bội của phương trình bất kì ta thường quy về tìm nghiệm bội của đa thức vì vậy các tính chất sau có ích cho việc đó.

Tính chất 2. Số u là nghiệm bội n của đa thức $F(x)$ khi và chỉ khi $F(x) = (x - u)^n \cdot P(x)$ với $P(x)$ là đa thức khác 0 và không nhận u là nghiệm.

Vậy khi đó số u là nghiệm bội của đa thức $F(x)$ theo nghĩa đã biết (đa thức có đúng n nghiệm bằng u).

Chứng minh. Bằng quy nạp ta có thể chứng minh công thức sau (dành cho bạn đọc).

Nếu $Q(x)$ và $R(x)$ là các hàm số của x thì $(Q(x)R(x))^{(k)} = Q^{(k)}(x)R(x) + C_k^1 Q^{(k-1)}(x) \cdot R'(x) + C_k^2 Q^{(k-2)}(x)R''(x) + \dots + Q(x)R^{(k)}(x)$ (7)

a) Nếu $F(x) = (x - u)^n P(x)$, dùng công thức (7) ta có

$$\begin{aligned} (F(x))^{(k)} &= n(n-1)\dots(n-k+1)(x-u)^{n-k} P(x) \\ &+ kn(n-1)\dots(n-k+2)(x-u)^{n-k+1} P'(x) + \dots \\ &+ (x-u)^n P^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Nên $F^{(k)}(u) = 0$ với mọi $k \leq n - 1$.

$$F^{(n)}(u) = n! P(u) \neq 0.$$

b) Đảo lại, nếu u là nghiệm bội n của phương trình $F(x) = 0$ thì theo định nghĩa phải có (3) và (4).

Giả sử $F(x) = (x - u)^m P(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $P(x)$ là đa thức khác 0 và không nhận u là nghiệm.

• Nếu $m < n$ áp dụng công thức (7) ta có $F^{(m)}(u) \neq 0$, nhưng $m \leq n - 1$ tức là u không thoả mãn phương trình thứ $m + 1$ trong hệ (3).

• Nếu $m > n$ áp dụng (7) ta có $F^{(k)}(u) = 0$, với mọi $k \geq m - 1 \geq n$, tức là $F^{(n)}(u) = 0$, nên điều kiện (4) không thoả mãn.

Vậy $m = n$.

Sử dụng tính chất 2 ta có

Tính chất 3. Giả sử b là số thực tuỳ ý, thì số u là nghiệm bội n của đa thức

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

khi và chỉ khi số $u - b$ là nghiệm bội n của đa thức

$$a_m (x + b)^m + a_{m-1} (x + b)^{m-1} + \dots + a_1 (x + b) + a_0.$$

Tính chất 4. Giả sử $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $r(x)$ là các đa thức với $g(u) \neq 0$, $r(u) \neq 0$ thì số u là nghiệm bội n của phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{r(x)}$ (8)

khi và chỉ khi số u là nghiệm bội n của phương trình $f(x)r(x) = g(x)h(x)$ (9)

Chứng minh. a) Giả sử số u là nghiệm bội n của (9) thì $f(x)r(x) - g(x)h(x) = (x - u)^n P(x)$, trong đó $P(x)$ là đa thức khác 0, không nhận u là nghiệm, lúc đó xét

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{r(x)} = \frac{f(x)r(x) - g(x)h(x)}{g(x)r(x)} \\ &= (x - u)^n \frac{P(x)}{g(x)r(x)}. \end{aligned}$$

Áp dụng (7) cho $Q(x) = (x - u)^n$, $R(x) = \frac{P(x)}{g(x)r(x)}$

ta có

$$F^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-u)^{(n-k)} \frac{P(x)}{g(x)r(x)} \\ + kn(n-1)\dots(n-k+2)(x-u)^{(n-k+1)} \left(\frac{P(x)}{g(x)r(x)} \right)' + \\ \dots + (x-u)^n \left(\frac{P(x)}{g(x)r(x)} \right)^{(k)}.$$

Vì vậy dễ dàng tính được $F^{(k)}(u) = 0$

với mọi $k \leq n-1$ và $F^{(n)}(u) = n! \frac{P(u)}{g(u)r(u)} \neq 0$.

Tức là u là nghiệm bội n của (8).

b) Đảo lại, giả sử u là nghiệm bội n của (8), chứng minh hoàn toàn tương tự phần b của tính chất 2 ta có số u cũng là nghiệm bội n của (9).

Dựa vào các tính chất đã nêu, ta yên tâm thực hiện một số phép biến đổi tương đương mà không làm thay đổi nghiệm bội của phương trình như ở các thí dụ dưới đây.

Thí dụ 1. Ta lấy lại thí dụ [Đề 143] đã nêu trên. Ở đây ta sử dụng lời giải của đáp án bộ đề thi mà các bạn sẵn có trong tay, mặc dù có nhiều cách giải khác. Ta bổ sung một vài chỗ để lời giải chính xác, nếu không muốn nói đây là sự minh họa cho cách giải này bởi cơ sở lý thuyết đã nêu trên.

Lời giải. Giả sử đường thẳng $y = a(x+1) + b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số nói trên với mọi $m \neq 0$, khi đó hoành độ u của tiếp điểm là nghiệm bội n của phương trình (1) với mọi $m \neq 0$. Tức là u là nghiệm bội n (với $m(u+1) \neq 1$) của phương trình

$$am(x+1)^2 + (m(1+b) - 1 - a)(x+1) - 1 - b = 0 \quad (2)$$

với mọi $m \neq 0$.

Do tính chất 3, (2) có nghiệm bội n khi và chỉ khi $amx^2 + (m(1+b) - 1 - a)x - 1 - b = 0$ (10) có nghiệm bội n . Vì (10) là phương trình bậc hai nên nghiệm bội là nghiệm kép, sau đó ta giải hệ điều kiện tương ứng. Cũng cần lưu ý

rằng khi giải ra $a = b = -1$ ta phải thử lại để chúng tỏ với mọi $m \neq 0$ nghiệm kép u của (2) thoả mãn điều kiện $u \neq \frac{1}{m} - 1$ (Tương ứng với $g(u) \neq 0$ trong tính chất 4 nói trên).

Thí dụ 2. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số

$$y = \frac{x^3 + (2m-1)x^2 - (3m-1)x - (m^2 + 3m)}{x-m}$$

và $y = x + m + 1$ tiếp xúc nhau?

Lời giải. Đồ thị của hai hàm số nói trên tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ u với u là nghiệm bội của phương trình:

$$\frac{x^3 + (2m-1)x^2 - (3m-1)x - (m^2 + 3m)}{x-m}$$

$$= x + m + 1.$$

Hay u là nghiệm bội của phương trình

$$x^3 + 2(m-1)x^2 - 3mx - 2m = 0 \quad (11)$$

với $u \neq m$.

Ta có $x^3 + 2(m-1)x^2 - 3mx - 2m$

$$= (x-2)(x^2 + 2mx + m).$$

Suy ra u là nghiệm bội của (11) khi:

a) Nếu $u = 2$ là nghiệm bội của (11) thì 2 phải là nghiệm của $x^2 + 2mx + m = 0$ (12) nên $m = -\frac{4}{5}$, khi đó $u = 2 \neq m$ nên giá trị này của m thoả mãn.

b) Nếu u là nghiệm bội của (12) thì $\Delta = m^2 - m = 0$, nên $m = 0$ hoặc $m = 1$. Với $m = 0$ thì $u = 0 = m$ nên giá trị này của m không thoả mãn; với $m = 1$, $u = -1 \neq m$ nên giá trị này thoả mãn.

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -\frac{4}{5}$ là các giá trị cần tìm.

BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN KHI KHÔNG DÙNG PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM KÉP

NGUYỄN VĂN QUÝ (GV THPT Bến Tre, tỉnh Bến Tre)

LTS : Theo quy định của bộ GD-ĐT kể từ năm học 2000 – 2001 không được dùng phương pháp nghiệm kép để giải quyết các bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc của hai đồ thị. Để giải các bài toán dạng này ta cần dùng kết quả sau :

Đồ thị của (C) : $y = f(x)$ tiếp xúc với đồ thị của $y = g(x) \Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Thực tế cho thấy nhiều học sinh rất lúng túng khi giải các bài toán về tiếp tuyến trong chương trình thi đại học mà trước đây được giải bằng phương pháp nghiệm kép. Toán học và Tuổi trẻ xin giới thiệu bài viết này nhằm tháo gỡ khó khăn hiện nay ở các trường phổ thông, rất mong các bạn trao đổi thêm.

Thí dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, biết tiếp tuyến đi qua $A(4 ; 1)$.

Lời giải. $y = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$.

Đường thẳng (D) đi qua $A(4 ; 1)$ với hệ số góc k có phương trình : $y = k(x - 4) + 1$.

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ Hệ (I) sau có nghiệm :

$$(I) \begin{cases} 2x - 1 + \frac{1}{x - 1} = k(x - 4) + 1 - 3k & (1) \\ 2 - \frac{1}{(x - 1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + \frac{1}{x - 1} = 2(x - 1) - \frac{1}{x - 1} + 1 - 3k \\ k = 2 - \frac{1}{(x - 1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x - 1} = -\frac{3k}{2} \\ k = 2 - \frac{9k^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x - 1} = -\frac{3k}{2} \\ 9k^2 + 4k - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x - 1} = -\frac{3k}{2} \\ k = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{9} \end{cases}$$

Vậy tìm được hai tiếp tuyến (D_1) , (D_2) có phương trình :

$$y = \left(\frac{-2 \pm \sqrt{76}}{9} \right) (x - 4) + 1.$$

Nhận xét. Cần chú ý thủ thuật viết $y = k(x - 4) + 1$ về dạng $y = k(x - 1) + (1 - 3k)$.

Khi thay $k = 2 - \frac{1}{(x - 1)^2}$ vào (1), ta chỉ thay vào $k(x - 1)$ và không thay vào $(1 - 3k)$.

Thí dụ 2. Tìm quỹ tích các điểm M trong mặt phẳng sao cho từ M có thể kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

và hai tiếp tuyến ấy vuông góc.

Lời giải. $y = x + 2 + \frac{1}{x + 1}$. Giả sử đường thẳng (D) đi qua $M(a ; b)$ có hệ số góc k , thì phương trình của (D) có dạng :

$$y = k(x - a) + b$$

$$\Leftrightarrow y = k(x + 1) + b - (a + 1)k$$

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ Hệ (II) sau có nghiệm :

$$(II) \begin{cases} x + 2 + \frac{1}{x + 1} = k(x + 1) + b - (a + 1)k \\ k = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2} \end{cases}$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2+\frac{1}{x+1}=x+1-\frac{1}{x+1}+b-(a+1)k \\ k=1-\frac{1}{(x+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1}=\frac{(b-1)-(a+1)k}{2} \\ k=1-\frac{((b-1)-(a+1)k)^2}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(k)=(a+1)^2k^2+2(2-(a+1)(b-1))k+(b-1)^2-4.$$

Yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình $f(k)=0$

có hai nghiệm k_1, k_2 khác $\frac{b-1}{a+1}$ và $k_1.k_2=-1$,

$$\text{nghĩa là } \begin{cases} a \neq -1 \\ f\left(\frac{b-1}{a+1}\right)=\frac{4(b-1)}{a+1}-4 \neq 0 \\ k_1k_2=\frac{(b-1)^2-4}{(a+1)^2}=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ b \neq a+2 \\ (a+1)^2+(b-1)^2=4. \end{cases}$$

Vậy quỹ tích các điểm M là đường tròn (T) có tâm $I(-1; 1)$ (I là tâm đối xứng của (C)) bán kính $R=2$, bỏ đi bốn điểm, đó là các giao điểm của (T) với hai đường tiệm cận của (C) là $x=-1, y=x+2$.

Nhận xét. Nếu ta tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$ với $I(-1; 1)$ thì phương trình của (C) trong hệ tọa độ IXY là $Y=X+\frac{1}{X}$ và giải theo phương pháp trên thì việc tính toán sẽ gọn hơn.

Thí dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị (P_1) và (P_2) sau :

$$(P_1): y=x^2-5x+6 \text{ và } (P_2): y=-x^2-x-14.$$

Lời giải. Xét đồ thị (D) của $y=ax+b$ và đồ thị (P) của $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ($\alpha \neq 0$).

(D) tiếp xúc $(P) \Leftrightarrow$ Hệ (III) sau có nghiệm

$$(III) \begin{cases} \alpha x^2+\beta x+\gamma=ax+b \\ 2\alpha x+\beta=a \end{cases}$$

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a-\beta}{2\alpha} \\ \alpha\left(\frac{a-\beta}{2\alpha}\right)^2+\beta\left(\frac{a-\beta}{2\alpha}\right)+\gamma=a\left(\frac{a-\beta}{2\alpha}\right)+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (IV) \begin{cases} x=\frac{a-\beta}{2\alpha} \\ (\beta-a)^2-4\alpha(\gamma-b)=0. \end{cases}$$

Vậy (IV) là điều kiện để (D) tiếp xúc (P) .

Áp dụng kết quả này vào thí dụ 3 ta có :

Đường thẳng (D) là tiếp tuyến chung của (P_1) và (P_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-5-a)^2-4(6-b)=0 \\ (-1-a)^2+4(-14-b)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+10a+4b+1=0 \\ a^2+2a-4b-55=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+10a+4b+1=0 \\ a^2+6a-27=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3, b=-10 \\ a=-9, b=2. \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung với phương trình là $(D_1): y=3x-10$ và $(D_2): y=-9x+2$.

Nhận xét. Hệ (IV) chính là điều kiện để phương trình

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=ax+b \text{ có nghiệm kép.}$$

LẠI BÀN VỀ CHUYỆN TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ

LÊ THỐNG NHẤT (Hà Nội)

Sau khi đăng bài *Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép* trên THPT số 294 (12.2001), Tòa soạn nhận được nhiều ý kiến hoan nghênh của đồng đảo bạn đọc vì vấn đề "tiếp xúc" đang là nỗi "bức xúc" của nhiều giáo viên và học sinh THPT. Trước đó, có ý kiến cho rằng : Nếu bỏ "phương pháp nghiệm kép" thì một số bài toán trước đây dùng phương pháp này sẽ phải... bỏ tay !

Chúng tôi xin bàn thêm về kĩ thuật giải một số bài toán này, qua thư yêu cầu của nhiều bạn.

Bài toán 1. *Tìm m để đồ thị hàm số*

$$y = (x + 2)(x^2 - mx + m^2 - 3)$$

tiếp xúc với trục hoành.

Lời giải. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành $y = 0 \Leftrightarrow$ Hệ phương trình ẩn x sau

$$\text{đây có nghiệm : (I) } \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0. \end{cases}$$

Với bài toán 1 hệ (I) có thể viết về dạng :

$$\begin{cases} (x + 2)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0 \\ (x^2 - mx + m^2 - 3) + (x + 2)(2x - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(II)} \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \end{cases} \\ \text{(III)} \begin{cases} x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \\ (x + 2)(2x - m) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Nếu đặt $t(x) = x^2 - mx + m^2 - 3$ thì hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (II) hoặc hệ (III) có nghiệm

$$\Leftrightarrow t(x) \text{ có nghiệm } x = -2 \text{ hoặc } x = \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t(-2) = 0 \\ t\left(\frac{m}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 = 0 \\ \frac{3}{4}m^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \pm 2. \end{cases}$$

Nhận xét. Lưu ý điều kiện $t\left(\frac{m}{2}\right) = 0$ cũng

chính là điều kiện để $t(x)$ có nghiệm kép thì lời giải trên đã "gặp" lời giải trước đây.

Bài toán 2. *Tìm trên đường thẳng $y = 4$ tất cả các điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến tới*

đồ thị $y = \frac{x^2}{x-1}$ và hai tiếp tuyến lập với nhau góc 45° .

(Đây là một bài trong đề thi tuyển sinh của ĐHQG, HVNH năm 2001 và tương tự một bài trong đề 17 của Bộ Đề thi tuyển sinh ĐH).

Lời giải. *Cách 1.* Chú ý rằng $y = 4$ chính là một tiếp tuyến của đồ thị nên các điểm cần tìm chính là giao điểm của tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1 hoặc -1 với đường thẳng $y = 4$. Phương trình $f'(x) = 1$ vô nghiệm, phương trình $f'(x) = -1$

có hai nghiệm $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ và từ đó có hai tiếp

tuyến với hệ số góc bằng -1 là $y = -x + 3 \pm 2\sqrt{2}$. Xét giao điểm của các tiếp tuyến này với đường thẳng $y = 4$ ta có các điểm cần tìm với hoành độ là $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$ và tung độ là $y = 4$. (Đây chính là đáp án của kì thi).

Nhận xét. Nếu không biết $y = 4$ là một tiếp tuyến và mệnh đề sau không được công nhận : "từ một điểm chỉ kẻ được không quá hai tiếp tuyến đến đồ thị", thì rõ ràng là không "nghĩ ra" được và không thể "làm" như cách 1.

Cách 2. Gọi $N(n ; 4)$ là điểm thuộc đường thẳng $y = 4$ thì phương trình đường thẳng đi qua N với hệ số góc k là $y = k(x - n) + 4$.

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k(x - n) + 4 \\ f'(x) = k \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Viết hệ trên về dạng

$$\begin{cases} (x-1)+2+\frac{1}{x-1}=k(x-1)+4-k(n-1) \\ 1-\frac{1}{(x-1)^2}=k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}+(k(n-1)-2)\frac{1}{x-1}+(1-k)=0 \\ \frac{1}{(x-1)^2}=1-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}=1-k & (1) \\ (k(n-1)-2)\frac{1}{x-1}=2k-2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1), (2) ta có $k \neq 1 \Rightarrow k(n-1)-2 \neq 0$.

Từ (2) viết được $\frac{1}{x-1} = \frac{2k-2}{k(n-1)-2}$.

Thay vào (1) thì hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2k-2}{k(n-1)-2}\right)^2 = 1-k \text{ với } k \neq 1.$$

Với $k \neq 1$, điều kiện trên trở thành

$$4(1-k) = (k(n-1)-2)^2$$

$$\Leftrightarrow k(k(n-1)^2 - 4(n-2)) = 0.$$

Phương trình này có nghiệm $k=0$ với mọi n tức là từ $N(n; 4)$ luôn kẻ được tiếp tuyến $y=4$ tới đồ thị.

Nhận xét : $t(k) = k(n-1)^2 - 4(n-2)$ có không quá một nghiệm đối với ẩn k nên từ N kẻ được hai tiếp tuyến lập với nhau góc 45° khi và chỉ khi $t(k)$ có nghiệm $k=-1$ (vì $k \neq 1$) $\Leftrightarrow t(-1)=0$
 $\Leftrightarrow n^2 + 2n - 7 = 0 \Leftrightarrow n = -1 \pm 2\sqrt{2}$.

Ta có hai điểm $N_1(-1-2\sqrt{2}; 4)$ và $N_2(-1+2\sqrt{2}; 4)$ thoả mãn bài toán.

Bài toán 3. Tìm tiếp tuyến cố định của họ đồ

thị $y = \frac{(m+1)x+m}{x+m}$ với $m \neq 0$.

Lời giải. Ta có $y = ax + b$ là tiếp tuyến cố định của họ đồ thị $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{cases} \text{ có nghiệm với mọi giá trị } m \neq 0.$$

Viết hệ về dạng

$$\begin{cases} m+1-\frac{m^2}{x+m} = ax+b \\ \frac{m^2}{(x+m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1-\frac{m^2}{x+m} = a(x+m) + (b-am) \\ \frac{m^2}{(x+m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{(x+m)^2} + ((b-1)-m(a+1))\frac{1}{x+m} + a = 0 \\ \frac{m^2}{(x+m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{(x+m)^2} = a & (3) \\ ((b-1)-m(a+1))\frac{1}{x+m} = -2a & (4) \end{cases}$$

Từ (3) và $m \neq 0$ ta có $a > 0$, kết hợp với (4) thì $(b-1)-m(a+1) \neq 0$.

$$\text{Từ (4) ta có } \frac{1}{x+m} = \frac{-2a}{(b-1)-m(a+1)}.$$

Thay vào (3) sẽ được

$$\frac{4a^2m^2}{((b-1)-m(a+1))^2} = a \quad (5)$$

Với $a > 0$ thì (5) trở thành

$$4am^2 = ((b-1)-m(a+1))^2$$

$$\Leftrightarrow m^2(a-1)^2 - 2m(b-1)(a+1) + (b-1)^2 = 0.$$

Phương trình này thoả mãn với mọi $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = 0 \\ -2(b-1)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = b = 1. \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Do đó : Họ đồ thị có tiếp tuyến duy nhất cố định $y = x + 1$.

VỀ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

NGUYỄN ANH DŨNG (Hà Nội)

Nhiều người đã quen giải các bài toán về phương trình tiếp tuyến bằng hai cách dựa trên cơ sở mệnh đề sau.

Mệnh đề 1. Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$ khi và chỉ khi thoả mãn một trong hai điều kiện sau :

1) $f(x_0) = ax_0 + b$ và $f'(x_0) = a$ (cách 1)

2) Phương trình $f(x) = ax + b$ có nghiệm bội $x = x_0$. (cách 2)

Nói riêng ở cách 2 nếu $f(x) = ax + b$ là phương trình bậc hai thì nghiệm bội là nghiệm kép.

Theo Tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán 12 (sách chỉnh lý hợp nhất 2000 – NXBGD) thì cách 2 MĐ1 là "thiếu cơ sở lí thuyết" và không được dùng. Tuy nhiên nếu chỉ sử dụng cách 1 MĐ 1 thì nhiều bài toán dạng này phải sử dụng nhiều thủ thuật biến đổi rất phức tạp.

Hai bài báo Nhìn lại khái niệm nghiệm kép của phương trình và vấn đề đường cong tiếp xúc với trục hoành (THTT 5.1998) và Một số vấn đề về nghiệm bội của phương trình (THTT 9.1998) đã đề cập dưới dạng tổng quát mối liên hệ giữa "nghiệm bội" và "tiếp xúc". Tuy nhiên trong bài đầu chỉ xét với hàm số đa thức còn bài thứ hai do tính tổng quát của vấn đề nên không tránh khỏi sự phức tạp đối với học sinh phổ thông.

Ta sẽ nghiên cứu cơ sở lí thuyết của cách 2 MĐ1, tức là phương pháp nghiệm kép đối với các hàm số đa thức hoặc phân thức hữu tỉ mà cách chứng minh phù hợp với kiến thức toán ở trường phổ thông.

Xét đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Ta nói $x = x_0$ là nghiệm bội k của $P(x)$ nếu $P(x) = (x - x_0)^k \cdot Q(x)$, trong đó $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ và $Q(x)$ là đa thức thoả mãn $Q(x_0) \neq 0$ (nói riêng

$Q(x)$ có thể là hằng số). Ta gọi tắt x_0 là nghiệm bội của $P(x)$ khi không cần chỉ ra số k . Nghiệm bội $k = 2$ gọi là nghiệm kép của đa thức.

Dễ dàng chứng minh được mệnh đề 2 sau.

Mệnh đề 2. Đa thức $P(x)$ có nghiệm bội x_0 khi và chỉ khi $P(x_0) = 0$ và $P'(x_0) = 0$.

Từ đó theo cách 1 MĐ 1 ta có ngay mệnh đề 3.

Mệnh đề 3. Đường thẳng d với phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C_1) của hàm số $y = P(x)$ tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình $P(x) - (ax + b) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Bây giờ ta xét tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{U(x)}{V(x)}$.

Mệnh đề 4. Đường thẳng d với phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C_2) của hàm số $y = \frac{U(x)}{V(x)}$ tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình $U(x) - (ax + b)V(x) = 0$ với $V(x_0) \neq 0$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Chứng minh.

Xét đa thức $P(x) = U(x) - axV(x) - bV(x)$.

a) Giả sử đa thức $P(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$ thì $P(x_0) = 0$ và $P'(x_0) = 0$ theo MĐ 2. Từ đó có

$$U(x_0) = ax_0V(x_0) + bV(x_0) \quad (1)$$

$$U'(x_0) - ax_0V'(x_0) - aV(x_0) - bV'(x_0) = 0 \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) với $V(x_0) \neq 0$ ta được

$$V(x_0)U'(x_0) - V'(x_0)(ax_0V(x_0) + bV(x_0)) = aV^2(x_0) \quad (3)$$

Thay (1) vào (3) ta có

$$V(x_0)U'(x_0) - U(x_0)V'(x_0) = aV^2(x_0)$$

$$\text{hay } \frac{V(x_0)U'(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{V^2(x_0)} = a \quad (4)$$

Từ (1) và (4) có $y(x_0) = ax_0 + b$ và $y'(x_0) = a$, do đó d là tiếp tuyến của (C_2) theo cách 1 MĐ1.

b) Đảo lại, giả sử d là tiếp tuyến của (C_2) tại $x = x_0$ thế thì $V(x_0) \neq 0$ và có $\frac{U(x_0)}{V(x_0)} = ax_0 + b$, $y'(x_0) = a$. Từ đó có (1) và (4) rồi lần lượt suy ra (3) và (2), nên $P(x_0) = 0$ và $P'(x_0) = 0$. Áp dụng MĐ2 có điều phải chứng minh.

Bây giờ áp dụng MĐ4 vào xét hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ (5) và $f(x) = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ (6) được :

Mệnh đề 5. Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ với $f(x)$ có dạng (5) hoặc (6) khi và chỉ khi phương trình $f(x) - (ax + b) = 0$ là phương trình bậc hai có nghiệm kép $x = x_0$.

Thí dụ. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ có đồ thị (C). Tìm tập hợp các điểm M mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) vuông góc với nhau.

Lời giải. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm bất kì trên mặt phẳng toạ độ Oxy , phương trình đường thẳng d qua M là $y = a(x - x_0) + y_0$.

Để tìm hoành độ giao điểm giữa (C) và d ta xét phương trình $\frac{x^2 + 1}{x} = a(x - x_0) + y_0$

$$\text{hay } (a - 1)x^2 - (ax_0 - y_0)x - 1 = 0 \quad (7)$$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ phương trình (7) có nghiệm kép $\Leftrightarrow a \neq 1$ và biệt thức $\Delta = 0$ (lưu ý $a = 1$ là hệ số góc của tiệm cận xiên).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta &= (ax_0 - y_0)^2 + 4(a - 1) \\ &= x_0^2 a^2 - 2(x_0 y_0 - 2)a + y_0^2 + 4. \end{aligned}$$

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ phương trình $\Delta = 0$ có hai nghiệm a_1, a_2 thoả mãn $a_1 a_2 = -1 \Leftrightarrow$ Điều kiện sau thoả mãn : $x_0 \neq 0$ và $\frac{y_0^2 + 4}{x_0^2} = -1$.

$$\text{Từ đó có } x_0^2 + y_0^2 = 4.$$

Vậy tập hợp điểm M phải tìm là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ trừ đi các giao điểm của đường tròn đó với hai đường tiệm cận (do các điều kiện $x_0 \neq 0$ và $a \neq 1$).

Lưu ý

- Đối với loại toán trên nếu không sử dụng phương pháp "nghiệm bội" thì cách giải sẽ khá phức tạp.

- Cách giải trên không phải là mới nhưng theo Tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán Giải tích 12 thì "Giáo viên không nên dạy cho học sinh làm cách ấy" (tr.34).

Ý kiến đề xuất. Trong chương trình phổ thông nên chấp nhận phương pháp "nghiệm bội" khi giải các bài toán về phương trình tiếp tuyến đối với các hàm số đa thức và phân thức hữu tỉ.

VỀ CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM KÉP

ĐẶNG HÙNG THẮNG (ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Theo quy định của Bộ GD và ĐT kể từ năm học 2000 – 2001 không được dùng phương pháp nghiệm kép để giải quyết các bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc của hai đồ thị vì nó

"thiếu cơ sở lí thuyết". Thực tế cho thấy nhiều giáo viên và học sinh rất lúng túng khi không được dùng phương pháp nghiệm kép, trong khi phương pháp này thực sự có hiệu quả.

Trước hết hãy nhắc lại khái niệm sự tiếp xúc của đồ thị hai hàm số và khái niệm nghiệm bội của đa thức.

Định nghĩa.

1. Đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ được gọi là *tiếp xúc* với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ nếu

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \quad (1)$$

2. Giả sử $F(x)$ là một đa thức. Số x_0 được gọi là *nghiệm bội* của $F(x)$ nếu $F(x)$ chia hết cho $(x - x_0)^2$ tức là $F(x)$ có dạng

$$F(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q(x)$$

ở đó $Q(x)$ là một đa thức.

Trong trường hợp $F(x)$ là một tam thức bậc hai, nghiệm bội hai được gọi là *nghiệm kép*.

Chú ý rằng chúng ta chỉ có khái niệm nghiệm bội đối với đa thức (hoặc phương trình với hai vế đều là đa thức).

Định lí sau đây sẽ chứng tỏ rằng phương pháp nghiệm kép là có cơ sở toán học khi chúng ta xét sự tiếp xúc của hai đồ thị các hàm số phân thức hữu tỉ.

Định lí. Cho hai phân thức hữu tỉ

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad g(x) = \frac{U(x)}{V(x)}.$$

Khi đó đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình

$$P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$$

có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0$, $V(x_0) \neq 0$ (tức là x_0 thuộc miền xác định của $f(x)$ và $g(x)$).

Vì đa thức cũng là một phân thức hữu tỉ (khi đa thức ở mẫu thức là đa thức hằng số) nên ta có các hệ quả sau thường dùng trong chương trình phổ thông trung học.

Hệ quả 1. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm đa thức $y = P(x)$ khi và chỉ khi phương trình $P(x) - (kx + h) = 0$ có nghiệm bội.

Hệ quả 2. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

khi và chỉ khi phương trình $P(x) - Q(x)(kx + h) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0$.

Nói riêng có

Hệ quả 3. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ khi và chỉ khi phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c - (mx + n)(kx + h) = 0$$

có nghiệm kép (tức là khi biệt thức $\Delta = 0$).

Hệ quả 4. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $\frac{ax + b}{mx + n}$ khi và chỉ khi phương trình bậc hai

$$ax + b - (mx + n)(kx + h) = 0$$

có nghiệm kép (tức là khi biệt thức $\Delta = 0$).

Để chứng minh định lí ta cần đến bổ đề sau khá quen thuộc và dễ dàng chứng minh.

Bổ đề. Đa thức $F(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$ khi và chỉ khi $F(x_0) = F'(x_0) = 0$.

Quả vậy, nếu x_0 là nghiệm bội của phương trình $F(x) = 0$ thì do định nghĩa

$$F(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q(x)$$

suy ra

$$F'(x) = (x - x_0)^2 Q'(x) + 2(x - x_0)Q(x) \Rightarrow$$

$$F(x_0) = F'(x_0) = 0.$$

Đảo lại giả sử $F(x_0) = F'(x_0) = 0$. Vì $F(x_0) = 0$ thì $F(x)$ có dạng $F(x) = (x - x_0)G(x) \Rightarrow F'(x) = (x - x_0)G'(x) + G(x) \Rightarrow G(x_0) = F'(x_0) = 0 \Rightarrow G(x)$ có dạng $G(x) = (x - x_0)Q(x)$. Vậy $F(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q(x)$ tức là $F(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Chứng minh định lí. Giả sử đồ thị các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$. Khi đó từ (1) có

$$\frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{U(x_0)}{V(x_0)} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)}{Q^2(x_0)} \\ &= \frac{U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{V^2(x_0)} \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $q = Q(x_0) \neq 0$, $v = V(x_0) \neq 0$, $p = P(x_0)$,
 $u = U(x_0)$, $p' = P'(x_0)$, $q' = Q'(x_0)$.

Từ $qv \neq 0$ và (2) suy ra

$$P(x_0)V(x_0) = Q(x_0)U(x_0) \text{ hay } qu = pv \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) có } (p'q - pq')v^2 = (u'v - uv')q^2 \quad (5)$$

• Nếu $pu \neq 0$, nhân theo từng vế của (4) và (5) được

$$(p'q - pq')v^2 qu = (u'v - uv')q^2 pv$$

$$\Leftrightarrow (p'v + pv')q^2 vu = (q'u + qu')v^2 pq.$$

Theo (4) thì $qu.qv = pv.qv \neq 0$ nên suy ra

$$p'v + pv' = q'u + qu' \text{ hay}$$

$$P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0)$$

$$= Q'(x_0)U(x_0) + Q(x_0)U'(x_0) \quad (6)$$

• Nếu $pu = 0$ thì từ (2) có $p = u = 0$, thay vào (5) được

$$p'qv^2 = u'vq^2 \Rightarrow p'v = u'q.$$

Từ điều này cùng với $p = u = 0$ cũng suy ra (6).

Tóm lại, từ (4), (6) và bổ đề ta kết luận rằng phương trình $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Đảo lại, với $Q(x_0)V(x_0) \neq 0$ nếu $x = x_0$ là nghiệm bội của phương trình $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ thì từ (4) và (6) biến đổi ngược lại ta sẽ suy ra (2) và (3). Theo (1) đồ thị hai hàm số tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$.

Chúng tôi cho rằng trong sách giáo khoa nên trình bày định lý nói trên (có thể không chứng minh hoặc chứng minh với chữ nhỏ) để làm cơ sở lý thuyết cho phương pháp nghiệm bội. Từ đó cho phép học sinh được sử dụng phương pháp này khi giải các bài toán về sự tiếp xúc của đồ thị hai hàm phân thức hữu tỉ cũng như bài toán về tiếp tuyến với đồ thị hàm phân thức hữu tỉ.

BÀN VỀ SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ

NGUYỄN VIỆT HẢI (Hà Nội)

Trong thời gian qua, Toà soạn THPT nhận được rất nhiều thư của độc giả, trong đó có các giảng viên ĐH, cán bộ chỉ đạo môn Toán ở các Sở GD-ĐT, các giáo viên toán THPT và các bạn học sinh, sinh viên... với nội dung liên quan đến bài toán về sự tiếp xúc của hai đồ thị trên mặt phẳng – một vấn đề quan trọng thường gặp khi khảo sát hàm số và trong các đề thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào ĐH, Cao đẳng.

Bài này nhằm phản ánh các thắc mắc, các giải pháp và ý kiến đề xuất của bạn đọc, đồng thời người viết cũng xin trao đổi thêm vài điều.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (E) trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Để tìm sự tiếp xúc giữa hai đồ thị (C) và (E) ta thường sử dụng hai cách giải :

Cách giải 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & (1) \\ f'(x) = g'(x) & (2) \end{cases}$$

được nghiệm x_0 là hoành độ của tiếp điểm.

Cách giải 2. Tìm điều kiện để $f(x) - g(x)$ hoặc tử thức của nó có nghiệm x_0 bội $k \geq 2$ (nghiệm bội $k = 2$ gọi là nghiệm kép), nghĩa là $f(x) - g(x)$ có dạng $(x - x_0)^k Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức.

Xuất hiện câu hỏi : Tại sao trong các sách báo có các định nghĩa khác nhau về sự tiếp xúc ? Định nghĩa nào chính xác ?

Định nghĩa tiếp xúc theo quan điểm hình học coi tiếp tuyến tại M_0 là vị trí giới hạn của cát tuyến MM_0 của đường cong khi M dần tới M_0 (từ hai phía).

Định nghĩa dựa vào vị trí tương đối của các hình là điều bắt buộc nếu muốn giữ được *tính chất hình học* của khái niệm tiếp tuyến, đồng thời do mô tả trực quan nên học sinh dễ nhận thức. Định nghĩa đúng cho cả tiếp tuyến của đường cong có phương trình dạng tổng quát $F(x, y) = 0$, mang tính chất *định tính*, được sử dụng trong khi chứng minh, dựng hình.

Không ít học sinh đã ngộ nhận rằng định nghĩa này là cơ sở của phương pháp nghiệm kép (giao điểm M dần trùng đến tiếp điểm M_0).

Các bạn Lê Hữu Tâm (GV THPT Tùng Thiện, Sơn Tây, Hà Tây), Hồ Văn Tiếp (GV THPT Đức Trọng, Lâm Đồng), Lê Anh Tuấn (GV THPT chuyên Vĩnh Phúc), Đoàn Như Triệu (GV THPT Hồng Quang, Hải Dương), Phạm Quốc Phong (GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh), Nguyễn Đoài (GV THPT Thống Nhất A, Đồng Nai) và nhiều bạn khác đều cho rằng : Lâu nay trong các tài liệu ôn thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh ĐH đã sử dụng phương pháp nghiệm kép mà chưa có cơ sở lí luận chính xác, do đó có lúc lạm dụng phương pháp này dẫn đến sai lầm trong lập luận, có lúc lẫn lộn khái niệm tiếp xúc với điều kiện có nghiệm kép...

Trong các bài báo của tác giả Nguyễn Anh Dũng (THTT số 297 tháng 3.2002), Đặng Hùng Thắng (THTT số 298 tháng 4.2002) đã trình bày cơ sở lí luận của phương pháp nghiệm bội để giải bài toán về sự tiếp xúc của hai đồ thị, trong đó lưu ý rằng :

- Chỉ xét khái niệm x_0 là nghiệm bội $k \geq 2$ đối với đa thức $F(x) = (x - x_0)^k Q(x)$.

- Đồ thị hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ và $y = \frac{U(x)}{V(x)}$, trong đó $P(x)$, $Q(x)$, $U(x)$, $V(x)$ là các đa thức, tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ (thuộc tập các định của chúng) khi và chỉ khi $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0$, $V(x_0) \neq 0$.

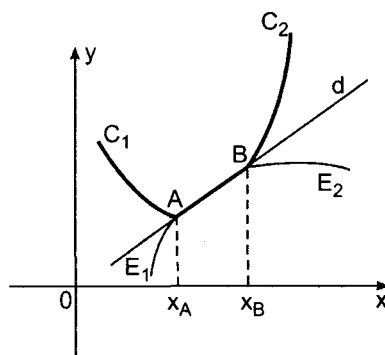
Các bạn My Duy Thọ (GV Hà Nội), Hồ Văn Tiếp, Lê Anh Tuấn cũng chứng minh các mệnh đề tương tự.

Định nghĩa tiếp xúc theo quan điểm đại số, giải tích có điều kiện như cách giải 1, trong đó phương trình (1) có nghiệm $x = x_0$, nghĩa là các đồ thị (C) và (E) có điểm chung $M_0(x_0; y_0)$ còn phương trình (2) có nghiệm $x = x_0$ biểu thị tiếp tuyến của (C) và (E) tại $M_0(x_0; y_0)$ trùng nhau.

Định nghĩa này mang tính chất *định lượng*, cho phép giải các bài toán tính toán tọa độ tiếp điểm, tìm phương trình tiếp tuyến.

Nếu xuất phát từ định nghĩa theo quan điểm hình học thì cách giải 1 coi là mệnh đề.

Định nghĩa theo quan điểm giải tích chỉ xét hệ số góc $k = \tan \alpha$ xác định, do đó bỏ qua trường hợp tiếp tuyến vuông góc với trục hoành, chẳng hạn hàm số $y = \sqrt[3]{x-1}$ có tiếp tuyến $x = 1$.



Bạn Nguyễn Minh Anh, 12A1, THPT Tỉnh Gia I, Thanh Hoá đưa ra giải pháp : Xét tiếp tuyến dạng $y = b$ (b là hằng số) của hàm số ngược $x = \sqrt[3]{y-1} \Leftrightarrow y = x^3 + 1$ rồi lấy đồ thị đối xứng qua đường $y = x$.

Xin hỏi : Ở hình trên ta có coi đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) gồm (C_1) , AB , (C_2) hay không ? có coi hai đồ thị (E) (gồm (E_1) , AB , (E_2)) và (C) là tiếp xúc với nhau hay không ? mặc dù hệ phương trình (1), (2) ở cách giải 1 có nghiệm trong đoạn $[x_A, x_B]$.

Do vậy ở cách giải 1 cần chú ý thêm : trong lân cận của tiếp điểm thì hai đồ thị (C) và (E) phải có ít nhất một đường cong, nghĩa là không thể hai đường đều là đồ thị hàm số bậc nhất.

Cách giải 1 dùng cho các hàm số bất kì (trừ trường hợp cả hai đều là hàm số bậc nhất tại lân cận tiếp điểm), còn cách 2 áp dụng cho trường hợp $f(x)$ và $g(x)$ đều là phân thức hữu tỉ (nói riêng là đa thức).

Dùng cách giải 1 ta tìm ngay được hoành độ tiếp điểm, sau đó mới tính hệ số góc tiếp tuyến, còn cách giải 2 cho phép nhanh chóng tìm hệ số góc để suy ra phương trình tiếp tuyến, tìm điều kiện của tham số để có tiếp tuyến.

Khi phải tìm tiếp tuyến dạng $g(x) = mx + n$ của đồ thị hàm $y = f(x)$ dạng $ax^2 + bx + c$, $\frac{ax+b}{cx+d}$, $\frac{ax^2+bx+e}{cx+d}$ thì $f(x) - g(x)$ hoặc từ thức của nó đều là hàm số bậc hai nên sử dụng được cả hai cách giải.

Nhiều bạn đọc hỏi rằng sử dụng phương pháp nghiệm kép trong trường hợp này có vi phạm yêu cầu của Bộ không khi hệ thức điều kiện vẫn là hàm số bậc hai ?

Khi phải tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ mà $f(x)$ có dạng hàm số bậc ba, bậc bốn thì dẫn đến giải phương trình bậc ba, bậc bốn lúc đó sử dụng cách giải 1 rất khó khăn. Nếu biết một nghiệm nào đó của phương trình (1) thì sử dụng phương pháp nghiệm bội rất thuận lợi.

Có bạn hỏi : Phép biến đổi tương đương $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ có bảo toàn tính chất nghiệm bội của phương trình ? Xin trả lời : Hai phương trình trên là tương đương, nhưng phép biến đổi không tương đương vì phải nhân, chia với $h(x) = x-1$ mà $x=1$ thuộc tập xác định và $h(1) = 0$.

Rất nhiều bạn : Hồ Công Dũng (GV THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận), Nguyễn Danh Cẩm (Ứng Hoà, Hà Tây), TS Nguyễn Cam (khoa Toán, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh), Lê Hữu Tâm, Hồ Văn Tiếp, Lê Anh Tuấn, Phạm Quốc Phong, Nguyễn Anh Dũng, PGS Đặng Hùng Thắng... đã nêu ra cơ sở lí luận của phương pháp nghiệm bội, phân tích ưu thế của cách giải này trong nhiều bài toán và đã đề nghị cho sử dụng phương pháp nghiệm bội khi giải toán về sự tiếp xúc giữa hai đồ thị hàm số vì *nhiều định lí ở THPT cũng chỉ công nhận, không chứng minh ; vấn đề là cần chỉ rõ điều kiện sử dụng phương pháp này sao cho chính xác, mặt khác trình bày ngắn gọn để không quá nặng nề.*

Tôi hoàn toàn nhất trí với đề nghị trên, dùng bất học sinh phổ thông phải học những biến đổi lắt léo để giải bài toán tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số phân thức trong khi có phương pháp đơn giản dựa trên cơ sở lí luận rõ ràng.

Phân hai

MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG CÔN IC

MỘT SỐ DẠNG KHÁC CỦA BÀI TOÁN CON BƯỚM

PHAN NAM HÙNG (Quảng Ngãi)

Chắc nhiều bạn trẻ yêu toán đã được làm quen với bài toán con bướm. Trong bài viết này trình bày những lập luận hợp lý để có thể đi đến những kết quả mạnh hơn. Trước hết ta xuất phát từ bài toán con bướm.

Bài toán con bướm

Cho đường tròn tâm O với dây cung PQ . Qua trung điểm T của PQ kẻ hai dây cung AB và CD sao cho PQ cắt hai dây cung AD , BC theo thứ tự tại M , N . Chứng minh rằng $TM = TN$.

Lời giải.

• Khi T trùng với tâm O thì $\triangle OAM = \triangle OBN$ (g.c.g) nên $TM = TN$ (đpcm).

• Khi T khác tâm O , kẻ $OH \perp AD$ tại trung điểm H của AD , kẻ $OK \perp BC$ tại trung điểm K của BC .

Giả sử H thuộc đoạn DM và K thuộc đoạn CN (h.1). (Các trường hợp khác được chứng minh tương tự).

Tứ giác $OTMH$ nội tiếp đường tròn nên

$$\widehat{TOM} = \widehat{THM} \quad (1)$$

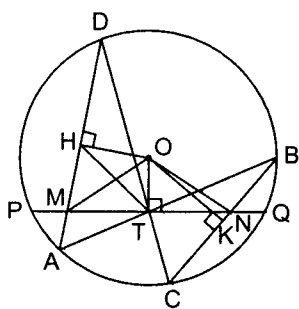
Tứ giác $OTKN$ nội tiếp đường tròn nên

$$\widehat{TON} = \widehat{TKC} \quad (2)$$

Từ $\triangle TAD \sim \triangle TCB$ suy ra $\widehat{TAH} = \widehat{TCK}$ và

$$\frac{TA}{2AH} = \frac{TC}{2CK}, \text{ dẫn đến } \triangle TAH \sim \triangle TCK, \text{ do đó}$$

$$\widehat{THA} = \widehat{TKC}. \quad (3)$$



Hình 1

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{TOM} = \widehat{TON}$ mà $OT \perp MN$ nên $TM = TN$ (đpcm).

Chú ý rằng T là trung điểm chung của PQ và MN nên cũng có $PM = QN$.

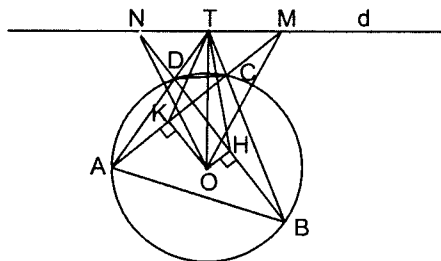
Có thể phát biểu bài toán con bướm dưới dạng bài toán 1 sau (h.1).

Bài toán 1. Cho tứ giác $ADBC$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi T là giao điểm hai đường chéo CD và AB . Một đường thẳng vuông góc với OT tại T cắt hai cạnh AD và BC theo thứ tự tại M và N . Chứng minh rằng $TM = TN$.

Nếu đổi vai trò hai đường chéo thành hai cạnh đối diện còn hai cạnh đối diện thành hai đường chéo ta được bài toán sau.

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O sao cho hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm T . Đường thẳng d vuông góc với OT tại T cắt hai đường thẳng AC và BD theo thứ tự tại M và N .

Chứng minh rằng $TM = TN$.



Hình 2

Lời giải. Xét trường hợp như ở hình 2 (Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự).

Vẽ OM và ON . Từ O kẻ $OH \perp BD$ tại trung điểm H của BD , kẻ $OK \perp AC$ tại trung điểm K

Cách giải 1 dùng cho các hàm số bất kì (trừ trường hợp cả hai đều là hàm số bậc nhất tại lân cận tiếp điểm), còn cách 2 áp dụng cho trường hợp $f(x)$ và $g(x)$ đều là phân thức hữu tỉ (nói riêng là đa thức).

Dùng cách giải 1 ta tìm ngay được hoành độ tiếp điểm, sau đó mới tính hệ số góc tiếp tuyến, còn cách giải 2 cho phép nhanh chóng tìm hệ số góc để suy ra phương trình tiếp tuyến, tìm điều kiện của tham số để có tiếp tuyến.

Khi phải tìm tiếp tuyến dạng $g(x) = mx + n$ của đồ thị hàm $y = f(x)$ dạng $ax^2 + bx + c$, $\frac{ax+b}{cx+d}$, $\frac{ax^2+bx+e}{cx+d}$ thì $f(x) - g(x)$ hoặc tử thức của nó đều là hàm số bậc hai nên sử dụng được cả hai cách giải.

Nhiều bạn đọc hỏi rằng sử dụng phương pháp nghiệm kép trong trường hợp này có vi phạm yêu cầu của Bộ không khi hệ thức điều kiện vẫn là hàm số bậc hai ?

Khi phải tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ mà $f(x)$ có dạng hàm số bậc ba, bậc bốn thì dẫn đến giải phương trình bậc ba, bậc bốn lúc đó sử dụng cách giải 1 rất khó khăn. Nếu biết một nghiệm nào đó của phương trình (1) thì sử dụng phương pháp nghiệm bội rất thuận lợi.

Có bạn hỏi : Phép biến đổi tương đương $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ có bảo toàn tính chất nghiệm bội của phương trình ? Xin trả lời : Hai phương trình trên là tương đương, nhưng phép biến đổi không tương đương vì phải nhân, chia với $h(x) = x-1$ mà $x=1$ thuộc tập xác định và $h(1) = 0$.

Rất nhiều bạn : Hồ Công Dũng (GV THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận), Nguyễn Danh Cẩm (Ứng Hoà, Hà Tây), TS Nguyễn Cam (khoa Toán, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh), Lê Hữu Tâm, Hồ Văn Tiếp, Lê Anh Tuấn, Phạm Quốc Phong, Nguyễn Anh Dũng, PGS Đặng Hùng Thắng... đã nêu ra cơ sở lí luận của phương pháp nghiệm bội, phân tích ưu thế của cách giải này trong nhiều bài toán và đã đề nghị cho sử dụng phương pháp nghiệm bội khi giải toán về sự tiếp xúc giữa hai đồ thị hàm số vì *nhiều định lí ở THPT cũng chỉ công nhận, không chứng minh ; vấn đề là cần chỉ rõ điều kiện sử dụng phương pháp này sao cho chính xác, mặt khác trình bày ngắn gọn để không quá nặng nề.*

Tôi hoàn toàn nhất trí với đề nghị trên, dùng bất học sinh phổ thông phải học những biến đổi lắt léo để giải bài toán tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số phân thức trong khi có phương pháp đơn giản dựa trên cơ sở lí luận rõ ràng.

của AC. Tứ giác $THON$ nội tiếp nên ta có :

$$\widehat{THN} = \widehat{TON} \quad (4)$$

Tương tự tứ giác $TKOM$ nội tiếp nên

$$\widehat{TKM} = \widehat{TOM} \quad (5)$$

Vì ΔTBD và ΔTAC có góc $\widehat{ATB}$ chung và $\widehat{TBD} = \widehat{TAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DC}$) nên $\Delta TBD \sim \Delta TAC$, suy ra $\widehat{TDH} = \widehat{TCK}$

và $\frac{TD}{2TH} = \frac{TC}{2TK}$, dẫn đến $\Delta THD \sim \Delta TKC$, do

$$\text{đó } \widehat{THN} = \widehat{TKM} \quad (6)$$

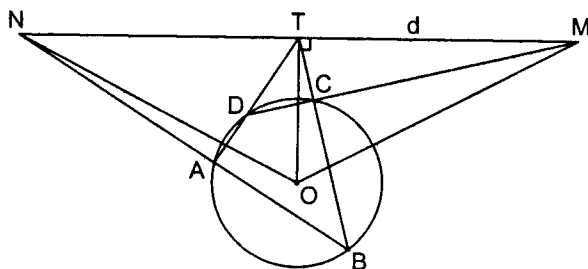
Từ (4), (5) và (6) có $\widehat{TON} = \widehat{TOM}$ mà $OT \perp MN$ nên $TM = TN$ (đpcm).

Nếu trong bài toán 2 ta thay hai đường chéo BD và AC bởi hai cạnh đối diện còn lại là DC và AB thì có bài toán 3 sau.

Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O sao cho hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm T . Đường thẳng d vuông góc với OT cắt hai đường thẳng CD và AB theo thứ tự tại M và N .

Chứng minh rằng $TM = TN$.

Việc chứng minh bài toán 3 (h.3) tương tự như chứng minh bài toán 2.



Hình 3

Từ các bài toán 1, 2, 3 có thể nêu ra bài toán tổng quát dưới đây khi cho trước đường thẳng d .

Bài toán 4. Cho đường tròn tâm O và d là một đường thẳng bất kì (không phải là tiếp tuyến của đường tròn tâm O). Gọi T là chân đường vuông góc hạ từ điểm O tới đường thẳng d . Qua T kẻ hai cát tuyến TAD và TBC tới đường tròn.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của d với AC và BD và gọi P, Q lần lượt là giao điểm của d với đường tròn (nếu có) thì T là trung điểm chung của MN và PQ .

Nói riêng từ bài toán 4 ta có bài toán 2, 3 khi d không cắt đường tròn (O) và có bài toán 1 khi d cắt đường tròn (O).

Nếu ta đặc biệt hoá cho A trùng với D thì khi đó cát tuyến TAD suy biến thành tiếp tuyến và có bài toán sau.

Bài toán 5. Cho đường tròn tâm O và d là một đường thẳng ở ngoài đường tròn (O). Từ O hạ OT vuông góc với d tại T . Qua T kẻ tiếp tuyến TA và cát tuyến TBC với đường tròn sao cho d cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $TM = TN$.

Đặc biệt, ở bài toán 5 nếu TBC là đường kính ta thu được bài toán 6 sau.

Bài toán 6. Cho đường tròn tâm O và một đường thẳng d không cắt đường tròn. Đường kính BC vuông góc với d tại T . Dựng tiếp tuyến TA tới đường tròn với A là tiếp điểm. Đường thẳng d cắt các đường thẳng AB và AC tại M và N tương ứng thì $TA = TM = TN$.

Việc chứng minh các bài toán 5 và bài toán 6 xin dành lại để các bạn luyện tập.

MỘT SỐ HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

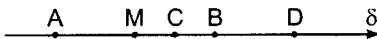
LÊ HÀO (GV trường CĐSP Phú Yên)

Trong hình học phẳng khi xét các vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn ta tìm thấy nhiều kết quả liên quan với nhau rất thú vị và có nhiều ứng dụng trong khi giải toán. Một số hệ thức như thế đã được trình bày trong bài *Một số dạng khác của bài toán con bướm* của bạn Phan Nam Hùng trên THPT số 216 (6.1995). Trong bài này xin nêu ra cách chứng minh khác với một cách nhìn tổng quát hơn về một số dạng của bài toán con bướm.

I. Hệ thức giữa bốn điểm trên đường thẳng

1) Hàng điểm điều hoà

Bốn điểm A, B, C, D trên đường thẳng có hướng δ gọi là hàng điểm điều hoà ($ABCD$) và kí hiệu là $(ABCD) = -1$ nếu $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (1)



Hình 1

Khi đó ta gọi là các điểm C, D chia điều hoà đoạn AB hay bốn điểm A, B, C, D liên hợp điều hoà (h.1). Ta thấy (1) $\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ nghĩa là lúc đó các điểm A, B cũng chia điều hoà đoạn CD . Chú ý rằng nếu ba điểm A, B, C xác định và C không là trung điểm của AB thì tồn tại duy nhất một điểm D thoả mãn (1).

Chọn điểm gốc O nào đó trên đường thẳng δ , đặt các số đo đại số $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b, \overline{OC} = c, \overline{OD} = d$ thì (1) được viết thành $\frac{a-c}{b-c} = \frac{a-d}{b-d}$
 $\Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$ (2)

2) Hệ thức Descartes

Nếu chọn gốc O trùng với điểm A thì $a = 0$ và (2) $\Leftrightarrow b(c+d) = 2cd \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{2}{b}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}} \quad (3)$$

3) Hệ thức Newton

Nếu chọn gốc O trùng với trung điểm M của AB thì $a = -b$ nên (2) $\Leftrightarrow -a^2 + cd = 0$

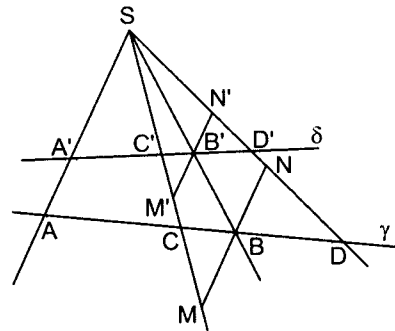
$$\Leftrightarrow cd = a^2 \Leftrightarrow \overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MA}^2 \quad (4)$$

4) Chùm điều hoà

Bốn đường thẳng đồng quy cắt một đường thẳng tại bốn điểm liên hợp điều hoà được gọi là chùm (đường thẳng) điều hoà.

Tính chất. Chùm điều hoà đồng quy ở điểm S và cắt đường thẳng γ nào đó tại các điểm A, B, C, D thì A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà.

Chứng minh. Theo định nghĩa các đường thẳng SA, SB, SC, SD cắt đường thẳng δ tại A', B', C', D' với $(A'B'C'D')$ là hàng điểm điều hoà. Qua B và B' kẻ các đường thẳng song song với SA được các giao điểm như ở hình 2.



Hình 2

Theo (1) và ĐL Thales có

$$0 = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A'}} + \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A'}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{N'B'}}{\overline{SA'}}$$

$\Rightarrow \overline{M'B'} + \overline{N'B'} = 0$ nghĩa là B' là trung điểm của $M'N'$. Suy ra $\overline{MB} + \overline{NB} = 0$

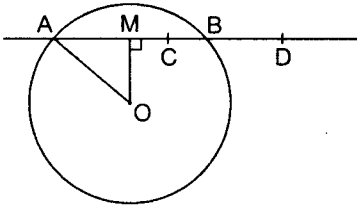
$$\Rightarrow 0 = \frac{\overline{MB}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{NB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}.$$

Từ đó A, B, C, D là hàng điểm điều hoà.

II. Hệ thức liên hệ giữa đường thẳng và đường tròn

Bài toán 1. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung AB có trung điểm M . Thế thì bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D là hàng điểm điều hoà khi và chỉ khi $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = R^2$ (5)

Chứng minh. Chú ý rằng $OM \perp CD$ (h.3)



Hình 3

Theo hệ thức Newton có

$$\begin{aligned} \overline{OC} \cdot \overline{OD} &= (\overline{OM} + \overline{MC})(\overline{OM} + \overline{MD}) \\ &= OM^2 + \overline{MC} \cdot \overline{MD} = OM^2 + MA^2 = R^2. \end{aligned}$$

Bài toán 2. Cho đường tròn tâm O bán kính R . Các đường thẳng chứa hai dây cung AB và CD cắt nhau tại điểm E sao cho E khác trung điểm AB và không nằm trên đường tròn. Một đường thẳng δ qua E cắt các đường thẳng AD, BC lần lượt tại P và Q . Gọi H là hình chiếu của điểm O lên đường thẳng δ thì

$$\frac{1}{\overline{EP}} + \frac{1}{\overline{EQ}} = \frac{2\overline{EH}}{\mathcal{P}(E)} \quad (6)$$

trong đó $\mathcal{P}(E) = OE^2 - R^2$ là phương tích của điểm E đối với đường tròn tâm O .

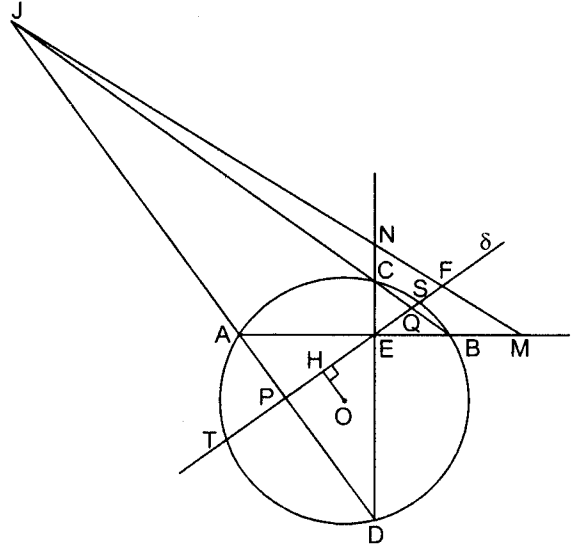
Chứng minh. Giả sử các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm J . Lấy điểm M trên AB sao

cho A, B, E, M là hàng điểm điều hoà. Đường thẳng JM cắt PQ tại F (hình 4 vẽ trường hợp điểm E nằm trong đường tròn). Vì JA, IB, JE, JM là chùm điều hoà nên P, Q, E, F là hàng điểm điều hoà. Theo (5) có $\overline{OE} \cdot \overline{OF} = R^2$.

$$\Rightarrow \overline{OE}(\overline{OE} + \overline{EF}) = R^2 \Rightarrow \overline{EO} \cdot \overline{EF} = OE^2 - R^2$$

$$\Rightarrow (\overline{EH} + \overline{HO})\overline{EF} = \mathcal{P}(E)$$

$$\Rightarrow \overline{EH} \cdot \overline{EF} = \mathcal{P}(E) \Rightarrow \overline{EH} \cdot \overline{EF} = \mathcal{P}(E).$$



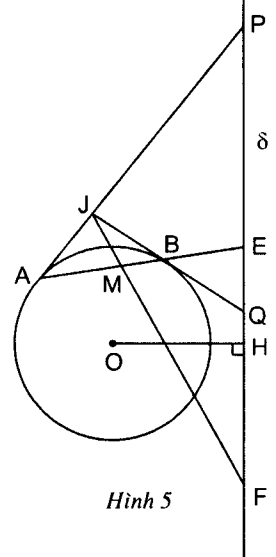
Hình 4

Từ đó và áp dụng (3) có $\frac{1}{\overline{EP}} + \frac{1}{\overline{EQ}} =$

$$\frac{2}{\overline{EF}} = \frac{2\overline{EH}}{\mathcal{P}(E)}.$$

Hệ thức này vẫn đúng khi P, Q tương ứng trùng với D, C .

Hệ quả 1. Giả sử đường thẳng δ đi qua giao điểm E của AB và CD , đi qua giao điểm J của AD và BC . Gọi H là hình chiếu của tâm O lên δ thì $\mathcal{P}(E) = \overline{EH} \cdot \overline{EJ}$.



Hình 5

Hệ quả 2. Hệ thức (6) vẫn đúng khi A trùng với D và B trùng với C , lúc đó AD và BC đều là tiếp tuyến của đường

MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO CÁC ĐƯỜNG CÔNIC

LÊ HÀO (GV trường CĐSP Phú Yên)

Có lẽ các bạn trẻ yêu toán đều biết đến bài toán con bướm.

Trong bài báo *Một số dạng khác của bài toán con bướm* (THTT 6.1995) bạn Phan Nam Hùng đã nêu bài toán con bướm và có một số tìm tòi mở rộng bài toán con bướm. Bài báo này bàn đến vấn đề sau : Nếu thay cho đường tròn trong bài toán con bướm ta xét một đường conic thì sẽ có kết quả gì tương tự kết quả của bài toán con bướm ? Những kết quả đó có thể mở rộng ra như thế nào ?

Để thuận tiện trong lập luận xin nêu một số quy ước như sau :

– Hai đường thẳng song song xem như chúng cắt nhau tại một điểm gọi là điểm vô tận.

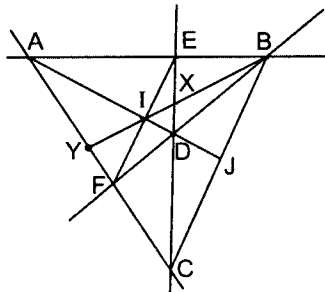
– Hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua điểm vô tận thì song song.

Như vậy trong bài viết này ta luôn có thể nói đến "giao" của hai đường thẳng phân biệt.

Trước tiên tôi xin giới thiệu một số kiến thức về tứ giác toàn phần.

I. Tứ giác toàn phần

Trong mặt phẳng tập hợp gồm bốn đường thẳng trong đó không có ba đường nào cùng đi qua một điểm gọi là tứ giác toàn phần. Mỗi một đường thẳng đó gọi là một cạnh. Giao điểm của hai cạnh gọi là đỉnh. Hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh gọi là hai đỉnh đối diện. Mỗi đường thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo. Ta có :



Hình 1

Mệnh đề 1. Trong hình tứ giác toàn phần, cặp đỉnh đối diện nằm trên một đường chéo và cặp giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại lập thành bốn điểm liên hợp điều hoà với nhau.

Trong hình 1 tứ giác toàn phần tạo bởi các đường thẳng BA, BF, CA, CE có đường chéo AD cắt các đường chéo EF, BC lần lượt tại I, J . Mệnh đề 1 nói trên khẳng định rằng $(ADIJ) = -1$, vậy chùm BA, BF, BI, BC là chùm điều hoà, do đó nếu gọi X, Y , lần lượt là giao điểm của BI với EC, AC thì $(EDXC) = (AFYC) = -1$.

Để chứng minh mệnh đề 1 ta có thể sử dụng kiến thức về chùm đường thẳng hoặc dùng phương pháp tọa độ. Xin dành việc chứng minh cho các bạn.

II. Mở rộng bài toán con bướm cho đường elip

Bài toán 1. Cho elip (E) và một đường thẳng d tùy ý. Một tiếp tuyến Δ song song với d và tiếp xúc với (E) tại J . Đường thẳng nối J với tâm đối xứng của (E) cắt d tại T . Qua T kẻ hai đường thẳng phân biệt cắt (E) lần lượt tại A, B và C, D sao cho AD và BC cắt d lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng T là trung điểm của PQ (h.2).

Trước khi trình bày lời giải bài toán này ta cần một số kiến thức sau, chi tiết hơn xin xem bài *Một số hệ thức liên hệ giữa đường thẳng và đường tròn* (THTT 6.2002).

Định nghĩa. Cho một đường conic (S) . Một đường thẳng qua hai điểm phân biệt M, N cắt (S) tại X, Y sao cho $(MNXY) = -1$ thì ta nói M, N liên hợp với nhau đối với conic (S) .

Bổ đề 1. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M(x_0; y_0)$, khi đó mọi điểm liên hợp với M đối với (E) đều thuộc đường thẳng $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Chứng minh. Gọi $N(x; y)$ là điểm liên hợp với M đối với (E) . MN cắt (E) tại hai điểm phân biệt X, Y có tọa độ $X(x_0 + t_1(x - x_0); y_0 + t_1(y - y_0))$,

$$Y(x_0 + t_2(x - x_0); y_0 + t_2(y - y_0)),$$

với $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{MY}} = \frac{t_1}{t_2},$$

$$\frac{\overline{NX}}{\overline{NY}} = \frac{t_1 - 1}{t_2 - 1},$$

$$(MNXY) = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{MX}}{\overline{MY}} : \frac{\overline{NX}}{\overline{NY}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} : \frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = -1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2t_1t_2.$$

$X, Y \in (E)$ nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình: $\frac{(x_0 + t(x - x_0))^2}{a^2} + \frac{(y_0 + t(y - y_0))^2}{b^2} = 1$.

Phương trình này viết lại thành

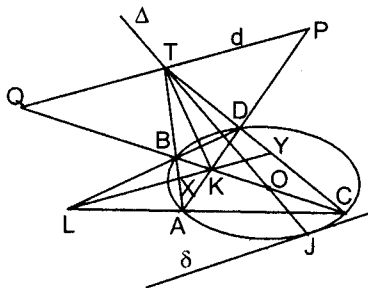
$$\left(\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right) t + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Áp dụng định lí Viète ta có

$$t_1 + t_2 = 2t_1t_2 \Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \text{ (đpcm)}.$$

Dựa vào bổ đề 1 trên ta có thể giải bài toán 1 như sau:

Chọn hệ trục tọa độ để (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi K là giao điểm của AD và BC , L là giao điểm BD và AC . Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của KL với



Hình 2

AB, CD . Xét tứ giác toàn phần tạo bởi TA, TC, LD, LC ; từ mệnh đề 1 suy ra $(TXBA) = (TYDC) = -1$. Vậy T liên hợp với X và T liên hợp với Y đối với (E) . Giả sử $T(x_0, y_0)$, theo bổ đề, KL có

$$\text{phương trình } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Vì J thuộc OT (đường thẳng Δ) nên $J(kx_0, ky_0)$ với $k \neq 0$. Gọi δ là tiếp tuyến với (E) tại J ; δ có phương trình

$$\frac{kx_0 x}{a^2} + \frac{ky_0 y}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $KL \parallel \delta$, do đó $KL \parallel d$.

Vì $(TXBA) = -1$ nên chùm xác định bởi KT, KX, KB, KA là chùm điều hoà. $d \parallel KL$ nên d bị KA, KB, KT chắn thành hai đoạn bằng nhau $TP = TQ$ (đpcm).

Mệnh đề 2. Cho (E) là một elip và d là đường thẳng cố định. Giả sử m là đường thẳng nào đó cùng phương với d và cắt (P) tại M, N . Khi đường thẳng m thay đổi (nhưng luôn cùng phương với d) thì trung điểm T của MN luôn thuộc một đường thẳng cố định Δ mà Δ đi qua tâm đối xứng của (E) .

Chứng minh. (h.3) Chọn hệ trục tọa độ để (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Giả sử d có phương trình $kx + hy = c$, suy ra m có phương trình $kx + hy = e$.

Nếu $h = 0$ thì T thuộc đường thẳng $x = 0$.

Nếu $h \neq 0$ thì phương trình xác định hoành độ giao điểm của m và (E) là

$$h^2 b^2 x^2 + a^2 (e - kx)^2 = h^2 a^2 b^2$$

$$\text{hay } (h^2 b^2 + a^2 k^2) x^2 - 2a^2 ekx + a^2 e^2 - h^2 a^2 b^2 = 0,$$

$$x_T = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{a^2 ek}{h^2 b^2 + a^2 k^2} =$$

$$= \frac{a^2 (kx_T + hy_T) k}{h^2 b^2 + a^2 k^2} \Rightarrow hb^2 x_T - a^2 ky_T = 0.$$

Vậy T thuộc đường thẳng Δ :

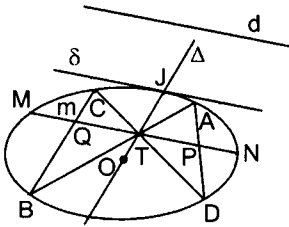
$$hb^2 x - a^2 ky = 0 \text{ (đpcm)}.$$

Nhận xét. Nếu tiếp tuyến δ song song với d mà δ tiếp xúc với (E) tại J thì J thuộc Δ .

Từ nhận xét trên ta có bài toán 2 (h.3) tương tự với bài toán con bướm. Đây là trường hợp riêng của bài toán 1.

Bài toán 2. (Bài toán con bướm elip). Cho elip (E) và hai điểm phân biệt M, N thuộc (E) .

Qua trung điểm T của MN kẻ hai đường thẳng phân biệt cắt (E) tại A, B và tại C, D theo thứ tự. Giả sử AD và BC cắt MN lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng T là trung điểm của PQ .

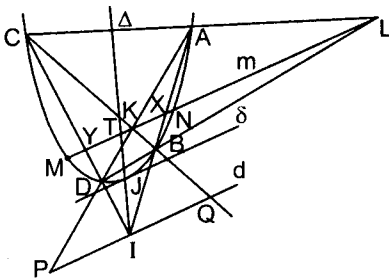


Hình 3

II. Mở rộng bài toán con bướm cho parabol

Tương tự Mệnh đề 2 bạn dễ dàng kiểm tra mệnh đề sau.

Mệnh đề 3. Cho (P) là một parabol và d là đường thẳng cố định. Giả sử m là đường thẳng nào đó cùng phương với d và cắt (P) tại M, N . Khi đường thẳng m thay đổi (nhưng luôn cùng phương với d) thì trung điểm T của MN luôn thuộc một đường thẳng cố định Δ mà Δ cùng phương với trục đối xứng của (P) .



Hình 4

Đường thẳng Δ trong mệnh đề 3 (h.4) gọi là đường kính của parabol (P) , liên hợp với phương d . Từ mệnh đề 3 ta có bài toán 3 (h.4) sau đây.

Bài toán 3. Cho parabol (P) và d là đường thẳng cố định. Δ là đường kính của parabol (P) liên hợp với phương d ; Δ cắt d tại I . Qua I kẻ hai đường thẳng phân biệt cắt (P) tại A, B và tại C, D theo thứ tự. Giả sử AD và BC cắt d lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng I là trung điểm của PQ .

Tương tự như bổ đề 1 của bài toán 1 bạn dễ dàng kiểm tra bổ đề sau.

Bổ đề 2. Cho parabol $(P) : y^2 = 2px$ và điểm $I(x_0; y_0)$; khi đó mọi điểm liên hợp với I đối với (P) đều thuộc đường thẳng

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Áp dụng mệnh đề 3 và bổ đề 2 trên bạn có thể giải bài toán 3 bằng cách lập luận hoàn toàn tương tự như lời giải bài toán 1. Khi d cắt (P) ta có bài toán 4 tương tự bài toán con bướm và là trường hợp riêng của bài toán 3.

Bài toán 4. (Bài toán con bướm parabol). Cho parabol (P) và hai điểm phân biệt M, N thuộc (P) . Qua trung điểm T của MN kẻ hai đường thẳng phân biệt cắt (P) tại A, B và tại C, D sao cho AD và BC cắt MN lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng T là trung điểm của PQ .

IV. Mở rộng bài toán con bướm cho hypebol

Bằng cách hoàn toàn tương tự như đối với elip bạn có thể giải bài toán sau đây.

Bài toán 5. Cho hypebol (H) và đường thẳng d tùy ý. Một tiếp tuyến song song với d và tiếp xúc với (H) tại J . Đường thẳng Δ nối J với tâm đối xứng của (H) cắt d tại T . Qua T kẻ hai đường thẳng phân biệt cắt (H) tại A, B và tại C, D sao cho AD và BC cắt (d) lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng T là trung điểm của PQ .

Bài toán 6. (Bài toán con bướm hypebol). Cho hypebol (H) và hai điểm phân biệt M, N thuộc (H). Qua trung điểm T của MN kẻ hai đường thẳng phân biệt cắt (H) tại A, B và tại C, D sao cho AD và BC cắt MN lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng T là trung điểm của PQ .

Trong các bài toán trên nếu thay các đường conic bằng một cặp đường thẳng ta cũng có những bài toán tương tự. Mời các bạn tiếp tục tìm hiểu. Cuối cùng chúc các bạn có nhiều thành công trong học tập.

HỢ TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

BÙI VĂN VIỆN

(GV trường THPT bán công Nguyễn Thái Bình, TP. Hồ Chí Minh)

Có nhiều cách tìm phương trình tiếp tuyến với đường tròn và toạ độ của tiếp điểm. Sau đây là một cách tương đối ngắn gọn.

Cho đường tròn (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Tiếp tuyến với (C) tại $M_o(x_o; y_o) \in (C)$ có dạng $(x-a)(x_o-a) + (y-b)(y_o-b) = R^2$.

$$\Leftrightarrow (x-a)\left(\frac{x_o-a}{R}\right) + (y-b)\left(\frac{y_o-b}{R}\right) = R.$$

Ta có $\left(\frac{x_o-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_o-b}{R}\right)^2 = 1$ vì $M_o \in (C)$.

Vì vậy có thể đặt $\frac{x_o-a}{R} = \cos\alpha, \frac{y_o-b}{R} = \sin\alpha$,

$\alpha \in [0, 2\pi)$ và mọi tiếp tuyến d_α của (C) có dạng $(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha - R = 0$.

Ta gọi các tiếp tuyến d_α với tham số α là họ tiếp tuyến của (C). Toạ độ tiếp điểm $M_o(x_o; y_o)$ của (C) với d_α là $x_o = a + R\cos\alpha$, $y_o = b + R\sin\alpha$.

Ta áp dụng phương pháp này để giải các bài toán dưới đây.

Bài toán 1. Cho đường tròn

$$(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua $A(3; 2)$. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Lời giải. Họ tiếp tuyến với (C) là d_α :

$$(x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0.$$

Do $A(3; 2) \in d_\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha + \sin\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 1 - 2\cos\alpha$, thay vào đẳng thức

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ được } (1-2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow 5\cos^2\alpha - 4\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \text{ hoặc } \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

• Nếu $\cos\alpha = 0$ thì $\sin\alpha = 1 \Rightarrow (d_\alpha): y - 2 = 0$ và tiếp điểm $E(x_o; y_o)$ có $x_o = 1 + \cos\alpha = 1$;

$$y_o = 1 + \sin\alpha = 2.$$

• Nếu $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ thì $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Vậy

$$(d_\alpha): \frac{4}{5}(x-1) - \frac{3}{5}(y-1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (d_\alpha): 4x - 3y - 6 = 0$$

và tiếp điểm $F(x_o, y_o)$ có $x_o = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$,

$$y_o = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Bài toán 2. Cho hai đường tròn

$$(C_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1,$$

$$(C_2): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

và (C_2) .

Lời giải. Họ tiếp tuyến của (C_1) là

$$(d_1): (x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0 \quad (1)$$

Họ tiếp tuyến của (C_2) là

$$(d_2) : (x - 2) \cos \beta + (y + 1) \sin \beta - 2 = 0 \quad (2)$$

Để tìm tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) , ta tìm α và β sao cho d_1 trùng d_2 (các bạn tự giải), suy ra $\alpha = \beta$ và ta có

$$[(x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\begin{cases} (x-2)\cos\alpha + (y+1)\sin\alpha - 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha = 1$ từ (3) vào (4) được $-\cos\alpha + 2\sin\alpha = 1$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -1 + 2 \sin \alpha \quad (5)$$

Thay vào đẳng thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 được $\sin^2 \alpha + (2\sin \alpha - 1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 5 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = 0 \text{ hoặc } \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

- Nếu $\sin \alpha = 0$ thì $\cos \alpha = -1 \Rightarrow (d_\alpha): x = 0$

- Nếu $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ thì $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Vay

$$(d_\alpha): 3(x-1) + 4(y-1) - 5 = 0.$$

$$\Rightarrow (d_{\alpha}) : 3x + 4y - 12 = 0.$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) với phương trình

$$x = 0 \text{ và } 3x + 4y - 12 = 0.$$

GIẢI ĐIỀU PARABOL

LÊ HỮU DŨNG (GV THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

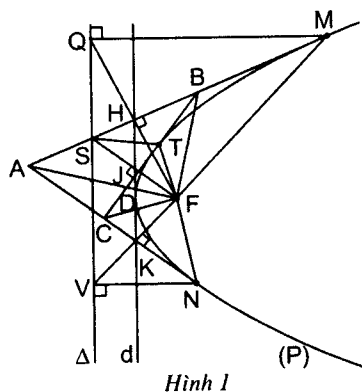
Bài toán 1. Từ điểm A ngoài parabol (P) vẽ các tiếp tuyến AM, AN (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng tiếp xúc với (P) tại T và cắt các tia AM, AN lần lượt tại B và C .

Chứng minh rằng

$$\frac{BM}{BA} = \frac{CA}{CN} = \frac{TB}{TC}.$$

Lời giải. Ta sử dụng tính chất tiếp tuyến của (P) :

Hình chiếu của tiêu điểm F của parabol lên một tiếp tuyến thì nằm trên tiếp tuyến d qua đỉnh của parabol.



(Ban đọc tự chứng minh tính chất này).

Xem hình 1.

Gọi F là tiêu điểm của parabol (P) . Gọi Q, S, V lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, T, N lên đường chuẩn Δ .

Theo tính chất tiếp tuyến thì $MA \perp FQ$ tại H , $TC \perp FS$ tại J , $NA \perp FV$ tại K và ba điểm H, J, K đều nằm trên tiếp tuyến d đi qua đỉnh D của parabol (P) . Từ đó từng bộ bốn điểm sau nằm trên đường tròn : (B, F, H, J) , (A, H, F, K) , (C, J, F, K) .

Áp dụng tính chất của các góc nội tiếp và các góc có cạnh tương ứng vuông góc ta có

$$\widehat{FMH} = \widehat{HMQ} = \widehat{SQF} = \widehat{JHF} = \widehat{FAK} = \widehat{JBF} \quad (1)$$

Tương tự có

$$\widehat{FTC} = \widehat{CTS} = \widehat{FSV} = \widehat{FJK} = \widehat{FCK} = \widehat{FBH}.$$

Từ đây suy ra $\widehat{FBM} = \widehat{FTB} = \widehat{FCA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle FBM \sim \triangle FTB$ nên $\frac{BM}{BF} = \frac{TB}{TF} = \frac{CA}{CF}$ (3). Tương tự $\triangle FBM \sim \triangle CTF$

$\sim \triangle NCF$ nên $\frac{BA}{BF} = \frac{TC}{TF} = \frac{CN}{CF}$ (4)

Từ (3) và (4) có $\frac{BM}{BA} = \frac{TB}{TC} = \frac{CA}{CN}$ (đpcm).

Bài toán 2. Với giả thiết như bài toán 1, một cát tuyến tùy ý qua A cắt (P) ở R, Q và cắt MN ở D. Chứng minh rằng (ADRQ) là một hàng điểm điều hoà (tức là $\frac{RA}{RD} = -\frac{QA}{QD}$, kí hiệu là $(ADRQ) = -1$).

Lời giải. Xem hình 2. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho phương trình của (P) là $y = ax^2$.

Phương trình đường thẳng AQ qua $A(x_0; y_0)$ là $y = k(x - x_0) + y_0$. Vì R, Q thuộc (P) và AQ nên x_R, x_Q là nghiệm của phương trình :

$$ax^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0 \quad (5)$$

Gọi E là điểm sao cho $(AERQ) = -1$

$$\Rightarrow AR.EQ = RE.AQ$$

$$\Rightarrow 2(x_0 x_E + x_R x_Q) = (x_0 + x_E).(x_R + x_Q)$$

$$\Rightarrow 2\left(x_0 x_E + \frac{kx_0 - y_0}{a}\right) = (x_0 + x_E) \frac{k}{a} \quad (\text{do (5)})$$

$$\Rightarrow k(x_E - x_0) = 2(ax_0 x_E - y_0) \quad (6)$$

Do E thuộc AQ nên $y_E = k(x_E - x_0) + y_0$.

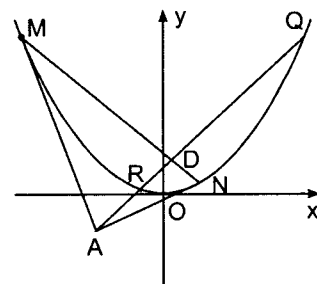
Từ đó và (6) có $y_E = 2ax_0 x_E - y_0$.

Vậy E thuộc đường thẳng $y = 2ax_0 x - y_0$ (7)

Để thấy điểm $M(x_M; y_M)$ nằm trên tiếp tuyến tại M, đi qua $A(x_0; y_0)$ nên tọa độ thỏa mãn (7). Tương tự, tọa độ $N(x_N; y_N)$ cũng thỏa mãn (7), nghĩa là đường thẳng (7) đi qua M, N. Do vậy E là giao điểm của MN và AQ, nghĩa là E phải trùng đối với D (đpcm).

Bình luận. Cuộc hoà tấu của bài toán 1 và bài toán 2 cho ta một giai điệu đẹp ngất :

$$\begin{cases} \frac{BM}{BA} = \frac{CA}{CN} = \frac{TB}{TC} \\ (ADRQ) = -1 \end{cases}$$



Hình 2

Xin tạm dịch hệ đẳng thức trên thành lời :

Ba dây hoà điệu nhịp nhàng.

Một dây, bốn ngón chạy hàng nốt hoa.

Áp dụng. Với giả thiết bài toán 1.

1) Chứng minh rằng :

a) Trục tâm của tam giác ABC thuộc đường chuẩn của (P).

b) Nếu A thuộc trục của (P) thì $AB + AC$ không đổi.

c) Nếu A chạy trên một đường thẳng không cắt (P) thì MN đi qua một điểm cố định.

2) Tìm quỹ tích tâm đường tròn nội tiếp tam giác CBF.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH PARABOL BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHÙM

PHẠM QUỐC PHONG (GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Viết phương trình parabol là bài toán quen thuộc, nhưng để có lời giải đơn giản lại là vấn đề khác.

Phương pháp đã trở thành lối mòn được áp dụng giải bài toán này là phương pháp hệ số bất định ba tham số như sau.

• Gọi parabol cần tìm là $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

• Từ các giả thiết của bài toán, thiết lập và giải hệ ba phương trình ba ẩn đối với a, b, c sẽ thu được parabol cần tìm.

Bài viết này trình bày cách viết parabol bằng phương pháp chùm parabol một tham số và sử dụng phương pháp chùm parabol để viết phương trình parabol thoả mãn một số điều kiện đã cho.

1. Chùm parabol

Các parabol xét ở bài này đều là parabol có trục đối xứng song song với trục tung, tức là các parabol có phương trình dạng

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

• **Định nghĩa.** Tập hợp các parabol cùng đi qua hai điểm A, B cố định gọi là *chùm parabol*.

Đường thẳng AB gọi là *trục của chùm parabol*.

• Phương trình của chùm parabol

Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là hai điểm thuộc đường thẳng $d: y = px + q$.

Dễ dàng kiểm nghiệm phương trình của chùm parabol qua A, B là

$$y = m(x - x_A)(x - x_B) + px + q \quad \text{với } m \neq 0.$$

• Trường hợp tổng quát khi $p \neq 0$ và $y_A \neq y_B$ thì chùm parabol được gọi là *chùm parabol lệch tung* (h.1).

• Khi $p = 0$ tức là $y_A = y_B$ và A khác B thì chùm parabol được gọi là *chùm parabol đẳng tung* (h.2) và phương trình của chùm có dạng

$$y = m(x - x_A)(x - x_B) + y_A, \quad (m \neq 0).$$

• Khi $p \neq 0$ và A trùng với B thì chùm parabol được gọi là *chùm parabol tiếp xúc*, với tiếp điểm $A(x_A; y_A)$ (h.3) và phương trình của chùm có dạng

$$y = m(x - x_A)^2 + px + q, \quad (m \neq 0).$$

• Khi $p = 0$ và A trùng với B thì chùm parabol được gọi là *chùm parabol chung đỉnh*

với đỉnh chung $A(x_A; y_A)$ (h.4) và phương trình của chùm có dạng

$$y = m(x - x_A)^2 + y_A \quad (m \neq 0).$$

2. Áp dụng

Thí dụ 1. Viết phương trình parabol (P) có đỉnh là $A(1; -2)$ và (P) chắn trên đường thẳng

$$d: y = x + 1 \text{ một dây cung } MN = \sqrt{34}.$$

Lời giải.

• Phương trình chùm parabol đỉnh $A(1; -2)$ là (P): $y = m(x - 1)^2 - 2 \quad (m \neq 0)$ (1)

• Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng d là $m(x - 1)^2 - 2 = x + 1$
 $\Leftrightarrow mx^2 - (2m + 1)x + m - 3 = 0$ (2)

Với $0 \neq m > -\frac{1}{16}$, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , đó là hoành độ giao điểm M, N của (P) và đường thẳng d .

• Từ (2) suy ra $(x_1 - x_2)^2 = \frac{\Delta}{m^2}$ với Δ là biệt thức.

• M, N thuộc đường thẳng d nên

$$y_1 - y_2 = x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow MN^2 = 2 \frac{\Delta}{m^2}. \text{ Do } MN = \sqrt{34} \text{ nên } \frac{2\Delta}{m^2} = 34$$

$$\Rightarrow 17m^2 - 16m - 1 = 0 \text{ có hai nghiệm } m = 1 \text{ và } m = -\frac{1}{17} \text{ đều thoả mãn } 0 \neq m > -\frac{1}{16}.$$

Thay các giá trị của m vừa tìm được vào (1), ta có hai phương trình parabol cần tìm là:

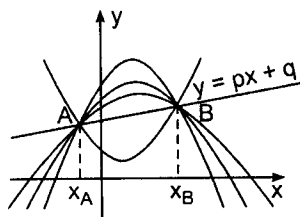
$$(P_1): y = x^2 - 2x - 1$$

$$(P_2): y = -\frac{1}{17}(x^2 - 2x - 35).$$

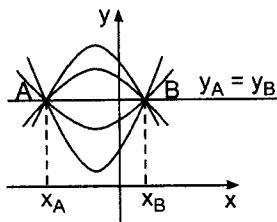
Thí dụ 2

Viết phương trình parabol (P) qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 9}{x - 1}$ (C) và (P) tiếp xúc với đường thẳng $d: 2x - y - 10 = 0$.

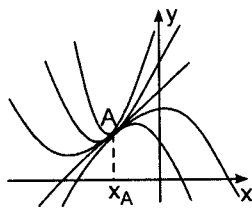
(Đại học An ninh, khối A, 1999)



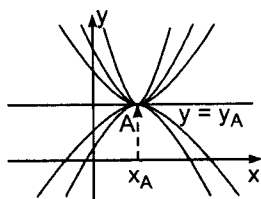
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Lời giải. Tọa độ các điểm cực trị là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - x + 9}{x - 1} \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 - x + 9 + (x^2 - 2x - 8)}{x - 1} \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Tọa độ điểm cực trị thỏa mãn phương trình

$$y = 2x - 1 + m(x^2 - 2x - 8) \quad (4)$$

Thấy rằng $x^2 - 2x - 8 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt, bởi thế (4) với $m \neq 0$ là phương trình chùm parabol đi qua các điểm cực trị của (C).

Parabol (P) tiếp xúc với đường thẳng d khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm kép :

$$2x - 1 + m(x^2 - 2x - 8) = 2x - 10$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx - 8m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1.$$

Thay $m = 1$ vào (4) ta có phương trình của parabol cần tìm là (P) : $y = x^2 - 9$.

Lời bình

• Bài toán không yêu cầu tìm điểm cực đại, cực tiểu. Lời giải trên đã tránh không tính cụ thể các yếu tố đó.

• Hệ phương trình $\begin{cases} y = \frac{x^2 - x + 9}{x - 1} \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases}$

được gọi là hệ đặc trưng của chùm parabol. Lúc này, ở hệ đặc trưng chưa xuất hiện phương trình

của trục. Phép biến đổi dẫn ra phương trình (3) để tìm trục của chùm parabol. Đó cũng là : Kỹ thuật viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm hữu tỉ và kỹ thuật chứng minh tính thẳng hàng của ba điểm uốn của đồ thị một số hàm phân thức.

Thí dụ 3

Viết phương trình parabol (P) qua điểm cực

đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$

và (P) tiếp xúc với đường thẳng $d : y = \frac{4}{3}$.

(Đại học Thái Nguyên, khối A + B, câu I
(1999 - 2000))

Lời giải. Tọa độ điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{3}x^2 - x + \frac{2}{3} \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{3} - x + \frac{2}{3} \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Tọa độ điểm cực trị thỏa mãn phương trình

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + m(x^2 - 1), m \neq 0 \quad (5)$$

Hiển nhiên phương trình $x^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và (5) là phương trình chùm parabol (P) đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Parabol (P) tiếp xúc với đường thẳng d khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm kép

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + m(x^2 - 1) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Thay $m = -\frac{1}{3}$ vào (5) ta có phương trình parabol phải tìm là $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x + 1$.

Thí dụ 4. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$.

1) Chứng minh rằng đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

2) Viết phương trình parabol (P) đi qua ba điểm cực trị ấy.

Lời giải.

• Lấy đạo hàm $y' = 4(x^3 - 3x + 1)$, gọi $h(x) = x^3 - 3x + 1$.

Để ý rằng $h(-2) = -1 < 0$; $h(-1) = 1 > 0$;

$h(1) = -1 < 0$; $h(2) = 3 > 0$ suy ra $y' = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thoả mãn

$$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$

nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

• Toạ độ các điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6 \\ x^3 = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x(3x - 1) - 6x^2 + 4x + 6 \\ x^3 = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x^2 + 3x + 6 \\ x^3 = 3x - 1. \end{cases}$$

Toạ độ các điểm cực trị thoả mãn phương trình $y = -3x^2 + 3x + 6$, đây là phương trình parabol (P) đi qua ba điểm cực trị hàm số đã cho.

3. Các bài luyện tập

Bài 1. Viết phương trình parabol (P), biết rằng (P) cắt hypebol (H) : $y = \frac{1}{x-4}$ tại các điểm có hoành độ nghiệm đúng phương trình $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$.

Bài 2.

Viết phương trình parabol đi qua điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ và tiếp xúc với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$.

(Đại học An ninh khối A, 1998)

Bài 3.

Viết phương trình của parabol đi qua các điểm $A(-\sqrt{3}; 0)$, $B(\sqrt{3}; 0)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x$.

(Học viện KTQS, 1998)

Bài 4.

Chứng minh đồ thị $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ có ba điểm uốn thẳng hàng.

(Đại học Y khoa Hà Nội, 1999)

ĐI TÌM MỘT LỜI GIẢI ĐẸP

CAO TRUNG CHINH

(GV THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình)

Trong sách *Hình học lớp 12*, NXBGD, 1992 của các tác giả Văn Như Cương, Tạ Mân, Trần Nguyệt Quang, có bài toán đáng chú ý (Bài tập 11 trang 65).

Bài toán 1. *Tìm điều kiện cần và đủ để đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ là tiếp tuyến*

của elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Cách giải 1. Thông thường, bài toán 1 được giải theo trình tự sau :

• Đường thẳng d và (E) tiếp xúc $\Leftrightarrow$ Hệ PT sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & (2) \end{cases}$$

• Vì $A^2 + B^2 \neq 0$ nên $A \neq 0$ hoặc $B \neq 0$.

Nếu $A \neq 0$ thì từ (1) suy ra : $x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}$ (3)

Nếu $B \neq 0$ thì từ (1) suy ra : $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$ (4)

Sau đó, tùy vào việc $A \neq 0$ hay $B \neq 0$ mà thế (3) hay (4) vào (2) nhằm chuyển bài toán tìm điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thành bài toán tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm kép.

Cuối cùng, ta có kết quả : d là tiếp tuyến của $(E) \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$.

Mặc dù, trong bài toán 1, vai trò của x, y là bình đẳng nhưng sự bình đẳng này không được xem xét một cách đầy đủ trong suốt quá trình giải. Vì vậy, theo hướng giải trên, ta nhận được một lời giải đúng nhưng không đẹp.

Để khắc phục tình trạng này, tôi xin đưa ra một lời giải mới cho bài toán 1. Hi vọng rằng lời giải này phần nào thoả mãn được mỹ cảm toán học của các bạn.

Cách giải 2. d là tiếp tuyến của (E)

$\Leftrightarrow$ Hệ PT sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} Ax + Bx + C = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aA\left(\frac{x}{a}\right) + bB\left(\frac{y}{b}\right) + C = 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Đặt $X = \frac{x}{a}$ và $Y = \frac{y}{b}$ thì hệ phương trình

sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} aAX + bBY + C = 0 & (\Delta) \\ X^2 + Y^2 = 1 & (T) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng Δ và đường tròn (T) tiếp xúc

$\Leftrightarrow$ Khoảng cách từ điểm gốc $O(0; 0)$ đến đường thẳng Δ bằng 1

$$\Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}} = 1 \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2.$$

Bài toán 1 đã được giải quyết với một lời giải hoàn toàn mới. Trong lời giải này, sự bình đẳng của x và y được duy trì trong suốt quá trình giải.

Việc đặt ẩn mới $X = \frac{x}{a}$ và $Y = \frac{y}{b}$ đã chuyển bài toán xét tiếp tuyến của elip về xét tiếp tuyến của đường tròn. Với cách tiếp cận trên, bạn cũng sẽ tìm được một lời giải đẹp cho bài toán tương tự sau.

Bài toán 2. *Tìm điều kiện cần và đủ để đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ là tiếp tuyến*

hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Chúc các bạn thành công.

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT CÔNÍC ĐẾN MỘT LOẠI ĐƯỜNG THẲNG

TRẦN VĂN MINH (TP. Hồ Chí Minh)

Bài toán khoảng cách giữa một đường côníc với một đường thẳng là một bài toán thông thường của lớp 12 mà học sinh thường gặp trong các kì thi. Để các bạn học sinh có thể giải bài toán này một cách thuận lợi tôi xin nêu cách tìm khoảng cách từ một côníc đến một loại đường thẳng có phương trình $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 = 1$ và $C > 0$. Ta gọi đó là đường thẳng loại I. Nếu $C < 0$ thì chỉ việc đổi dấu cả A và B .

Bài toán 1. (Khoảng cách từ một elip đến đường thẳng loại I)

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a > 0, b > 0.$$

và đường thẳng

$$\Delta: Ax + By + C = 0 \text{ với } A^2 + B^2 = 1 \text{ và } C > 0.$$

1) Tìm điều kiện để Δ và (E) không có điểm chung).

2) Giả sử M thuộc (E), gọi MH là khoảng cách từ M đến Δ . Trong trường hợp Δ và (E) không có điểm chung, tìm tọa độ của điểm M sao cho :

a) MH là ngắn nhất.

b) MH là dài nhất.

Lời giải. • Bạn đọc tự chứng minh được kết quả sau đây bằng phương pháp thông thường :

Đường thẳng Δ và (E) không có điểm chung khi và chỉ khi $a^2 A^2 + b^2 B^2 < C^2$.

• Giả sử $M(x; y)$ thuộc (E).

Do $A^2 + B^2 = 1$ suy ra khoảng cách từ M đến Δ là

$$MH = |Ax + By + C|$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, suy ra :

$$|C - |Ax + By|| \leq MH \leq C + |Ax + By| \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz đối

với $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ và aA, bB ta có

$$|Ax + By| \leq \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} 0 \leq C - \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2} &\leq MH \\ &\leq C + \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Dấu bằng ở (3) xảy ra khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \frac{b}{a} Bx = \frac{a}{b} Ay \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này được hai nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a^2 A}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}} \\ y_1 = \frac{b^2 B}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2 = -\frac{a^2 A}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}} \\ y_2 = -\frac{b^2 B}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}} \end{cases}$$

Thử lại với $M_1(x_1; y_1)$ ta có

$$M_1 H = C + \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}.$$

Từ (3) suy ra

$$\text{Max } MH = C + \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}.$$

Tương tự với $M_2(x_2; y_2)$ ta có

$$M_2 H = C - \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}. \text{ Từ (3) suy ra}$$

$$\text{Min } MH = C - \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}.$$

Vậy MH ngắn nhất khi M trùng với $M_2(x_2; y_2)$.

MH dài nhất khi M trùng với $M_1(x_1; y_1)$.

Bài toán 2. (Khoảng cách từ một parabol đến đường thẳng loại I)

Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng

$$\Delta: Ax + By + C = 0 \text{ với } A^2 + B^2 = 1 \text{ và } C > 0.$$

1) Tìm điều kiện để (P) và Δ không có điểm chung.

2) Trong trường hợp Δ và (P) không có điểm chung, tìm điểm M thuộc (P) sao cho khoảng cách từ M đến Δ là ngắn nhất.

• Bạn đọc có thể chứng minh kết quả sau đây bằng phương pháp thông thường :

Đường thẳng Δ và (P) không có điểm chung khi và chỉ khi

$$\begin{cases} pB^2 - 2AC < 0 \\ A \neq 0. \end{cases}$$

• Giả sử MH là khoảng cách từ $M(x; y)$ thuộc (P) đến đường thẳng Δ . Do $A^2 + B^2 = 1$ thì $MH = |Ax + By + C|$

$$= \frac{|A|}{2p} \left| \left(y + \frac{B}{A}p \right)^2 + \frac{2pAC - B^2p^2}{A^2} \right|$$

$$\Rightarrow MH \geq \frac{|A|}{2p} \frac{|2pAC - B^2p^2|}{A^2} = \frac{2AC - pB^2}{2|A|} \quad (4)$$

Dấu bằng ở (4) xảy ra khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm.

$$\begin{cases} y = -\frac{Bp}{A} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{pB^2}{2A^2} \\ y = -\frac{B}{A}p. \end{cases}$$

Hệ trên có một nghiệm.

Vậy MH đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

$$M\left(\frac{pB^2}{2A^2}; -\frac{B}{A}p\right), \text{ lúc đó } MH = \frac{2AC - pB^2}{2|A|}.$$

Nhận xét. Ta không tìm $\max MH$, vì M có thể ra xa vô tận trên (P).

Bài toán 3. (Khoảng cách từ một hypebol đến đường thẳng loại I)

Trong mặt phẳng Oxy cho hypebol

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

và đường thẳng

$$\Delta: Ax + By + C = 0 \text{ với } A^2 + B^2 = 1 \text{ và } C > 0.$$

1) Tìm điều kiện để Δ và (H) không có điểm chung.

2) Trong trường hợp Δ và (H) không có điểm chung, tìm điểm M thuộc (H) sao cho khoảng cách từ M đến Δ là ngắn nhất.

• Bạn đọc chứng minh dễ dàng bằng phép biến đổi thông thường :

Đường thẳng Δ và (H) không có điểm chung khi và chỉ khi $a^2A^2 - b^2B^2 > C^2$.

• Cho bốn số thực a, b, x, y thoả mãn

$$(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \geq 0 \text{ ta có bất đẳng thức}$$

$$|ax + by| \geq \sqrt{(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)} \quad (5)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ay = -bx$. Ta gọi (5) là bất đẳng thức giả - Schwarz.

• Giả sử $M(x; y)$ thuộc (H). Do $A^2 + B^2 = 1$, gọi khoảng cách từ M đến Δ là MK thì

$$MK = |Ax + By + C|.$$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$MK \geq \|Ax + By\| - \|C\| = \|Ax + By\| - C|.$$

Áp dụng bất đẳng thức giả - Schwarz với

$$Aa, Bb \text{ và } \frac{x}{a}, \frac{y}{b} \text{ ta có}$$

$$|Ax + By| \geq \sqrt{(a^2A^2 - b^2B^2) \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)} = \sqrt{a^2A^2 - b^2B^2} \geq C.$$

$$\text{Do đó } MK \geq \sqrt{a^2A^2 - b^2B^2} - C \quad (6)$$

Dấu bằng xảy ra ở (6) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} A\frac{a}{b}y = -\frac{Bb}{a}x \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này được hai nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-Aa^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}} \\ y_1 = \frac{Bb^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2 = \frac{Aa^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}} \\ y_2 = \frac{-Bb^2}{\sqrt{a^2A^2 - b^2B^2}}. \end{cases}$$

Thử lại hai nghiệm này ta thấy dấu bằng chỉ xảy ra ở (6) khi M trùng với $M_2(x_2; y_2)$. Vậy MK ngắn nhất khi M trùng với $M_2(x_2; y_2)$, và lúc đó $MK = \sqrt{a^2A^2 - b^2B^2} - C$.

Nhận xét. Ta không tìm min MK , vì điểm M có thể ra xa vô tận trên (H) .

PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG CÔNIC

NGUYỄN ĐẠO PHƯƠNG (Hà Nội)

Các bạn đã được làm quen với các đường conic qua sách giáo khoa.

Trong bài viết này xin giới thiệu một tính chất khác của ba đường conic đã được các nhà toán học nghiên cứu và ứng dụng. Đó là phương tích của một điểm đối với một đường conic. Ta đã biết khi tâm sai e của ba đường conic tiến tới 0 thì các đường này suy biến về một đường tròn. Đối với đường tròn $(\mathcal{C})$ tâm O bán kính R , một đường thẳng (chuyển động) Δ luôn đi qua một điểm cố định M , cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm A, B thì phương tích của điểm M đối với $(\mathcal{C})$ được xác định là :

$$\mathcal{A}(M/\mathcal{C}) = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MO}^2 - R^2 \text{ (không đổi).}$$

$\mathcal{A}(M/\mathcal{C})$ là một đại lượng đại số, có giá trị dương hoặc âm hoặc bằng không tùy theo điểm M nằm ngoài, nằm trong, hoặc ở trên $(\mathcal{C})$.

Vậy trong trường hợp tổng quát, liệu đối với đường conic (Γ) có xác định được *phương tích của một điểm cố định M đối với (Γ)* hay không, để đại lượng đó là không đổi đối với M và (Γ) đã chọn ?

I. Phương tích của một điểm đối với một đường conic

Trên mặt phẳng cho đường conic (Γ) , tiêu điểm F , đường chuẩn d ứng với F (chẳng hạn xem parabol trên hình 1), Δ là một đường thẳng (chuyển động) luôn qua một điểm cố định M , cắt (Γ) tại A và B , hợp với trục tiêu của conic góc α với $0 \leq \alpha \leq \pi$ (trục tiêu là đường thẳng qua F vuông góc với d). Phương tích của điểm M đối với conic (Γ) được xác định là

$$\mathcal{P}(M/\Gamma) = \overline{MA} \cdot \overline{MB} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)$$

trong đó e là tâm sai của conic.

Trong phần tiếp theo ta sẽ chứng minh với M và (Γ) đã cho và H là hình chiếu vuông góc của M trên d thì

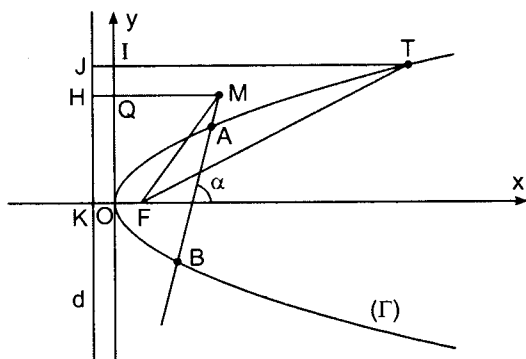
$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} (1 - e^2 \cos^2 \alpha) = \overline{MF}^2 - e^2 \overline{MH}^2$$

nên đại lượng $\mathcal{A}(M/\Gamma)$ không đổi.

II. Phương trình của conic đối với tiêu điểm và đường chuẩn

Trên mặt phẳng cho điểm F cố định và đường thẳng d cố định không qua F , ta tìm quỹ

tích các điểm T sao cho tỉ số khoảng cách từ T đến F và từ T đến d bằng một số dương không đổi e .



Hình 1

Gọi J là hình chiếu vuông góc của T trên d và TJ cắt Oy tại I . Ta tìm quỹ tích của T sao cho $\frac{TF}{TJ} = e$ ($e > 0$, không đổi). Gọi K là hình chiếu của F trên d . Đặt $KF = p$. Chọn điểm O trên đường thẳng KF sao cho $\frac{OF}{OK} = -e$ (như vậy O là điểm thuộc quỹ tích vì $\frac{OF}{OK} = e$).

Lập hệ trục tọa độ vuông góc Đề các Oxy , trục hoành Ox chứa KF , chiều dương từ K đến F , trục tung Oy vuông góc với Ox tại O (h.1).

Từ $\frac{OF}{OK} = -e$ ta được $\overline{OF} = \frac{pe}{1+e}$ và $\overline{OK} = \frac{-p}{1+e}$. Toạ độ của F là $F\left(\frac{pe}{1+e}; 0\right)$, toạ độ của K là $K\left(\frac{-p}{1+e}; 0\right)$. Gọi toạ độ của điểm T là $T(x; y)$, ta có $\overline{TJ} = \overline{TI} + \overline{IJ} = \overline{TI} + \overline{OK} = -\left(x + \frac{p}{1+e}\right)$ và $\overline{TF}^2 = \left(x - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y^2$.

Từ $\frac{TF}{TJ} = e$ ta được

$$TF^2 = e^2 TJ^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{p}{1+e}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0 \quad (1)$$

Ta được (1) là phương trình quỹ tích của T .

a) Nếu $e = 1$ thì phương trình (1) trở thành $y^2 = 2px$, quỹ tích là một parabol.

b) Xét $0 < e \neq 1$.

Tính tiến hệ trục toạ độ Oxy , lấy $Q\left(\frac{pe}{1-e^2}; 0\right)$ làm gốc hệ trục mới QXY thì công thức tính tiến hệ trục là :

$$\begin{cases} x = X + \frac{pe}{1-e^2} \\ y = Y. \end{cases}$$

Lúc đó (1) trở thành

$$(1-e^2)X^2 + (1-e^2)Y^2 = p^2 e^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\frac{p^2 e^2}{1-e^2}} = 1 \quad (2)$$

Với hệ trục toạ độ QXY ta thấy :

• Nếu $0 < e < 1$ thì (2) là phương trình chính tắc của một elip.

• Nếu $e > 1$ thì (2) là phương trình chính tắc của một hypebol.

Do đó (1), (2) được gọi chung là phương trình của ba đường conic (Γ) theo tâm sai e và tham số tiêu p .

III. Giá trị của $\mathcal{P}(M/\Gamma)$

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (\cos \alpha; \sin \alpha)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$$

với $t \in \mathbb{R}$ là tham số.

Giả sử điểm N chạy trên Δ , xét $\overline{MN} = t$ (tham số). Khi N ở A đặt $\overline{MA} = t_A$, khi N ở B đặt $\overline{MB} = t_B$.

Toạ độ của A và B là nghiệm của hệ phương trình

$$(\Gamma) : (1-e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (2)$$

Thay giá trị của x, y từ hệ phương trình (2) của Δ vào phương trình (1) của (Γ) ta được phương trình bậc hai (ẩn t) là

$$(1 - e^2 \cos^2 \alpha)t^2 + 2[(1 - e^2)(x_0 \cos \alpha - p \cos \alpha) + y_0 \sin \alpha]t + (1 - e^2)x_0^2 - 2pex_0 + y_0^2 = 0 \quad (3)$$

Vì theo giả thiết Δ cắt (Γ) tại hai điểm A, B nên phương trình (3) có hai nghiệm t_A, t_B .

Theo định lý Viète được

$$t_A \cdot t_B = \frac{(1 - e^2)x_0^2 - 2pex_0 + y_0^2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha}.$$

Do đó

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2 \cos^2 \alpha) = (1 - e^2)x_0^2 - 2pex_0 + y_0^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \mathcal{P}(M/\Gamma) &= \overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2 \cos^2 \alpha) \\ &= (1 - e^2)x_0^2 - 2pex_0 + y_0^2. \end{aligned}$$

Bạn đọc để ý rằng kết quả này tương tự với phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với đường tròn $(\mathcal{C})$ khi thay x bởi x_0 và thay y bởi y_0 .

$$\begin{aligned} \text{Với } (\mathcal{C}): x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C &= 0 \\ (A^2 + B^2 - C > 0) \end{aligned}$$

$$\text{ta có } \mathcal{P}(M/\Gamma) = x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C$$

Bây giờ ta chứng minh

$$\mathcal{P}(M/\Gamma) = \overline{MF}^2 - e^2 \overline{MH}^2 \text{ (không đổi).}$$

Gọi Q là giao điểm của MH với trục Oy . Ta có $\overline{MH} = \overline{MQ} + \overline{QH} = -x_0 + \overline{OK} = -x - \frac{p}{1+e}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \overline{MF}^2 - e^2 \overline{MH}^2 &= \\ &= \left(x_0 - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y_0^2 - e^2 \left(x + \frac{p}{1+e}\right)^2 \\ &= (1 - e^2)x_0^2 - 2pex_0 + y_0^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \mathcal{P}(M/\Gamma) &= \overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2 \cos^2 \alpha) = \overline{MF}^2 - e^2 \overline{MH}^2 \\ &= (1 - e^2)x_0^2 - 2pex_0 + y_0^2 \end{aligned} \quad (4)$$

IV. Một vài ứng dụng

Bài 1. Bài toán về tứ giác nội tiếp

Cho cônica (Γ) . Qua một điểm M kẻ hai cát tuyến phân biệt Δ_1 và Δ_2 . Δ_1 và Δ_2 hợp với trục

tiêu OF các góc α_1, α_2 theo thứ tự. Đường thẳng Δ_1 cắt đường cônica (Γ) tại A, B và đường thẳng Δ_2 cắt (Γ) tại C, D . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn là $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$, hay là Δ_1 và Δ_2 nghiêng đều trên trục tiêu (h_2) .

Lời giải. Phương tích của giao điểm M đối với (Γ) theo (4) là :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M/\Gamma) &= \overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2 \cos^2 \alpha_1) \\ &= \overline{MC} \cdot \overline{MD}(1 - e^2 \cos^2 \alpha_2) \end{aligned} \quad (5)$$

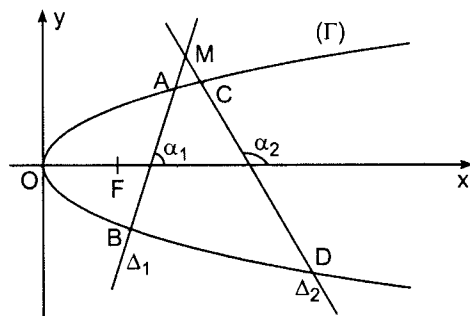
Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ (6)

• Nếu có (6) thay vào (5) được

$$\cos^2 \alpha_1 = \cos^2 \alpha_2.$$

Từ đó ta được $\alpha_1 = \alpha_2$ hoặc $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$. Loại bỏ trường hợp $\alpha_1 = \alpha_2$ ta được $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$.

• Điều ngược lại cũng đúng khi thay $\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2$ vào (5) để suy ra (6).



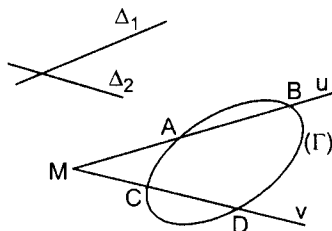
Hình 2

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi Δ_1, Δ_2 nghiêng đều trên trục tiêu.

Bài 2. Bài toán Newton

Cho cônica (Γ) và hai đường thẳng cắt nhau Δ_1, Δ_2 . Một góc uMv nào đó có $Mu \parallel \Delta_1$ và $Mv \parallel \Delta_2$, cạnh Mu cắt (Γ) tại A, B và cạnh Mv cắt (Γ) tại C, D . Chứng minh rằng $\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}}$ là không đổi khi góc uMv di động.

Lời giải. Δ_1 và Δ_2 theo thứ tự hợp với trục tiêu các góc α_1 và α_2 không đổi (h.3).



Hình 3

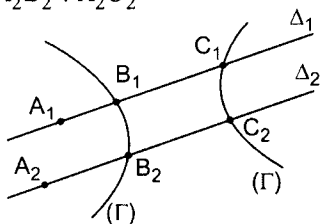
Theo (4) ta có :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(M/\Gamma) &= \overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2 \cos^2 \alpha_1) \\ &= \overline{MC} \cdot \overline{MD}(1 - e^2 \cos^2 \alpha_2).\end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \alpha_2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha_1} \text{ là không đổi.}$$

Bài 3. Bài toán Mac-Laurin. Cho conic (Γ) và hai điểm cố định A_1, A_2 . Qua A_1 vẽ đường thẳng Δ_1 nào đó và qua A_2 vẽ đường thẳng Δ_2 sao cho $\Delta_2 \parallel \Delta_1$. Đường thẳng Δ_1 cắt (Γ) tại B_1, C_1 và đường thẳng Δ_2 cắt (Γ) tại B_2, C_2 . Chứng minh rằng $\frac{\overline{A_1 B_2} \cdot \overline{A_1 C_1}}{\overline{A_2 B_2} \cdot \overline{A_2 C_2}}$ là không đổi khi Δ_1 di động.



Hình 4

Lời giải. Δ_1, Δ_2 cùng hợp với trục tiêu góc α (h.4).

Theo (4) ta có :

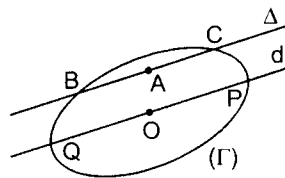
$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A_1/\Gamma) &= \overline{A_1 B_1} \cdot \overline{A_1 C_1}(1 - e^2 \cos^2 \alpha) \\ \mathcal{P}(A_2/\Gamma) &= \overline{A_2 B_2} \cdot \overline{A_2 C_2}(1 - e^2 \cos^2 \alpha)\end{aligned}$$

Vì $\mathcal{P}(A_1/\Gamma)$ và $\mathcal{P}(A_2/\Gamma)$ là các số không đổi nên $\frac{\overline{A_1 B_1} \cdot \overline{A_1 C_1}(1 - e^2 \cos^2 \alpha)}{\overline{A_2 B_2} \cdot \overline{A_2 C_2}(1 - e^2 \cos^2 \alpha)}$ là không đổi.

do đó $\frac{\overline{A_1 B_1} \cdot \overline{A_1 C_1}}{\overline{A_2 B_2} \cdot \overline{A_2 C_2}}$ là không đổi.

Bài 4. Bài toán C.Michel - Clifford.

Cho conic (Γ) có tâm là O ; A là một điểm cố định. Một đường thẳng Δ nào đó đi qua A cắt (Γ) tại B, C . Vẽ đường kính d của (Γ) (đi qua O) song song với Δ và cắt (Γ) ở P, Q . Chứng minh $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{OP^2}$ là không đổi khi Δ di động.



Hình 5

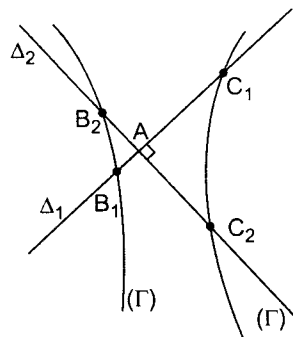
Lời giải. Δ và d cùng hợp với trục tiêu góc α (h.5). Theo (4) ta có :

$$\mathcal{P}(A/\Gamma) = \overline{AB} \cdot \overline{AC}(1 - e^2 \cos^2 \alpha).$$

$$\mathcal{P}(O/\Gamma) = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}(1 - e^2 \cos^2 \alpha).$$

$$\text{Do đó } \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{OP^2} = -\frac{\mathcal{P}(A/\Gamma)}{\mathcal{P}(O/\Gamma)} \text{ là không đổi.}$$

Bài 5. Bài toán Michel. Cho conic (Γ) tâm O , không phải là hypebol vuông góc và A là một điểm cố định. Qua A vẽ đường thẳng Δ_1 nào đó cắt (Γ) tại B_1, C_1 . Vẽ đường thẳng Δ_2 đi qua A và vuông góc với Δ_1 ; Δ_2 cắt (Γ) tại B_2, C_2 . Chứng minh rằng $\frac{1}{\overline{AB_1} \cdot \overline{AC_1}} + \frac{1}{\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2}}$ là không đổi khi Δ_1 di động.



Hình 6

$\frac{1}{\overline{AB_1} \cdot \overline{AC_1}} + \frac{1}{\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2}}$ là không đổi khi Δ_1 di động.

Lời giải

$$\text{Ta có } \mathcal{P}(A/\Gamma) = \overline{AB_1} \cdot \overline{AC_1}(1 - e^2 \cos^2 \alpha) \quad (7)$$

với α là góc hợp bởi Δ_1 và trục tiêu (h.6).

Do $\Delta_1 \perp \Delta_2$ nên Δ_2 hợp với trục tiêu góc

$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Theo (4) ta có

$$\mathcal{P}(A/\Gamma) = \overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2}(1 - e^2 \sin^2 \alpha) \quad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra

$$\frac{1}{AB_1 \cdot AC_1} + \frac{1}{AB_2 \cdot AC_2} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \alpha + 1 - e^2 \sin^2 \alpha}{\mathcal{P}(A/\Gamma)} = \frac{2 - e^2}{\mathcal{P}(A/\Gamma)}$$

là không đổi.

Ta được điều phải chứng minh với điều kiện $e \neq \sqrt{2}$ tức (Γ) không phải là hypebol vuông góc.

ĐƯỜNG CÔNIC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG CÔNIC

NGUYỄN ĐẠO PHƯƠNG (Hà Nội)

Trong tạp chí THPT số 248 (2.1998) đã trình bày về phương tích của một điểm đối với một đường conic. Tiếp nối điều trên bài báo này nghiên cứu vấn đề : Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường conic là đường gì ?

I. Đường conic đẳng phương của hai đường conic

1) Phương tích của một điểm đối với đường conic

Ta đã biết trên mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy , phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với đường conic

$$(\Gamma) : (1 - e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0 \text{ là}$$

$$\mathcal{P}(M/\Gamma) = (1 - e^2)x_0^2 - 2pex_0 + y_0^2$$

trong đó e là tâm sai của conic (Γ) và tham số tiêu p là khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường chuẩn.

Nếu tịnh tiến rồi quay hệ trục Oxy một góc nào đó dẫn đến hệ trục tọa độ mới QXY mà điểm M có tọa độ mới $M(X_0; Y_0)$, đường (Γ) với phương trình $\Gamma(x; y) = 0$ có phương trình mới $\Gamma(X; Y) = 0$ là

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

và phương tích của điểm $M(X_0; Y_0)$ đối với $\Gamma(X; Y) = 0$ sẽ là

$$\mathcal{A}M/\Gamma = AX_0^2 + 2BX_0Y_0 + CY_0^2 + 2DX_0 + 2EY_0 + F.$$

Do đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy , phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với đường conic (dạng tổng quát)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \text{ là}$$

$$\mathcal{P}(M/\Gamma) = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Chú ý rằng hệ thức này đúng với cả đường tròn.

2) Đường conic đẳng phương của hai đường conic

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường conic :

$$(\Gamma_1) : A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

$$(\Gamma_2) : A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2 = 0.$$

Ta tìm tập hợp các điểm $M(x_0; y_0)$ có cùng phương tích đối với Γ_1 và Γ_2 , nghĩa là

$$\mathcal{P}(M/\Gamma_1) = \mathcal{P}(M/\Gamma_2)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_1(x_0; y_0) = \Gamma_2(x_0; y_0)$$

hay là

$$(A_1 - A_2)x_0^2 + 2(B_1 - B_2)x_0y_0 + (C_1 - C_2)y_0^2 + 2(D_1 - D_2)x_0 + 2(E_1 - E_2)y_0 + F_1 - F_2 = 0.$$

Đặt $A_3 = A_1 - A_2$, $B_3 = B_1 - B_2$, $C_3 = C_1 - C_2$, $D_3 = D_1 - D_2$, $E_3 = E_1 - E_2$, $F_3 = F_1 - F_2$ ta được $A_3x_0^2 + 2B_3x_0y_0 + C_3y_0^2 + 2D_3x_0 + 2E_3y_0 + F_3 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường conic (Γ_3) có phương trình

$$A_3x^2 + 2B_3xy + C_3y^2 + 2D_3x + 2E_3y + F_3 = 0 \quad (1)$$

với các hệ số

$$A_3 = A_1 - A_2, B_3 = B_1 - B_2, C_3 = C_1 - C_2,$$

$D_3 = D_1 - D_2, E_3 = E_1 - E_2, F_3 = F_1 - F_2$ và gọi là đường conic đẳng phương của hai đường conic Γ_1, Γ_2 .

Khi biểu diễn hình học đường conic đẳng phương (cũng là biểu diễn hình học đường bậc hai có phương trình (1)), ta sẽ được một trong ba đường conic : elip, hypebol, parabol hoặc một đường tròn, một điểm, một cặp đường thẳng trùng nhau, song song hoặc cắt nhau, hoặc các đường ảo^(*).

II. Một số thí dụ

1. Cho hai đường conic

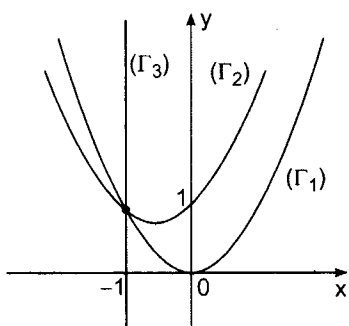
$$(\Gamma_1) : x^2 - y = 0$$

$$(\Gamma_2) : x^2 + x + 1 - y = 0.$$

Đường conic đẳng phương của chúng là

$$(\Gamma_3) : x + 1 = 0.$$

Đó là một đường thẳng (h.1).



Hình 1

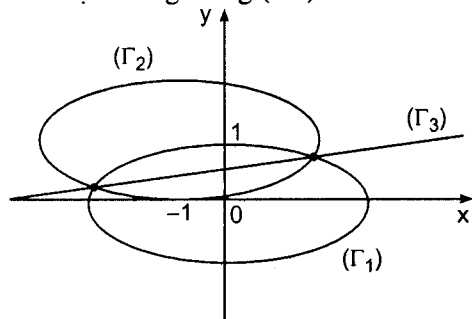
2. Cho hai đường conic $(\Gamma_1) : x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

$$(\Gamma_2) : x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0.$$

Đường conic đẳng phương của chúng là :

$$(\Gamma_3) : 2x - 8y + 5 = 0$$

Đó là một đường thẳng (h.2).



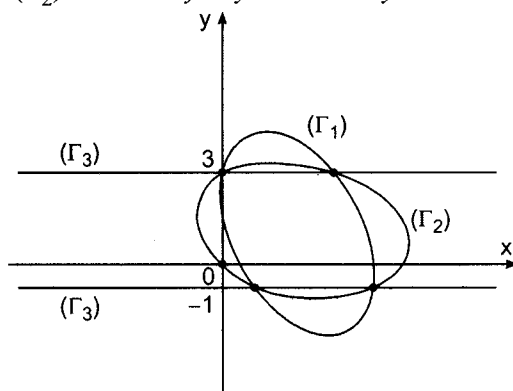
Hình 2

^(*) Về biểu diễn hình học một đường bậc hai, bạn đọc có thể tìm thấy trong cuốn sách "Hình học cao cấp", tập I, giáo sư Nguyễn Đình Trí chủ biên hoặc trong cuốn sách "Tuyển chọn các bài toán về ba đường conic" của các tác giả Nguyễn Đạo Phương và Phan Huy Khải.

3. Cho hai đường conic

$$(\Gamma_1) : 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$$

$$(\Gamma_2) : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 24x - 24y = 0$$



Hình 3

Đường conic đẳng phương của chúng là :

$$(\Gamma_3) : 6y^2 - 12y - 18 = 0$$

$$\Gamma_3(x; y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3. \end{cases}$$

Đó là cặp đường thẳng song song (h.3)

4. Cho hai đường conic

$$(\Gamma_1) : x^2 + 4y^2 - 3x + 8y = 0$$

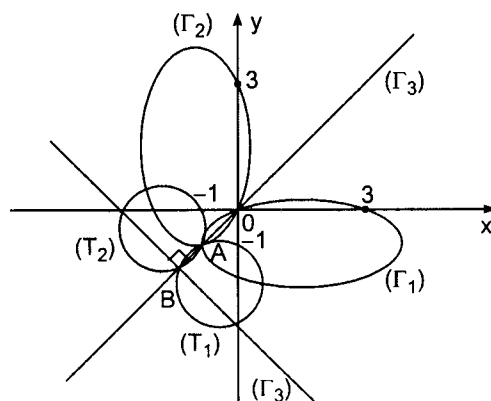
$$(\Gamma_2) : 4x^2 + y^2 + 8x - 3y = 0$$

Đường conic đẳng phương của chúng là :

$$(\Gamma_3) : (x - y)(3x + 3y + 11) = 0$$

$$\Gamma_3(x; y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ 3x + 3y + 11 = 0. \end{cases}$$

Đó là cặp đường thẳng cắt nhau (h.4).



Hình 4

5. Cho hai đường

$$(T_1): 144x^2 + 144y^2 + 144x + 408y + 264 = 0$$

$$(T_2): 144x^2 + 144y^2 + 408x + 144y + 264 = 0.$$

Đường conic đẳng phương của hai đường tròn đó là $x - y = 0$.

Đó là đường thẳng AB đi qua hai giao điểm $A(-1; -1)$ và $B\left(-\frac{11}{6}; \frac{-11}{6}\right)$ của hai đường tròn (T_1) và (T_2) (h.4).

6. Cho hai đường conic

$$(\Gamma_1): x^2 + 3y^2 - 2x = 0$$

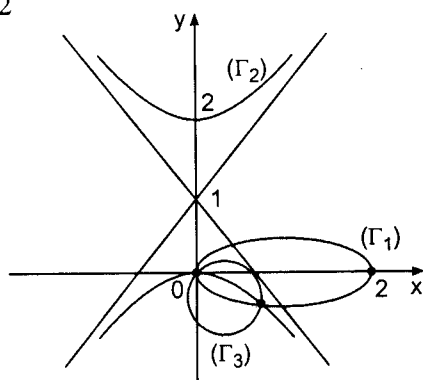
$$(\Gamma_2): x^2 - y^2 + 2y = 0.$$

Đường conic đẳng phương của chúng là

$$(\Gamma_3): x^2 + y^2 - x + y = 0.$$

Đó là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, bán kính

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (h.5).}$$



Hình 5

7. Cho hai đường conic

$$(\Gamma_1): \text{Cho } x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

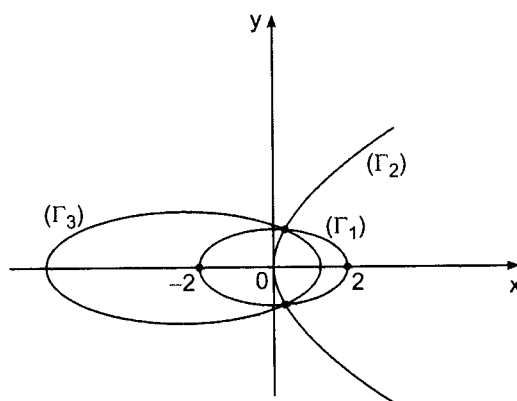
$$(\Gamma_2): -4x + y^2 = 0.$$

Đường conic đẳng phương của chúng là

$$(\Gamma_3): x^2 + 4x + 3y^2 - 4 = 0.$$

hay $\frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 1$. Vậy (Γ_3) là một

đường elip (h.6).



Hình 6

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP DẠNG CỦA ĐƯỜNG CONIC

NGUYỄN THÚC HÀO (Hà Nội)

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy , người ta xác định một đường (Γ) bằng phương trình dạng

$$(\Gamma): f(x, y) = 0$$

Phương trình đó biểu thị điều kiện cần và đủ để cho điểm $M(x; y)$ thuộc (Γ) .

1. Phương trình tiếp dạng của một đường

Trong bài này ta xét điều kiện cần và đủ để cho đường thẳng (với u, v, w là các số)

$$\Delta: ux + vy + w = 0$$

tiếp xúc với (Γ) trong đó (Γ) là một đường conic. Điều kiện đó biểu thị bởi phương trình

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

và gọi là phương trình tiếp dạng của đường (Γ) .

Vì đường thẳng Δ không thay đổi nếu trong phương trình của Δ ta nhân các số u, v, w với cùng một số khác 0 nên phương trình $\varphi(u, v, w) = 0$ có tính thuần nhất (đẳng cấp) đối với u, v, w .

2. Phương trình tiếp dạng của đường conic có tâm

Cho phương trình đường conic có tâm

$$(\Gamma) : \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \quad (1)$$

Nó biểu diễn :

- một đường elip nếu

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \beta = \frac{1}{b^2} \text{ tức là } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

- một đường tròn nếu

$$\alpha = \beta = \frac{1}{R^2} \text{ tức là } x^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$

- một đường hypebol nếu

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \beta = -\frac{1}{b^2} \text{ tức là } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Trong phương trình

$$\Delta : ux + vy + w = 0 \quad (5)$$

hai hệ số u, v không thể đồng thời bằng 0. Giả sử $v \neq 0$, ta rút ra

$$y = -\frac{ux + w}{v} \quad (6)$$

Để tìm giao điểm của đường thẳng Δ với đường conic (Γ) ta thay giá trị của y theo (6) vào phương trình (1) được phương trình bậc hai

$$(\alpha v^2 + \beta u^2)x^2 + 2\beta uwx + \beta w^2 - v^2 = 0.$$

Nghiệm của phương trình này phải là một nghiệm kép để Δ là tiếp tuyến của (Γ) , tức là phải có điều kiện (cần và đủ) sau đây

$$(\beta uw)^2 - (\alpha v^2 + \beta u^2)(\beta w^2 - v^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha v^2 + \beta u^2 - \alpha \beta w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} = w^2. \quad (7)$$

Đó là phương trình tiếp dạng của đường conic có tâm (1).

Với đường tròn có phương trình (3) thì phương trình tiếp dạng (7) là

$$R^2(u^2 + v^2) = w^2 \quad (8)$$

Với elip có phương trình (2) thì phương trình tiếp dạng (7) là

$$a^2u^2 + b^2v^2 = w^2 \quad (9)$$

Với đường hypebol có phương trình (4) thì phương trình tiếp dạng (7) là

$$a^2u^2 - b^2v^2 = w^2 \quad (10)$$

3. Phương trình tiếp dạng của parabol

Cho đường parabol

$$(P) : y^2 = 2px \quad (11)$$

và đường thẳng

$$\Delta : ux + vy + w = 0.$$

Tương tự như trên thay y theo (6) vào phương trình (11) của parabol ta được :

$$u^2x^2 + 2(uw - pv^2)x - u^2w^2 = 0.$$

Để Δ tiếp xúc với (P) điều kiện cần và đủ là

$$(uw - pv^2)^2 - u^2w^2 = 0 \Leftrightarrow pv^2 = 2uw \quad (12)$$

Đó là phương trình tiếp dạng của đường parabol (11).

Tóm tắt kết quả của hai phần trên ta có bảng sau đây :

	Phương trình đường conic	Phương trình tiếp dạng
Đường tròn	$x^2 + y^2 = R^2$	$R^2(u^2 + v^2) = w^2$
Elip	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$
Hypebol	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a^2u^2 - b^2v^2 = w^2$
Parabol	$y^2 = 2px$	$pv^2 = 2uw$

4. Ứng dụng

Chúng ta sẽ dùng phương trình tiếp dạng của conic để giải bài toán "chứng minh một họ

đường thẳng luôn luôn tiếp xúc với một cônic cố định" do tác giả Trần Xuân Bang nêu ra trong báo Toán học và Tuổi trẻ số 225 (3.1996).

Khi một họ đường thẳng Δ luôn tiếp xúc một đường cong (Γ) , người ta gọi (Γ) là *bao hình* của họ Δ .

Bài toán 1. Chứng minh rằng họ đường thẳng

$$\Delta(\gamma) : x \cos \gamma - y \sin \gamma + 1 = 0 \quad (13)$$

luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. Ta sẽ xác định đường tròn bằng phương trình tiếp dạng.

Theo (13) và (5) ta có

$$\frac{\cos \gamma}{u} = \frac{-\sin \gamma}{v} = \frac{1}{w} \Rightarrow \frac{\cos^2 \gamma}{u^2} = \frac{\sin^2 \gamma}{v^2} = \frac{1}{w^2} \\ \Rightarrow u^2 + v^2 = w^2.$$

Ta nhận ra ngay đó là phương trình tiếp dạng (8) của đường tròn với phương trình (3) nên đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$ và $R = 1$.

Bài toán 2. Cho họ đường thẳng

$$\Delta(m) : (4 - m^2)x - 6my + 3(4 + m^2) = 0 \quad (14)$$

Chứng minh rằng các đường thẳng của họ đều tiếp xúc với một cônic cố định.

Lời giải. Theo (14) và (5) ta có

$$\frac{4 - m^2}{u} = \frac{-6m}{v} = \frac{3(4 + m^2)}{w}$$

Nhân tử số và mẫu số của tỉ số đầu với 3 được

$$\frac{3(4 - m^2)}{3u} = \frac{3(4 + m^2)}{w} = -\frac{6m}{v} \quad (15)$$

Với hai tỉ số đầu của (15) ta cộng hai tử số với nhau và hai mẫu số với nhau được

$$\frac{24}{3u + w} = -\frac{6m}{v} \Rightarrow m = \frac{-4v}{3u + w} \quad (16)$$

Cũng với hai tỉ số đầu của (15), ta trừ hai tử số với nhau và hai mẫu số với nhau được :

$$\frac{-6m^2}{3u - w} = -\frac{6m}{v} \Rightarrow m = \frac{3u - w}{v} \text{ với } m \neq 0 \quad (17)$$

Từ (16) và (17) suy ra

$$\frac{-4v}{3u + w} = \frac{3u - w}{v} \Rightarrow -4v^2 = 9u^2 - w^2 \\ \Leftrightarrow 9u^2 + 4v^2 = w^2.$$

Đây là phương trình tiếp dạng (9) của đường elip với phương trình (2) nên elip có phương trình

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Với $m = 0$ thì (14) trở thành $x = -3$ cũng tiếp xúc với elip trên.

Bài toán 3. Chứng minh rằng họ đường thẳng

$$\Delta(m) : 4x - 2my + m^2 = 0 \quad (18)$$

luôn tiếp xúc với một cônic cố định.

Lời giải. Từ (18) và (5) ta có

$$\frac{4}{u} = \frac{-2m}{v} = \frac{m^2}{w}.$$

Giải hệ phương trình này được

$$\frac{v}{u} = \frac{w}{v} \Rightarrow v^2 = uw \quad (19)$$

Phương trình tiếp dạng của parabol $y^2 = 2px$ là $pv^2 = 2uw$. So sánh với (19) thấy $p = 2$, vậy ở đây ta có đường parabol $y^2 = 4x$ luôn tiếp xúc với họ đường thẳng (18).

Phần ba

TỪ HÌNH PHẪNG ĐẾN HÌNH KHÔNG GIAN

GIẢI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC DƯỚI CÁCH NHÌN ĐẠI SỐ

HỒ CÔNG DŨNG (Bình Thuận)

Sáng tạo các bài toán là việc làm cần thiết của người học toán. Qua bài viết này, xin được trao đổi về vài bài toán cực trị hình học được nhìn từ bài toán cực trị đại số.

Trước hết ta xét vài ví dụ sau :

Bài toán 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là điểm nào đó trên cạnh AB . Dựng các hình vuông có cạnh MA , MB về bên trong $ABCD$. Xác định vị trí của M để diện tích phần còn lại S của hình vuông $ABCD$ là lớn nhất.

Lời giải. Đặt $MA = x$, $MB = y$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$ thoả mãn $x + y = a$ (h.1).

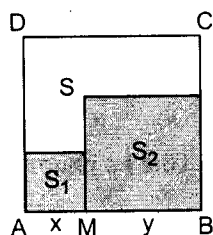
Gọi S_1 và S_2 theo thứ tự là diện tích hình vuông cạnh MA và MB thì $S_1 = x^2$ và $S_2 = y^2$. Để thấy S lớn nhất $\Leftrightarrow S_1 + S_2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow P = x^2 + y^2$ nhỏ nhất. Từ bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ hay $2(x^2 + y^2) \geq a^2$ suy ra giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $S_1 + S_2$ bằng

$\frac{a^2}{2}$, lúc đó M là trung điểm AB .

Bài toán 2. Cho đường tròn tâm O bán kính R . M là điểm nào đó trên đường kính AB . Xác định vị trí của M để tổng diện tích các hình tròn có đường kính MA và MB là nhỏ nhất.

Lời giải. Đặt $MA = 2x$, $MB = 2y$ với $x + y \geq 0$ thoả mãn $x + y = R$ (không đổi) (h.2). Gọi S_1 và S_2 theo thứ tự là diện tích hình tròn có đường kính MA và MB . Để thấy



Hình 1

$S = S_1 + S_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow P = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2)$ nhỏ nhất. Lập luận tương tự như trên suy ra GTNN của S bằng $\frac{\pi R^2}{2}$, lúc đó M trùng với tâm O .

Lời giải các bài toán trên đều dẫn đến việc xét giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng $x^2 + y^2$ hoặc $x^3 + y^3, \dots$, trong đó $x + y$ là hằng số. Bằng cách đó việc giải các bài toán cực trị hình học có thể chuyển về giải bài toán cực trị đại số.

Ta xét bài toán cực trị đại số tổng quát hơn.

Bài toán đại số. Xét n

($n \geq 2$) số không âm $x_1,$

$x_2, \dots, x_n$ thoả mãn :

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ với a là số dương cho trước.

Tìm giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau :

a) $P = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$

b) $Q = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3.$

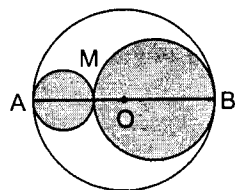
Lời giải. a) Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta có :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{a^2}{n} \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n.$



Hình 2

Vậy GTNN của P là $\frac{a^2}{n}$ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}$.

b) Đặt $\sqrt{x_i} = t_i \geq 0$ với $i = 1, 2, \dots, n$ thì $x_i = t_i^2$ và $x_i^3 = t_i^6$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta có

$$(t_1^3 + t_2^3 + \dots + t_n^3)^2 \leq (t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2)(t_1^6 + t_2^6 + \dots + t_n^6) \text{ hay}$$

$$(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3)^2 \leq a(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $a(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) \geq \frac{a^4}{n^2}$

$$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \geq \frac{a^3}{n^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi (1) và (2) cùng xảy ra dấu đẳng thức, khi đó $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Vậy GTNN của Q là $\frac{a^3}{n^2}$ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}$.

Bài toán 3. Cho điểm M cố định trên đường tròn tâm O . Một góc xMy nào đó với $\widehat{xMy} = \alpha$ không đổi ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) có các cạnh cắt đường tròn tại A, B . Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AB . Hãy xác định vị trí góc xMy sao cho giá trị $HA^3 + HB^3$ là nhỏ nhất khi M di động.

Lời giải. Giả sử Mx và My cắt đường tròn theo thứ tự ở A và B . Vì $\widehat{AMB} = \alpha$ không đổi, $\alpha > 90^\circ$ nên điểm H nằm giữa AB và độ dài AB bằng hằng số a , từ đó $HA + HB = a$.

Áp dụng kết quả bài toán đại số thì giá trị $HA^3 + HB^3$ là nhỏ nhất khi độ dài $HA = HB = \frac{a}{2}$, lúc đó góc xMy nhận MO là đường phân giác.

Các bạn hãy thử giải các bài toán sau bằng cách chuyển bài toán cực trị hình học về bài toán cực trị đại số.

Bài toán 4. Chia đoạn thẳng AB cho trước bởi các điểm chia nào đó theo thứ tự $A = M_1, M_2, \dots, M_{n+1} = B$. Gọi $S_1, S_2, \dots, S_n$ theo thứ tự là diện tích của n hình vuông có các cạnh là $M_1M_2, M_2M_3, \dots, M_nM_{n+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

Bài toán 5. Chia đường kính AB của đường tròn tâm O bán kính R cho trước lần lượt thành n đoạn nào đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ chỉ chung nhau điểm đầu mút sao cho $x_1 + x_2 + \dots + x_n = AB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích n hình tròn có đường kính là các đoạn $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Bài toán 6. Xét n hình lập phương với các cạnh $x_1, x_2, \dots, x_n$ nào đó sao cho tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ là số dương không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng thể tích của chúng.

Bài toán 7. Xét n hình cầu với các bán kính $r_1, r_2, \dots, r_n$ nào đó sao tổng $r_1 + r_2 + \dots + r_n = k$ là số dương không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các diện tích và của tổng các thể tích của chúng.

Hi vọng rằng giải bài toán bằng các cách nhìn khác nhau, các bạn sẽ sáng tạo nhiều bài toán hay hơn, hấp dẫn hơn.

ĐIỂM TORRICELLI CỦA TỨ DIỆN

NGUYỄN MINH HÀ (Hà Nội)

Trong hình học phẳng có một bài toán kinh điển:

Bài toán 1. Cho tam giác ABC , hãy tìm điểm M trên mặt phẳng (ABC) sao cho tổng $MA + MB + MC$ nhỏ nhất.

Bài toán 1 đã được giải bởi Torricelli, nhà toán học người Ý.

Có lẽ cũng từ thời Torricelli người ta đã quan tâm tới hai bài toán sau.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC và ba số dương x, y, z , hãy tìm điểm M trên mặt phẳng (ABC) sao cho tổng $xMA + yMB + zMC$ nhỏ nhất.

Bài toán 3. Cho tứ diện $ABCD$, hãy tìm điểm M trong không gian sao cho tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

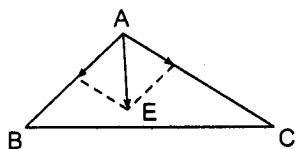
Tôi đã đưa ra lời giải hoàn chỉnh cho bài toán 2 trong báo *Toán học và Tuổi trẻ* số 207 (9.1994) hoặc trong *Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* trang 126.

Kĩ thuật cơ bản trong lời giải này, xét cho cùng chính là sự phát triển trọn vẹn kĩ thuật mà Toricelli đã dùng để giải bài toán 1. Thật đáng tiếc, kĩ thuật này không còn hiệu lực để giải bài toán 3. Vì vậy, muốn giải bài toán 3, trước hết ta cần giải bài toán 1 theo một cách mới với một kĩ thuật hoàn toàn mới.

A – Lời giải mới của bài toán 1

Ta xét hai trường hợp sau :

1) Nếu $\triangle ABC$ có một góc không nhỏ hơn 120° , chẳng hạn $\widehat{BAC} \geq 120^\circ$ (h.1).



Hình 1

Đặt $\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$. Do $\widehat{BAC} \geq 120^\circ$ nên $|\overrightarrow{AE}| \leq 1$.

Từ đó với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} \leq AM$ hay $MA + \overrightarrow{MA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) \geq 0$.

Từ đó, với điểm M bất kì có đánh giá sau :

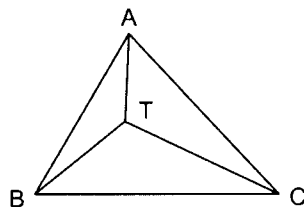
$$\begin{aligned} MA + MB + MC &= MA + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} \\ &\geq MA + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= MA + \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} \\ &= MA + \overrightarrow{MA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) + AB + AC \geq AB + AC. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A .

Vậy tổng $MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi M trùng với A .

2) Nếu $\triangle ABC$ không có góc nào lớn hơn hoặc bằng 120° (h.2).



Hình 2

Khi đó, trong tam giác ABC tồn tại (duy nhất) điểm T sao cho

$$\widehat{BTC} = \widehat{CTA} = \widehat{ATB} = 120^\circ \quad (1)$$

$$\text{Để thấy } \frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC} = \vec{0}.$$

Từ đó, với điểm M bất kì có đánh giá sau :

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &= \frac{MA \cdot TA}{TA} + \frac{MB \cdot TB}{TB} + \frac{MC \cdot TC}{TC} \\ &\geq \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{TC}}{TC} \\ &= \frac{(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TA}) \cdot \overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TB}) \cdot \overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TC}) \cdot \overrightarrow{TC}}{TC} \\ &= \overrightarrow{MT} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC} \right) + TA + TB + TC \\ &= TA + TB + TC. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với T .

Vậy tổng $MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi M trùng với T .

Điểm T được xác định bởi (1) được gọi là điểm Torricelli của tam giác ABC .

Bài toán 1 đã được giải quyết. Kết luận chung đối với tam giác bất kì xin dành cho bạn đọc.

Lời giải trên khá ngắn gọn. Nhưng điều quan trọng hơn là chất đại số rất cao của nó. Nhờ nó,

tôi đã tìm được lời giải của bài toán 3. Do khuôn khổ có hạn của một bài báo, tôi chỉ giới thiệu một cách sơ lược lời giải này.

B – Lời giải sơ lược của bài toán 3

Ta xét hai trường hợp sau :

1) Nếu xảy ra ít nhất một trong bốn bất đẳng thức sau :

$$\left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} + \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} + \frac{\overrightarrow{BA}}{BA} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA} + \frac{\overrightarrow{CB}}{CB} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{DA}}{DA} + \frac{\overrightarrow{DB}}{DB} + \frac{\overrightarrow{DC}}{DC} \right| \leq 1.$$

Chẳng hạn có $\left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right| \leq 1.$

Khi đó với điểm M bất kì ta có

$$MA + \overrightarrow{MA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right) \geq 0.$$

Từ đó, với điểm M bất kì có đánh giá sau :

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD &= MA + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} \\ &+ \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} \\ &\geq MA + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} \\ &= MA + \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \\ &\frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} = MA + \overrightarrow{MA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right) \\ &+ AB + AC + AD = AB + AC + AD. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A .

Vậy tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất khi M trùng với A .

2) Nếu bốn bất đẳng thức sau đều xảy ra :

$$\left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right| > 1$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} + \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} + \frac{\overrightarrow{BA}}{BA} \right| > 1$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA} + \frac{\overrightarrow{CB}}{CB} \right| > 1$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{DA}}{DA} + \frac{\overrightarrow{DB}}{DB} + \frac{\overrightarrow{DC}}{DC} \right| > 1.$$

Để giải bài toán trong trường hợp này, ta cần có ba bổ đề. Tôi chỉ phát biểu còn việc chứng minh chúng xin dành cho bạn đọc.

Bổ đề 1. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O) bán kính bằng 1 và tâm O nằm trong (có thể nằm trên mặt, nhưng không nằm trên cạnh) tứ diện.

Đặt

$$\overrightarrow{\alpha_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{\alpha_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{\alpha_3} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{\alpha_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Khi đó trong bốn số $|\overrightarrow{\alpha_1}|, |\overrightarrow{\alpha_2}|, |\overrightarrow{\alpha_3}|, |\overrightarrow{\alpha_4}|$ nếu có một số lớn hơn 1 thì cũng phải có một số nhỏ hơn 1.

Bổ đề 2. Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm M nào đó trong tứ diện (M khác A, B, C, D). Thế thì tổng $MA + MB + MC + MD$ không thể nhận giá trị nhỏ nhất khi M di động trên cạnh tứ diện.

Bổ đề 3. Cho tứ diện $ABCD$ về điểm Q nằm trong tứ diện. Khi đó, hai điều kiện sau là tương đương :

$$a) \frac{\overrightarrow{QA}}{QA} + \frac{\overrightarrow{QB}}{QB} + \frac{\overrightarrow{QC}}{QC} + \frac{\overrightarrow{QD}}{QD} = \vec{0}$$

$$b) \widehat{AOB} = \widehat{COD} ; \widehat{AOC} = \widehat{DOB} ; \\ \widehat{AOD} = \widehat{BOC}.$$

Nhờ các bổ đề 1 và 2 ta chứng minh được rằng : Trong tứ diện $ABCD$ tồn tại và duy nhất

điểm T có tính chất $\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC} + \frac{\overrightarrow{TD}}{TD} = \vec{0}.$

Từ đó, với điểm M bất kì có đánh giá sau :

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD &= \\ \frac{MA \cdot TA}{TA} + \frac{MB \cdot TB}{TB} + \frac{MC \cdot TC}{TC} + \frac{MD \cdot TD}{TD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{TC}}{TC} + \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{TD}}{TD} \\
&= \frac{(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TA}) \cdot \overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TB}) \cdot \overrightarrow{TB}}{TB} + \\
&\quad + \frac{(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TC}) \cdot \overrightarrow{TC}}{TC} + \frac{(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TD}) \cdot \overrightarrow{TD}}{TD} \\
&= \overrightarrow{MT} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC} + \frac{\overrightarrow{TD}}{TD} \right) + TA + TB + TC + TD \\
&= TA + TB + TC + TD.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với T .

Vậy tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất khi M trùng với T .

Nhờ bổ đề 3 điểm T được đặc trưng bởi đặc điểm hình học sau :

$$\widehat{ATB} = \widehat{CTD}; \widehat{ATC} = \widehat{DTB}; \widehat{ATD} = \widehat{BTC} \quad (2)$$

Giống như trong trường hợp tam giác, ta gọi điểm T được xác định bởi (2) là *điểm Torricelli của tứ diện ABCD*.

Bài toán 3 đã được giải quyết. Kết luận chung đối với tứ diện bất kì xin dành cho bạn đọc. Nếu để ý, bạn sẽ thấy một điều rất thú vị : Kết quả nhận được trong trường hợp tứ diện hoàn toàn tương tự kết quả nhận được trong trường hợp tam giác.

THỬ MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN

TRỊNH BẢNG GIANG (TP. Hồ Chí Minh)

Ta xuất phát từ một tính chất của hình vuông.

Bài toán 1

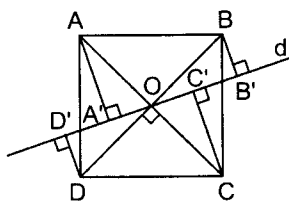
Trong mặt phẳng cho đường thẳng d nào đó đi qua tâm O của hình vuông $ABCD$. Chứng minh tổng bình phương các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến d chỉ phụ thuộc kích thước của hình vuông khi d di động.

Cách giải quen thuộc như sau.

Chiếu vuông góc các điểm A, B, C, D xuống đường thẳng d thành A', B', C', D' theo thứ tự (h.1). Dễ thấy các tam giác vuông sau đây bằng nhau : $\triangle DD'O = \triangle OC'C = \triangle BB'O = \triangle OA'A$.

Suy ra

$$D'D^2 + C'C^2 + B'B^2 + A'A^2 = 2OA^2 \quad (\text{đpcm}).$$



Hình 1

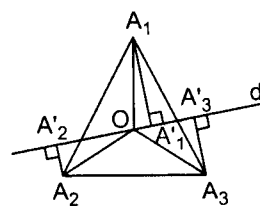
Từ bài toán trên nảy sinh câu hỏi : Những hình nào cũng có tính chất đó (tạm gọi là tính chất (T)) giống như hình vuông ?

1. Mở rộng trong mặt phẳng

Dự đoán 1. Đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) cũng có tính chất (T).

Chứng minh.

Chiếu vuông góc A_i xuống đường thẳng d thành A'_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Để đơn giản ta xét $n = 3$ (h.2).



Hình 2

Đặt $OA_i = 1$ (đơn vị dài) với $i = 1, 2, 3$. Gọi x là góc tạo bởi OA_1 và d thì

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 A'_i O^2 &= \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \\
&\cos^2 \left(x + \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Tổng này không phụ thuộc x nên $\sum_{i=1}^3 A'_i A_i^2$

cũng không phụ thuộc x và dự đoán 1 đúng với $n = 3$.

Trong trường hợp tổng quát, làm tương tự ta có :

$$\sum_{i=1}^n A_i O^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \left(x + k \frac{2\pi}{n} \right) \quad \text{tổng này}$$

cũng không phụ thuộc x (bạn đọc tự kiểm tra),

do đó $\sum_{i=1}^n A_i A_i^2$ cũng không phụ thuộc x và dự đoán 1 là đúng.

Nhận xét. Lí do khiến tổng bình phương tất cả các hình chiếu của OA_i ($i = 1, 2, \dots, n$) xuống d , không phụ thuộc vào d là các đoạn OA_i bằng nhau và tạo với d những góc lập thành cấp số cộng công sai $\frac{2\pi}{n}$.

Trong khi đó các cạnh $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ cũng phản ánh một hình ảnh tương tự cho nên ta có hệ quả : tổng bình phương hình chiếu của tất cả các cạnh của một đa giác đều xuống một đường thẳng bất kì, chỉ phụ thuộc vào kích thước của đa giác đều đó mà thôi.

Các tính chất tương tự như tính chất (T) ở trong mặt phẳng còn nhiều, xin nêu một số vấn đề để các bạn tìm hiểu thêm.

Bài toán 2

Gọi d là đường thẳng nào đó đi qua tâm O của tam giác đều ABC và d' là một đường thẳng bất kì.

1) Chứng minh rằng tổng lũy thừa bậc bốn của hình chiếu tất cả các cạnh của ΔABC xuống d' , cũng như của khoảng cách từ tất cả các đỉnh của ΔABC đến d , chỉ phụ thuộc kích thước của ΔABC .

2) Có thể thay lũy thừa bậc bốn bằng những lũy thừa nào, để khẳng định tương tự vẫn còn đúng ?

3) Thay ΔABC bởi đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_n$ thì kết quả có thay đổi không ?

2. Mở rộng trong không gian

Dựa theo sự mở rộng trong mặt phẳng ta nhận thấy đặc điểm quyết định (then chốt) để một hình có tính chất (T) là các đoạn nối tâm

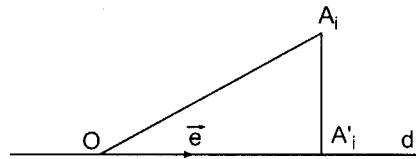
với đỉnh phải có vai trò như nhau (bình đẳng), nhìn vào không gian ta cũng thấy rất nhiều đa diện cũng có đặc điểm đó.

Dự đoán 2

Tứ diện đều $A_1 A_2 A_3 A_4$ cũng có tính chất (T).

Để chứng minh ta cần bổ đề sau.

Bổ đề. Gọi $e = (x; y; z)$ là vectơ đơn vị của đường thẳng d . Chiều vuông góc A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) xuống d thành A_i' thì có $A_i O = |\vec{e} \cdot \vec{OA}_i|$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (h.3).



Hình 3

Chứng minh dự đoán 2. Dựng hình lập phương ngoại tiếp tứ diện, độ dài cạnh của lập phương coi như bằng 1. Chọn hệ trục tọa độ $QXYZ$ (h.4) thì tọa độ của A_i và O sẽ là : $A_1(1; 0; 0); A_2(0; 1; 0); A_3(0; 0; 1); A_4(1; 1; 1); O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ta chỉ cần chứng minh $\sum_{i=1}^4 A_i O^2$ là hằng số,

từ đó suy ra dự đoán 2.

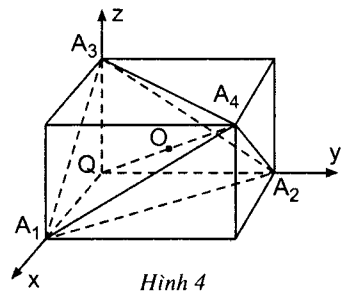
Ta có

$$\vec{OA}_1 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \vec{OA}_2 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right),$$

$$\vec{OA}_3 = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \vec{OA}_4 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{i=1}^4 A_i O^2 = \sum_{i=1}^4 (\vec{e} \cdot \vec{OA}_i)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Nhận xét. Gọi S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là diện tích mặt đối diện với A_i trong tứ diện $A_1 A_2 A_3 A_4$. Trên OA_i chọn điểm M_i sao cho



Hình 4

$OM_i = S_i$. Gọi S'_i là diện tích hình chiếu của S_i xuống mặt phẳng (P) bất kì có vectơ pháp tuyến đơn vị là e .

Ta có :

$$S'_i = S_i \cdot |\cos(\vec{e}, \overrightarrow{OM_i})| = |\vec{e} \cdot \overrightarrow{OM_i}|$$

$$\text{ nên } \sum_{i=1}^4 S_i^2 = \sum_{i=1}^4 (\vec{e} \cdot \overrightarrow{OA_i})^2, \text{ tổng này không}$$

phụ thuộc e (theo chứng minh dự đoán 2) do đó ta có :

Tổng bình phương diện tích hình chiếu bốn mặt của tứ diện đều xuống mặt phẳng bất kì chỉ phụ thuộc kích thước tứ diện đó.

Qua đây chắc các bạn cũng dễ đồng ý với tôi rằng tìm được lời giải nêu bật được đặc điểm cơ bản quyết định cho sự đúng đắn trong kết luận của đề toán đó là một công việc đáng quý, bởi vì từ lời giải như vậy ta mới dễ dàng phát hiện

ra những kết quả mới tương tự, tổng quát hoặc đặc biệt hơn.

Cuối cùng, mời các bạn chứng minh các bài toán sau.

Bài 1. Tổng bình phương hình chiếu sáu cạnh của một tứ diện đều xuống một đường thẳng bất kì hoặc một mặt phẳng bất kì đều chỉ phụ thuộc kích thước tứ diện đó.

Bài 2. Tổng bình phương khoảng cách từ bốn đỉnh của một tứ diện đều đến một mặt phẳng đi qua tâm O của tứ diện đó chỉ phụ thuộc kích thước của tứ diện.

Bài 3. Hình lập phương cũng có tất cả các tính chất như hình tứ diện mà các bạn vừa thấy trong toàn bộ bài viết này.

Bài 4. Hình bát diện đều cũng có những tính chất tương tự.

Bài 5. Những đa diện đều khác thì sao ?

MỘT VÀI KẾT QUẢ ĐẸP CỦA HÌNH HỌC CHỨNG MINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

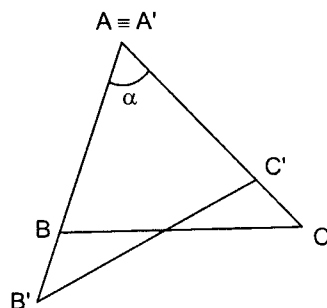
VÕ GIANG GIAI (TP. Hồ Chí Minh)

Việc giải các bài toán về tỉ số diện tích của hai tam giác sẽ thuận lợi khi ta biết sử dụng hệ thức về tỉ số diện tích của hai tam giác có một góc chung (hoặc có góc bằng nhau). Hơn nữa có thể mở rộng thành hệ thức về tỉ số thể tích của hai tứ diện có một góc tam diện chung (hoặc có góc tam diện bằng nhau). Trong bài viết này sử dụng kí hiệu S_{ABC} để chỉ diện tích tam giác ABC và V_{ABCD} để chỉ thể tích tứ diện $ABCD$.

Định lí 1. (Hệ thức về tỉ số diện tích hai tam giác có góc bằng nhau)

Nếu hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ thì $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát coi A' trùng với A và B', C' nằm trên các tia AB, AC tương ứng (h.1).



Hình 1

Đặt $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} = \alpha$.

Sử dụng công thức diện tích tam giác ta có

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{A'B' \cdot A'C' \cdot \sin \alpha} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$$

Ta sử dụng định lí 1 để giải bài toán sau.

Bài toán 1.

Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác. Các đường thẳng PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C' . Chứng minh rằng

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}.$$

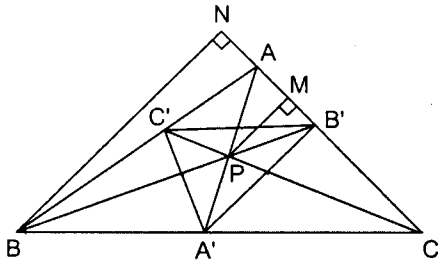
Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Để viết gọn ta đặt :

$$S = S_{ABC}, S' = S_{A'B'C'},$$

$$S_A = S_{PBC}, S_B = S_{PCA}, S_C = S_{PAB}.$$

Kẻ BN, PM vuông góc với AC tại N, M tương ứng (h.2).



Hình 2

Ta có

$$\frac{BB'}{PB'} = \frac{BN}{PM} = \frac{AC \cdot BN}{AC \cdot PM} = \frac{S}{S_B} \quad (1)$$

Tương tự được

$$\frac{CC'}{PC'} = \frac{S}{S_C} \quad (2)$$

Theo định lí 1 và (1), (2) tính được

$$\begin{aligned} \frac{S_A}{S_{PB'C'}} &= \frac{PB \cdot PC}{PB' \cdot PC'} = \frac{(BB' - PB')}{PB'} \cdot \frac{(CC' - PC')}{PC'} \\ &= \left(\frac{BB'}{PB'} - 1 \right) \left(\frac{CC'}{PC'} - 1 \right) = \left(\frac{S}{S_B} - 1 \right) \left(\frac{S}{S_C} - 1 \right) \\ &= \frac{(S - S_B)(S - S_C)}{S_B S_C}, \end{aligned}$$

suy ra $S_{PB'C'} = (S - S_A) \cdot T$ với

$$T = \frac{S_A S_B S_C}{(S - S_A)(S - S_B)(S - S_C)}.$$

Chứng minh tương tự ta được

$$S_{PC'A'} = (S - S_B) \cdot T \text{ và}$$

$$S_{PA'B'} = (S - S_C) \cdot T.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S' &= S_{PB'C'} + S_{PC'A'} + S_{PA'B'} \\ &= T(3S - (S_A + S_B + S_C)) = 2TS \end{aligned}$$

$$\text{hay } \frac{S'}{S} = 2T \quad (3)$$

Theo BĐT Cauchy thì

$$S_B + S_C \geq 2\sqrt{S_B S_C}$$

$$\text{mà } S - S_A = S_B + S_C \text{ nên } S - S_A \geq 2\sqrt{S_B S_C}.$$

Tương tự được $S - S_B \geq 2\sqrt{S_C S_A}$ và $S - S_C \geq 2\sqrt{S_A S_B}$, do đó

$$T = \frac{S_A S_B S_C}{(S - S_A)(S - S_B)(S - S_C)} \leq \frac{1}{8}.$$

$$\text{Thay vào (3) được } \frac{S'}{S} \leq \frac{1}{4} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S_A = S_B = S_C = \frac{S}{3}$ nghĩa là khi điểm P trùng với trọng tâm ΔABC .

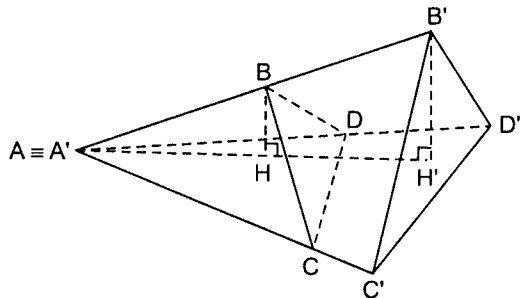
Ta mở rộng định lí 1 và bài toán 1 sang không gian.

Định lí 2. (Hệ thức về tỉ số thể tích hai tứ diện có góc tam diện bằng nhau)

Nếu hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có góc tam diện đỉnh A bằng góc tam diện đỉnh A' thì

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{A'B'C'D'}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A'B' \cdot A'C' \cdot A'D'}.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát coi A' trùng A và B', C', D' theo thứ tự nằm trên các tia AB, AC, AD (h.3).



Hình 3

Kẻ BH và $B'H'$ vuông góc với mặt phẳng (ACD) tại H và H' . Theo công thức tính thể tích tứ diện và định lí 1 có

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{A'B'C'D'}} = \frac{BH \cdot S_{ACD}}{B'H' \cdot S_{A'C'D'}} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'}.$$

Bài toán 2

Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và điểm P nằm trong tứ diện. Các đường thẳng PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 cắt các mặt phẳng $(A_2A_3A_4), (A_3A_4A_1), (A_4A_1A_2), (A_1A_2A_3)$ tương ứng tại B_1, B_2, B_3, B_4 . Chứng minh rằng

$$\frac{V_{B_1B_2B_3B_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}} \leq \frac{1}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Để viết gọn ta đặt

$$V = V_{A_1A_2A_3A_4}, \quad V_B = V_{B_1B_2B_3B_4},$$

$$V_{A_1} = V_{PA_2A_3A_4}, \quad V_{A_2} = V_{PA_3A_4A_1},$$

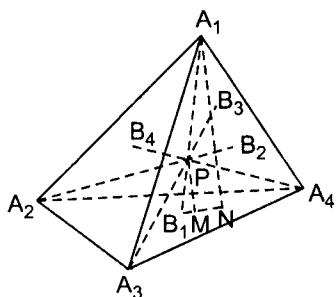
$$V_{A_3} = V_{PA_4A_1A_2}, \quad V_{A_4} = V_{PA_1A_2A_3},$$

$$V_{B_1} = V_{PB_2B_3B_4}, \quad V_{B_2} = V_{PB_3B_4B_1},$$

$$V_{B_3} = V_{PB_4B_1B_2}, \quad V_{B_4} = V_{PB_1B_2B_3}.$$

Kẻ PM và A_1N vuông góc với mặt phẳng $(A_2A_3A_4)$ tại M và N (h.4). Ta có

$$\frac{PB_1}{A_1B_1} = \frac{PM}{A_1N} = \frac{PM \cdot S_{A_2A_3A_4}}{A_1N \cdot S_{A_2A_3A_4}} = \frac{V_{A_1}}{V}.$$



Hình 4

Chứng minh tương tự được

$$\frac{PB_i}{A_iB_i} = \frac{V_{A_i}}{V} \text{ với } i = 1, 2, 3, 4.$$

Từ đó và định lí 2 có

$$\begin{aligned} \frac{V_{A_1}}{V_{B_1}} &= \frac{PA_2 \cdot PA_3 \cdot PA_4}{PB_2 \cdot PB_3 \cdot PB_4} \\ &= \frac{(A_2B_2 - PB_2)(A_3B_3 - PB_3)(A_4B_4 - PB_4)}{PB_2 \cdot PB_3 \cdot PB_4} \\ &= \left(\frac{A_2B_2}{PB_2} - 1 \right) \left(\frac{A_3B_3}{PB_3} - 1 \right) \left(\frac{A_4B_4}{PB_4} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{V}{V_{A_2} - 1} \right) \left(\frac{V}{V_{A_3} - 1} \right) \left(\frac{V}{V_{A_4} - 1} \right) \\ &= \frac{(V - V_{A_2})(V - V_{A_3})(V - V_{A_4})(V - V_{A_1})}{V_{A_2} \cdot V_{A_3} \cdot V_{A_4} (V - V_{A_1})} \end{aligned}$$

hay là $V_{B_1} = (V - V_{A_1}) \cdot T$ với

$$T = \frac{V_{A_1} \cdot V_{A_2} \cdot V_{A_3} \cdot V_{A_4}}{(V - V_{A_1})(V - V_{A_2})(V - V_{A_3})(V - V_{A_4})}.$$

Chứng minh tương tự được

$$V_{B_2} = (V - V_{A_2}) \cdot T, \quad V_{B_3} = (V - V_{A_3}) \cdot T,$$

$$V_{B_4} = (V - V_{A_4}) \cdot T, \text{ suy ra}$$

$$V_B = V_{B_1} + V_{B_2} + V_{B_3} + V_{B_4} = 3V \cdot T \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Cauchy với ba số thì

$$V - V_{A_1} = V_{A_2} + V_{A_3} + V_{A_4} \geq 3\sqrt[3]{V_{A_2} \cdot V_{A_3} \cdot V_{A_4}}.$$

Tương tự có

$$V - V_{A_2} \geq 3\sqrt[3]{V_{A_3} \cdot V_{A_4} \cdot V_{A_1}},$$

$$V - V_{A_3} \geq 3\sqrt[3]{V_{A_4} \cdot V_{A_1} \cdot V_{A_2}},$$

$$V - V_{A_4} \geq 3\sqrt[3]{V_{A_1} \cdot V_{A_2} \cdot V_{A_3}}.$$

Từ đó

$$(V - V_{A_1})(V - V_{A_2})(V - V_{A_3})(V - V_{A_4})$$

$$\geq 81 V_{A_1} \cdot V_{A_2} \cdot V_{A_3} \cdot V_{A_4} \text{ hay là } T \leq \frac{1}{81}.$$

$$\text{Thay vào đẳng thức (4) ta được } \frac{V_B}{V} \leq \frac{1}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $V_{A_1} = V_{A_2} =$

$V_{A_3} = V_{A_4} = \frac{1}{4}V$, tức là điểm P trùng với trọng tâm của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

Sau đây là một số bài toán có thể sử dụng các hệ thức về tỉ số diện tích, thể tích để luyện tập.

Bài 1. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Từ tâm O đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ kẻ các đường thẳng OA , OB , OC cắt BC , CA , AB theo thứ tự tại A' , B' , C' . Tính tỉ số $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}$ theo a, b, c .

Bài 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt SA , SB , SC , SD theo thứ tự tại A' , B' , C' , D' . Chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}.$$

NHÌN TỪ ĐỊNH LÝ MENELAUS

HỒ CÔNG DŨNG (Bình Thuận)

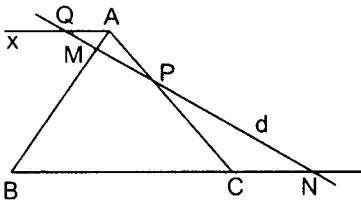
Làm mạnh hơn một định lý và các áp dụng của nó luôn là công việc hấp dẫn các bạn trẻ học toán. Bài viết này tôi xin giới thiệu với các bạn một kết quả trong hình học không gian tương tự định lý Menelaus trong hình học phẳng.

Trước hết tôi xin nhắc lại nội dung định lý và phương pháp chứng minh thường gặp.

Định lý (thuận) Menelaus. Nếu một đường thẳng cắt các đường thẳng chứa cạnh AB , BC , CA của tam giác ABC theo thứ tự tại các điểm M , N , P (khác các đỉnh A , B , C) thì ta có :

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1.$$

Chứng minh. Gọi d là đường thẳng cắt các đường thẳng chứa cạnh AB , BC , CA của $\triangle ABC$ theo thứ tự tại các điểm M , N , P .



Hình 1

Dựng đường thẳng Ax song song với BC và cắt đường thẳng d tại điểm Q (h.1).

Ta có : $\triangle APQ$ đồng dạng với $\triangle CPN$

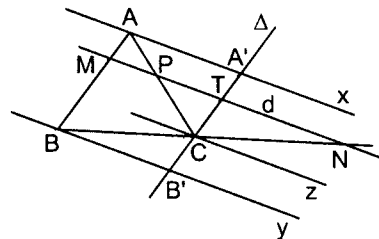
$$\text{nên } \frac{AP}{AQ} = \frac{CP}{CN} \Rightarrow \frac{AQ \cdot CP}{AP \cdot CN} = 1 \quad (1)$$

$$\triangle AMQ \text{ đồng dạng với } \triangle BMN \text{ nên } \frac{AM}{AQ} = \frac{BM}{BN} \Rightarrow \frac{AM \cdot BN}{AQ \cdot BM} = 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2) có } & \frac{AM \cdot BN}{AQ \cdot BM} \cdot \frac{AQ \cdot CP}{AP \cdot CN} = 1 \\ \Rightarrow & \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned} \quad (3)$$

Trong cả hai trường hợp đường thẳng d cắt các cạnh của $\triangle ABC$ tại hai điểm hoặc không cắt cạnh nào, từ (3) đều có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1. \quad (4)$$



Hình 2

Bây giờ xin giới thiệu một cách chứng minh khác (h.2).

Qua A, B theo thứ tự kẻ $Ax \parallel By \parallel d$. Ta dựng đường thẳng Δ đi qua C và $\Delta \parallel AB$. Giả sử Δ cắt d tại điểm T và cắt Ax, By theo thứ tự tại A', B' .

$$\text{Ta có: } \frac{\overline{TA'}}{\overline{TB'}} \cdot \frac{\overline{TB'}}{\overline{TC}} \cdot \frac{\overline{TC}}{\overline{TA'}} = 1.$$

Mặt khác theo định lí Thales có

$$\frac{\overline{TA'}}{\overline{TB'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}, \frac{\overline{TB'}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{NC}}, \frac{\overline{TC}}{\overline{TA'}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{PA}}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Nếu sử dụng hệ thức (4) thì có thể chứng minh điều ngược lại:

Nếu M, N, P theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng chứa cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC , thoả mãn (4):

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1 \text{ thì } M, N, P \text{ thẳng hàng.}$$

Thật vậy, từ (4) suy ra ba điểm M, N, P khác các đỉnh của tam giác ABC . Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng MP và BC thì E cũng khác B, C .

Theo phần thuận của chứng minh trên ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1 \quad (5)$$

Theo giả thiết

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1 \quad (4)$$

$$\text{Từ (4) và (5) ta có } \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}. \text{ Suy ra } N \text{ phải}$$

trùng với E , do đó M, N, P thẳng hàng.

Như vậy từ đây ta có thể phát biểu **Định lí Menelaus trong hình học phẳng**.

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng AB, BC, CA (M, N, P khác A, B, C) thì M, N, P thẳng hàng

khi và chỉ khi $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1$.

Từ đó với phương pháp chứng minh tương tự ta có thể phát biểu một kết quả trong không gian ba chiều.

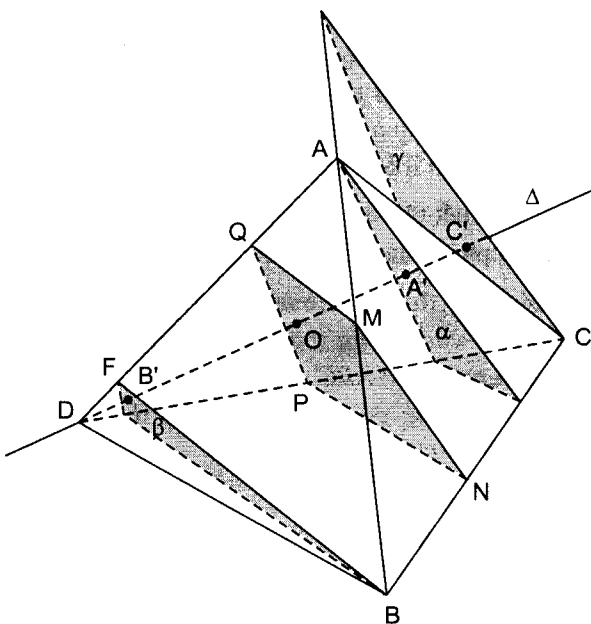
Định lí Menelaus trong không gian

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA của tứ diện $ABCD$ (M, N, P, Q khác A, B, C, D) thì M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$.

Chứng minh.

Phần thuận. Giả sử M, N, P, Q đồng phẳng. Từ các đỉnh A, B, C , dựng các mặt phẳng α, β, γ theo thứ tự song song với $(MNPQ)$.

Qua D dựng đường thẳng Δ cắt mp $(MNPQ)$ tại O và cắt α, β, γ theo thứ tự tại A', B', C' (h.3).



Hình 3

$$\text{Ta có } \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \cdot \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OA'}} = 1.$$

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}, \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}},$$

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}, \frac{\overline{OD}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \quad (6)$$

Phân đảo. Từ (6) suy ra các điểm M, N, P, Q khác A, B, C, D . Giả sử mp(MNP) cắt đường thẳng AD tại E .

Theo chứng minh trên ta có :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EA}} = 1. \quad (7)$$

So sánh (6) và (7) có $\frac{\overline{ED}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}$.

Suy ra E phải trùng với Q , do đó M, N, P, Q đồng phẳng.

Áp dụng các kết quả trên, ta có lời giải gọn cho các bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA (M, N, P, Q khác A, B, C, D).

Chứng minh rằng nếu

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \text{ và } \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} \text{ thì } M, N, P, Q$$

đồng phẳng.

Lời giải. (h.3) Ta có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = 1 \quad (8)$$

Tương tự có $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \quad (9)$

Từ (8) và (9) có $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1.$

Theo định lí Menelaus trong không gian thì M, N, P, Q đồng phẳng.

Bài toán 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng và điểm O trong không gian. (O khác A, B, C, D). Chứng minh rằng chân các đường phân giác trong kẻ từ đỉnh O của các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA là đồng phẳng.

Lời giải. Gọi E, F, H, K theo thứ tự là chân các đường phân giác trong của các tam giác $OAB; OBC; OCD; ODA$ (h.4).

Ta có :

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{-OA}{OB},$$

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KA}} = \frac{-OD}{OA},$$

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{HD}} = \frac{-OC}{OD}, \quad \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \frac{-OB}{OC}.$$

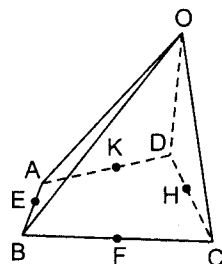
Do đó

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{HC}}{\overline{HD}} \cdot \frac{\overline{KD}}{\overline{KA}} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1.$$

Theo định lí Menelaus trong không gian thì E, F, H, K thẳng hàng.

Bài toán 3. Cho ba đường thẳng a, b, c không đồng phẳng, cùng song song với một mặt phẳng. Chứng minh rằng nếu đường thẳng d nào đó cắt ba đường thẳng nói trên thì d song song với một mặt phẳng.

Việc giải bài toán 3 xin dành cho bạn đọc.



Hình 4

ĐI TÌM MỘT DẠNG ĐỊNH LÍ SIN CHO TỨ DIỆN

TRỊNH BẰNG GIANG (TP. Hồ Chí Minh)

Trong đề thi toán tuyển sinh vào đại học Y Dược các tỉnh phía Nam năm 1993 có bài toán : Chứng minh một tứ diện là gần đều nếu diện tích các mặt của nó là bằng nhau.

(Các bạn có thể xem lời giải bài toán trên trong bài *Tứ diện gần đều* sau bài viết này, đó là tính chất 4 của tứ diện gần đều).

Nhận xét : Giả thiết của ta về tứ diện $ABCD$ là

$$S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDA} = S_{DAB} = S \quad (1)$$

Đó là một đẳng thức đại số (hoặc lượng giác). Vậy liệu có thể tìm được một lời giải đại số, lượng giác cho bài toán này hay không ? Để giảm nhẹ khó khăn ta trở về quá khứ và thấy rằng trong tam giác đã có hai định lý lượng giác quan trọng : định lý cosin và định lý sin thiết lập mối liên hệ chặt chẽ giữa góc và cạnh. Quay lại tứ diện : từ giả thiết (1) dùng định lý hình chiếu với quy ước $\cos(AB)$ là cosin của góc nhị diện cạnh AB của tứ diện $ABCD$ thì có (cũng xem tính chất 9 trong bài *Tứ diện gần đều*).

$$\begin{aligned} S &= S\cos(AB) + S\cos(BC) + S\cos(CA) \\ &= S\cos(BC) + S\cos(CD) + S\cos(DB) \\ &= S\cos(DC) + S\cos(DA) + S\cos(AC) \\ &= S\cos(DA) + S\cos(AB) + S\cos(DB). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(AB) = \cos(CD) ;$$

$$\cos(AC) = \cos(BD) ;$$

$$\cos(AD) = \cos(BC).$$

$$\text{Hay là } \sin(AB) = \sin(CD) ;$$

$$\sin(AC) = \sin(BD) ; \sin(AD) = \sin(BC).$$

Vậy sin các góc nhị diện đối thì bằng nhau trong khi ta lại cần độ dài các cạnh đối bằng nhau, do đó cần xét sự bằng nhau giữa các tỉ số : *độ dài một cạnh chia cho sin của góc nhị diện tương ứng*. Thế là xuất hiện nghi vấn : có phải trong tứ diện đang xét chúng ta có dãy đẳng thức kiểu như đẳng thức sin trong tam giác, mà cụ thể là :

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin(AB)} &= \frac{CD}{\sin(CD)} ; \frac{AC}{\sin(AC)} = \frac{BD}{\sin(BD)} ; \\ \frac{BC}{\sin(BC)} &= \frac{AD}{\sin(AD)} ? \end{aligned} \quad (2)$$

Lại quay về quá khứ, ta thấy : khi chứng minh định lý sin trong tam giác ngoài phương pháp thông thường, người ta còn có thể sử dụng công thức tính diện tích :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B.$$

Vì thế ta cũng tìm cách biểu diễn thể tích tứ diện theo diện tích hai mặt bên và sin của góc nhị diện tạo bởi hai mặt đó, nghĩa là :

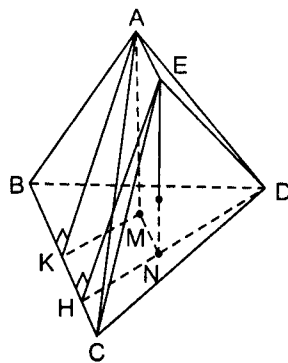
$$V_{ABCD} = k \cdot S_{ABC} \cdot S_{DBC} \cdot \sin(BC) ?$$

Kiểm tra lại thì thấy vế trái có đơn vị là lập phương của đơn vị dài còn vế phải lại là lũy thừa 4 của đơn vị dài nên cần chia vế phải cho độ dài một cạnh nào đó ; linh cảm toán học sẽ mách bảo rằng đó chính là cạnh BC . Vậy ta có dự đoán sau với hệ số k nào đó.

$$V_{ABCD} = k \cdot S_{ABC} \cdot S_{DBC} \cdot \frac{\sin(BC)}{BC}.$$

Chứng minh dự đoán và xác định k .

Từ các đỉnh A, D của tứ diện $ABCD$ kẻ AK, DH vuông góc với BC tại K, H . Nếu H khác K thì trong mp(ABC) dựng hình chữ nhật $AKHE$. Kẻ AM và EN vuông góc với mp(BCD) tại M, N thì $AM = EN$ (hình vẽ). Ta có



Hình 1

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{EBCD} = \frac{1}{3} BC \cdot S_{DHE} \\ &= \frac{1}{3} BC \cdot \frac{1}{2} DH \cdot HE \cdot \sin(BC) \\ &= \frac{1}{6} (BC \cdot DH) \cdot (KA \cdot BC) \cdot \frac{\sin(BC)}{BC} \\ &= \frac{2}{3} S_{DBC} \cdot S_{ABC} \cdot \frac{\sin(BC)}{BC} \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) kết hợp với (1) không những có (2) mà lại còn có dãy đẳng thức "mạnh hơn" (2) đối với tứ diện $ABCD$ gần đều là

$$\frac{AB}{\sin(AB)} = \frac{CD}{\sin(CD)} = \frac{AC}{\sin(AC)} \\ = \frac{BD}{\sin(BD)} = \frac{BC}{\sin(BC)} = \frac{AD}{\sin(AD)}.$$

Không ngừng lại ở đó, mà chú ý rằng từ (3) còn có hệ thức sau đối với tứ diện $ABCD$ bất kì :

$$V_{ABCD}^2 = \frac{4}{9} S_{ABC} \cdot S_{BCD} \cdot S_{CDA} \cdot S_{DAB} \cdot \frac{\sin(BC)}{BC} \cdot \frac{\sin(AD)}{AD}.$$

Từ đó ta được các hệ thức sau đây, gọi là *Định lí sin* đối với tứ diện bất kì (dạng thứ nhất).

$$\frac{AB}{\sin(AB)} \cdot \frac{CD}{\sin(CD)} = \frac{AC}{\sin(AC)} \cdot \frac{BD}{\sin(BD)} \\ = \frac{BC}{\sin(BC)} \cdot \frac{AD}{\sin(AD)}.$$

Nếu chọn D nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $DA = DB = DC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{\sin(AB) \cdot \sin(CD)} = \frac{AC}{\sin(AC) \cdot \sin(BD)} \\ = \frac{BC}{\sin(BC) \cdot \sin(AD)}.$$

Lấy giới hạn khi D tiến ra vô cực với chú ý $\lim \sin(AB) = \lim \sin(BC) = \lim \sin(CA) = 1,$

$$\lim \sin(DA) = \sin A,$$

$$\lim \sin(DB) = \sin B,$$

$$\lim \sin(DC) = \sin C.$$

$$\text{Ta có } \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}.$$

Đó chính là định lí sin trong tam giác mà chúng ta đều đã biết. Giờ đây ta có thể khẳng định rằng : định lí sin cho tam giác ABC chỉ là trường hợp riêng của định lí sin cho tứ diện $ABCD$, trong đó D chạy trên trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC và tiến ra xa vô tận.

Lời bình : Mặc dù lời giải ban đầu cho bài toán không dễ của ta đã là một lời giải đẹp, mặc dù ý định ban đầu : định lượng đẳng thức (1) (tìm lời giải đại số) gặp phải khó khăn lớn, vì trong không gian ít có những đẳng thức biểu diễn mối liên hệ giữa các cạnh và các góc với nhau, song với một vài suy luận có lí, không những chúng ta chỉ đạt được mục đích đã đề ra là *tìm thêm lời giải nữa cho một bài toán* mà còn gặt hái được những kết quả đẹp đến bất ngờ. Các bạn còn có thể chứng minh định lí sin đối với tứ diện bằng cách sử dụng các định lí sin đối với tam giác và đối với góc tam diện. Đó cũng là một cách học mà tôi cho rằng các bạn trẻ cần lưu ý. Ngoài dạng trên có thể còn một vài dạng khác nữa của định lí sin đối với tứ diện. Tác giả bài này xin nhường lại để các bạn tìm hiểu thêm. Chúc các bạn thành công.

TỨ DIỆN GẦN ĐỀU

NGUYỄN ANH DŨNG (Hà Nội)

Trong chương trình hình học phổ thông, tứ diện gần đều có nhiều tính chất phong phú và lí thú. Vì vậy đã có nhiều bài tập hay, khai thác vấn đề này cho các kì thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế cũng như các kì thi tuyển sinh hàng năm. Ta nhắc lại định nghĩa:

Một tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một gọi là tứ diện gần đều.

Hệ quả. *Một tứ diện gần đều có bốn mặt là các tam giác bằng nhau.*

Sau đây là một số tính chất (TC) đặc trưng của tứ diện gần đều và cũng là các điều kiện

cần và đủ để một tứ diện là gần đều sau khi đã chứng minh điều ngược lại.

TC1. Tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng 180° .

TC2. Mỗi đường nối trung điểm của một cặp cạnh đối diện của tứ diện là đường vuông góc chung của cặp cạnh tương ứng đó.

TC3. Tứ diện có hai trục đối xứng (thực chất là có đến ba trục đối xứng).

TC4. Bốn mặt của tứ diện là các tam giác có diện tích bằng nhau.

TC5. Bốn đường cao của tứ diện có độ dài bằng nhau.

TC6. Tâm mặt cầu nội tiếp và tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện trùng nhau.

TC7. Tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện trùng nhau.

TC8. Tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm của tứ diện trùng nhau.

TC9. Tổng các cosin của các góc phẳng nhị diện chứa cùng một mặt của tứ diện bằng 1.

TC10. Các góc phẳng nhị diện ứng với mỗi cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau.

Việc chứng minh một tứ diện gần đều có các tính chất trên không có gì khó khăn.

Ta chứng minh điều ngược lại, một tứ diện có một trong các tính chất trên là tứ diện gần đều.

1. Giả sử tứ diện $ABCD$ thoả mãn TC1, nghĩa là tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng 180° . Trải các mặt DAB, DBC, DCA lên mặt phẳng ABC (xem hình 1) thành các tam giác D_1AB, D_2BC, D_3CA .

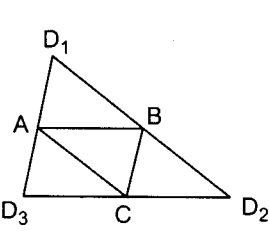
Vì tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng 180° nên các điểm A, B, C thuộc các cạnh của tam giác $D_1D_2D_3$. Ta có $D_1A = D_3A = DA$; $D_1B = D_2B = DB$; $D_2C = D_3C = DC$ nên A, B, C là trung điểm của các cạnh tương ứng của tam giác $D_1D_2D_3$. Nghĩa là AB, BC, CA là các đường trung bình của tam giác $D_1D_2D_3$.

Do đó

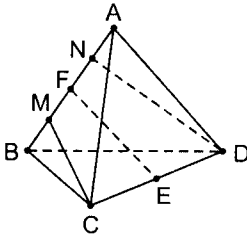
$$AB = \frac{1}{2} D_2D_3 = DC ; \quad BC = \frac{1}{2} D_1D_3 = DA ;$$

$$CA = \frac{1}{2} D_1D_2 = DB .$$

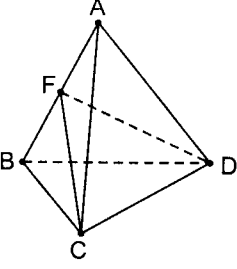
Vậy $ABCD$ là một tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau nên là tứ diện gần đều.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

2. Giả sử tứ diện $ABCD$ thoả mãn TC2, nghĩa là mỗi đường nối trung điểm của một cặp cạnh đối diện là một đường vuông góc chung của chúng nên nó là trục đối xứng của tứ diện. Do đó các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau, vậy tứ diện $ABCD$ là gần đều.

3. Giả sử một tứ diện có TC3, vì mỗi trục đối xứng của tứ diện phải là đường nối trung điểm hai cạnh đối diện nên nó là đường vuông góc chung của cặp cạnh đối diện đó, trở về TC2.

4. Giả sử tứ diện $ABCD$ thoả mãn TC4, nghĩa là nó có diện tích của bốn mặt bằng nhau. Gọi E là trung điểm CD , kẻ CM, DN, EF cùng vuông góc với AB (xem hình 2). Vì hai tam giác CAB

và DAB có chung đáy AB và có diện tích bằng nhau nên có các đường cao $CM = DN$. Vì E là trung điểm CD và M, F, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, E, D lên AB nên F là trung điểm của MN . Do đó hai tam giác vuông CMF và DNF bằng nhau; tam giác FCD cân. Ta được FE vuông góc với CD , nghĩa là đường vuông góc chung của AB và CD qua trung điểm CD . Nhưng do vai trò của các cạnh như nhau nên F cũng là trung điểm của AB . Vậy EF là trục đối xứng của tứ diện. Từ đó có $AC = BD$ và $AD = BC$. Chứng minh tương tự, ta có $AB = CD$.

Vậy $ABCD$ là tứ diện gần đều.

5. Giả sử tứ diện $ABCD$ thỏa mãn TC5, nghĩa là nó có bốn đường cao bằng h . Xét thể tích của tứ diện :

$$V = \frac{1}{3}h.S_{ABC} = \frac{1}{3}h.S_{BCD}$$

$$= \frac{1}{3}h.S_{CDA} = \frac{1}{3}h.S_{DAB}$$

nên bốn mặt của tứ diện là các tam giác có diện tích bằng nhau, trở về TC4.

6. Giả sử một tứ diện có TC6. Vì tâm của mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau nên bốn mặt của tứ diện cách đều tâm, do đó bốn mặt là các tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau. Từ đó suy ra các góc của hai mặt của tứ diện cùng chắn một cạnh chung thì bằng nhau. Ta được tổng các mặt ở mỗi đỉnh tam diện bằng 180° , trở về TC1.

7. Giả sử một tứ diện có TC7. Vì tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau nên đường nối trung điểm của mỗi cặp cạnh đối diện cũng là đường vuông góc chung của chúng, trở về TC2.

(Lưu ý rằng, trọng tâm của tứ diện là trung điểm của mỗi đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện của tứ diện).

8. Giả sử tứ diện $ABCD$ có TC8. Vì tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm trùng nhau nên mỗi mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm cạnh đối diện là mặt phẳng phân giác của góc nhị

diện tương ứng. Theo kí hiệu của hình 3, ta có F cách đều hai mặt BCD và ACD (F là trung điểm của AB). Nhưng hai tứ diện $FACD$ và $FBCD$ có thể tích bằng nhau và các đường cao tương ứng kẻ từ F bằng nhau nên hai tam giác ACD và BCD có diện tích bằng nhau. Lí luận tương tự, ta được bốn mặt của tứ diện có diện tích bằng nhau, trở về TC4.

9. Giả sử tứ diện $ABCD$ có TC9. Giả sử trong bốn mặt của tứ diện, tam giác ABC có diện tích lớn nhất. Gọi α, β, γ là các góc phẳng nhị diện tương ứng với ba cạnh BC, CA, AB và $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$.

Ta có

$$S_{ABC} = S_{DBC} \cdot \cos \alpha + S_{DCA} \cdot \cos \beta + S_{DAB} \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

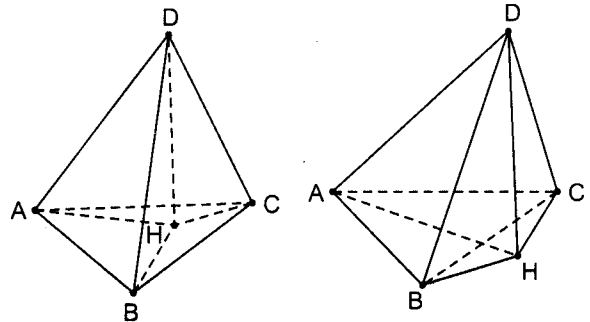
Thật vậy, kẻ đường cao DH của tứ diện.

Nếu H nằm trong tam giác ABC (xem hình 4) thì

$$S_{ABC} = S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}$$

$$= S_{DBC} \cdot \cos \alpha + S_{DCA} \cdot \cos \beta + S_{DAB} \cdot \cos \gamma.$$

Nếu H nằm ngoài tam giác ABC , chẳng hạn H nằm trong góc BAC (xem hình 5) thì



Hình 4

Hình 5

$$S_{ABC} = -S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}$$

$$= -S_{DBC} \cdot \cos(\pi - \alpha) + S_{DCA} \cdot \cos \beta + S_{DAB} \cdot \cos \gamma$$

$$= S_{DBC} \cdot \cos \alpha + S_{DCA} \cdot \cos \beta + S_{DAB} \cdot \cos \gamma.$$

Bạn đọc tự kiểm tra công thức (1) cho các trường hợp còn lại.

Theo giả thiết

$$S_{ABC} \geq S_{DBC}; S_{ABC} \geq S_{DCA};$$

$$S_{ABC} \geq S_{DAB}$$

nên từ (1), suy ra

$$S_{ABC} \leq S_{ABC}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = S_{ABC}.$$

Vậy phải có

$$S_{ABC} = S_{DBC} = S_{DCA} = S_{DAB} ; \text{trở về TC4.}$$

10. Giả sử một tứ diện có các góc phẳng nhị diện ứng với mỗi cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau. Gọi α, β, γ là các góc phẳng nhị diện tương ứng với ba cặp cạnh đối diện ; S_1, S_2, S_3, S_4 tương ứng là diện tích các mặt của tứ diện. Thế thì α, β, γ cũng là các góc phẳng nhị diện tương ứng với ba cạnh của cùng một mặt.

Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_4$.

Sử dụng công thức (1), ta có :

$$S_1 \leq S_1(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \geq 1.$$

$$S_4 \geq S_4(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1.$$

Vậy $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$; trở về TC9.

Ngoài 10 tính chất đặc trưng của tứ diện gần đều trên đây, bạn đọc có thể tự tìm thêm nhiều tính chất khác. Để kết thúc bài viết, mời các bạn giải các bài tập sau có liên quan đến tứ diện gần đều.

Bài 1. Cho tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một và theo thứ tự bằng a, b, c ($a < b < c$). Một mặt phẳng cắt tứ diện đã cho theo một tứ giác. Hãy tìm vị trí của mặt phẳng sao cho tứ giác thiết diện đó có chu vi nhỏ nhất. Trong điều kiện trên, hãy tìm quỹ tích trọng tâm của các tứ giác thiết diện. (Đề thi học sinh giỏi Quốc gia năm 1983).

Bài 2. Cho góc tam diện $Oxyz$; gọi α, β, γ là các góc phẳng nhị diện tương ứng với cạnh Ox, Oy, Oz . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tổng các mặt của góc tam diện bằng 180° là

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1.$$

MẶT CẦU TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG THẲNG CHỨA CÁC CẠNH CỦA KHỐI TỨ DIỆN

HỒ QUANG VINH (Hà Nội)

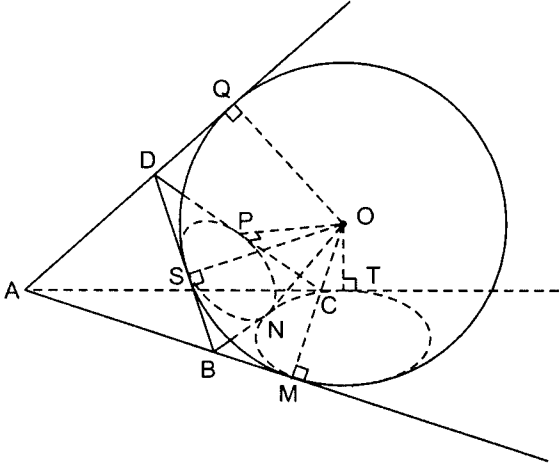
Các bạn đã được làm quen với mặt cầu ngoại tiếp, mặt cầu nội tiếp tứ diện. Trong bài *Mặt cầu giả nội tiếp đa diện* (Tập chí THPT số 177 tháng 11.1991) hoặc *Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* trang 124, tác giả Lê Quốc Hán đã giới thiệu với chúng ta về mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của một khối đa diện và một số bài toán liên quan đến mặt cầu này. Trong bài báo này xin giới thiệu thêm với các bạn một vài kiểu tiếp xúc của mặt cầu với đường thẳng chứa các cạnh của một khối tứ diện trong không gian.

Lưu ý : Trong bài này nói mặt cầu tiếp xúc với cạnh XY (hoặc tia XY) hiểu là tiếp điểm thuộc đoạn thẳng XY (hoặc tia XY).

Mệnh đề 1. Điều kiện cần và đủ để tứ diện $ABCD$ có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, DB và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA là $BC - AD = CD - AB = DB - AC$.

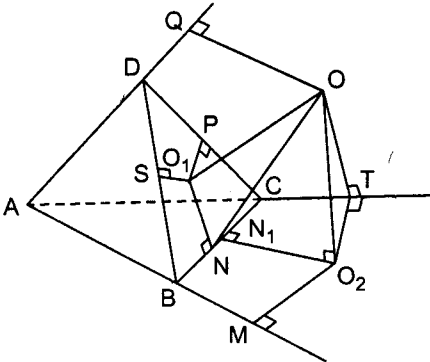
Chứng minh. Điều kiện cần : Giả sử (S_0) là mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, DB lần lượt tại N, P, S ; và (S_0) tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA lần lượt tại M, T, Q (h. 1).

Khi đó ta có $BS = BN = BM = x$, $CN = CT = CP = y$, $DQ = DP = DS = z$, $AQ = AM = AT = t$. Từ đó $BC - AD = (x + y) - (t - z) = x + y + z - t$ và $DB - AC = (x + z) - (t - y) = x + y + z - t$. Suy ra $BC - AD = DB - AC$. Tương tự cũng có $BC - AD = CD - AB$. Vậy $BC - AD = DB - AC = CD - AB$ (đpcm).



Hình 1

Điều kiện đủ. Giả sử $BC - AD = DB - AC = CD - AB$. Đường tròn nội tiếp tam giác BCD (tâm O_1) tiếp xúc với BC tại N , đường tròn bàng tam giác ABC (tâm O_2) ứng với đỉnh A tiếp xúc với BC tại N_1 (h. 2).



Hình 2

Ta chứng minh N trùng với N_1 . Thật vậy do $DB - AC = CD - AB$ suy ra $BC + BD - CD = AC + BC - AB$ nên $2BN = BC + BD - CD = (AB + AC + BC) - 2AB = 2(AM - AB)$. Vậy $BN = BM = BN_1$ hay N trùng với N_1 . Xét

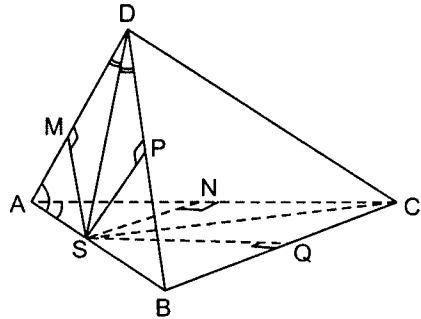
đường tròn ngoại tiếp ΔO_1NO_2 với đường kính là NO , lúc đó $NO_1 \perp OO_1$ và $NO_2 \perp OO_2$ (1). Mặt khác do $BC \perp NO_1$, $BC \perp NO_2$ nên $BC \perp mp(NO_1OO_2)$, suy ra $BC \perp OO_1$ và $BC \perp OO_2$ (2). Từ (1), (2) suy ra $OO_1 \perp mp(BCD)$ và $OO_2 \perp mp(ABC)$, Vậy O cách đều các đường thẳng BC, CD, DB, AC, AB . Tương tự nếu gọi O_3 là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ACD (ứng với đỉnh A) thì cũng có $OO_3 \perp mp(ADC)$. Từ đó O cách đều các đường thẳng AD, AC, CD . Vậy O là tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, DB, CD đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA (đpcm).

Hệ quả. Với tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$) luôn tồn tại mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, DB và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA .

Mệnh đề 2. Điều kiện cần và đủ để tồn tại một mặt cầu có tâm nằm trên cạnh AB của tứ diện $ABCD$ đồng thời tiếp xúc với các cạnh AC, AD, BC, BD là $AC = AD$ và $BC = BD$.

Chứng minh. Điều kiện cần : Giả sử mặt cầu tâm S , với S nằm trên cạnh AB , tiếp xúc với các cạnh AD, AC, BD, BC lần lượt tại M, N, P, Q (h. 3).

Vì $BP = BQ$, $SP = SQ$ nên $\Delta SBP = \Delta SBQ$, suy ra $\widehat{SBD} = \widehat{SBC}$. Tương tự, ta cũng có $\widehat{SAD} = \widehat{SAC}$. Vậy $\Delta ABD = \Delta ABC$, suy ra $AD = AC$ và $BD = BC$.



Hình 3

Điều kiện đủ. Giả sử $AD = AC$ và $BD = BC$ khi đó $\Delta ABD = \Delta ABC$ suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{CAB}$ (3). Đường phân giác trong của góc $\widehat{ADB}$ cắt AB tại

S thì $\frac{SA}{SB} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ suy ra CS là đường phân giác trong của góc $\widehat{ACB}$. Dựng SM, SN, SP, SQ lần lượt vuông góc với các cạnh AD, AC, BD, BC thì từ (3) có $\triangle AMS = \triangle ANS$. Từ đó $SM = SN = SP = SQ$ nên S là tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh AD, AC, BD, BC (đpcm).

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng hai mệnh đề trên để giải một số bài toán liên quan đến hai mệnh đề này.

Bài toán 1. Cho tứ diện gần đều ABCD ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$) và một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, BD, đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA. Gọi d_1, d_2, d_3, d_4 theo thứ tự là khoảng cách từ tâm mặt cầu này đến các mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD), (BCD) còn r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD. Chứng minh rằng

$$d_1 + d_2 + d_3 - d_4 = 4r.$$

Lời giải. (xem hình 2) (Sự tồn tại của mặt cầu tâm O ở bài ra được suy trực tiếp từ hệ quả mệnh đề 1). Do ABCD là tứ diện gần đều nên

$$S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ACD} = S_{BCD} = S \text{ và}$$

$$S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD} = 4S. \text{ Ta có}$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{OABC} + V_{OABD} + V_{OACD} - V_{OBCD} \\ &= \frac{1}{3}d_1S_{ABC} + \frac{1}{3}d_2S_{ABD} + \frac{1}{3}d_3S_{ACD} - \frac{1}{3}d_4S_{BCD} \\ &= \frac{S}{3}(d_1 + d_2 + d_3 - d_4). \end{aligned}$$

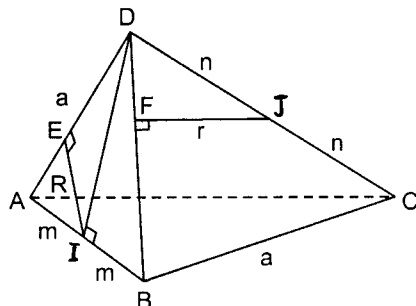
$$\text{Suy ra } d_1 + d_2 + d_3 - d_4 =$$

$$\frac{3V_{ABCD}}{S} = 4 \left(\frac{3V_{ABCD}}{4S} \right) = 4r \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 2. Giả sử mặt cầu tâm I thuộc cạnh AB, bán kính R tiếp xúc với các cạnh AC, AD, BC và BD; mặt cầu tâm J thuộc cạnh CD, bán kính r tiếp xúc với các cạnh CA, CB, DA, DB của khối tứ diện ABCD. Chứng minh hệ thức

$$\frac{AB^4}{CD^4} = \frac{AB^2 - 4R^2}{CD^2 - 4r^2}.$$

Lời giải. (Hình 4). Áp dụng mệnh đề 2 ta có $AC = AD$ và $BC = BD$ (xét đối với mặt cầu tâm I); $CA = CB$ và $AD = BD$ (xét đối với mặt cầu tâm J) do đó $AC = AD = BC = BD = a$. Từ đó I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.



Hình 4

Dựng $IE \perp AD, JE \perp BD$ thì $IE = R, JF = r$. Giả sử $AB = 2m, CD = 2n$, lúc đó từ $IE \cdot AD = DI \cdot AI$ có $R \cdot a = m\sqrt{a^2 - m^2} \Leftrightarrow R^2 a^2 = m^2 a^2 - m^4$ (1)
Tương tự có

$$r \cdot a = n\sqrt{a^2 - n^2} \Leftrightarrow r^2 a^2 = n^2 a^2 - n^4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } \frac{m^4}{n^4} = \frac{m^2 - R^2}{n^2 - r^2}, \text{ suy ra hệ}$$

thức cần chứng minh.

Để kết thúc bài báo mời các bạn tiếp tục nghiên cứu một số kiểu tiếp xúc của mặt cầu với đường thẳng chứa các cạnh của khối đa diện thông qua các bài tập sau.

Bài 1. Cho tứ diện ABCD thỏa mãn các điều kiện của mệnh đề 1. Tìm một hệ thức liên hệ giữa số đo các góc nhị diện cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD của tứ diện đó.

Bài 2. Tìm điều kiện để tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau từng đôi một (tứ diện trực tâm), có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, BD và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA.

Bài 3. Tồn tại hay không một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh đáy, đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia AS, BS, CS, DS của hình chóp tứ giác đều S.ABCD?

Bài 4. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = a, AC = BD = b, BC = AD = c$. Tìm bán kính của mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, BD và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA.

VÀI ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ CON NHÍM

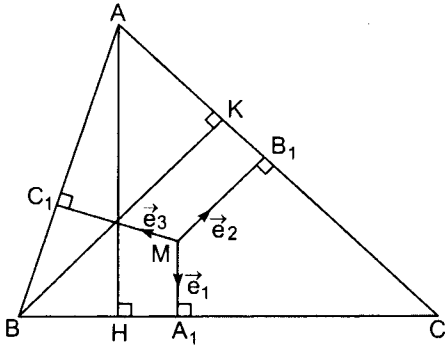
LUU HÙNG

Trong hình học phẳng, định lý con nhím đối với tam giác có dạng như sau.

Định lý. Cho tam giác ABC , gọi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là các vectơ đơn vị hướng từ một điểm bên trong tam giác đó ra phía ngoài tam giác và $\vec{e}_1 \perp \overrightarrow{BC}$, $\vec{e}_2 \perp \overrightarrow{CA}$, $\vec{e}_3 \perp \overrightarrow{AB}$ thì ta có

$$BC\vec{e}_1 + CA\vec{e}_2 + AB\vec{e}_3 = \vec{0} \quad (1)$$

Chứng minh. Lấy điểm M nào đó nằm bên trong $\triangle ABC$. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của M xuống các cạnh BC, CA, AB thì $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tương ứng cùng chiều với $\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MC_1}$. Gọi AH, BK là các đường cao của $\triangle ABC$ (h.1).



Hình 1

Đặt $\vec{u} = BC\vec{e}_1 + CA\vec{e}_2 + AB\vec{e}_3$.

Theo giả thiết $\vec{e}_1 \perp \overrightarrow{BC}$, $\vec{e}_2 \perp \overrightarrow{CA}$, $\vec{e}_3 \perp \overrightarrow{AB}$ nên

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} &= BC\vec{e}_1 \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + CA\vec{e}_2 \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= BC\vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{AC} + CA\vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= BC.AH.\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}) - CA.CB.\cos(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}) \\ &= BC.AH - CA.BK \\ &= 2S_{ABC} - 2S_{ABC} = 0. \end{aligned}$$

Tương tự có $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Ba đẳng thức này xảy ra chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$. (đpcm).

Định lý trên đối với tam giác trong hình học phẳng có thể khái quát hoá đối với tứ diện trong hình học không gian như sau.

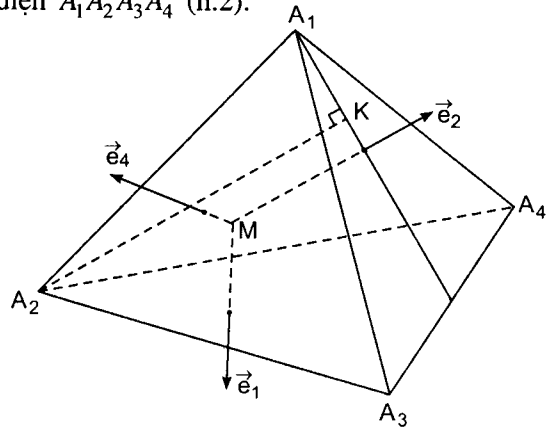
1. Định lý con nhím đối với tứ diện

Định lý 1. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là diện tích mặt đối diện đỉnh A_i ; gọi $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) là các vectơ đơn vị vuông góc với mặt đối diện đỉnh A_i và hướng từ một điểm bên trong tứ diện đó ra phía ngoài tứ diện, thì ta có

$$S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + S_3\vec{e}_3 + S_4\vec{e}_4 = \vec{0} \quad (2)$$

Vì các vectơ $\vec{e}_i$ có tính chất như trên nên người ta thường gọi định lý này là định lý con nhím.

Chứng minh. Gọi A_2K là đường cao của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ (h.2).



Hình 2

Đặt vế trái của (2) là $\vec{u}$. Ta sẽ chứng minh $\vec{u} \perp mp(A_1A_2A_3)$. Chú ý rằng $\vec{e}_1 \perp \overrightarrow{A_2A_3}$; $\vec{e}_2$ và $\vec{e}_4$ đều vuông góc với $\overrightarrow{A_1A_3}$; $\vec{e}_3$ và $\vec{e}_4$ đều vuông góc với $\overrightarrow{A_1A_2}$ nên

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{A_2A_3}$$

$$= (S_2\vec{e}_2 + S_3\vec{e}_3 + S_4\vec{e}_4)(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1A_3})$$

$$= S_2\vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{A_2A_1} + S_3\vec{e}_3 \cdot \overrightarrow{A_1A_3}.$$

Ta có

$$S_2\vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = S_2 \cdot A_1A_2 \cdot \cos(\vec{e}_2, \overrightarrow{A_2A_1})$$

$$= S_2 \cdot A_1A_2 \cdot \cos(\overrightarrow{A_2K}, \overrightarrow{A_2A_1})$$

$$= S_2 \cdot A_2K = 3V.$$

trong đó V là thể tích tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

Tương tự cũng có $S_3 \cdot \vec{e}_3 \cdot \overrightarrow{A_3A_1} = 3V$, do đó $\vec{u} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = 3V - 3V = 0$, nên $\vec{u} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$. Tương tự cũng chứng minh được $\vec{u} \perp \overrightarrow{A_1A_2}$, suy ra $\vec{u} \perp \text{mp}(A_1A_2A_3)$.

Bằng lập luận tương tự cũng suy ra $\vec{u}$ vuông góc với cả bốn mặt của tứ diện. Điều này xảy ra chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$ (đpcm).

Sau đây ta sẽ áp dụng định lí con nhím để chứng minh một số tính chất của tứ diện.

2. Định lí côsin đối với tứ diện

Định lí 2. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là diện tích mặt đối diện đỉnh A_i , còn α_{ij} là góc nhị diện trong tương ứng với cạnh A_iA_j thì ta có

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3 \cos \alpha_{23} - 2S_2S_4 \cos \alpha_{24} - 2S_3S_4 \cos \alpha_{34} \quad (3)$$

Trong bài báo Công thức côsin trên THPT số 90 tháng 3.1976 đã nêu một cách tìm ra công thức này dựa trên định lí côsin trong tam giác. Ở đây nếu áp dụng định lí 2 ta có lời giải ngắn gọn như sau.

Chứng minh. Viết (2) trong dạng

$$S_1\vec{e}_1 = -S_2\vec{e}_2 - S_3\vec{e}_3 - S_4\vec{e}_4$$

Bình phương hai vế của hệ thức trên và chú ý rằng $\cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -\cos \alpha_{ij}$ với mọi $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ i khác j , ta được công thức (3).

3. Hệ thức về các đường cao của một tứ diện

Định lí 3. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là các đường cao của tứ diện xuất phát từ đỉnh A_i , còn α_{ij} là góc nhị diện trong tương ứng với cạnh A_iA_j thì ta có :

$$a) \frac{1}{h_1} = \frac{1}{h_2} \cos \alpha_{12} + \frac{1}{h_3} \cos \alpha_{13} + \frac{1}{h_4} \cos \alpha_{14} \quad (4)$$

$$b) \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} - \frac{2}{h_1h_2} \cos \alpha_{12}$$

$$= \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} - \frac{2}{h_3h_4} \cos \alpha_{34} \quad (5)$$

Chứng minh. a) Viết (2) trong dạng

$$S_1\vec{e}_1 = -S_2\vec{e}_2 - S_3\vec{e}_3 - S_4\vec{e}_4$$

Lấy tích vô hướng cả hai vế của hệ thức trên với $\vec{e}_1$, chú ý rằng nếu i khác j thì $\cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -\cos \alpha_{ij}$, ta có

$$S_1 = S_2 \cos \alpha_{12} + S_3 \cos \alpha_{13} + S_4 \cos \alpha_{14} \quad (6)$$

Gọi V là thể tích tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, thay

$S_i = \frac{3V}{h_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) vào (6) rồi chia cả hai vế cho $3V$ ta được (4).

b) Lại viết (2) trong dạng

$$S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 = -S_3\vec{e}_3 - S_4\vec{e}_4 \quad (7)$$

Bình phương hai vế rồi sử dụng $S_i = \frac{3V}{h_i}$

($i = 1, 2, 3, 4$) ta được (5).

4. Các hệ thức trong tứ diện có góc tam diện ba mặt vuông

Định lí 4. Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ tam diện đỉnh A_1 có ba mặt vuông. Gọi S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là diện tích các mặt đối diện đỉnh A_i và S'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) tương ứng là diện tích hình chiếu của S_i lên mặt $A_1A_2A_3A_4$ thì ta có :

$$a) S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 \quad (8)$$

$$b) S_i^2 = S_1S'_i \text{ với } i = 2, 3, 4 \quad (9)$$

Chứng minh.

Chú ý rằng $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}_4) = (\vec{e}_3, \vec{e}_4) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

a) Từ (3) suy ra (8). Cũng có thể chứng minh trực tiếp như cách chứng minh định lí 2.

b) Viết (2) trong dạng (7) rồi bình phương hai vế, thay $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_4 = 0$ ta có

$$S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = S_3^2 + S_4^2.$$

Áp dụng (8) được

$$2S_2^2 = 2S_1S_2 \cos \alpha_{12} = 2S_1 \cdot S_2' \Rightarrow S_2^2 = S_1S_2'.$$

Tương tự cũng có $S_3^2 = S_1 \cdot S_3'$ và $S_4^2 = S_1 \cdot S_4'$.

5. Các điều kiện tương đương của tứ diện gần đều.

Chắc các bạn đã biết mệnh đề : Một tứ diện là gần đều khi và chỉ khi diện tích các mặt là bằng nhau. (Xem tính chất 4 trong bài *Tứ diện gần đều*).

Sau đây xin nêu thêm hai điều kiện tương đương với tính chất trên của tứ diện gần đều.

Định lí 5. Một tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có diện tích các mặt đều bằng nhau khi và chỉ khi các vectơ đơn vị $\vec{e}_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$ vuông góc với mặt đối diện đỉnh A_i và hướng từ một điểm nằm trong tứ diện ra phía ngoài, có tổng $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 = \vec{0}$.

Chứng minh.

Điều kiện cần. Thay $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ vào (2) được $S_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4) = \vec{0}$ mà $S_1 \neq 0$ nên $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 = \vec{0}$.

Điều kiện đủ. Theo giả thiết $\vec{e}_4 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Mặt khác từ (2) có

$$\vec{e}_4 = -\frac{S_1}{S_4} \vec{e}_1 - \frac{S_2}{S_4} \vec{e}_2 - \frac{S_3}{S_4} \vec{e}_3$$

Do đó

$$\left(1 - \frac{S_1}{S_4}\right) \vec{e}_1 + \left(1 - \frac{S_2}{S_4}\right) \vec{e}_2 + \left(1 - \frac{S_3}{S_4}\right) \vec{e}_3 = \vec{0}$$

mà ba vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ không đồng phẳng nên $\vec{e}_1$ không biểu thị tuyến tính được qua $\vec{e}_2, \vec{e}_3$, suy ra $\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_4} = \frac{S_3}{S_4} = 1$, dẫn đến

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \text{ (đpcm).}$$

Đặt T là tổng tất cả các cosin của các nhị diện trong của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Sử dụng hệ thức

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)^2 = 4 - 2T \Leftrightarrow T = 2$$

$$\text{hay là } \cos \alpha_{12} + \cos \alpha_{13} + \cos \alpha_{14} + \cos \alpha_{23} + \cos \alpha_{24} + \cos \alpha_{34} = 2$$

thì ta có

Định lí 6. Tứ diện có diện tích các mặt đều nhau khi và chỉ khi tổng tất cả cosin các nhị diện trong của tứ diện bằng 2.

6. Một tính chất của tứ diện trực tâm

Tứ diện gọi là tứ diện trực tâm khi các đường cao đồng quy.

Định lí 7. Trong tứ diện trực tâm $A_1A_2A_3A_4$ với trực tâm H nằm trong tứ diện. Gọi $V_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ là thể tích hình chóp đỉnh H với đáy là mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện thì ta có

$$V_1 \overrightarrow{HA_1} + V_2 \overrightarrow{HA_2} + V_3 \overrightarrow{HA_3} + V_4 \overrightarrow{HA_4} = \vec{0}. \quad (9)$$

Chứng minh. Gọi $A_iH_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$ là các đường cao của tứ diện và chúng cắt nhau tại điểm H thì có $\overrightarrow{HA_i} = HA_i \vec{e}_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$. Để thấy rằng trong tứ diện trực tâm với trực tâm H thì $\overrightarrow{HH_1} \cdot \overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{HH_2} \cdot \overrightarrow{HA_2} = \overrightarrow{HH_3} \cdot \overrightarrow{HA_3} = \overrightarrow{HH_4} \cdot \overrightarrow{HA_4}$

nên từ (2) có $\sum_{i=1}^4 S_i \cdot \overrightarrow{HH_i} \cdot \overrightarrow{HA_i} \vec{e}_i = \vec{0}$, mà $3V =$

$$S_i \cdot \overrightarrow{HH_i} \ (i = 1, 2, 3, 4) \text{ nên } \sum_{i=1}^4 V_i \overrightarrow{HA_i} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$

Định lí 7 gợi ý cho ta mở rộng kết quả này cho tứ diện thường với M là một điểm bất kì nằm trong tứ diện và $V_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$ là thể

tích hình chóp đỉnh M với đáy là mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện.

Dưới đây xin nêu một số bài tập để luyện tập thêm về định lí con nhím.

Bài 1. Tìm các cách chứng minh định lí con nhím đối với tam giác trong hình học phẳng. Hãy xét trực tâm của tam giác để có định lí tương tự định lí 7 nêu trên.

Bài 2. Dùng định lí con nhím trong hình học phẳng để chứng minh định lí cosin trong tam giác và tìm lại các hệ thức trong tam giác vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC , trên các cạnh AB , BC dựng cùng ra phía ngoài (hoặc cùng vào phía trong) hai hình vuông ABB_1B_2 và ACC_1C_2 . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và trung điểm của B_2C_2 thì vuông góc với BC .

Bài 4. Chứng minh định lí con nhím trong đa giác lồi bằng cách chia đa giác thành các tam giác, rồi dùng kết quả này chứng minh định lí con nhím trong lăng trụ đa giác.

Bài 5. Chứng minh rằng tổng tất cả các góc nhị diện trong của một tứ diện lớn hơn 2π và nhỏ hơn 3π .

Bài 6. Trong tứ diện bất kì gọi h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh A_i xuống mặt đối diện và gọi α_{ij} là các góc nhị diện trong ứng với cạnh A_iA_j . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} \right) \\ &= \frac{\cos \alpha_{12}}{h_1 h_2} + \frac{\cos \alpha_{13}}{h_1 h_3} + \frac{\cos \alpha_{14}}{h_1 h_4} + \\ &+ \frac{\cos \alpha_{23}}{h_2 h_3} + \frac{\cos \alpha_{24}}{h_2 h_4} + \frac{\cos \alpha_{34}}{h_3 h_4}. \end{aligned}$$

PHÁT TRIỂN MỘT BÀI TOÁN

PHẠM ĐĂNG LONG (ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Chắc chắn rằng nhiều bạn đã biết bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho một điểm P trên đường phân giác trong của một góc xOy ($0^\circ < \widehat{xOy} < 180^\circ$; P khác điểm O). Một cát tuyến p qua P cắt Ox , Oy lần lượt tại A , B . Chứng minh rằng tổng

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$$

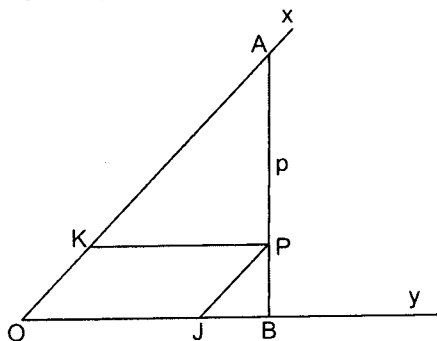
là không đổi khi cát tuyến p di động.

Từ bài toán này chúng ta có thể thiết lập một số bài toán khác.

Nếu ta bỏ giả thiết điểm P trên đường phân giác trong và lấy điểm P cố định nằm trong góc xOy thì kết quả như thế nào?

Vẽ đường thẳng qua P song song với Ox cắt Oy tại J và đường thẳng qua P song song với Oy cắt Ox ở K (h.1) thì theo định lí Thales có

$$\frac{OK}{OA} + \frac{OJ}{OB} = \frac{PB}{AB} + \frac{PA}{AB} = 1 \quad (1)$$



Hình 1

Như vậy ta được bài toán sau:

Bài toán 2. Cho một điểm P nằm trong góc xOy ($\widehat{xOy} < 180^\circ$; P không thuộc Ox , Oy). Một cát tuyến p đi qua P cắt Ox , Oy lần lượt tại A , B . Chứng minh rằng tồn tại hai số α , β để

$\frac{\alpha}{OA} + \frac{\beta}{OB}$ không đổi khi p di động nhưng luôn đi qua P . là $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

Lời giải. Thật vậy, nếu thay $OK = \alpha d$, $OJ = \beta d$ vào (1) trong đó d là một đơn vị độ dài cho trước, thì ta được $\frac{\alpha}{OA} + \frac{\beta}{OB} = \frac{1}{d}$.

Đặc biệt nếu cho $OK = OJ = OP$ thì ta còn được một đẳng thức rất lí thú là

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OP}.$$

Điều đó chỉ có thể xảy ra khi P nằm trên tia phân giác của góc $\widehat{xOy} = 120^\circ$. Chính vì thế mà ta có bài toán sau (Bạn đọc tự chứng minh).

Bài toán 3. Cho góc $\widehat{xOy} = \alpha$ với P là một điểm cố định thuộc đường phân giác trong Oz của góc đó (P khác O). Một cát tuyến p qua P cắt Ox , Oy lần lượt tại A , B . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OP}$$

là $\alpha = 120^\circ$.

Bạn đọc có thể tự phát triển các bài toán này cho trường hợp điểm P thuộc phân giác ngoài nói riêng và P nằm ngoài một góc nói chung.

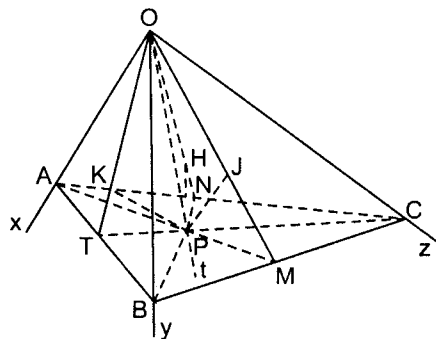
Kết quả của ba bài toán trên có thể phát triển cho góc tam diện như sau.

Bài toán 4. Cho một góc tam diện đều $Oxyz$ với $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \widehat{zOx} = \alpha$ và một điểm P cố định (P khác O) nằm trên tia Ot cách đều ba tia Ox , Oy , Oz . Một mặt phẳng $\mathcal{P}$ đi qua P cắt Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C . Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC}$ không đổi khi $\mathcal{P}$ thay đổi nhưng luôn đi qua P .

b) Điều kiện cần và đủ để

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OP}$$



Hình 2

Lời giải.

• Giả sử mặt phẳng (OAP) cắt BC tại M , đường thẳng qua P song song với OA cắt OM tại J . Mặt phẳng (OBP) cắt AC tại N , đường thẳng qua P song song với OB cắt ON tại H . Mặt phẳng (OCP) cắt AB tại T , đường thẳng qua P song song với OC cắt OT tại K (h.2). Khi đó sử dụng định lí Thales ta có

$$\frac{PJ}{OA} + \frac{PH}{OB} + \frac{PK}{OC} = \frac{PM}{AM} + \frac{PN}{BN} + \frac{PT}{CT}$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned} \frac{PM}{AM} + \frac{PN}{BN} + \frac{PT}{CT} &= \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{nên } \frac{PJ}{OA} + \frac{PH}{OB} + \frac{PK}{OC} = 1 \quad (2)$$

• Khi cho mặt phẳng $\mathcal{P}$ vuông góc với OP và cắt Ox , Oy , Oz tương ứng tại A_1, B_1, C_1 thì từ giả thiết ta có tứ diện $O.A_1B_1C_1$ là hình chóp tam giác đều với $OA_1 = OB_1 = OC_1 = 3d$, P là trọng tâm tam giác đều ABC , do đó

$$\frac{PJ}{OA_1} = \frac{PM}{A_1M} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{PH}{OB_1} = \frac{1}{3} = \frac{PT}{OC_1}.$$

Chú ý rằng khi mặt phẳng $\mathcal{P}$ thay đổi mà vẫn đi qua P thì các điểm J, H, K cố định nên

$$PJ = PH = PK = d.$$

Từ đó và (2) có

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{d} \quad (3) \text{ là không đổi.}$$

• Giả sử có $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OP}$ thì từ (3)

có $OP = d = \frac{OA_1}{3}$, trong đó $OP \perp PA_1$. Từ đó

tính được $PA_1 = 2\sqrt{2}d$ và $B_1C_1 = 2\sqrt{6}d$. Áp dụng định lí cosin cho tam giác OB_1C_1 có

$$B_1C_1^2 = OB_1^2 + OC_1^2 - 2OB_1 \cdot OC_1 \cos \alpha \quad \text{hay}$$

$$24d^2 = 18d^2 - 18d^2 \cos \alpha, \text{ suy ra } \cos \alpha = -\frac{1}{3}.$$

• Ngược lại nếu $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ ta tính được

$B_1C_1 = 2\sqrt{6}d$, suy ra $OP = d$, thay vào (3) được

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OP}.$$

Từ kết quả trên ta có bài toán sau.

Bài toán 5. Cho một điểm P nằm trong góc tam diện $Oxyz$. Một mặt phẳng $\mathcal{P}$ đi qua P và cắt Ox, Oy, Oz tương ứng tại A, B, C . Chứng minh rằng tồn tại các số α, β, γ sao cho

$$\frac{\alpha}{OA} + \frac{\beta}{OB} + \frac{\gamma}{OC} \text{ là không đổi khi mặt phẳng}$$

$\mathcal{P}$ thay đổi nhưng luôn đi qua P .

Từ bài toán 1, 2 và 3 ta cũng suy ra các bài toán sau đây đối với góc tứ diện.

Bài toán 6. Cho một góc tứ diện đều $Oxyzt$, một điểm P cố định nằm trong góc tứ diện và cách đều bốn cạnh của góc. Một mặt phẳng $\mathcal{P}$ đi qua P cắt Ox, Oy, Oz, Ot tại A, B, C theo thứ tự.

$$a) \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD}$$

không đổi khi $\mathcal{P}$ thay đổi nhưng luôn đi qua P .

b) Gọi α là số đo một mặt của góc tứ diện đều đã cho. Chứng minh rằng điều kiện cần và

$$\text{đủ để } \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD} = \frac{1}{OP} \quad \text{là}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{16}.$$

Bài toán 7. Cho một góc tứ diện $Oxyzt$ mà các mặt chéo (xOz) và (gOt) cắt nhau theo giao tuyến Os . Điểm P cố định trên Os (P khác O). Chứng minh rằng tồn tại các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ để

$$\frac{\alpha}{OA} + \frac{\beta}{OB} + \frac{\gamma}{OC} + \frac{\delta}{OD} \text{ không đổi, trong đó}$$

A, B, C, D theo thứ tự là giao điểm của Ox, Oy, Oz, Ot với một mặt phẳng $\mathcal{P}$ thay đổi nhưng luôn đi qua P .

Chứng minh. Sử dụng kết quả bài toán 3 vào hai góc $\widehat{xOz}$ và $\widehat{yOt}$.

Trong bài toán 7, ta đã phải hạn chế điểm P nằm trên Os , còn với P tùy ý trong góc tứ diện thì không phải là đơn giản. Nói chung tổng quát bài toán trong trường hợp góc đa diện tùy ý thì thật là khó, đặc biệt là đối với góc đa diện có số mặt bên là số lẻ.

Lấy trường hợp góc ngũ diện làm điển hình. Ta có bài toán sau.

Bài toán 8. Cho một hình chóp ngũ giác đều $S.A_0B_0C_0D_0E_0$ với điểm P là tâm của đáy (chân đường cao). Một mặt phẳng $\mathcal{P}$ đi qua P và cắt các tia $SA_0, SB_0, SC_0, SD_0, SE_0$ tương ứng tại A, B, C, D, E . Phải chăng

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SB} + \frac{1}{SC} + \frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} \text{ là không đổi khi}$$

$\mathcal{P}$ thay đổi nhưng luôn đi qua P ?

$$\frac{\alpha_o OA_o}{OA} + \frac{\beta_o OB_o}{OB} + \frac{\gamma_o OC_o}{OC} + \frac{\delta_o OD_o}{OD} + \frac{\lambda_o OE_o}{OE} \\ = \alpha_o + \beta_o + \gamma_o + \delta_o + \lambda_o,$$

và $\alpha_o + \beta_o + \gamma_o + \delta_o + \lambda_o$ là không đổi (đpcm).

Cuối cùng ta đi đến bài toán tổng quát sau.

Bài toán 10. Cho góc đa diện lồi $Ox_1x_2...x_n$ ($n \geq 3$) và một điểm P nằm trong góc đa diện đó. Một mặt phẳng $\mathcal{P}$ đi qua P cắt Ox_i ($i = 1, 2, ..., n$) tại A_i . Chứng minh rằng :

a) Tồn tại các số thực α_i ($i = 1, 2, ..., n$) sao cho

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{OA_i} \text{ là không đổi}$$

b) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{OA_i}$ là không đổi khi góc đa diện là đều.

c) Đối với góc đa diện đều có số đo mỗi mặt là φ , điều kiện cần và đủ để

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{OA_i} = \frac{1}{OP}$$

$$\text{là } \cos \varphi = \frac{1 + (n^2 - 1) \cos \frac{2\pi}{n}}{n^2}.$$

Bạn đọc hãy dùng các phương pháp nêu trong các bài toán 4, 8, 9 để chứng minh bài toán 10. Đặc biệt hoá bài toán 10 ta sẽ có được nhiều bài toán lí thú và bổ ích.

Phân một : ĐỀ BÀI

SỐ HỌC

Bài 1 (T6/220). Cho trước số nguyên tố p và số nguyên dương a với $1 < a \leq p - 1$. Giả sử

$$A = \sum_{k=0}^{p-1} a^k.$$

Chứng minh rằng với mọi ước nguyên tố q của A ta đều có $q - 1$ chia hết cho p .

Bài 2 (T1/221). Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho số 1995 bằng tổng của n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ trong đó các số a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) đều là hợp số.

Bài 3 (T2/222). Cho a, b, c là ba số hữu tỉ thoả mãn :

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a, b, c là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 4 (T8/225). Cho dãy số (b_n) , ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi : $b_1 = 0, b_2 = 14, b_3 = -18$ và $b_{n+1} = 7b_{n-1} - 6b_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p ta luôn có b_p chia hết cho p .

Bài 5 (T2/226). Giải phương trình nghiệm nguyên

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2} - 2x.$$

Bài 6 (T3/226). Tìm tất cả các số tự nhiên a để phương trình

$$x^2 - a^2x + a + 1 = 0$$

có nghiệm nguyên.

Bài 7 (T6/226). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ($n \geq 2$) ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^1$$

chia hết cho 4^{n-1} .

Bài 8 (T1/228). Tìm các số tự nhiên m, n để $A = 3^{3m^2+6n-61} + 4$ là số nguyên tố.

Bài 9 (T3/228). Tìm các nghiệm nguyên $(x; n)$ của phương trình

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = n.$$

Bài 10 (T6/228). Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng với mọi số m nguyên không âm bất kì, tồn tại một đa thức $Q(x)$ có hệ số

nguyên sao cho p^m là ước chung lớn nhất của tất cả các số

$$a_n = (p+1)^n + Q(n) \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

Bài 11 (T1/233). Cho dãy số nguyên $(a_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$ thoả mãn

$$a_{n+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n) \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

Chúng tỏ rằng tồn tại số nguyên M không phụ thuộc vào n sao cho $M + 4a_{n+1} a_n$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 12 (T1/237). Cho số A có 1997 chữ số trong đó có 1996 chữ số 5 và một chữ số khác 5. Hỏi A có thể là số chính phương hay không?

Bài 13 (T5/239). Cho dãy số $(a_n), (n = 1, 2, \dots)$ được xác định bởi

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Tìm tất cả các giá trị của n để a_n là số chính phương.

Bài 14 (T6/239). Chứng minh rằng nếu một cấp số nhân có n số hạng ($n \geq 3$) là các số tự nhiên phân biệt và công bội cũng là một số tự

nhiên thì tổng của tất cả n số hạng đó không thể là lũy thừa của 5.

Bài 15 (T2/240). Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy.$$

Bài 16 (T7/240). Xét dãy số hữu tỉ $(a_n), (n = 1, 2, \dots)$ thoả mãn

$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Tìm tất cả các số hữu tỉ a_1 để tồn tại các số m, n phân biệt sao cho $a_m = a_n$.

Bài 17 (T7/241). Tìm các số nguyên tố x, y thoả mãn phương trình

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \dots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = y \text{ trong đó về trái có } x^3 - 1 \text{ số hạng. (kí hiệu } [a] \text{ là số nguyên lớn nhất không vượt quá } a).$$

Bài 18 (T6/242). Giả sử x và y là các số nguyên dương sao cho $x^2 + y^2 + 6$ chia hết cho

$$xy. \text{ Chứng minh rằng } \frac{x^2 + y^2 + 6}{xy} \text{ là lập phương của một số tự nhiên.}$$

ĐẠI SỐ

Bài 19 (T8/219). Cho các số không âm x, y, z thoả mãn điều kiện $x + y + z = 1$, và $n \in \mathbb{N}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^n y + y^n z + z^n x.$$

Bài 20 (T3/221). Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

trong đó a, b, c là các số dương.

Bài 21 (T8/221). Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}.$$

Bài 22 (T7/222). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3z^2 x - 3z + z^3 = 0 \\ y - 3x^2 y - 3x + x^3 = 0 \\ z - 3y^2 z - 3y + y^3 = 0. \end{cases}$$

Bài 23 (T3/223). Chứng minh bất đẳng thức sau với $n \geq 5$:

$$1,71 < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1,72.$$

Bài 24 (T7/224). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với các hệ số thực và thoả mãn :

$$P(0) = 0, P(x^3 + 1) = P^3(x) + 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 25 (T7/225). Cho hàm số $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Đặt $A_1 = \{x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x\}$; $A_2 = \{x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) = x\}$. Giả sử $A_2 \setminus A_1$ là một tập hợp hữu hạn và tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(x)) = \varphi(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng số phần tử của $A_2 \setminus A_1$ là một số nguyên chia hết cho 4.

Bài 26(T8/226). Cho a, b, c, d, e, f là sáu số thực thoả mãn điều kiện

$$ab + bc + cd + de + ef = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \geq \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{7}}.$$

Bài 27 (T3/227). Hãy tìm các giá trị x, y, z, t để biểu thức

$$A = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó $\{x, y, z, t\} = \{1930, 1945, 1975, 1995\}$.

Bài 28 (T7/227). Cho dãy (a_n) , $(n = 0, 1, 2, \dots)$ được xác định như sau :

$$a_0 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, a_{n+1} = a_n(4a_n^2 - 10a_n + 5)^2 \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \dots$$

Tìm số hạng tổng quát a_n .

Bài 29 (T2/228). Tìm nghiệm dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^{1996} \\ x_2 + x_3 = x_4^{1996} \\ \dots \\ x_{1995} + x_{1996} = x_1^{1996} \\ x_{1996} + x_1 = x_2^{1996} \end{cases}$$

Bài 30 (T7/228). Giải phương trình

$$729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36.$$

Bài 31 (T7/230). Giả sử a, b, c là ba số dương, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1}.$$

Bài 32 (T7/231). Tìm tất cả các hàm số

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ thoả mãn}$$

$$f((x+1).f(y)) = y(f(x)+1) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 33 (T6/232). Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - mx - y = 0 \\ y^3 - my + x = 0 \end{cases}$$

có năm nghiệm.

Bài 34(T8/232). Xét song ánh $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, chứng minh rằng tồn tại vô số bộ (a, b, c) với $a, b, c \in \mathbb{N}$ thoả mãn điều kiện $a < b < c$ và $2f(b) = f(a) + f(c)$.

Bài 35 (T7/233). Cho đa thức

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 1.$$

$$\text{Hãy tính tổng } S = \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2}$$

ở đó n là số nghiệm và x_i ($i = 1, \dots, n$) là các nghiệm của đa thức $f(x)$.

Bài 36 (T8/233). Cho ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$1) |a + b + c - abc| \leq 2$$

$$2) |a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \leq 2\sqrt{2}.$$

Bài 37 (T2/234). Cho các số dương a, b, c và các số x, y, z thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a(x+b) + b(y+c) + c(z+a) < 1.$$

Bài 38 (T6/235). Tìm hằng số dương C nhỏ nhất sao cho với n số dương bất kì $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta đều có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} < C \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Bài 39 (T7/235). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1}$$

với $a, b, c, d \in [0; 1]$.

Bài 40 (T8/235). Cho hai đa thức hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$, trong đó $P(x)$ là đa thức bậc ba tùy ý, $Q(x)$ là tam thức bậc hai không có nghiệm thực. Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có ba điểm uốn thì ba điểm uốn của nó nằm trên một đường thẳng.

Bài 41 (T3/236). Cho $2n$ số $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ thoả mãn :

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$$2) b_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{Đặt } m = \min_{1 \leq i \leq n} \{a_j - a_i; a_1\}, M = \max_{1 \leq i \leq n} \{b_i\}.$$

Chứng minh rằng

$$M(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq \frac{m}{2} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2.$$

Bài 42 (T6/238). Cho dãy số thực (x_n) , ($n = 1, 2, \dots$) được xác định như sau :

$$x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5} < x_{n+1} < 2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Bài 43 (T7/238). Hãy xác định tất cả các bộ ba số thực (a, b, c) sao cho hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1 \text{ có tính chất } |f(x)| \leq 1 \text{ với mọi } x \in [-1; 1].$$

Bài 44 (T7/239). Cho $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bcd+2} + \frac{b}{cda+2} + \frac{c}{dab+2} + \frac{d}{abc+2} \leq 1 + \frac{1}{abcd+2}.$$

Bài 45 (T8/239). Biết rằng đa thức $f(x) = x^{2000} + a_1 x^{1999} + \dots + a_{1999} x + a_{2000}$ có 2000 nghiệm thực khác nhau và $a_{1995} = 1995$, $a_{1997} = 1997$. Chứng minh rằng $|a_{1996}| > 1996$.

Bài 46 (T6/240). Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{C_{1997}^1} + \frac{1}{C_{1998}^2} + \dots + \frac{1}{C_{1997+n}^{n+1}} < \frac{1}{1995}.$$

Bài 47 (T2/241). Cho ba số thực không âm x, y, z thoả mãn $x^{1997} + y^{1997} + z^{1997} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 48 (T8/241). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số thực thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh rằng

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_3) + \dots + x_{n-1}(1-x_n) + x_n(1-x_1) \leq \left[\frac{n}{2} \right]$$

trong đó kí hiệu $[a]$ chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

GIẢI TÍCH

Bài 49 (T6/219). Dãy số (a_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ được xác định như sau :

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số (u_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ xác định bởi $u_n = \frac{a_n^\alpha}{n}$ (với mọi $n \geq 1$) là hội tụ và giới hạn của nó khác không.

Bài 50 (T7/221). Cho các dãy (a_n) và (b_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ được xác định như sau :

$$a_n = 1 + \frac{n(1+n)}{1+n^2} + \dots + \frac{n^n(1+n^n)}{1+n^{2n}}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

$$b_n = \left(\frac{a_n}{n+1} \right)^{\frac{1}{n(n+1)}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Bài 51 (T6/225). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước thì phương trình

$$x^{2n+1} = x + 1$$

có đúng một nghiệm thực. Gọi nghiệm ấy là x_n . Hãy tìm $\lim x_n$ khi n dần tới $+\infty$.

Bài 52 (T7/226). Cho phương trình

$$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng phương trình trên có đúng một nghiệm số thực.

b) Đặt $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = \left(x_n^{-\frac{7}{3}} + 1 \right)^{-\frac{3}{13}}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và khi đặt $x_0 = -\lim x_n$ thì x_0 là nghiệm số thực nói trên.

c) Dùng máy tính bỏ túi hãy tính gần đúng nghiệm số thực nói trên đến hai chữ số thập phân.

Bài 53 (T8/228). Giả sử $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$,

trong đó

$$\binom{m}{s} = \frac{m(m-1)\dots(m-s+1)}{1.2\dots s}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3n]{S_n}$.

Bài 54 (T6/229). Cho dãy số (x_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ thỏa mãn $1 < x_1 < 2$ và $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ và tìm giới hạn của nó khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 55 (T7/229). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, có đạo hàm trong $(0; 1)$ và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại một số $c \in (0; 1)$ sao cho $f(c) = 1996f'(c)$.

Hỏi kết luận của bài toán có thay đổi không nếu $f(0) = f(1) = m$, với m là số thực khác 0 cho trước ?

Bài 56 (T8/230). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $|f(x) - f(q)| \leq 5(x - q)^2$ với mọi $q \in \mathbb{Q}$, mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 57 (T6/233). Cho m là số thực dương. Với mỗi n nguyên dương, dãy số thực $(a_{n,i})$, $(i = 0, 1, \dots, n)$ được xác định như sau :

$$a_{n,0} = 1, a_{n,i+1} = a_{n,i} \left(1 + \frac{a_{n,i}}{mn} \right).$$

với $i = 0, 1, \dots, n-1$.

1) Chứng minh rằng nếu $m \leq 1$ thì $a_{n,n} > \sqrt{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Giả sử $n > 1$. Chứng minh rằng

a) $a_{n,n} < \frac{m}{m-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,n} = \frac{m}{m-1}.$$

Bài 58 (T6/236). Cho dãy (a_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ thoả mãn :

$$a_1 = a; a_{n+1} = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1}.$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng, nếu $|a| \geq 2$ thì dãy (a_n) hội tụ và tính giới hạn của dãy khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 59 (T6/241). Cho dãy số (b_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ được xác định bởi :

$$b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = \frac{1}{2} \left(b_n + \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{4^n}} \right)$$

với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy (b_n) là dãy hội tụ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

HÌNH HỌC PHẪNG

Bài 60 (T9/219). Tìm trong tam giác ABC một điểm M sao cho $q = \frac{BC}{MA'} + \frac{CA}{MB'} + \frac{AB}{MC'}$ đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó MA' , MB' và MC' theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các cạnh BC , CA và AB của tam giác.

Bài 61 (T9/221). Giả sử O là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các đường thẳng OA , OB , OC cắt các cạnh BC , CA , AB theo thứ tự ở A' , B' , C' . Tìm tập hợp những điểm O sao cho :

$$S_{OAC'}^2 + S_{OBA'}^2 + S_{OCB'}^2 = S_{OBC'}^2 + S_{OCA'}^2 + S_{OAB'}^2$$

trong đó kí hiệu S_{ABC} là diện tích của tam giác ABC .

Bài 62 (T5/224). Cho hai hình chữ nhật có chu vi bằng nhau. Một hình có các cạnh được tô màu đỏ ; hình kia có các cạnh được tô màu xanh. Người ta chồng hai hình chữ nhật lên nhau sao cho phần giao của chúng là một hình bát giác. Chứng minh rằng hình bát giác có tính chất : tổng độ dài bốn cạnh màu đỏ bằng tổng độ dài bốn cạnh màu xanh.

Bài 63 (T9/224). Gọi a , b , c là độ dài các cạnh BC , CA , AB của một tam giác ABC ; R và r theo thứ tự là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 64 (T10/225). Trong mặt phẳng cho ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ có cạnh bằng a và một đường thẳng Δ . Gọi M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 tương ứng là hình chiếu vuông góc của các đỉnh A_1 , A_2 , A_3 , A_4 và A_5 trên Δ . Chứng minh hệ thức

$$M_1M_2^2 + M_2M_3^2 + M_3M_4^2 + M_4M_5^2 + M_5M_1^2 = \frac{5a^2}{2}.$$

Bài 65 (T10/226). Gọi h_a, h_b, h_c và l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường cao và các đường phân giác ứng với các cạnh có độ dài a , b , c của một tam giác và bán kính các đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác tương ứng là r và R . Chứng minh rằng

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Bài 66 (T10/227). Sử dụng vectơ, hãy chứng minh rằng, đường tròn Euler của một tam giác (đường tròn đi qua ba trung điểm của ba cạnh tam giác) thì tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Bài 67 (T5/230). Cho điểm A cố định trên đường tròn (O) tâm O , bán kính R . Lấy một điểm M nào đó trên đường tròn (O) , tiếp tuyến

với đường tròn tại M cắt tiếp tuyến tại A ở điểm P . Xét đường tròn (O_1) tâm O_1 đi qua M và tiếp xúc với AP tại P . Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì các đường tròn (O_1) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 68 (T4/232). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , gọi M là trung điểm của BC . Trên đường thẳng BC lấy hai điểm I, J đối xứng với nhau qua M . Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AI, AJ với đường tròn (O) và H là trung điểm của EF . Tìm quỹ tích điểm H khi I, J di động trên đường thẳng BC .

Bài 69 (T9/232). Cho bốn điểm A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) cùng nằm trên một đường tròn (O) . Gọi (T_i) là tam giác xác định bởi ba trong bốn điểm trên, trừ điểm A_i . Chứng minh rằng bốn đường tròn Euler của bốn tam giác (T_i) và bốn đường thẳng Simson của các điểm A_i đối với bốn tam giác (T_i) cùng đi qua một điểm.

Bài 70 (T9/233). Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có diện tích S ; các đường cao và trung tuyến tương ứng với các đỉnh A, B, C là h_a, h_b, h_c và m_a, m_b, m_c . Chứng minh rằng :

$$1) a + b + c \geq 2\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt{S}$$

$$2) h_a m_b^4 + h_b m_c^4 + h_c m_a^4 \geq 9\sqrt[4]{3} S^2 \cdot \sqrt{S}.$$

Bài 71 (T5/234). Giả sử M là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC . Chứng minh rằng :

$$MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB$$

$$< 2 \max \{AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB\}.$$

Bài 72 (T9/235). Giả sử M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng của một tam giác ABC . Gọi x, y, z là khoảng cách từ M đến các đỉnh và p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác.

a) Nếu ABC là tam giác đều, chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4(p^2 + q^2 + r^2).$$

b) Nếu ABC là tam giác không đều thì tìm được điểm M sao cho

$$x^2 + y^2 + z^2 > 4(p^2 + q^2 + r^2).$$

Bài 73 (T9/236). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn bán kính r . Gọi $O_1, R_1; O_2, R_2; O_3, R_3$ theo thứ tự là tâm và bán kính các đường tròn tiếp xúc ngoài với (O) , đồng thời tiếp xúc với các cặp tia $AB, AC; BC, BA; CA, CB$ tương ứng. Chứng minh rằng

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r.$$

Bài 74 (T4/237). Giả sử AA', BB', CC' là các đường phân giác trong của tam giác ABC . Gọi L là giao điểm của AA' và $B'C'$, K là giao điểm của CC' và $A'B'$. Chứng minh rằng BB' là phân giác của góc KBL .

Bài 75 (T5/238). Cho tam giác ABC với điểm M nằm trên cạnh BC ; N nằm trên cạnh AC ; P nằm trên cạnh AB . Gọi A_1, B_1, C_1 là các trung điểm tương ứng của AM, BN, CP . Chứng minh rằng tỉ số diện tích của tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác MNP không phụ thuộc vào vị trí các điểm M, N, P .

Bài 76 (T5/239). Cho nửa đường tròn đường kính AB , bán kính R . Lấy điểm C nào đó (khác A, B) trên nửa đường tròn đó. Hạ CH vuông góc với AB . Gọi O_1 và O_2 theo thứ tự là tâm các đường tròn nội tiếp tam giác AHC và BHC . Tìm vị trí của điểm C để đoạn O_1O_2 có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R .

Bài 77 (T9/240). Gọi r và R theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và độ dài các cạnh tam giác là a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2.$$

Bài 78 (T10/240). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b > 0.$$

Một dây cung MN của elip thay đổi sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$.

1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác OMN .

2) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc H của điểm O trên dây cung MN .

Bài 79 (T5/241). Cho tam giác ABC với M là trung điểm cạnh BC và $BC = a$. Chứng minh rằng nếu r, r_1, r_2 theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ABM, ACM thì

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{a} \right).$$

Bài 80 (T9/241). Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC , ta có bất đẳng thức

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \geq (1 + \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C})^2.$$

Bài 81 (T8/242). Trong tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}.$$

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 82 (T10/219). Gọi S là diện tích toàn phần của một tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh là $BC = DA = a, CA = DB = b$ và $AB = DC = c$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} + \frac{1}{a^2 b^2} \leq \frac{9}{S^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 83 (T10/222). Giả sử O là một điểm bất kì ở bên trong của một tứ diện $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 theo thứ tự là hình chiếu của O trên các mặt phẳng $(BCD), (CDA), (DAB)$ và (ABC) sao cho

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 \leq 4r$$

trong đó r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

Bài 84 (T9/223). Mặt phẳng (P) quay xung quanh đường cao SO của một hình chóp ngũ giác đều $S.A_1A_2A_3A_4A_5$ và cắt các mặt phẳng $(SA_1A_2), (SA_2A_3), (SA_3A_4), (SA_4A_5), (SA_5A_1)$ tương ứng theo các giao tuyến $SM_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Gọi α_i là các góc tạo bởi $SM_i (i = 1, 2, 3,$

$4, 5)$ với mặt phẳng đáy $(A_1A_2A_3A_4A_5)$. Chứng minh rằng đại lượng

$$T = \sum_{i=1}^5 \tan^2 \alpha_i$$

có giá trị không đổi. Tổng quát hoá bài toán trên.

Bài 85 (T10/223). Cho tứ diện $ABCD$ với các đường cao đồng quy tại trực tâm H . Các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 và DD_0 kéo dài cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ở các điểm tương ứng A', B', C' và D' . Chứng minh rằng nếu $A_0A' = B_0B' = C_0C' = D_0D'$ thì $ABCD$ là một tứ diện đều.

Bài 86 (T10/224). Tứ diện đều $ABCD$ có tâm là S và độ dài các cạnh bằng 2. Gọi A', B', C' và D' theo thứ tự là hình chiếu của các đỉnh A, B, C và D trên đường thẳng Δ nào đó đi qua S . Tìm tất cả các vị trí của đường thẳng Δ sao cho tổng $SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 87 (T9/225). Cho hai đường thẳng x, y chéo nhau cố định. Lấy hai điểm M, N nào đó trên x và hai điểm P, Q nào đó trên y sao cho $MN = a$ và $PQ = b$, trong đó a, b là các độ dài cho trước.

Hãy xác định vị trí của M, N, P, Q để bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện $MNPQ$ là lớn nhất.

Bài 88 (T9/226). Gọi G là trọng tâm mặt (ABC) của tứ diện $ABCD$ và M là một điểm bất kì thuộc miền tam giác ABC . Đường thẳng qua M song song với DG cắt các mặt phẳng DBC, DCA và DAB theo thứ tự ở A', B' và C' .

Chứng minh rằng

$$DA' + DB' + DC' \geq 3GM.$$

Bài 89 (T9/227). Cho tứ diện $OABC$ vuông ở O , có chiều cao $OH = h$ và độ dài các cạnh của tam diện vuông là $OA = a, OB = b, OC = c$. Chứng minh rằng

$$a \cot A + b \cot B + c \cot C \geq 3h$$

trong đó $\cot A, \cot B$ và $\cot C$ là cotang các góc của tam giác ABC .

Bài 90 (T10/228). Hình chóp $S.ABC$ có tổng các mặt (góc ở đỉnh) của tam diện đỉnh S bằng 180° và các cạnh bên $SA = SB = SC = 1$. Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình chóp này không lớn hơn $\sqrt{3}$.

Bài 91 (T10/229). Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, nội tiếp mặt cầu (O) . Các đường thẳng AG, BG, CG và DG cắt lại (O) theo thứ tự ở A_1, B_1, C_1 và D_1 . Chứng minh rằng

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 \geq GA + GB + GC + GD.$$

Bài 92 (T10/230). Giả sử M là một điểm nằm trên đường thẳng chứa đường chéo AB' của mặt bên $ABB'A'$ của một hình hộp xiên $ABCD.A'B'C'D'$ và $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ($k \neq 0$). Gọi N và P là các điểm lần lượt nằm trên các đường thẳng BC' và CD' sao cho $\overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}$, $\overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$.

a) Hãy xác định x và y theo k để ba điểm M, N và P thẳng hàng.

b) Từ đó suy ra có vô số đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng AB', BC', CD' và DA' , đồng thời bốn giao điểm này lập thành một hàng điểm điều hoà.

Bài 93 (T10/231). Gọi diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của một tứ diện $ABCD$ theo thứ tự là S_a, S_b, S_c, S_d . Chứng minh rằng $S_a \cdot \overrightarrow{JA} + S_b \cdot \overrightarrow{JB} + S_c \cdot \overrightarrow{JC} + S_d \cdot \overrightarrow{JD} = \vec{0}$ trong đó J là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 94 (T10/232). Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz và ba điểm A, B, C cố định (không trùng với điểm O) lần lượt nằm trên ba tia đó.

Giả sử dãy (a_n) , ($n = 1, 2, \dots$) là một cấp số cộng có $a_1 > 0$, công sai $d > 0$. Với mỗi số nguyên dương n trên Ox, Oy, Oz theo thứ tự lấy các điểm A_n, B_n, C_n sao cho $OA = a_n OA_n$; $OB = a_{n+1} OB_n$; $OC = a_{n+2} OC_n$.

Chứng minh rằng :

1) Các đường thẳng $A_n B_n$ luôn đi qua một điểm cố định. Gọi ba điểm cố định mà họ các đường thẳng $A_n B_n, B_n C_n, C_n A_n$ đi qua là I, J, K .

2) Ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 95 (T10/235). Giả sử M là một điểm thuộc mặt (BCD) của tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng bất kì cắt các cạnh AB, AC, AD và đoạn AM theo thứ tự ở B', C', D' và M' . Chứng minh rằng

$$AM + AM' < \max\{AB + AB', AC + AC', AD + AD'\}.$$

Bài 96 (T10/236). Giả sử O là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$ sao cho : $\widehat{BOC} = \widehat{DOA}$, $\widehat{COA} = \widehat{DOB}$ và $\widehat{AOB} = \widehat{DOC}$. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta có

$$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD.$$

Bài 97 (T3/239)

Chứng minh rằng có thể dùng 8 màu để tô tất cả các đỉnh của hai con xúc xắc sao cho hai điều kiện sau đây đồng thời thoả mãn.

1) Trong mỗi con xúc xắc, không có hai đỉnh nào được tô cùng màu.

2) Tổng số màu của các đỉnh ở hai mặt bất kì (một mặt thuộc xúc xắc này, một mặt thuộc xúc xắc kia) không vượt quá 6.

Bài 98 (T10/239). Tìm điều kiện cần và đủ của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ để các hình cầu nội tiếp hai tứ diện $AB'CD'$ và $A'BC'D$ có cùng tâm.

Bài 99 (T10/241). Giả sử M, N, P là ba điểm theo thứ tự lấy trên các cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$, J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$. Chứng minh rằng ba điểm S, I, J thẳng hàng và

$$\frac{JS}{JI} = 1 + \frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC}.$$

Bài 100 (T10/242). Cho tứ diện đều $ABCD$. Giả sử M là một điểm nào đó trong miền tam giác ABC . Gọi A', B' và C' là hình chiếu vuông góc của M lần lượt trên các mặt $(BCD), (CDA)$ và (DAB) . Chứng minh rằng khi M di chuyển trong miền tam giác ABC thì trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$ di chuyển trong một miền tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trong tứ diện và song song với đáy ABC .

SỐ HỌC

Bài 1 (T6/220).

Cách 1.

$$\text{Ta có } A = \frac{a^p - 1}{a - 1}.$$

Giả sử q là ước nguyên tố của A . Khi đó

$$a^p \equiv 1 \pmod{q} \quad (1)$$

Theo định lí nhỏ Fermat thì $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ (2)

Gọi h là số nguyên dương bé nhất để

$$a^h \equiv 1 \pmod{q}.$$

Nếu m là số nguyên dương mà $a^m \equiv 1 \pmod{q}$ thì $m \vdots h$. Thật vậy nếu $m = ht + s$, $0 < s < h$ thì $a^s \equiv a^m \equiv 1 \pmod{q}$, trái với cách chọn h . Từ điều này và (1), (2) ta suy ra $\begin{cases} p \vdots h \\ (q-1) \vdots h \end{cases}$

Bài toán được chứng minh nếu ta chỉ ra $p = h$. Thật vậy vì p là số nguyên tố mà $p \vdots h$ nên $p = h$ hoặc $h = 1$.

Nếu $h = 1$ suy ra $a \equiv 1 \pmod{q}$. Từ cách xác định A suy ra $A \equiv p \pmod{q}$. Mà $A \equiv 0 \pmod{q}$ nên $p = q \Rightarrow a - 1$ chia hết cho p . Điều này không xảy ra vì $a - 1 < p$.

Cách 2.

Trước hết cần chứng minh rằng với $a > 1$ thì

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Áp dụng điều này ta có

$$(a^p - 1, a^{q-1} - 1) = a^{(p,q-1)} - 1.$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$a^{(p,q-1)} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Nếu $(q - 1, p) = 1$ thì $a \equiv 1 \pmod{q}$. Lí luận như ở cách 1 ta thấy điều này không xảy ra. Vậy $(q - 1, p) = p$ hay $q - 1$ chia hết cho p .

Bài 2 (T1/221).

Ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1995$ nên trong các số a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) phải có ít nhất một số lẻ, giả sử là a_n . Các số còn lại là hợp số, do đó $a_i \geq 4$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) còn a_n là hợp số lẻ, do đó $a_n \geq 9$. Vậy

$$1995 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 4(n - 1) + 9$$

$$\Rightarrow 1995 \geq 4n + 5 \Rightarrow n \leq \frac{1990}{4} < 498$$

$$\Rightarrow n \leq 497.$$

Với $n = 497$ ta thấy

$$1995 = 4 + \dots + 4 + 6 + 9.$$

trong đó có 495 số hạng bằng 4.

Vậy n lớn nhất là 497.

Bài 3 (T2/222)

Cách 1. Đặt $x = \frac{a}{b^2}$, $y = \frac{b}{c^2}$, $z = \frac{c}{a^2}$ ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = xy + yz + xz \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = xy + yz + xz \end{cases} \quad (2)$$

Xét tích $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = xyz - xy - yz - xz + x + y + z - 1 = 0$ theo (1) và (2).

Từ đó suy ra ít nhất một trong ba số x, y, z phải bằng 1. Nếu $x = 1$ thì $a = b^2$, nếu $y = 1$ thì $b = c^2$, nếu $z = 1$ thì $c = a^2$.

Cách 2.

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2 = b^3c + c^3a + a^3b \quad (\text{vì } a^2b^2c^2 = abc = 1)$$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2c^2 - a^3c^2) - (b^3a^2 - a^3b) - (c^3b^2 - c^3a) + (b^3c - abc) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2(b^2 - a) - ba^2(b^2 - a) - c^3(b^2 - a) + bc(b^2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a)[(a^2c^2 - ba^2) - (c^3 - bc)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a)(c^2 - b)(a^2 - c) = 0.$$

Từ đó suy ra ít nhất một trong ba số a, b, c phải là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 4 (T8/225)

Từ hệ thức xác định dãy (b_n) ta có phương trình $x^3 - 7x + 6 = 0$ (1) là phương trình đặc trưng của dãy số đó.

Để thấy (1) có ba nghiệm là: $x = 1, x = 2$ và $x = -3$. Từ đó suy ra: $b_n = a.1^n + b.2^n + c.(-3)^n$ (2) với mọi $n \geq 1$. Lần lượt cho $n = 1, 2, 3$ từ (2) và giả thiết của bài ra ta được

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ a + 4b + 9c = 14 \\ a + 8b - 27c = -18 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Vậy $b_n = 1 + 2^n + (-3)^n$ với mọi $n \geq 1$ (3)

Với p là số nguyên tố, theo định lý nhỏ Fermat, ta có $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ và $(-3)^p \equiv (-3) \pmod{p}$. Vì vậy, từ (3) ta được $b_p \equiv (1 + 2 - 3) \pmod{p}$ với mọi số nguyên tố p hay $b_p \equiv 0 \pmod{p}$ với mọi số nguyên tố p .

★ Ghi chú. Có thể chứng minh rằng b_n chia hết cho n với mọi n thỏa mãn $(n, 6) = 1$.

Bài 5 (T2/226)

Cách 1.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên điều kiện để bài toán có nghĩa là $(x + 1)^2 \leq 200$, suy ra $-15 \leq x \leq 13$ (1)

Ta có

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x} = 2 + \sqrt{200 - (x + 1)^2}.$$

Từ đó vì y là số nguyên nên

$$\frac{1}{2} \leq y^2 \leq \frac{2 + \sqrt{200}}{4} \leq 4.$$

Suy ra $y^2 = 1$ hoặc $y^2 = 4$.

• Nếu $y^2 = 1$ ta có $4 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$

$$\Leftrightarrow 4 = 199 - x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 195 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 13)(x + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 13, x = -15 \text{ (thỏa mãn (1))}.$$

• Nếu $y^2 = 4$ ta có $16 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$

$$\Leftrightarrow 16 = 199 - x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, x = -3 \text{ (thỏa mãn (1))}.$$

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình là: $(x; y) = (1; 2), (1; -2), (-3; 2), (-3; -2), (13; 1), (13; -1), (-15; 1), (-15; -1)$.

Cách 2.

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = 2 + \sqrt{200 - (x + 1)^2}.$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì biểu thức trong căn phải là số chính phương.

Phân tích 200 thành tổng hai số chính phương, ta chỉ có

$$\begin{aligned} \sqrt{200 - (x + 1)^2} &= \sqrt{10^2 + 10^2 - (x + 1)^2} = \\ &= \sqrt{2^2 + 14^2 - (x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Khi đó phải có: hoặc $(x + 1)^2 = 10^2$ hoặc $(x + 1)^2 = 2^2$ hoặc $(x + 1)^2 = 14^2$.

• Nếu $(x + 1)^2 = 10^2$ thì $4y^2 = 2 + 10 \Rightarrow y^2 = 3$ phương trình này không có nghiệm nguyên

• Nếu $(x+1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow x = 1$
hoặc $x = -3$ (1)

từ đó có : $4y^2 = 2 + 14$

$$\Leftrightarrow y = \pm 2 \quad (2)$$

• Nếu $(x+1)^2 = 14^2 \Leftrightarrow x+1 = \pm 14 \Leftrightarrow$
 $x = 13$ hoặc $x = -15$ (3)

từ đó có : $4y^2 = 2 + 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$ (4)

Từ (1), (2), (3) (4), thử lại thấy phương trình có các cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là

$(1; -2), (1; 2), (-3; -2), (-3; 2), (13, -1),$
 $(13; 1), (-15; -1), (-15; 1).$

Bài 6 (T3/226)

Cách 1. Để phương trình có nghiệm nguyên điều kiện là $\Delta = a^4 - 4a - 4$ là số chính phương.

• Với $a = 0$ hoặc $a = 1$ thì $\Delta < 0$,

• Với $a = 2$ thì $\Delta = 2^2$ thỏa mãn,

• Với $a \geq 3$ ta có

$$\Delta > (a^2 - 1)^2 \Leftrightarrow a^4 - 4a - 4 > a^4 - 2a^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 4a - 5 > 0 \Leftrightarrow 2a(a - 2) > 5$$

luôn đúng vì $2a \geq 6, a - 2 \geq 1$.

Dễ thấy $\Delta < (a^2)^2$. Vậy Δ không là số chính phương với $a \geq 3$ vì

$$(a^2 - 1)^2 < \Delta < (a^2)^2.$$

Kết luận : $a = 2$ là giá trị duy nhất cần tìm lúc đó phương trình

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

có nghiệm nguyên $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Cách 2.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên của phương trình. Theo định lí Viète ta có

$$x_1 + x_2 = a^2 \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = a + 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ đó } (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -(a^2 - a - 2). \quad (3)$$

Vì $a \in \mathbb{N}$ nên từ (2) có $x_1 x_2 \geq 1$, kết hợp với (1) thì $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$ suy ra

$x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$. Vậy $a^2 - a - 2 \leq 0$ do (3).

Từ đó $0 \leq a \leq 2$. Thử trực tiếp chỉ có $a = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán như kết luận ở cách 1.

Bài 7 (T6/226). Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_{2n+1}^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} k C_{2n+1}^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k \cdot (2n+1)!}{2 \cdot (2k)!(2n-2k+1)!} = \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k-1}$$

Mặt khác, ta có

$$(1+1)^{2n} - (1-1)^{2n} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k-1} = 4^n.$$

Do đó

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^1 = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^n = (2n+1)4^{n-1}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 8 (T1/228)

Để $A = 3^{3m^2+6n-61} + 4$ là số nguyên tố thì

$$3m^2 + 6n - 61 \geq 0.$$

$$3m^2 + 6n - 61 \text{ chia } 3 \text{ dư } 2$$

$$\text{hay } 3m^2 + 6n - 61 = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$$\text{Từ đó } A = 3^{3k+2} + 4 = 27^k \cdot 9 + 4.$$

$$\text{Vì } 27 \equiv 1 \pmod{13} \text{ nên } 27^k \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow A \equiv 13. \text{ Vì } A \text{ là số nguyên tố nên } A = 13 \Rightarrow$$

$$3m^2 + 6n - 61 = 2 \Rightarrow 3m^2 + 6n = 63 \Rightarrow$$

$$m^2 + 2n = 21 \Rightarrow m^2 < 21 \text{ và } m \text{ lẻ nên}$$

$$m^2 = 1 \text{ hoặc } m^2 = 9.$$

$$\text{Nếu } m^2 = 1 \text{ thì } m = 1 \Rightarrow n = 10.$$

$$\text{Nếu } m^2 = 9 \text{ thì } m = 3 \Rightarrow n = 6.$$

Bài 9 (T3/228). Đặt $y = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ với $y \geq 0$, ta

có $y^2 = x + \frac{1}{4}$ hay $x = y^2 - \frac{1}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$n = y^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} + y}$$

$$\text{Vì } y^2 + y + \frac{1}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ nên } n = y^2 + y + \frac{1}{4}.$$

Từ đó ta có

$$n \geq \frac{1}{4} \text{ (vì } y \geq 0). \text{ Với } n \geq \frac{1}{4} \text{ thì ta có } y = \sqrt{n} - \frac{1}{2}$$

$$\text{hay } \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{n} - \frac{1}{2}, \text{ suy ra}$$

$$x = n + \frac{1}{4} - \sqrt{n} - \frac{1}{4} = n - \sqrt{n}. \text{ Để } x \text{ nguyên với}$$

giá trị nguyên của n thì n phải là số chính phương, nghĩa là $n = t^2$ với $t \in \mathbb{Z}$. Hơn nữa $t \neq 0$

(vì $n \neq 0$ do $n \geq 0,25$). Vậy nghiệm nguyên của phương trình đó là : $x = t^2 - t$; $n = t^2$ trong đó t là số nguyên khác 0.

Bài 10 (T6/228)

Trước hết ta chứng minh

Bổ đề : Với mọi $k \in \mathbb{N}, k < m$ thì tồn tại $b_k \in \mathbb{Z}$

sao cho $b_k p^m + p^k$ chia hết cho $k!$

Chứng minh : Giả sử $k! = p^{\alpha_k} M_k$ với $(M_k, p) = 1$. Khi e chạy trong tập $\{0, 1, \dots, M_k - 1\}$ thì các số $\{ep^{m-k}\}$ lập thành một hệ thặng dư đầy đủ $(\text{mod } M_k)$, thành thử tồn tại $b_k \in \mathbb{Z}$ sao cho $b_k p^{m-k} \equiv -1 \pmod{M_k}$

$$\Leftrightarrow (b_k p^{m-k} + 1) \vdots M_k$$

$$\Leftrightarrow (b_k p^m + p^k) \vdots p^k \cdot M_k.$$

Mặt khác

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k}{p^i} \right] < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{p^i} < k.$$

$$\text{Vậy } (b_k p^m + p^k) \vdots p^{\alpha_k} \cdot M_k = k!$$

Bổ đề được chứng minh.

Ta trở về bài toán.

$$\text{Kí hiệu } f_i(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$$

$$\text{thì } f_i(n) = \begin{cases} C_n^i & \text{nếu } n \geq i \\ 0 & \text{nếu } n < i \end{cases}$$

$$\text{Đặt } R(x) = -\sum_{i=0}^{m-1} f_i(x)(b_i p^m + p^i).$$

Theo bổ đề trên $R(x)$ là đa thức có hệ số nguyên.

$$\text{Ta có } u_n = (p+1)^n + R(n) =$$

$$\sum_{i=0}^n C_n^i p^i - \sum_{i=1}^{m-1} f_i(n) p^i - p^m \sum_{i=0}^{m-1} f_i(n) b_i$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) p^i - \sum_{i=1}^{m-1} f_i(n) p^i \pmod{p^m}$$

$$\equiv \sum_{i=m}^{\infty} f_i(n) p^i \equiv 0 \pmod{p^m} \text{ với mọi } n = 1,$$

2, 3, ...

$$\text{Đặc biệt } u_1 = (p+1) + R(1) = ep^m.$$

Ta chứng minh đa thức $Q(x) = R(x) + p^m(1-e)$ là đa thức cần tìm.

$$\text{Quả vậy } a_n = (p+1)^n + Q(n) = (p+1)^n +$$

$+ R(n) + p^m(1-e) = u_n + p^m(1-e)$ chia hết cho p^m với mọi $n = 1, 2, \dots$

$$\text{mà } a_1 = (p+1) + Q(1) = p+1 + R(1) +$$

$$+ p^m(1-e) = ep^m + p^m(1-e) \text{ chia hết cho } p^m.$$

Do đó p^m là ƯCLN của a_n với mọi $n = 1, 2, \dots$

Bài 11(T1/233)

$$\text{Đặt } u_n = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Từ điều kiện (1) suy ra $u_n = u_{n-1} + 2a_n$.

$$u_n^2 = (u_{n-1} + 2a_n)^2 = u_{n-1}^2 + 4u_{n-1}a_n + 4a_n^2$$

$$= u_{n-1}^2 + 4(a_{n+1} - a_n - a_{n-1})a_n + 4a_n^2$$

$$= u_{n-1}^2 + 4a_{n+1}a_n - 4a_na_{n-1}. \text{ Suy ra}$$

$$u_n^2 - 4a_{n+1}a_n = u_{n-1}^2 - 4a_na_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó

$u_n^2 - 4a_{n+1}a_n = (a_2 - a_1 - a_0)^2 - 4a_1a_0$
là hằng số. Gọi hằng số đó là M . Khi đó

$$M + 4a_{n+1}a_n = u_n^2 \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Bài 12 (T1/237). Gọi a là chữ số khác 5 của A , ta có tổng các chữ số của A là 1996. $5 + a = 9980 + a$, suy ra số dư trong phép chia của A cho 9 là số dư trong phép chia $a + 8$ cho 9 (*). Nếu A là số chính phương thì A bằng k^2 , mà số dư trong phép chia cho k cho 9 là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nên số dư trong phép chia của A cho 9 là 0, 1, 4, 7. Như vậy, từ (*) ta có các giá trị mà a có thể nhận là 1 hoặc 2. Xét các trường hợp :

1) A có chữ số tận cùng là a . Do A là số chính phương nên $a = 1$ và A có dạng $(10m + 1)^2 = 100m^2 + 20m + 1$, suy ra chữ số hàng chục của A là số chẵn, khác 5, nên trường hợp này không xảy ra.

2) A có chữ số tận cùng khác a , tức là 5. Suy ra A có dạng $(10m + 5)^2 = 100m(m + 1) + 25$. Từ đó ta có $a = 2$ và chữ số hàng trăm của A là số chẵn (vì $m(m + 1)$ chẵn), tức là khác 5, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy không thể xảy ra trường hợp A là số chính phương.

Bài 13 (T6/237)

Ta sẽ giải bài toán khái quát : Cho số nguyên $p \geq 2$. Cho dãy số (a_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ xác định như sau :

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} = (n + 2)a_n - (n + 1)a_{n-1}$$

với mọi $n \geq 2$.

Hãy tìm tất cả các giá trị của n để a_n là lũy thừa p của một số tự nhiên.

Lời giải. Với mỗi $n \geq 2$, đặt $b_n = a_n - a_{n-1}$. Khi đó, từ công thức xác định dãy (a_n) , ta có $b_n = n.b_{n-1}$ với mọi $n \geq 3$. Kết hợp với $b_2 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2!$ ta được $b_n = n!$ với mọi $n \geq 2$. Do đó, với mỗi $n \geq 2$ ta có

$$a_n = \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) + a_1 = \sum_{k=2}^n b_k + 1 = \sum_{k=1}^n k!$$

Kết hợp với $a_1 = 1 = 1!$ ta được $a_n = \sum_{k=1}^n k!$

với mọi $n \geq 1$ (1)

• Xét $p = 2$. Từ (1) ta có $a_n \equiv 3 \pmod{10}$ với mọi $n \geq 5$ nên suy ra $a_n \neq a^2$ với mọi $n \geq 5$ (vì các số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi 0, 1, 4, 5, 6, 9).

Với $n = 1, 2, 3, 4$, bằng cách thử trực tiếp, ta thấy a_n là số chính phương khi và chỉ khi $n = 1, n = 3$.

• Xét $p > 2$. Khi đó, do $a_n \equiv 0 \pmod{3}$ với mọi $n \geq 2$ (suy ra từ (1)) nên điều kiện cần để tồn tại $a \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n = a^p$ là $a_n \equiv 0 \pmod{27}$ hoặc $a_n = 1$. Từ (1) ta có $a_n > 1$ với mọi $n \geq 2$, và $a_n = a_8 + \sum_{k=9}^n k!$ với mọi $n \geq 9$.

Suy ra $a_n \equiv a_8 \pmod{27}$ với mọi $n \geq 0$. Mà $a_8 = 46233 \equiv 1 \pmod{27}$ nên $a_n \equiv 1 \pmod{27}$ với mọi $n \geq 8$. Như vậy, với mọi $n \geq 8$ đều không tồn tại $a \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n = a^p$.

Với $1 \leq n \leq 7$, bằng cách thử trực tiếp ta thấy chỉ có duy nhất giá trị $n = 1$ là giá trị cần tìm.

★ *Ghi chú.* Bài đã ra là trường hợp đặc biệt của Bài toán khái quát, khi $p = 2$. Theo đó, tất cả các giá trị n thỏa mãn yêu cầu của bài toán đã ra là $n = 1$ và $n = 3$.

Bài 14 (T6/239)

Giả sử có dãy số tự nhiên

$a, qa, \dots, q^{n-1}a$ ($q > 1, n \geq 3, a \geq 1$) thỏa mãn đẳng thức

$$a + qa + \dots + q^{n-1}a = 5^t. \text{ Suy ra}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 5^y \quad (1)$$

• Ta thấy n phải là số lẻ. Thật vậy nếu $n = 2m$ thì từ (1) có

$$5^y = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^{2m} - 1}{q - 1} = \left(\frac{q^m - 1}{q - 1} \right) (q^m + 1).$$

Vậy $q^m \equiv 1 \pmod{5}$ và $q^m \equiv -1 \pmod{5}$. Vô lí.

• Giả sử $n = 2m + 1$. Từ $q^{2m+1} - 1 = (q-1) \cdot 5^y$ suy ra $q^n \equiv 1 \pmod{5}$ và q khác 0, $-1 \pmod{5}$. Nếu $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$ thì

$$q^n \equiv \pm 2^n \equiv \pm 2 \cdot (-1)^m \equiv \pm 2 \pmod{5}.$$

Vô lí. Vậy $q \equiv 1 \pmod{5}$. Khi đó

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n \equiv n \pmod{5}.$$

Suy ra $n = 5k$.

• Ta có
$$\frac{q^{5k} - 1}{q - 1} = \left(\frac{q^5 - 1}{q - 1} \right)$$

$$((q^5)^{k-1} + \dots + q^5 + 1) = 5^y \text{ do đó } \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 5^z.$$

Mặt khác

$$\frac{q^5 - 1}{q - 1} = \frac{((q-1)+1)^5 - 1}{q - 1} = (q-1)^4 + 5(q-1)^3$$

+ $10(q-1)^2 + 10(q-1) + 5$ chia hết cho 5 mà không chia hết cho 25. Vậy $z = 1$ nên $q = 1$. Vô lí. Bài toán được chứng minh.

Bài 15 (T2/240)

$$x^2 y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy. \quad (1)$$

Để thấy phương trình có nghiệm $x = y = 0$.

Với x, y đều khác 0 ta có

$$(1) \Leftrightarrow y^2(x^2 - 7) = (x + y)^2 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $x^2 - 7$ là bình phương của một số nguyên.

$$x^2 - 7 = a^2 \quad (a \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow (|x| - |a|)(|x| + |a|) = 7$$

$$\Rightarrow |x| + |a| = 7, |x| - |a| = 1$$

$$\Rightarrow |x| = 4 \text{ hay } x = \pm 4.$$

• Thay $x = 4$ vào (2) ta được

$$9y^2 = (y + 4)^2 \Rightarrow (y + 1)(y - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$y = -1, y = 2.$$

• Thay $x = -4$ vào (2) được $9y^2 = (y - 4)^2 \Rightarrow (y - 1)(y + 2) = 0 \Rightarrow y = 1, y = -2$.

Vậy phương trình (1) có các nghiệm nguyên : $(x; y)$ là $(0; 0), (4; -1), (4; 2), (-4; 1), (-4; -2)$.

Bài 16 (T7/240)

Với mỗi $n \geq 1$ đặt $b_n = 3a_n$. Khi đó, từ dãy (a_n) ta có dãy (b_n) được xác định bởi

$$b_{n+1} = b_n^2 - 6 \text{ với mọi } n \geq 1 \quad (1)$$

Bài đã cho trở thành : Tìm tất cả $b_1 \in \mathbb{Q}$ mà tồn tại $m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$.

Từ (1) ta có :

$b_{n+1} - b_n = (b_n - 3)(b_n + 2)$, với mọi $n \geq 1$. Suy ra, nếu $|b_1| > 3$ thì $|b_1| < b_2 < b_3 < \dots < b_n < b_{n+1} < \dots$. Do đó, nếu $|b_1| > 3$ thì không tồn tại $m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$.

Xét $|b_1| \leq 3$. Nếu $b_1 \in \mathbb{Q}$ thì từ (1) dễ thấy $b_n \in \mathbb{Q}$, với mọi $n \geq 1$. Với mỗi $n \geq 1$, viết b_n dưới dạng $b_n = \frac{p_n}{q_n}$, trong đó : $p_n, q_n \in \mathbb{Z}, q_n \geq 1$ và $(p_n, q_n) = 1$. Khi đó, nếu có $m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$ thì phải có $q_m = q_n$ (3). Mặt khác, từ (1) có

$$b_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n^2 - 6q_n^2}{q_n^2} \text{ với mọi } n \geq 1 \quad (2)$$

Vì $(p_n, q_n) = 1$ nên $(p_n^2 - 6q_n^2, q_n^2) = 1$. Kết hợp với (2) và $(p_{n+1}, q_{n+1}) = 1$ suy ra $q_{n+1} = q_n^2$, dẫn tới $q_n = q_1^{2^{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó : $(3) \Leftrightarrow q_1^{2^{m-1}} = q_1^{2^{n-1}} \Leftrightarrow q_1 = 1$ (vì $m \neq n$). Như vậy nếu có $m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$ thì $b_1 \in \mathbb{Z}$. Suy ra : $b_1 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

• Với $b_1 = 0$ thì $b_2 = -6 \Rightarrow b_3 = 30 > 3 \Rightarrow b_3 < b_4 < \dots < b_k < b_{k+1} < \dots$ nên không tồn tại $m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$.

• Với $b_1 = \pm 1$ thì $b_2 = -5 \Rightarrow b_3 = 19 > 3 \Rightarrow b_3 < b_4 < \dots < b_k < b_{k+1} < \dots$ nên không tồn tại $m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$.

• Với $b_1 = \pm 2$ thì $b_2 = -2 \Rightarrow b_3 = -2 = b_2$.

• Với $b_1 = \pm 3$ thì $b_2 = 3 \Rightarrow b_3 = 3 = b_2$.

Vậy, tóm lại, tất cả $b_1 \in \mathbb{Q}$ cần tìm là $b_1 \in \{\pm 2; \pm 3\}$. Và do đó, tất cả các giá trị $a_1 \in \mathbb{Q}$

cần tìm là: $\pm \frac{2}{3}, \pm 1$.

Bài 17 (T7/241). Nhận xét rằng $[\sqrt[3]{m}] = k \Leftrightarrow k^3 \leq m \leq (k+1)^3 - 1$.

Số các số nguyên m thoả mãn điều kiện này là

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$\sum_{k=1}^{x-1} S_k = y \text{ ở đó } S_k = k(3k^2 + 3k + 1).$$

Vì S_k có cùng tính chẵn lẻ với k do đó nếu x là số nguyên tố lẻ thì $\sum_{k=1}^{x-1} S_k$ là một số chẵn lớn hơn 2 do vậy không là số nguyên tố.

Thành thử $x = 2$ và do đó $y = S_1 = 7$.

Bài 18 (T6/242).

Giả sử $x^2 + y^2 + 6 = pxy (p \in \mathbb{Z}^+)$ (1)

Trong tất cả các số nguyên dương (x, y) thoả mãn (1), giả sử (x_0, y_0) là cặp số có $x_0 + y_0$ bé nhất. Không giảm tổng quát giả sử $x_0 \leq y_0$.

Xét phương trình $y^2 - px_0y + x_0^2 + 6 = 0$ (2)

Ta thấy y_0 là nghiệm của (2). Gọi y_1 là nghiệm còn lại của (2) thì theo định lí Viète có

$$\begin{cases} y_0 + y_1 = px_0 & (3) \\ y_0 y_1 = x_0^2 + 6 & (4) \end{cases}$$

Ta có (x_0, y_0) thoả mãn (1) do đó $y_0 \leq y_1$.

• Nếu $x_0 = y_0$ thì từ (1) có

$$p = 2 + \frac{6}{x_0^2} \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow p = 8.$$

• Nếu $y_0 = y_1$ thì từ (4) ta có

$$(y_0 - x_0)(y_0 + x_0) = 6.$$

Điều này không xảy ra vì $y_0 - x_0$ và $y_0 + x_0$ cùng tính chẵn lẻ mà $6 = 1.6 = 2.3$.

• Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ thì $y_0 \geq x_0 + 1, y_1 \geq x_0 + 2$.

Từ (4) suy ra $x_0^2 + 6 \geq (x_0 + 1)(x_0 + 2) \Rightarrow 4 \geq 3x_0 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 y_1 = 7 \Rightarrow y_0 = 1$ và $y_1 = 7$ vô lí vì $x_0 < y_0$.

Tóm lại ta phải có $p = 8 = 2^3$.

★ *Ghi chú.* Có vô số cặp số nguyên dương (x, y) thoả mãn (1). Chẳng hạn xét dãy (u_n) với $u_0 = u_1 = 1, u_{n+2} = 8u_{n+1} - u_n$. Khi đó dễ dàng kiểm tra được (u_n, u_{n+1}) thoả mãn (1) với mọi n .

ĐẠI SỐ

Bài 19 (T8/219)

1) Với $n = 0$ thì $P = x + y + z = 1$. Vậy $\max P = 1$.

2) Với $n = 1$ thì

$$P = xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\max P = \frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

3) Xét $n > 1$. Không giảm tổng quát, có thể coi $x = \max\{x, y, z\}$.

Do $y \leq x$ nên $y^n z \leq x^{n-1} yz$.

Do $z \leq x$ nên $z^n x \leq zx^n$ và $z^n x \leq z^2 x^{n-1}$.

Mặt khác, vì $n > 1$ nên $\frac{n-1}{n} \geq \frac{1}{2}$ hay

$$\frac{n-1}{n} z \geq \frac{z}{2}.$$

$$\text{Vậy } P = x^n y + y^n z + z^n x$$

$$\leq x^n y + x^{n-1} y z + \frac{1}{2} z^n x + \frac{1}{2} z^n x$$

$$\leq x^n y + x^{n-1} y z + \frac{z x^n}{2} + \frac{z^2 x^{n-1}}{2}$$

$$= x^{n-1} (x + z) \left(y + \frac{z}{2} \right)$$

$$\leq x^{n-1} (x + z) \left(y + \frac{n-1}{n} z \right)$$

$$= n^n \cdot \left(\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} \cdots \frac{x}{n} \cdot \frac{x+z}{n} \cdot \left(y + \frac{n-1}{n} z \right) \right)$$

$$(\text{có } n-1 \text{ thừa số } \frac{x}{n})$$

$$\leq n^n \left(\frac{(n-1) \frac{x}{n} + \frac{x+z}{n} + y + \frac{n-1}{n} z}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$= n^n \cdot \frac{(x+y+z)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ khi}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \\ \frac{x}{n} = \frac{x+z}{n} = y + \frac{n-1}{n} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{n}{n+1} \\ y = \frac{1}{n+1} \\ z=0 \end{cases}$$

Bài 20 (T3/221)

Ta có các mẫu thức ở vế trái đều dương,

$$\text{chẳng hạn, } b^2 - bc + c^2 = \left(b - \frac{c}{2} \right)^2 + \frac{3c^2}{4} > 0;$$

hơn nữa, a, b, c đều dương nên đặt A là biểu thức ở vế trái của BĐT cần chứng minh và $S = (a^2 + b^2 + c^2)^2$, ta có thể tiến hành biến đổi sau đây

$$\begin{aligned} \sqrt{S} &= \sqrt{\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2}} \sqrt{(b^2 - bc + c^2)a} \\ &+ \sqrt{\frac{b^3}{c^2 - ca + a^2}} \sqrt{(c^2 - ca + a^2)b} \\ &+ \sqrt{\frac{c^3}{a^2 - ab + b^2}} \sqrt{(a^2 - ab + b^2)c}. \end{aligned}$$

Từ biểu thức này, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có

$$S \leq A(ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 3abc) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow A \geq \frac{S}{ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 3abc} \quad (2)$$

(Vì ta đã chia hai vế của (1) cho một biểu thức dương).

Ta sẽ chứng minh vế phải của (2) không bé hơn $a + b + c$. Thật vậy, điều đó tương đương với:

$$\begin{aligned} &a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \\ &\geq ab^3 + ac^3 + bc^3 + ba^3 + ca^3 + cb^3 \end{aligned} \quad (3)$$

Không làm mất tính tổng quát, giả sử

$a \geq b \geq c > 0$, ta có

$$\begin{aligned} &a^2(a-b)^2 + (a-b)^2(a+b)(b-c) \\ &+ c^2(c-a)(c-b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &a^4 - 2a^3b + a^2b^2 + a^3b - a^3c + a^2b^2 \\ &- a^2bc - 2a^2b^2 + 2a^2bc - 2ab^3 + 2ab^2c \\ &+ b^3a - b^2ac + b^4 - b^3c + c^4 - c^3b - c^3a + c^2ab \geq 0 \\ \Leftrightarrow &a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \\ &\geq ab^3 + ac^3 + bc^3 + ba^3 + ca^3 + cb^3, \text{ tức là (3)} \\ &\text{đúng.} \end{aligned}$$

Kết hợp (2) với (3), ta có $A \geq a + b + c$, và chỉ còn phải chứng minh:

$$a + b + c \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}. \quad (4)$$

Thật vậy, ta đã biết $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ nên $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$; mà $a + b + c > 0$ nên ta có (4), suy ra đpcm.

Bài 21 (T8/221)

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c) \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \right)$$

$$\leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a^2 + b^2)}{a + b} + \frac{b(c^2 + a^2)}{c + a} + \frac{a(b^2 + c^2)}{b + c}$$

$$\leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow c^2 - \frac{c(a^2 + b^2)}{a+b} + b^2 - \frac{b(c^2 + a^2)}{c+a} \\
&\quad + a^2 - \frac{a(b^2 + c^2)}{b+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{ac(c-a)}{a+b} + \frac{bc(c-b)}{a+b} + \frac{ab(b-a)}{c+a} + \frac{bc(b-c)}{c+a} \\
&\quad + \frac{ab(a-b)}{b+c} + \frac{ac(a-c)}{b+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{ac(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc(c-b)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{ab(b-a)^2}{(a+c)(b+c)} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

★ *Ghi chú.* Có thể mở rộng và chứng minh bất đẳng thức dạng tổng quát :

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương. Đặt

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Khi đó

$$\sum_{i=1}^n \frac{S_2 - a_i^2}{S_1 - a_i} \leq n \cdot \frac{S_2}{S_1}.$$

Bài 22 (T7/222)

Viết lại hệ đã cho dưới dạng

$$(I) \begin{cases} x(1-3z^2) = 3z - z^3 \\ y(1-3x^2) = 3x - x^3 \\ z(1-3y^2) = 3y - y^3 \end{cases}$$

Từ đó, dễ thấy, nếu (x, y, z) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có x, y, z đều khác $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bởi thế

$$(I) \Leftrightarrow (II) \begin{cases} x = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} & (1) \\ y = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} & (2) \\ z = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x = \tan \alpha, \text{ với } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

$$\text{sao cho } \tan \alpha, \tan 3\alpha, \tan 9\alpha \text{ đều khác } \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

Khi đó, từ (2), (3), (1) sẽ có $y = \tan 3\alpha$, $z = \tan 9\alpha$ và $x = \tan 27\alpha$. Từ đây dễ dàng suy ra (x, y, z) là nghiệm của (II) khi và chỉ khi $x = \tan \alpha$, $y = \tan 3\alpha$, $z = \tan 9\alpha$, với α được xác định bởi (4), (5) và $\tan \alpha = \tan 27\alpha$. (6)

$$\text{Ta có : } (6) \Leftrightarrow 26\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{26},$$

$k \in \mathbb{Z}$. Vì thế α thoả đồng thời (4) và (6) khi và

chỉ khi $\alpha = \frac{k\pi}{26}$ với k nguyên mà : $-12 \leq k \leq 12$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng, tất cả các giá trị α được xác định như vừa nêu đều thoả mãn (5).

Vậy, tóm lại, hệ phương trình đã cho có tất cả 25 nghiệm, đó là :

$$(x, y, z) = \left(\tan \frac{k\pi}{26}; \tan \frac{3k\pi}{26}; \tan \frac{9k\pi}{26} \right)$$

với $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$.

Bài 23 (T3/223)

Với $n = 5$ thì

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{206}{120} > 1,71.$$

Xét với $n \geq 5$, ta có :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{6}{7!} + \frac{7}{8!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \\
&= \frac{7}{7!} - \frac{1}{7!} + \frac{8}{8!} - \frac{1}{8!} + \dots \\
&+ \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{8!} - \dots + \\
&+ \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{6!} - \frac{1}{n!} < \frac{1}{6!}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&< 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{6!} \\
&= \frac{206}{120} + \frac{2}{6!} = \frac{204}{120} < 1,72.
\end{aligned}$$

Bài toán đã được chứng minh.

Bài 24 (T7/224)

Từ các giả thiết của bài toán suy ra $P(1) = P(0^3 + 1) = P^3(0) + 1 = 1$. Từ đây, bằng phương

pháp quy nạp theo n , dễ dàng chứng minh được :

$P(x_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (1) ở đây x_n là các số hạng

của dãy (x_n) được xác định bởi :

$x_0 = 0, x_{n+1} = x_n^3 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Để thấy $x_{n+1} > x_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ nên từ (1) suy ra đa thức $Q(x) = P(x) - x$

có vô số nghiệm thực. Do vậy phải có

$$Q(x) \equiv 0 \forall x \in \mathbb{R}, \text{ hay } P(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ngược lại, dễ thấy đa thức $P(x) = x$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài ra.

Vậy đa thức duy nhất cần tìm là $P(x) = x$.

Bài 25(T7/225)

Kí hiệu :

$$f_0(x) = x, f_1(x) = f(x) ; f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$$

Với $x \in A_1$ thì $\varphi(x) = x \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) = x \Rightarrow x \in A_2$.

Vậy $A_1 \subset A_2$.

Với $x, y \in A_1 ; x \neq y$ thì $f(f(x)) = \varphi(x) = x \neq y = \varphi(y) = f(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Mặt khác, $x \in A_1 \Rightarrow z = f(x) \in A_1$ mà $f(z) = f(f(x)) = \varphi(x) = x$. Vậy f là hàm 1 - 1 trên tập hợp A_1 . Tương tự, ta cũng có f là hàm 1 - 1 trên tập A_2 . Suy ra, f là hàm 1 - 1 trên tập $A = A_2 \setminus A_1$. Từ đó, nếu $x \in A$ thì $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x)))$ là bốn số thực phân biệt thuộc A . Thật vậy,

$x \in A \Rightarrow f_4(x) = x$. Nếu có $0 \leq i, j \leq 3 ; i \neq j$ để $f_i(x) = f_j(x)$ thì $f_2(x) = x \Rightarrow x \in A_1$, mâu thuẫn.

Đặt $M(x) = \{x, f(x), f_2(x), f_3(x)\} \in A$

$$M(y) = \{y, f(y), f_2(y), f_3(y)\} \in A$$

Nếu $f_i(y) \in M(x)$ với $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ nào đó (do f là hàm 1 - 1) thì ta viết

$$M(y) = \{f_i(y), f_{i+1}(y), f_{i+2}(y), f_{i+3}(y)\} = M(x).$$

Như vậy, A là hợp của một số hữu hạn tập $M(x)$ rời nhau, do vậy $A : 4$.

Bài 26(T8/226)

Với mọi tham số $\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ ta có

$$\alpha_1 a^2 + \frac{1}{\alpha_1} b^2 \geq 2ab$$

$$\alpha_2 b^2 + \frac{1}{\alpha_2} c^2 \geq 2bc$$

$$\alpha_3 c^2 + \frac{1}{\alpha_3} d^2 \geq 2cd$$

$$\alpha_4 d^2 + \frac{1}{\alpha_4} e^2 \geq 2de$$

$$\alpha_5 e^2 + \frac{1}{\alpha_5} f^2 \geq 2ef.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a^2 + \left(\frac{1}{\alpha_1} + \alpha_2 \right) b^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2} + \alpha_3 \right) c^2 + \\ & + \left(\frac{1}{\alpha_3} + \alpha_4 \right) d^2 + \left(\frac{1}{\alpha_4} + \alpha_5 \right) e^2 + \frac{1}{\alpha_5} f^2 \\ & \geq 2(ab + bc + cd + de + ef) = 2. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \alpha_i = \frac{\sin(i+1)\frac{\pi}{7}}{\sin i\frac{\pi}{7}}, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Khi đó dễ dàng chứng minh được rằng

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_1} + \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_2} + \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_3} + \alpha_4 = \\ &= \frac{1}{\alpha_4} + \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_5} = 2 \cos \frac{\pi}{7} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho ta đpcm.

Bài 27 (T3/227)

Ta có

$$A = 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2(x+z)(y+t).$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ là không đổi nên ta cần tìm giá trị lớn nhất của $B = (x+z)(y+t)$.

$$\text{Đặt } a = x+z, b = y+t.$$

Ta có $a+b = x+y+z+t = 7845$ không đổi và $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 =$

$$\begin{aligned} &= (a+b)^2 - 4 \left(\frac{a+b}{2} - a \right)^2 \\ &= 7845^2 - 4(a-3922,5)^2. \end{aligned}$$

Suy ra ab lớn nhất khi a gần 3922,5 nhất tức là A nhỏ nhất khi $x + z$ gần 3922,5 nhất.

Trong tập $\{1930, 1945, 1975, 1995\}$ có 6 tập con gồm 2 phần tử. Trong số đó, tập con $\{1930, 1995\}$ và $\{1945, 1975\}$ có tổng s gần 3922,5 nhất với $|s - 3922,5| = 2,5$.

Vậy A nhỏ nhất khi và chỉ khi $x, z \in \{1930, 1995\}$ hoặc $x, z \in \{1945, 1975\}$. Thành thử có 8 bộ $(x; y; z; t)$ để A đạt giá trị nhỏ nhất. Đó là

(1930; 1945; 1995; 1975),
(1930; 1975; 1995; 1945)
(1995; 1945; 1930; 1975),
(1995; 1975; 1930; 1945)
(1945; 1930; 1975; 1995),
(1945; 1995; 1975; 1930)
(1975; 1930; 1945; 1995),
(1975; 1995; 1945; 1930).

Bài 28 (T7/227). Việc tính toán trực tiếp a_1, a_2 cho phép ta dự đoán :

$$a_n = \frac{1}{2}(2 + (-1)^{n+1}\sqrt{3}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$.

Từ giả thiết của bài toán, dễ thấy khẳng định (1) đúng với $n = 0$.

Giả sử khẳng định (1) đúng đến $n = k, (k \in \mathbb{N})$, nghĩa là $a_k = \frac{1}{2}(2 + (-1)^{k+1}\sqrt{3})$. Khi đó, từ công thức xác định dãy (a_n) ta có

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{2}(2 + (-1)^{k+1}\sqrt{3})[(2 + (-1)^{k+1}\sqrt{3})^2 - \\ &\quad - 5(2 + (-1)^{k+1}\sqrt{3}) + 5]^2 \\ &= \frac{1}{2}(2 + (-1)^{k+1}\sqrt{3})(2 - (-1)^{k+1}\sqrt{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}(2 + (-1)^{k+2}\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Kết quả vừa nhận được cho thấy, khẳng định (1) cũng đúng với $n = k + 1$. Vậy, theo nguyên lý quy nạp, số hạng tổng quát a_n được cho bởi công thức (1).

★ *Ghi chú* : Ta có thể đề xuất bài toán khái quát sau : Cho số thực không âm a và cho dãy số (a_n) được xác định như sau : $a_0 = a, a_{n+1} = a_n(4a_n^2 - 10a_n + 5)^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Hãy xác định số hạng tổng quát a_n .

Kết quả là :

• Nếu $a = 0$ thì $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

• Nếu $0 < a < 2$ thì $a_n = 2\cos^2(5^n \cdot \varphi)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, với φ là góc thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao

$$\text{cho } \cos \varphi = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}.$$

• Nếu $a \geq 2$ thì $a_n = 1 + \frac{1}{2}[(t_1^{5^n})^2 + (t_2^{5^n})^2]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, ở đây t_1, t_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (ẩn t) : $t^2 - \sqrt{2a} \cdot t + 1 = 0$.

Bài 29(T2/228)

Gọi X là giá trị lớn nhất của các nghiệm $x_i, i = 1, 2, \dots, 1996$ và Y là giá trị bé nhất của chúng. Thế thì từ phương trình đầu ta có

$$2X \geq x_1 + x_2 = x_3^{1996}$$

Từ đó, đối với các phương trình của hệ ta có

$$2X \geq x_k^{1996}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, 1996.$$

Do đó $2X \geq X^{1996}$

Suy ra $2 \geq X^{1995}$ (vì $X > 0$) (1)

Lập luận một cách tương tự ta cũng đi đến

$$2 \leq Y^{1995} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $X^{1995} = Y^{1995} = 2$

Nghĩa là ta có $x_1 = x_2 = \dots = x_{1996} = 1995\sqrt{2}$.

★ *Ghi chú*. Bài này cũng có thể tổng quát hoá bằng cách thay 1996 bởi số n nguyên dương.

Bài 30 (T7/228)

Điều kiện có nghĩa : $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $\sqrt{1-x^2} = y$ ($0 \leq y \leq 1$) và viết
 $729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36$ (1) dưới dạng

$$729(1-y^2)^2 + 8y = 36$$

$$\Leftrightarrow \left(27^2(1-y^2)^2 - 36(1-y^2) + \frac{4}{9} \right) - \left(36y^2 - 8y + \frac{4}{9} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(27(1-y^2) - \frac{2}{3} \right)^2 - \left(6y - \frac{2}{3} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [27(1-y^2) - 6y] \left[27(1-y^2) + 6y - \frac{4}{3} \right] = 0.$$

Xét hai trường hợp sau :

• Với $27(1-y^2) - 6y = 0$ tìm được $y = \frac{-1 - \sqrt{82}}{9}$

(loại) và $y = \frac{-1 + \sqrt{82}}{9}$ (thỏa mãn).

Vậy $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{9}(-1 + \sqrt{82})$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{9} \sqrt{-2 + 2\sqrt{82}}.$$

• Với $27(1-y^2) + 6y - \frac{4}{3} = 0$ tìm được

$y = \frac{1 - \sqrt{78}}{9}$ (loại) và $y = \frac{1 + \sqrt{78}}{9}$ (loại).

Kết luận : Phương trình có hai nghiệm

$$x = \pm \frac{1}{9} \sqrt{-2 + 2\sqrt{82}}.$$

Bài 31 (T7/230)

Áp dụng BDT Cauchy cho n số dương
 $\frac{(a+b)(n-1)}{c}$ và $(n-1)$ số 1 ta có

$$\sqrt[n]{\frac{(a+b)(n-1)}{c}} \leq \frac{(n-1)(a+b+c)}{nc}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \frac{c}{a+b+c} \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \frac{b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\text{và } \sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \frac{a}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) theo từng vế, ta được

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \quad (4)$$

Dấu bằng ở (4) xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (1), (2) và (3) tức là

$$\begin{cases} (n-1)(a+b) = c \\ (n-1)(c+a) = b \\ (n-1)(b+c) = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(n-1)(a+b+c) = a+b+c \Rightarrow n = \frac{3}{2}$$

(vì $a, b, c > 0$). Do $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ nên điều vừa nhận được cho thấy dấu bằng ở (4) không xảy ra và bởi thế ta có đpcm.

★ Ghi chú. Từ bài toán trên ta có thể khai thác và tổng quát hoá để có các bài toán sau :

Bài 1. Cho a, b, c là ba số dương, $n \in \mathbb{N}$,

$n \geq 2$. Đặt $S_n = \sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}$.

Chứng minh rằng

a) $S_n > 2$

b) $S_n \geq \frac{3\sqrt[n]{2^{n-1}}}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 2. Cho $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $0 < \alpha < 1$ và m số

thực dương $a_1, a_2, \dots, a_m$. Đặt $S = \sum_{i=1}^m a_i$. Chứng

minh rằng $\sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i}{S-a_i} \right)^\alpha \geq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha$. Đẳng

thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_m$ và $m(1-\alpha) = 1$.

Bài 32 (T7/231). Giả sử với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ có

$$f(x+1) \cdot f(y) = y(f(x)+1) \quad (1)$$

Thay $x = -1$ vào (1) ta được $f(0) = y(f(-1) + 1)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0$ và $f(-1) = -1$. Từ đó, thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(f(y)) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. (2)

Thay $x = -2, y = -1$ vào (1) ta có : $f(1) = -(f(-2) + 1)$ nên $f(1) = -1$ hoặc $f(1) = 1$. Nếu $f(1) = -1$ thì $1 = f(f(1)) = f(-1) = 1$. Vô lí. Vậy $f(1) = 1$. Từ đó, thay $y = 1$ vào (1) ta sẽ có : $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra : $f(xy) = f(y)(f(x-1) + 1) = f(y)f(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. (3)

Từ (3) với $x \geq 0$ thì $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (4)

Hơn thế, từ (3) ta còn có : với $y \neq 0$ thì

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\left(\frac{x}{y} + 1\right)y\right) \\ &= f(y)\left(f\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right) = f(y).f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta được $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ đó, kết hợp với (4), ta có với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ mà $x > y$ thì $f(x) - f(y) = f(x-y) = (f(\sqrt{x-y}))^2 > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì thế từ (2) ta thấy :

• Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ mà $f(x_0) > x_0$ thì $x_0 = f(f(x_0)) > f(x_0)$, mâu thuẫn.

• Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ mà $f(x_0) < x_0$ thì $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$, mâu thuẫn.

Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số vừa tìm được thoả các yêu cầu của đề bài ; và điều này chứng tỏ đó là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 33 (T6/232). Xét hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} x^3 - mx - y = 0 & (1) \\ y^3 - my + x = 0 & (2) \end{cases}$$

Hệ (I) luôn có nghiệm $(x ; y) = (0 ; 0)$. Nếu $x \neq 0$ thì $y \neq 0$ (và ngược lại).

Từ hệ (I) suy ra $x^4 + y^4 = m(x^2 + y^2) \Rightarrow m > 0$ nếu $x \neq 0, y \neq 0$.

Vậy bài toán tương đương với : Tìm $m > 0$ để hệ có 4 nghiệm $(x ; y)$ khác $(0 ; 0)$. Thế $y = x^3 - mx$ vào phương trình của hệ, dẫn đến $x^2(x^2 - m)^3 - m(x^2 - m) + 1 = 0$ (3)

Đặt $t = x^2 - m$. PT (3) có dạng

$$t^4 + mt^3 - mt + 1 = 0 \quad (4)$$

với $t > -m$.

Đặt $u = t - \frac{1}{t}$. PT (4) trở thành

$$u^2 + mu + 2 = 0 \quad (5)$$

Để PT (5) có nghiệm thì biệt số $\Delta \neq 0 \Rightarrow m \geq 2\sqrt{2}$. Khi đó PT (5) có hai nghiệm

$$u_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \text{ và } u_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2}$$

Xét phương trình $t - \frac{1}{t} = u_1$

$$\Leftrightarrow f(t) = 2t^2 - (\sqrt{m^2 - 8} - m)t - 2 = 0 \quad (6)$$

và phương trình $t - \frac{1}{t} = u_2$

$$\Leftrightarrow g(t) = 2t^2 + (\sqrt{m^2 - 8} + m)t - 2 = 0 \quad (7)$$

Ta có

$$f(-m)f(0) = -2(m^2 + m\sqrt{m^2 - 8} - 2) < 0$$

$$g(-m)g(0) = -2(m^2 - m\sqrt{m^2 - 8} - 2) < 0.$$

Vậy phương trình (6) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 mà $-m < t_1 < 0 < t_2$ và phương trình (7) có hai nghiệm phân biệt t_3, t_4 mà $-m < t_3 < 0 < t_4$.

Ứng với mỗi t sẽ có hai giá trị của $x = \pm\sqrt{t+m}$. Thành thử đề hệ (I) có 4 nghiệm ta phải có $t_1 = t_3, t_2 = t_4 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2}$. Thử lại thấy đúng.

Bài 34 (T8/232). Do f là song ánh từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ nên dễ thấy phải tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\max\{f(0), f(1), \dots, f(n)\} = f(a)$ với $0 < a \leq n, a \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(a) > f(m)$ với mọi $m = 0, 1, \dots, a-1$. (1)

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh, rằng với $a \in \mathbb{N}^*$ và thoả mãn (1) sẽ tồn tại $b \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a < b$ và $f(b) > f(m)$ với mọi $m = 0, 1, \dots, b-1$. (2)

Thật vậy, với $a \in \mathbb{N}^*$ sẽ tồn tại $b_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(b_0) > f(a)$ (3)

Do a thoả mãn (1) nên từ (3) suy ra $a < b_0$. (4)

Xét tập T gồm tất cả các số $b_0 \in \mathbb{N}^*$ và thoả (3), (4). Do f là song ánh từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ nên sẽ tồn tại $b = \min_{b_0 \in T} b_0$. Hiển nhiên ta có $a < b$ và $f(b) > f(m)$ với mọi $m = 0, 1, \dots, b-1$. Tóm lại, (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) suy ra tồn tại dãy tăng ngặt (a_n) ($n = 1, 2, \dots$) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

(i) $a_n \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f(a_n) > f(m)$ với mọi $m = 0, \dots, a_n - 1$.

Xét k bất kì thuộc $\mathbb{N}^*$. Từ $a_k < a_{k+1}$ và (ii) suy ra $f(a_{k+1}) > f(a_k) \Rightarrow f(a_{k+1}) = f(a_k) + m$ (5) với $m \in \mathbb{N}^*$. Vì f là song ánh từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ nên tồn tại c sao cho $f(c) = f(a_{k+1}) + m$ (6), hơn nữa do (ii) nên $a_{k+1} < c$. Từ (5) và (6) suy ra : $2f(a_k) = f(a_{k+1}) + f(c)$ với $a_k < a_{k+1} < c$. Điều vừa nhận cho thấy tồn tại vô số bộ (a, b, c) với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $a < b < c$ thoả mãn $2f(b) = f(a) + f(c)$ (đpcm).

Bài 35 (T7/233)

Cách 1. Ta có $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 9 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 + \sqrt{8} = 0 & (1) \\ x^2 + 2x - 3 - \sqrt{8} = 0 & (2) \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1) và x_3, x_4 là nghiệm của (2), khi đó x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của $f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta tính } S_1 &= \frac{2x_1^2 + 1}{(x_1^2 - 1)^2} + \frac{2x_2^2 + 1}{(x_2^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{2x_1^2 + 1}{(4 - \sqrt{8})(x_1 - 1)^2} + \frac{2x_2^2 + 1}{(4 - \sqrt{8})(x_2 - 1)^2} \\ & \quad (\text{vì } (x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2 = 4 - \sqrt{8}) \\ &= \frac{1}{4 - \sqrt{8}} \left(\frac{(2x_1^2 + 1)(x_2 - 1)^2 + (2x_2^2 + 1)(x_1 - 1)^2}{(x_1 - 1)^2(x_2 - 1)^2} \right) \end{aligned}$$

Dùng định lí Viète để tìm được giá trị của biểu thức trong dấu ngoặc và tính được

$$S_1 = \frac{1}{4 - \sqrt{8}} \cdot \frac{80 - 22\sqrt{8}}{8}.$$

$$\text{Tương tự } S_2 = \frac{1}{4 + \sqrt{8}} \cdot \frac{80 + 22\sqrt{8}}{8}.$$

$$\text{Từ đó } S = S_1 + S_2 = \frac{9}{2}.$$

Cách 2.

Để thấy

$$f(-4) = 13,$$

$$f(-3) = -8,$$

$$f(-1) = 12,$$

$$f(1) = -8,$$

$$f(2) = 1,$$

$$\text{nên } f(-4)f(-3) < 0,$$

$$f(-3)f(-1) < 0,$$

$$\begin{aligned} f(-1)f(1) &< 0, \\ f(1)f(2) &< 0. \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } S &= \sum_{i=1}^4 \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2} = \sum_{i=1}^4 \frac{2x_i^2 + 1}{12x_i - 4x_i^3} \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(-\frac{7}{24} \left(\frac{1}{x_i - \sqrt{3}} + \frac{1}{x_i + \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{12x_i} \right) \\ &= -\frac{7}{24} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i - \sqrt{3}} - \frac{7}{24} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i + \sqrt{3}} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i} \\ \text{Để chứng minh được } \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i - a} &= \frac{f'(a)}{f(a)} \text{ với} \end{aligned}$$

mọi $x_i \neq a$. Do đó

$$S = -\frac{7}{24} \frac{f'(\sqrt{3})}{f(\sqrt{3})} + \frac{7}{24} \frac{f'(-\sqrt{3})}{f(-\sqrt{3})} + \frac{1}{12} \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{9}{2}.$$

Bài 36 (T8/233)

1) Ta có

$$2 = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc \geq 2bc \Rightarrow bc \leq 1.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} (a + b + c - abc)^2 &= [a(1 - bc) + (b + c)]^2 \leq \\ &\leq (a^2 + (b + c)^2)((1 + (1 - bc)^2) \\ &= 2(1 + bc)[1 + (1 - bc)^2] \\ &= 2(1 + bc) + 2(1 + bc)(1 - bc)^2 \\ &= 2(1 + bc) + 2(1 - b^2c^2)(1 - bc) \\ &= 4 - 2b^2c^2(1 - bc) \leq 4. \end{aligned}$$

Suy ra $|a + b + c - abc| \leq 2$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 0, hai số còn lại bằng nhau và bằng 1 hay -1.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có } (a + b + c)^2 &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 6 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(a + b + c)^2 &\leq 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì thế } (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 &= [(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)]^2 \\ &= (a + b + c)^2 \left(2 - \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \right)^2 \\ &= (a + b + c)^2 \left(3 - \frac{1}{2}(a + b + c)^2 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a + b + c)^2 \left(3 - \frac{1}{2}(a + b + c)^2 \right) \times \\ &\times \left(3 - \frac{1}{2}(a + b + c)^2 \right) \leq \left(\frac{6}{3} \right)^3 = 8. \text{ Suy ra} \\ |a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| &\leq 2\sqrt{2} \text{ (đpcm). Dấu bằng} \\ \text{xảy ra khi và chỉ khi } &\begin{cases} |a + b + c| = \sqrt{2} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 37 (T2/234)

Cách 1.

Vì $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên

$$\text{suy ra } a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1 \quad (1)$$

Ta có $A = a(x + b) + b(y + c) + c(z + a)$

$$= ax + by + cz + ab + bc + ca$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(a^2 + x^2) + (b^2 + y^2) + (c^2 + z^2)}{2} + ab + bc + ca \\ &\leq \frac{(a + b + c)z^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = x, b = y, c = z$ khi đó sẽ xảy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 = a + b + c$$

trái với (1). Vậy sẽ không xảy ra dấu bằng và ta được điều cần chứng minh.

Cách 2.

Áp dụng Bất đẳng thức Bunyakovski cho sáu số a, b, c, x, y, z ta được

$$\begin{aligned} ax + by + cz &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{vì } x^2 + y^2 + z^2 = 1). \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} a(x + b) + b(y + c) + c(z + a) &= ax + by + \\ &+ cz + ab + bc + ac \\ &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + ab + bc + ac = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \\ &+ \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \quad (\text{vì } (a + b + c)^2 = 1) \\ &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[(a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 1) - 1] \\ &\leq 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - 1)^2 < 1 \\ &(\text{vì } a^2 + b^2 + c^2 < 1) \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Bài 38 (T6/235)

• Trước hết ta chứng minh $C \geq 2$. Thật vậy chọn $a_i = i$ ($i = 1, \dots, n$) ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{i+1} < C \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < C + (C-2) \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$$

Nếu $C < 2$ khi cho $n \rightarrow +\infty$ thì vế phải tiến đến $-\infty$ còn vế trái tiến tới 0. Mâu thuẫn.

• Với $C = 2$ thì BĐT đúng.

• Áp dụng BĐT Bunyakovski ta có

$$\left(\sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^k i \right)^2 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\sum_{i=1}^k a_i} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i}$$

$$\text{Vậy } \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sum_{i=1}^k a_i} \leq \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{4i^2}{k(k+1)^2 a_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \frac{4i^2}{k(k+1)^2 a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \sum_{k=i}^n \frac{4i^2}{k(k+1)^2}$$

Ta có

$$\sum_{k=i}^n \frac{4i^2}{k(k+1)^2} < i^2 \left(\frac{2}{i^2} - \frac{2}{(n+1)^2} \right) < \frac{2i^2}{i^2} = 2.$$

$$\forall i \quad \frac{4}{k(k+1)^2} < \frac{4k+2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2}{k^2} - \frac{2}{(k+1)^2}$$

thành thử

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sum_{i=1}^k a_i} < 2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

Vậy số C cần tìm là $C = 2$.

Bài 39 (T7/235)

Do $a, b, c \in [0; 1]$ nên

$$F \leq \frac{a}{abcd+1} + \frac{b}{abcd+1} + \frac{c}{abcd+1} + \frac{d}{abcd+1} = \frac{a+b+c+d}{abcd+1} \quad (1)$$

Mặt khác, từ $a, b, c, d \in [0; 1]$ ta còn có

$$a+b \leq 1+ab$$

$$c+d \leq 1+cd$$

$$ab+cd \leq 1+abcd.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được :

$$a+b+c+d \leq 3+abcd \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } F \leq \frac{3+abcd}{abcd+1} \leq 3 \quad (3)$$

Hơn nữa, với $a=b=c=1$ và $d=0$ thì $F=3$. Kết hợp với (3) ta có $\max F = 3$.

★ *Ghi chú.* Bằng phương pháp của lời giải nêu trên, cũng như bằng một số phương pháp khá đơn giản khác, ta có thể giải **Bài toán khái quát** sau : "Xét các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ thuộc $[0; 1]$ (n là số nguyên lớn hơn 1 cho trước). Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{a_1}{a_2 a_3 \dots a_n + 1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{a_i}{a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n + 1} + \frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1}$$

(Đáp số : $\max F = n-1$).

Bài 40 (T8/235)

Giả sử $Q(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Khi đó

$(Q'(x))^2 - 2Q(x)Q''(x) = b^2 - 4ac < 0$. Theo giả thiết thì tồn tại các nhị thức bậc nhất $G(x)$ và $R(x)$ sao cho $P(x) = Q(x)G(x) + R(x)$.

Chú ý rằng $Q''(x) = 2a$; $R'(x)$ là hằng số.

Suy ra

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$y'' = \left(\frac{R(x)}{Q(x)} \right)''$$

$$\text{Vậy } y''(x) = 0 \Leftrightarrow 2R(x)(Q'(x))^2 - \\ - 2Q(x)Q'(x)R'(x) - Q(x)R(x)Q''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R(x)}{Q(x)}((Q'(x))^2 - 2Q(x)Q''(x))$$

$$= 3R(x)Q''(x) + 2Q'(x)R'(x)$$

$$\Leftrightarrow 2y(b^2 - 4ac) = 3R(x)Q''(x) + 2Q'(x)R'(x) + \\ + 2G(x) \text{ với } G(x) \text{ là nhị thức bậc nhất.}$$

Nhận xét rằng bậc của

$(3R(x)Q''(x) + 2Q'(x)R'(x))$ không lớn hơn 1
nên $3R(x)Q''(x) + 2Q'(x)R'(x) = \alpha x + \beta$.

$$\text{Vậy } y'' = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2(b^2 - 4ac)}(\alpha x + \beta + G(x)), \text{ (đpcm).}$$

Bài 41 (T3/236).

• Điều kiện : $a_1 \geq 0$. Vì nếu $a_1 < 0$ thì khi
cho $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$; $b_1 = 1, b_2 = b_3 = \dots =$
 $= b_n = 0$, ta có :

$$M(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq \frac{m}{2}(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2$$

trở thành $a_1 \geq \frac{a_1}{2}$ (vô lí vì $a_1 < 0$).

Với $a_1 \geq 0$ ta suy ra $m \geq 0$.

• Ta lại có $a_1 \geq m; a_2 - a_1 \geq m \Rightarrow a_2 \geq 2m$
và từ đó suy ra $a_3 \geq 3m, \dots ; a_n \geq n.m$.

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ Vậy có } M(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq \\ &\geq M(mb_1 + 2mb_2 + \dots + nmb_n) \\ &= mM(b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n) \\ &= m[M(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + M(b_2 + b_3 + \\ &+ \dots + b_n) + \dots + M(b_{n-1}b_n) + Mb_n] \\ &\geq m[b_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + b_2(b_2 + b_3 + \\ &+ \dots + b_n) + \dots + b_{n-1}(b_{n-1} + b_n) + b_n^2] \\ &= \frac{m}{2}[(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2] \end{aligned}$$

$$\geq \frac{m}{2}(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 \text{ (đpcm).}$$

Dấu bằng xảy ra khi $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$
hoặc khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Bài 42 (T6/238)

Vì $x_1 = 2 > 0$ nên từ công thức xác định dãy
 (x_n) suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Do đó, với mọi
 $n \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{5x_n} \left(x_n^4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ &\geq \frac{4}{5x_4} \sqrt[4]{x_n^4 \cdot \frac{1}{27}} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{15}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, dễ thấy, x_n là số hữu tỉ với mọi
 $n \geq 1$. Vì thế $x_n \neq \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra,
dấu bằng trong bất đẳng thức trên không thể
xảy ra, nghĩa là ta có

$$x_{n+1} > \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} \text{ với mọi } n \geq 1 \quad (1)$$

Tiếp theo, bằng phương pháp quy nạp theo n ,
ta sẽ chứng minh

$$x_{n+1} \leq 1,7 \text{ với mọi } n \geq 1 \quad (2)$$

$$\text{Với } n = 1 \text{ ta có : } x_2 = \frac{2^4 + 1}{10} = 1,7.$$

Giả sử, đã có (2) với $n = k$ ($k \geq 1$). Khi đó

$$x_{k+1}^3 \leq (1,7)^3 = 4,913 < 5 \Rightarrow x_{k+1}^4 < 5x_{k+1}$$

$$\text{(do } x_{k+1} > 0) \quad (3)$$

Hơn thế, từ (1) ta còn có

$$x_{k+1} > \frac{2}{7} \left(\text{do } \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \frac{2}{7} \right) \Rightarrow 3,5x_{k+1} > 1 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$x_{k+1}^4 + 1 < 8,5x_{k+1} \Leftrightarrow \frac{x_{k+1}^4 + 1}{5x_{k+1}} < 1,7.$$

hay $x_{k+2} < 1,7$. Điều này cho thấy, ta cũng có
(2) với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp, (2) được chứng minh với mọi $n \geq 1$.

Tóm lại

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_{n+1} \leq 1,7 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do $\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \frac{1}{5}$ và $1,7 < 2$ nên từ các bất đẳng

thức trên ta có các bất đẳng thức cần chứng minh trong đề bài.

★ *Ghi chú* : Bằng phương pháp của lời giải nêu trên, ta cũng chứng minh được rằng :

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_n < \frac{3}{2} \text{ với mọi } n \geq 3.$$

Tuy nhiên, cũng bằng phương pháp đó, ta còn có thể chứng minh được BĐT chặt hơn :

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_n < \frac{5}{4} \text{ với mọi } n \geq 3.$$

Bài 43 (T7/238)

Từ $f(x) \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$ suy ra

$$x(ax^2 + bx + c) \leq 0 \text{ với mọi } x \in [-1; 1].$$

Từ đó ta còn có $-x(ax^2 - bx + c) \leq 0$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Suy ra $-x^2[(ax^2 + c)^2 - b^2x^2] \geq 0$ với mọi $x \in [-1; 1]$ dẫn tới $(ax^2 + c)^2 \leq b^2x^2$ với mọi $x \in [-1; 1]$ (1)

Cho $x = 0$, từ (1) ta được $c = 0$. Khi đó

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1.$$

Do $-1 \leq f(x) \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$ nên $-1 \leq f(1) \leq 1$ và $-1 \leq f(-1) \leq 1$, hay

$$\begin{cases} -1 \leq a + b + 1 \leq 1 \\ -1 \leq -a + b + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -2 \leq b \leq 0 \\ -(b+2) \leq a \leq -b \\ -(b+2) \leq -a \leq -b \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{nên } |a| \leq \min\{-b, b+2\}. \quad (3)$$

Với $c = 0$ và a, b thỏa mãn (2), (3) ta có : với $x \in [-1; 1]$ thì $ax \leq |ax| \leq |a| \leq -b \Rightarrow ax + b \leq 0$.

$$ax \geq -|ax| \geq -|a| \geq -(b+2) \Rightarrow ax + b \geq -2.$$

Như vậy $-2 \leq ax + b \leq 0$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Suy ra :

$$-2 \leq -2x^2 \leq ax^3 + bx^2 \leq 0$$

với mọi $x \in [-1; 1]$ hay

$$|f(x)| \leq 1 \text{ với mọi } x \in [-1; 1].$$

Vậy, tất cả các bộ ba số cần tìm là tất cả các bộ $(a; b; 0)$ với a, b thỏa mãn (1) và (2).

Bài 44 (T7/239)

Ta sẽ giải bài toán khái quát sau.

Bài toán 1. Cho số thực $\alpha > 0$ và cho n số thực $a_i \in [0; 1]$ với $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{a_2 a_3 \dots a_n + \alpha} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{a_i}{a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n + \alpha} + \dots \\ & + \frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} + \alpha} \leq 1 + \frac{n-1-\alpha}{a_1 a_2 \dots a_n + \alpha} \end{aligned} \quad (1)$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nào ?

Lời giải. Kí hiệu vế trái của (1) là F . Khi đó, từ $a_1, a_2, \dots, a_n$ thuộc $[0; 1]$ và $\alpha > 0$, suy ra

$$F \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_1 a_2 \dots a_n + \alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{a_1 a_2 \dots a_n + \alpha} \quad (2)$$

Hơn nữa, từ $a_1, a_2, \dots, a_n$ thuộc $[0; 1]$ ta có

$$(1 - a_{i+1})(1 - a_1 a_2 \dots a_i) \geq 0, \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^{n-1} (1 - a_{i+1})(1 - a_1 a_2 \dots a_i) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n-1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} - a_1 a_2 \dots a_i) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n-1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} + (a_1 a_2 \dots a_n - a_1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \leq n-1 + a_1 a_2 \dots a_n \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được

$$F \leq \frac{n-1 + a_1 a_2 \dots a_n}{a_1 a_2 \dots a_n + \alpha} = 1 + \frac{n-1-\alpha}{a_1 a_2 \dots a_n + \alpha}.$$

Dấu bằng ở BDT trên xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (2) và (3) tức là hoặc $a_i = 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ hoặc trong n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có một số bằng 0 và $(n-1)$ số còn lại cùng bằng 1.

Bài đã ra là trường hợp đặc biệt của Bài toán 1, khi $n = 4$ và $\alpha = 2$.

★ *Ghi chú.* 1) Giả sử có các số thực dương q và β . Chọn $\alpha = \frac{q}{\beta^{n-1}}$, và với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$

đặt $a_i = \frac{h_i}{\beta}$. Khi đó, với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $a_i \in [0, 1] \Leftrightarrow h_i \in [0, \beta]$. Do vậy, ta còn có thể phát biểu Bài toán 1 dưới dạng sau.

Bài toán 2. Cho các số thực dương q, β và cho n số thực $h_i \in [0; \beta]$, với $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng

$$\frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n + q} + \frac{h_2}{h_3 \dots h_n h_1 + q} + \dots$$

$$+ \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1} + q}$$

$$\leq \frac{1}{\beta^{n-2}} \left(1 + \frac{(n-1)\beta^n - q\beta}{h_1 h_2 \dots h_n + q\beta} \right) \quad (4)$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nào ?

2) Bài toán sau là một khái quát hoá của Bài toán 1.

Bài toán 3. Cho $n, k \in \mathbb{N}$; $n > k \geq 1$ với n chia hết cho k . Cho các số thực dương α, β và

cho n số thực $a_i \in [0, \alpha]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_k}{a_{k+1} \dots a_n + \beta} + \frac{a_2 a_3 \dots a_{k+1}}{a_{k+2} \dots a_n a_1 + \beta} + \dots +$$

$$+ \frac{a_n a_1 \dots a_{k-1}}{a_k \dots a_{n-1} + \beta}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^{n-2k}} \left(k + \frac{(n-k)\alpha^n - k\beta\alpha^k}{a_1 a_2 \dots a_n + \beta\alpha^k} \right) \quad (5)$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nào ?

3) Khi coi các vế trái F, F_1, F_2 của các BDT (1), (4), (5) là các biểu thức của các biến số $a_1, a_2, \dots, a_n$, các bạn dễ dàng tìm được $\max F, \max F_1, \max F_2$ nhờ kết quả của các Bài toán 1, 2, 3.

Bài 45 (T8/239)

Do đa thức $f(x)$ có 2000 nghiệm thực phân biệt nên theo Định lí Rolle, thì $f'(x)$ có 1999 nghiệm thực phân biệt. Tương tự, $f''(x)$ có 1998 nghiệm phân biệt và $f'''(x)$ có 1997 nghiệm phân biệt và

$$f'''(x) = 2000.1999.1998x^{1997} + \dots$$

$$+ 4.3.2.a_{1996} + 3.2.a_{1997}$$

Do $f'''(0) = 3.2.a_{1997} = 3.2.1997 \neq 0$ nên đa thức

$$g(x) = x^{1997} f''' \left(\frac{1}{x} \right) = 6a_{1997} x^{1997} +$$

$$+ 24a_{1996} x^{1996} + 60a_{1995} x^{1995} + \dots + h_1$$

cũng có 1997 nghiệm phân biệt, giả sử đó là $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$. Theo định lí Viète thì

$$\sum_{i=1}^{1997} x_i = -\frac{24a_{1996}}{6a_{1997}}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 1997} x_i x_j = \frac{60.a_{1995}}{6.a_{1997}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned} \left(-\frac{24a_{1996}}{6.a_{1997}} \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{1997} x_i \right)^2 \geq \\ &\geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 1997} x_i x_j = 2 \cdot \frac{60.a_{1995}}{6.a_{1997}} \\ \Rightarrow |a_{1996}| &\geq \frac{1}{2} \sqrt{5.a_{1995}.a_{1997}} > 2231 > 1996. \end{aligned}$$

★ *Ghi chú.* Ta có thể chứng minh kết quả tổng quát sau đây : Nếu đa thức $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ($n \geq 2$; $a_0.a_n \neq 0$) có n nghiệm thực phân biệt, thì

$$a_{n-1}^2 > \frac{2n}{n-1} a_n.a_{n-2}.$$

Từ đó sẽ cho nhiều sự khái quát hoá của bài toán đã cho.

Bài 46 (T6/240).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{C_{1997+k}^{k+1}} &= \frac{1996!(k+1)!}{(1997+k)!} \\ &= \frac{1996!(k+1)!}{(1997+k)!1995} (1997+k-(k+2)) \\ &= \frac{1996}{1995} \left(\frac{1995!(k+1)!}{(1996+k)!} - \frac{1995(k+2)!}{(1997+k)!} \right) \\ &= \frac{1996}{1995} \left(\frac{1}{C_{1996+k}^{k+1}} - \frac{1}{C_{1997+k}^{k+2}} \right). \end{aligned}$$

Lấy tổng

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_{1997+k}^{k+1}} &= \frac{1996}{1995} \left(\frac{1}{C_{1996}^1} - \frac{1}{C_{1997+n}^{n+2}} \right) \\ &< \frac{1996}{1995} \cdot \frac{1}{C_{1996}^1} = \frac{1}{1995}. \end{aligned}$$

★ *Ghi chú :* Ta có thể thay số 1997 bởi một số m bất kỳ ($m > 2$) và có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{C_m^1} + \frac{1}{C_{m+1}^2} + \dots + \frac{1}{C_{m+n}^{n+1}} < \frac{1}{m-2}.$$

Bài 47 (T2/241)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 1995 số 1 và hai số x^{1997} , ta có

$$\frac{1995 + 2x^{1997}}{1997} \geq \sqrt[1997]{x^{2.1997}} = x^2 \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{1995 + 2y^{1997}}{1997} \geq y^2 \quad (2)$$

$$\text{và } \frac{1995 + 2z^{1997}}{1997} \geq z^2 \quad (3)$$

Cộng theo từng vế của (1), (2), (3) ta có

$$\begin{aligned} F &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &\leq \frac{3.1995 + 2(x^{1997} + y^{1997} + z^{1997})}{1997} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } F = 3 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1 \text{ (vì } x, y, z \geq 0).$$

Do đó F đạt giá trị lớn nhất bằng 3.

★ *Ghi chú :*

1) Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski mở rộng để giải quyết bài toán này :

$$\begin{aligned} &(\underbrace{1.1\dots 1}_{1995 \text{ số } 1}.x.x + \underbrace{1.1\dots 1}_{1995 \text{ số } 1}.y.y + \underbrace{1.1\dots 1}_{1995 \text{ số } 1}.z.z)^{1997} \\ &\leq 3^{1995}(x^{1997} + y^{1997} + z^{1997})^2 \\ \Rightarrow F^{1997} &\leq 3^{1997} \Rightarrow F \leq 3. \end{aligned}$$

Vì $F = 3$ khi $x = y = z = 1$ nên F lớn nhất bằng 3.

2) Ta còn có thể giải bài toán tổng quát sau.

Cho k số dương $x_1, x_2, \dots, x_k$ thoả mãn

$$x_1^m + x_2^m + \dots + x_k^m = S.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $F = x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n$ với $m > n$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 48 (T8/241)

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_3) +$$

$$+ \dots + x_{n-1}(1-x_n) + x_n(1-x_1) \leq \left[\frac{n}{2} \right] \quad (1)$$

Do đó với mỗi $n \geq 4$ ta đều có

$$\sqrt[3]{a_n^4} < 1 + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{2}{3} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^4}} + \frac{4}{27} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^8}} + \frac{1}{81} \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_{k-1}^4} \quad (2)$$

Dựa vào (1) và dựa vào bất đẳng thức Bunyakovski ta sẽ được các BĐT sau.

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^4}} &= 1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^4}} \\ &< 1 + \frac{4}{3} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} < 1 + \frac{3}{4} \sqrt{(n-2) \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^2}} \\ &< 1 + \frac{3}{4} \sqrt{(n-2) \left(1 + \sum_{k=4}^n \frac{1}{(k-3)(k-2)} \right)} \\ &= 1 + \frac{3}{4} \sqrt{(n-2) \left(2 - \frac{1}{n-2} \right)} < 1 + \frac{3}{4} \sqrt{2(n-2)} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^8}} &= 1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{(\sqrt[3]{a_{k-1}^4})^2} \\ &< 1 + \frac{9}{16} \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^2} < 1 + \frac{9}{8} = \frac{17}{8} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_{k-1}^4} &= 1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{(\sqrt[3]{a_{k-1}^4})^3} \\ &< 1 + \frac{27}{64} \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^3} < 1 + \frac{27}{64} \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^2} \\ &< 1 + \frac{27}{32} = \frac{59}{32} \quad (5) \end{aligned}$$

Từ (2), (3), (4), (5) ta được :

$$\sqrt[3]{a_n^4} < \frac{4}{3}n + \frac{1}{2}\sqrt{2(n-2)} + \frac{35}{54} + \frac{1}{81} \cdot \frac{59}{32} \quad (6)$$

với mọi $n \geq 4$

Từ (1) và (6) suy ra

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) &< \frac{a_n^{\frac{4}{3}}}{n} < \frac{4}{3} + \frac{1}{2n} \sqrt{2(n-2)} + \\ &+ \frac{35}{54n} + \frac{1}{8} \cdot \frac{59}{32} \cdot \frac{1}{n} \text{ với mọi } n \geq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2n} \sqrt{2(n-2)} + \frac{35}{54n} + \frac{1}{81} \cdot \frac{59}{32} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{4}{3} \\ \text{nên từ (7) suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^{\frac{4}{3}}}{n} &= \frac{4}{3}. \text{ Như vậy} \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{4}{3}$ là một giá trị cần tìm.

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ suy ra từ (1) và

$$\frac{a_n^\alpha}{n} = \frac{a_n^{\frac{4}{3}}}{n} \cdot a_n^{\alpha - \frac{4}{3}} \text{ nên}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^\alpha}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha > \frac{4}{3} \\ 0 & \text{nếu } \alpha < \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $\alpha = \frac{4}{3}$ là giá trị duy nhất để dãy (u_n) hội tụ và giới hạn của nó khác không.

★ Ghi chú : Có thể nêu Bài toán khái quát sau :
"Cho số thực dương a và số thực âm b . Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n + a_n^b$, $\forall n \geq 0$. Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{a_n^\alpha}{n}$ với mọi $n \geq 1$ là hội tụ và giới hạn của nó khác không".

(Đáp số : $\alpha = 1 - b$).

Bài 50 (T7/221)

Dễ thấy có

$$1 \leq \frac{n^k(1+n^k)}{1+n^{2k}} \leq 2, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \text{ và với mọi } k = 1, 2, \dots, n. \text{ Từ công thức xác định } a_n \text{ ta có}$$

$$n+1 \leq a_n \leq 2n+1 < 2(n+1) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Suy ra } 1 \leq b_n \leq 2^{\frac{1}{n(n+1)}} < 2^{\frac{1}{n}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

$$\text{Mà } 2^{\frac{1}{n}} = (2. \underbrace{1.1 \dots 1}_{(n-1) \text{ số } 1})^{\frac{1}{n}} < \frac{n-1+2}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

$$\text{Nên từ (1) suy ra } 1 \leq b_n < 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

$$(7) \text{ Do } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 \text{ nên từ (2) được } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1.$$

★ Ghi chú. Với (a_n) là dãy được xác định trong bài đã ra, và với $k \in \mathbb{N}^*$ cho trước cũng

chứng minh được $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^k \cdot a_n)^{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$.

Bài 51 (T6/225)

• Ta thấy $x \leq 1$ không là nghiệm của phương trình. Thật vậy, viết phương trình đã cho về dạng

$$x(x^{2n} - 1) = 1.$$

Nếu $x \leq -1$ thì $x^{2n} \geq 1$. Vế trái âm.

Nếu $0 < x < 1$ thì vế trái âm.

Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì $x^{2n+1} \leq 0 < x + 1$.

• Xét hàm số $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$ ta có

$$f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0 \text{ với } x > 1$$

mà $f(1) = -1 < 0$ nên tồn tại và duy nhất $x_n > 1$ để $f(x_n) = 0$

Theo BĐT Cauchy ta có

$$x_n = \frac{2n+1}{2n+1} \sqrt[2n+1]{x_n + 1} \leq \frac{2n + x_n + 1}{2n + 1}$$

$$\Leftrightarrow x_n \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

$$\text{Vậy } 1 < x_n \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ nên ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

Bài 52 (T7/226)

Đặt $f(x) = x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1$.

Nếu $x \geq 1$ thì

$$f(x) = (x^{13} - x^6) + 3(x^4 - x^2) + 1 \geq 1 > 0.$$

Nếu $x \in (0; 1)$ thì $f(x) = x^{13} - (x^2 - 1)^3 > 0$.

Với $x < 0$ thì

$$\begin{aligned} f'(x) &= 13x^{12} - 6x^5 + 12x^3 - 6x \\ &= 13x^{12} - 6x(x^2 - 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

do đó $f(x)$ đồng biến trong $(-\infty; 0)$. Vì $f(x)$ là đa thức bậc lẻ do đó $f(x)$ có một nghiệm duy nhất trong $(-\infty; 0)$. Vì $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ nên nghiệm đó thuộc $(-1; 0)$.

$$\text{b) Đặt } g(x) = \left(x^{-\frac{7}{3}} + 1\right)^{-\frac{3}{13}}$$

Ta có $x_1 = 1, x_{n+1} = g(x_n)$.

Vì hàm $x^\alpha (x > 0)$ với $\alpha < 0$ là hàm giảm do đó

$g(x)$ là hàm tăng. Mặt khác $x_2 = 2^{-\frac{3}{13}} < 1 = x_1$

nên $x_3 = g(x_2) < g(x_1) = x_2, \dots$ Dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Qua giới hạn ta được

$$a^{-\frac{13}{3}} = a^{-\frac{7}{3}} + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = a^2 + a^{\frac{13}{3}}$$

$$\Rightarrow (1 - a^2)^3 = a^{13}. \text{ Đặt } x_0 = a \text{ với } 0 \leq x_0 < 1$$

$$\text{thì } (1 - x_0^2)^3 = x_0^{13}$$

$$\Rightarrow f(x_0) = 0.$$

c) Ta có $f(-0,80) \approx -0,0083$

$$f(-0,79) \approx 0,0064$$

$$f(-0,78) \approx 0,020.$$

Vậy $x \approx -0,79$.

Bài 53 (T8/228)

Ta có

$$\begin{aligned} \binom{3n}{3k} &= \binom{3n-1}{3k} + \binom{3n-1}{3k-1} \\ &= \binom{3n-2}{3k} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-2} \\ &> \binom{3n-2}{3k} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-2} \\ \Rightarrow S_n &> \sum_{k=0}^n \left\{ \binom{3n-2}{3k} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-2} \right\} \\ &= 2^{3n-2} \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, lại có $S_n < \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} = 2^{3n}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt[3n]{2^{3n-2}} < \sqrt[3n]{S_n} < 2$. (3)

Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3n]{2^{3n-2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ nên từ (3) ta được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3n]{S_n} = 2.$$

★ *Ghi chú* : Xuất phát từ ý tưởng và phương pháp của lời giải đã trình bày ở trên, ta có thể đề xuất và giải quyết **bài toán khái quát** sau.

Cho số nguyên dương a . Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ đặt

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{an}{ak}. \text{ Hãy tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{S_n}.$$

Bài 54 (T6/229)

Cách 1.

Ta có $x_{n+1} = \frac{3 - (x_n - 1)^2}{2}$.

Từ đó bằng quy nạp dễ thấy $1 < x_n < 2$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \sqrt{2}| &= \frac{1}{2} |(3 - (x_n - 1)^2) - (3 - (\sqrt{2} - 1))^2| \\ &= \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}| |\sqrt{2} - (2 - x_n)| \end{aligned} \quad (1)$$

Vì $0 < 2 - x_n < \sqrt{2}$ do đó từ (1) suy ra

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}| \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |x_n - \sqrt{2}|.$$

Suy ra

$$|x_n - \sqrt{2}| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} |x_1 - \sqrt{2}|.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Cách 2. Bằng quy nạp dễ thấy $1 < x_n < 2$.

Xét hàm số $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$ có $f'(x) =$

$1 - x < 0$ với mọi $x \in (1; 2)$ nên $f(x)$ nghịch biến trong $(1; 2)$. Do đó

a) Nếu $x_1 \geq x_3$ thì $f(x_1) \leq f(x_3) \Rightarrow x_2 \leq x_4$.

Tiếp tục như vậy ta có $x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq \dots$ và

$$x_2 \leq x_4 \leq \dots$$

Thành thử hai dãy (x_{2k}) và (x_{2k+1}) hội tụ

và giả sử $a = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k}$, $b = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1}$.

Qua giới hạn ta có $a = 1 + b - \frac{b^2}{2}$,

$$b = 1 + a - \frac{a^2}{2}.$$

Suy ra $(a - b)(a + b - 4) = 0$.

Chú ý rằng $x_n < \frac{3}{2}$, với mọi n do đó

$$a + b \leq \frac{6}{2} = 3.$$

Suy ra rằng $a = b$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ tồn tại.

b) Tương tự nếu $x_1 \leq x_3$ ta cũng có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

tồn tại. Gọi giới hạn là A . Ta có $A = 1 + A - \frac{A^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{2}$.

Bài 55 (T7/229)

Xét hàm số $g(x) = e^{-\frac{x}{1996}} f(x)$ xác định trên $[0; 1]$. Từ các giả thiết đối với hàm $f(x)$ suy ra hàm $g(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, có đạo hàm trong $(0; 1)$ và $g(0) = g(1) = 0$. Bởi thế, theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$g'(c) = 0. \quad (1)$$

Mà $g'(x) = e^{-\frac{x}{1996}} \left(f'(x) - \frac{1}{1996} f(x) \right)$

với mọi $x \in (0; 1)$, và $e^{-\frac{x}{1996}} \neq 0$ với mọi $x \in (0; 1)$ nên từ (1) ta có $f'(c) - \frac{1}{1996} f(c) = 0$ hay $f'(c) = 1996 f'(c)$. (đpcm).

Khi thay điều kiện $f(0) = f(1) = 0$ bởi điều kiện $f(0) = f(1) = m$ ($m \neq 0$ cho trước) thì kết luận của bài toán sẽ không còn đúng với $f(x)$ là hàm bất kì thoả mãn điều kiện $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và có đạo hàm trong $(0; 1)$. Chẳng hạn,

xét hàm $f(x) \equiv m$ ($m \neq 0$, không đổi) với mọi $x \in [0, 1]$. Lúc này, dễ thấy ta sẽ có $f(c) \neq 1996$. $f'(c)$ với mọi $c \in (0; 1)$.

Bài 56 (T8/230)

Với mọi $x, x_0 \in \mathbb{R}$ ($x \neq x_0$), chọn số hữu tỉ q nằm ở giữa x và x_0 thì :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f(q) + f(q) - f(x_0)| \leq \\ &= |f(x) - f(q)| + |f(q) - f(x_0)| \leq 5(x - q)^2 + 5(q - x_0)^2 \\ &\leq 5(x - x_0)^2 + 5(x - x_0)^2 = 10(x - x_0)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Vậy nên } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

$$\text{hay } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số liên tục tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, từ (1) ta nhận được

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq 10|x - x_0|.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0 \text{ hay } f'(x_0) = 0$$

với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$.

Do $f(x)$ liên tục và có $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta suy ra $f(x) = c$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài 57 (T6/233). Nhận xét rằng

$$1 = a_{n,0} < a_{n,1} < \dots < a_{n,n} \quad (1)$$

$$\text{và } \frac{1}{a_{n,i+1}} = \frac{1}{a_{n,i}} - \frac{1}{mn + a_{n,i}}$$

Suy ra

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_{n,i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_{n,i}} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{mn + a_{n,i}}$$

hay

$$\frac{1}{a_{n,n}} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{mn + a_{n,i}} \quad (2)$$

1) Với $0 < m \leq 1$, từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{a_{n,m}} < 1 - \frac{n}{a_{n,n} + n} = \frac{a_{n,n}}{a_{n,n} + n} < \frac{a_{n,n}}{n+1}$$

$$\text{hay } a_{n,n} > \sqrt{n+1}.$$

2) Với $m > 1$, từ (1) và (2), thì

$$\frac{1}{a_{n,n}} < 1 - \frac{n}{1 + mn} > 1 - \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow a_{n,n} < \frac{m}{m-1} \quad (3)$$

Mặt khác, cũng từ (1) và (2), thì

$$\frac{1}{a_{n,n}} < 1 - \frac{n}{\frac{m}{m-1} + mn}.$$

$$\text{Vậy } \frac{m}{m-1} < \frac{1}{a_{n,n}} < 1 - \frac{n}{\frac{m}{m-1} + nm}.$$

Chuyển qua giới hạn ($n \rightarrow +\infty$) và sử dụng

$$\text{công thức } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{m}{m-1} + nm} = \frac{1}{m}$$

$$\text{ta được } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_{n,n}} = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\text{hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,n} = \frac{m}{m-1} \text{ (đpcm).}$$

Bài 58 (T6/236)

Ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} - a_n \\ &= \frac{(1 - a_n^2)(a_n - 2)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} - 2 \\ &= \frac{2a_n(a_n - 2)^2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 1 &= \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} + 1 \\ &= \frac{(a_n + 1)^2(2a_n - 3)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Dựa vào các đẳng thức trên, với lưu ý rằng $3a_n^2 - 4a_n - 1 = (a_n - 2)^2 + 2\left(a_n^2 - \frac{3}{2}\right)$,

bằng phương pháp quy nạp theo n dễ dàng chứng minh được rằng :

• Nếu $a_1 = a \geq 2$ thì $a_n \geq 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

và $a_{n+1} \leq a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên (a_n) là dãy không tăng và bị chặn dưới bởi 2. (1)

• Nếu $a_1 = a \leq -2$ thì $a_n < 1$ với mọi $n \geq 2$

và $a_{n+1} \geq a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên (a_n) là dãy không giảm và bị chặn trên bởi -1. (2)

Suy ra : Với $|a| \geq 2$ thì dãy (a_n) là dãy hội tụ. Đặt $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Từ công thức xác định dãy

$$(a_n) \text{ và (1), (2) ta có : } \alpha = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{3\alpha^2 - 4\alpha - 1},$$

$$\alpha \geq 2 \text{ nếu } a \geq 2,$$

$$\alpha \leq -1 \text{ nếu } a \leq -2.$$

Từ đó suy ra :

• Nếu $a \geq 2$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.

• Nếu $a \leq -2$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$.

Bài 59 (T6/241)

Bằng phương pháp quy nạp theo n ta sẽ chứng minh rằng :

$$h_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ với mọi } n \geq 1. \quad (1)$$

Thật vậy, do $h_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} \cot \frac{\pi}{2^{1+2}}$ nên ta có

(1) đúng với $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là :

$$h_k = \frac{1}{2^k} \cot \frac{\pi}{2^{k+1}}. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= \frac{1}{2} \left(h_k + \sqrt{h_k^2 + \frac{1}{4^k}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} \left(\cot \frac{\pi}{2^{k+1}} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\pi}{2^{k+2}}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta cũng có (1) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp, ta có điều muốn chứng minh.

Từ đó

$$h_n = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \text{ với mọi } n \geq 1 \quad (2)$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1$$

nên từ (2) suy ra dãy (h_n) là dãy hội tụ, và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \frac{2}{\pi}.$$

HÌNH HỌC PHẪNG

Bài 60 (T9/219)

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, và $MA' = x$,

$MB' = y$, $MC' = z$. Thế thì $q = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$.

Nếu gọi S là diện tích tam giác ABC , ta có

$$2S = ax + by + cz.$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} 2Sq &= (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = a^2 + b^2 + c^2 + \\ &+ bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ca \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

$2Sq \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab) = (a + b + c)^2$
hay là

$$2Sq \geq 4p^2, \text{ trong đó } 2p = a + b + c.$$

Vậy

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = q \geq \frac{2p^2}{S} = \frac{2p}{r}, \text{ trong đó } r \text{ là}$$

bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, tức là khi và chỉ khi M trùng với tâm I đường tròn nội tiếp tam giác :

$$q_{\min} = \frac{2p}{r} \Leftrightarrow M \text{ trùng với điểm } I.$$

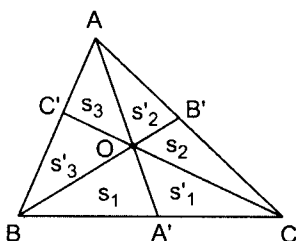
Bài 61 (T9/221)

$$\text{Đặt } S_{OA'B} = s_1, S_{OA'C} = s'_1,$$

$$S_{OB'C} = s_2, S_{OB'A} = s'_2,$$

$$S_{OC'A} = s_3, S_{OC'B} = s'_3 \text{ (hình vẽ),}$$

$$s_1 + s'_1 = x, s_2 + s'_2 = y, s_3 + s'_3 = z.$$



Thế thì

$$\frac{s_1}{s_3 + s'_3} = \frac{s'_1}{s_2 + s'_2} = \frac{OA'}{OA}$$

$$= \frac{s_1 + s'_1}{s_3 + s'_3 + s_2 + s'_2} = \frac{x}{y + z}.$$

$$\text{Suy ra : } s_1 = \frac{zx}{y + z}, s'_1 = \frac{xy}{y + z}.$$

Tương tự :

$$s_2 = \frac{xy}{z + x}, s'_2 = \frac{yz}{z + x}; s_3 = \frac{yz}{x + y},$$

$$s'_3 = \frac{zx}{x + y}.$$

$$\text{Từ giả thiết có } s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s'^2_1 + s'^2_2 + s'^2_3 \quad (1)$$

Thay các giá trị của s_i và s'_i ($i = 1, 2, 3$) vào (1), ta thấy hệ thức (1) tương đương với

$$\left(\frac{zx}{y + z}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z + x}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x + y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{xy}{y + z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{z + x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{x + y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(y - z)}{y + z} + \frac{y^2(z - x)}{z + x} + \frac{z^2(x - y)}{x + y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)^2}{(y + z)(z + x)(x + y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(y - z)(z - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases}$$

Vậy tập hợp những điểm O thoả mãn (1) là ba đoạn trung tuyến của tam giác ABC (không kể các đầu mút của chúng).

★ *Ghi chú* : Có thể sử dụng định lí Ceva, từ đó thiết lập hệ thức

$$s_1 + s_2 + s_3 = s'_1 + s'_2 + s'_3 \quad (2)$$

Sau đó, cũng dễ dàng thiết lập thêm hệ thức

$$s_2 s_3 + s_3 s_1 + s_1 s_2 = s'_2 s'_3 + s'_3 s'_1 + s'_1 s'_2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\{s_1, s_2, s_3\} = \{s'_1, s'_2, s'_3\}$$

nghĩa là (s'_1, s'_2, s'_3) là một hoán vị của (s_1, s_2, s_3) . (Định lí Viète về tính chất các nghiệm của phương trình bậc ba).

Xét các hoán vị khác nhau của hai tập hợp số trên, ta đi đến kết luận : Muốn cho điểm O nằm trong tam giác ABC thoả mãn điều kiện (1), cần và đủ là O phải nằm trên một trong ba đường trung tuyến của tam giác đã cho (trừ các đỉnh của tam giác và các trung điểm của ba cạnh).

Bài 62 (T5/224)

Trong hình vẽ, hình chữ nhật cạnh đỏ $ABCD$ và hình chữ nhật cạnh xanh $A_1B_1C_1D_1$ cùng có chu vi là p , cắt nhau tạo thành hình bát giác $MNEFPQIK$. Đặt $m = MN + EF + PQ + IK$ và $n = NE + FP + QI + KM$. Ta có các tam giác sau đây đôi một đồng dạng (vì là tam giác vuông và có một góc nhọn bằng nhau) :

$\Delta AKM \sim \Delta B_1NM$, $\Delta BNE \sim \Delta C_1FE$,
 $\Delta CFP \sim \Delta D_1QP$, $\Delta DQI \sim \Delta A_1KI$. Đặt

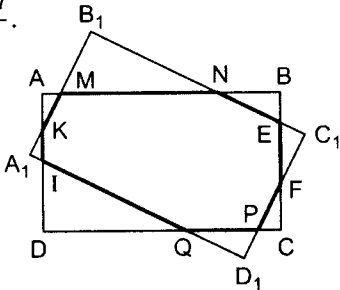
$$t = \frac{KA + AM}{KM}, \text{ ta có}$$

$$t = \frac{KA + AM}{KM} = \frac{NB + BE}{NE}$$

$$= \frac{FC + CP}{FP} = \frac{QD + DI}{QI}$$

$$= \frac{KA + AM + NB + BE + FC + CP + QD + DI}{KM + NE + FP + QI}$$

$$= \frac{p - m}{n}. \quad (1)$$



Chúng minh tương tự, ta cũng có $t = \frac{p - n}{m}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\frac{p - m}{n} = \frac{p - n}{m}$,

suy ra $\frac{p - m - n}{n} = \frac{p - n - m}{m}$, hơn nữa, hiểu nhiên $p > m + n$, nên $p - m - n > 0$, vậy $m = n$ (đpcm).

Bài 63 (T9/224)

$$\frac{r}{R} + \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Cách 1. Gọi H , O và I theo thứ tự là trực tâm, tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác, ta có

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

từ đó

$$2p\overrightarrow{OI} = (2p - a)\overrightarrow{OA} + (2p - b)\overrightarrow{OB} + (2p - c)\overrightarrow{OC} \quad (2)$$

Bình phương hai vế của (2), sau khi thay $2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2$, $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$ và sử dụng hằng đẳng thức :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

rút gọn, ta được

$$IH^2 = 4R^2 - 8Rr - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= 4R^2 - 8Rr - \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \geq 0$$

Từ đó suy ra

$$8R^2 \geq 16Rr + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

và thu được bất đẳng thức (1) cần tìm.

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi I trùng H , nghĩa là tam giác ABC đều.

Cách 2. Chiều O và I lên một trong các đường thẳng BC , CA hoặc AB ; chẳng hạn chiều lên CA , được O' và I' tương ứng. Ta có

$$CO' = \frac{b}{2}, CI' = p - c = \frac{a + b - c}{2}. \text{ Thế thì :}$$

$O'I \leq OI$. Sử dụng công thức Euler :

$$OI^2 = R^2 - 2Rr, \text{ ta được } \frac{(c - a)^2}{4} \leq R^2 - 2Rr.$$

Không mất tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, thế thì

$$(c - a)^2 = [(a - b) + (b - a)]^2 - (c - b)^2 + (b - a)^2 + 2(c - b)(b - a)$$

$$(c - a)^2 \geq (c - b)^2 + (b - a)^2$$

Từ đó ta được bất đẳng thức (1) cần tìm.

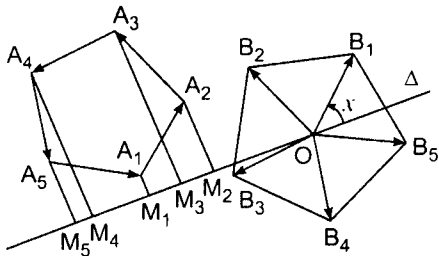
★ Ghi chú : Nếu sử dụng định lí sin và hệ thức

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$$

rồi chuyển vế trái của bất đẳng thức (1) về dạng lượng giác ; biến đổi và sử dụng các hệ thức và bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, cũng đi đến kết quả cần tìm.

Bài 64 (T10/225)

Ta xét bài toán tổng quát với n - giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 5$). Lấy một điểm O nào đó trên đường thẳng Δ (đã được định hướng) rồi lần lượt dựng các vectơ sau :



$\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, với quy ước $A_{n+1} \equiv A_1$). Gọi B'_i là hình chiếu của B_i trên Δ ; thế thì $B_1, B_2, \dots, B_n$ là các đỉnh của một n -giác đều nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính $R = a$, và

$$(\overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{OB_{i+1}}) = \beta = \frac{2\pi}{n}.$$

Gọi x là góc tạo bởi Δ và $A_1 A_2$, tức là $x = (\Delta, OB_1)$, ta được $(\Delta, A_i A_{i+1}) = (\Delta, OB_i) = x + (i-1)\beta$ ($1 \leq i \leq n$) và :

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \overline{OB'_i} = a \cos(x + (i-1)\beta).$$

$$\sum_{i=1}^n M_i M_{i+1} = \sum_{i=1}^n \overline{OB'_i}^2 = a^2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(x + k\beta) = a^2 s,$$

trong đó

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(x + k\beta) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2x + 2k\beta).$$

Ta chứng minh $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2x + 2k\beta) = 0$ với

$$\beta = \frac{2\pi}{n}.$$

Bằng cách sử dụng công thức biến đổi lượng giác, có thể dễ dàng thấy rằng

$$2 \sin \beta \left(\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2x + 2k\beta) \right) = 0.$$

Tuy nhiên, có thể chứng minh như sau bằng cách sử dụng vector :

Trên đường tròn đơn vị tâm ω , dễ thấy các điểm $2k\beta = k \frac{4\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) là các đỉnh P_{k+1} của một n -giác đều sao $P_1 P_2 \dots P_n$ nên ta có $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{\omega P_k} = \vec{0}$. Chiếu tất cả các vector $\overrightarrow{\omega P_k}$ lên trục cosin, ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2x + 2k\beta) = 0. \text{ Suy ra } s = \frac{n}{2}.$$

$$\text{Từ đó } \sum_{i=1}^n M_i M_{i+1}^2 = \frac{na^2}{2}.$$

Bài toán đã cho ứng với trường hợp $n = 5$.

Bài 65 (T10/226)

Sử dụng các công thức tính độ dài đường cao và đường phân giác của một tam giác theo độ dài các cạnh :

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)},$$

trong đó $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, ta được

$$\frac{h_a}{l_a} = \frac{b+c}{a\sqrt{bc}} \sqrt{(p-b)(p-c)} \text{ và hai hệ thức}$$

tương tự :

$$\frac{h_b}{l_b} = \frac{c+a}{b\sqrt{ca}} \sqrt{(p-a)(p-c)},$$

$$\frac{h_c}{l_c} = \frac{a+b}{c\sqrt{ab}} \sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được (với S là diện tích tam giác) :

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2 b^2 c^2}}$$

$$\geq 3 \sqrt[3]{\frac{8S^2}{pabc}} = 3 \sqrt[3]{\frac{2r}{R}}.$$

(vì $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, lúc đó tam giác là đều.

★ *Ghi chú* : Bài này có rất nhiều cách giải trên cơ sở sử dụng các công thức khác nhau tính độ dài đường cao và đường phân giác của một tam giác không những chỉ theo độ dài các cạnh a, b và c mà còn theo cả các góc A, B và C . Chẳng hạn :

$$h_a = b \sin C (= c \sin B), l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}, \text{ v.v...}$$

Tuy nhiên, cuối cùng đều phải sử dụng BĐT Cauchy đối với ba số dương.

Chú ý thêm rằng có hệ thức sau đây giữa r, R và các góc A, B, C :

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

2) Gọi $AH = h_a$ và $AD = l_a$, ta có

$$\widehat{HAD} = \frac{1}{2} |\widehat{B} - \widehat{C}|, \text{ do đó}$$

$$\frac{h_a}{l_a} = \cos \frac{B-C}{2}, \text{ tương tự } \frac{h_b}{l_b} = \cos \frac{C-A}{2}$$

$$\text{và } \frac{h_c}{l_c} = \cos \frac{A-B}{2}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} & \frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \\ &= \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} + \cos \frac{A-B}{2}. \end{aligned}$$

Từ kết quả này ta cũng có bất đẳng thức cần tìm.

Bài 66 (T10/227)

Gọi H, O, I theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC ; a, b, c và R, r tương ứng là độ dài ba cạnh và bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó (chú ý rằng tâm E của đường tròn Euler là trung điểm của OH). Từ các hệ thức vectơ quen thuộc

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

ta được :

$$2p\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \quad (1)$$

$$2p\overrightarrow{OE} = p\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}, \quad (2)$$

và do đó có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{IE} = \frac{(p-a)}{2p} \overrightarrow{OA} + \\ &+ \frac{(p-b)}{2p} \overrightarrow{OB} + \frac{(p-c)}{2p} \overrightarrow{OC} \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó $2p = a + b + c$.

Bình phương vô hướng hai vế của (3), ta được

$$\begin{aligned} EI^2 &= \frac{(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2}{4p^2} R^2 \\ &- \frac{(p-b)(p-c)}{4p^2} (2R^2 - a^2) \\ &- \frac{(p-c)(p-a)}{4p^2} (2R^2 - b^2) \\ &- \frac{(p-a)(p-b)}{4p^2} (2R^2 - c^2) = \frac{R^2}{4} - \\ &\frac{(p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2 + (p-a)(p-b)c^2}{4p^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Sau khi biến đổi

$$4(p-b)(p-c) = (2p-2b)(2p-2c)$$

$= (c+a-b)(a+b-c)$ và tương tự đối với $4(p-c)(p-a)$; $4(p-a)(p-b)$ ta được

$$\begin{aligned} & 4(p-b)(p-c)a^2 + 4(p-c)(p-a)b^2 + 4(p-a)(p-b)c^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + 4pabc \\ &= 4pabc - 16S^2 = 16pSR - 16p^2r^2 \\ &= 16p^2r(R-r) \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta thu được

$$EI^2 = \frac{R^2}{4} - Rr + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r \right)^2.$$

Để ý rằng $R \geq 2r$, nên ta được

$$EI = \frac{R}{2} - r \quad (6)$$

trong đó $\frac{R}{2}$ là bán kính đường tròn Euler.

Điều đó chứng tỏ rằng đường tròn Euler (tâm E bán kính $\frac{R}{2}$) tiếp xúc trong với đường tròn (tâm I bán kính r) nội tiếp tam giác.

Bài 67 (T5/230)

Kẻ đường kính AA' của đường tròn $(O; R)$ rồi lấy trên đó điểm O_2 sao cho $A'O_2 = \frac{3R}{4}$. Ta

của AE_1 với BC . J' là điểm đối xứng với I_1 qua M ; F' là giao điểm thứ hai của tia AJ' với đường tròn (O) . Theo phần thuận ở trên, ta có F', E_1, K thẳng hàng, nên giao điểm thứ hai của KE_1 với đường tròn (O) trùng với F_1 , hay H_1 là một điểm của quỹ tích đang xét. Vậy quỹ tích là cung $\widehat{DON}$ của đường tròn (S) trong đó K, N, S, D được xác định như trên.

★ *Ghi chú.* Có thể giải cách khác như sau : Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) với đường thẳng BC ; K là điểm đối xứng với S qua M , suy ra S, M đều cố định, sau đó dùng định lí Ménélaus để chứng minh E, F, K thẳng hàng, từ đó tiếp tục chứng minh như trên.

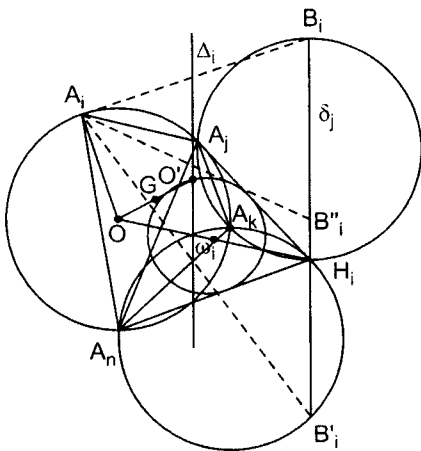
Bài 69 (T9/232). Gọi G là trọng tâm của hệ bốn điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ và H_i là trực tâm của các tam giác (T_i) có các đỉnh A_j, A_k, A_n ; với $i = 1, 2, 3, 4$ và $\{i, j, k, n\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Thế thì

$$\overrightarrow{OH_i} = \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_n} \quad (1)$$

do đó, với mọi $i = 1, 2, 3, 4$ ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OH_i} &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} \\ &= 4\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OO'} \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó $O' = D_G(O)$ là điểm đối xứng của O qua G . Hệ thức vectơ (2) chứng tỏ rằng đoạn thẳng A, H_i nhận điểm O' (đối xứng với O qua G) làm trung điểm; nói khác đi là bốn đoạn thẳng A, H_i đồng quy tại trung điểm chung O' .



$$\text{Ta có } \overrightarrow{H_i O'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{H_i A_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

Ta lại biết rằng tâm ω_i của đường tròn Euler của tam giác (T_i) qua ba điểm A_j, A_k, A_n là trung điểm của đoạn thẳng OH_i nối tâm O đường tròn ngoại tiếp với trực tâm H_i của tam giác T_i , nghĩa là

$$\overrightarrow{H_i \omega_i} = \frac{1}{2} \overrightarrow{H_i O} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra phép vị tự $V_{\frac{1}{2}, H_i}$ tâm H_i , tỉ số vị tự $\frac{1}{2}$ biến đường tròn (O) thành đường tròn (ω_i) ; mà (O) đi qua $\{A_i\}$ nên (ω_i) đi qua O' . Vậy :

Bốn đường tròn Euler (ω_i) của các tam giác (T_i) cùng đi qua $O' = D_G(O)$.

Bây giờ, gọi B_i, B'_i và B''_i là điểm đối xứng của điểm A_i lần lượt qua các đường thẳng $A_j A_k, A_k A_n$ và $A_n A_j$ chứa các cạnh của tam giác (T_i) , thế thì các điểm này cùng nằm trên đường thẳng Steiner σ_i của A_i đối với tam giác (T_i) . Để chứng minh Δ_i đi qua O' ta chứng minh σ_i đi qua H_i . Thật vậy, trực tâm H_i của (T_i) , điểm B_i (đối xứng của A_i qua $A_j A_k$) và các điểm A_j, A_k cùng nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn (O) qua đường thẳng $A_j A_k$. Hoàn toàn tương tự, H'_i và điểm B'_i , (đối xứng của A_i qua $A_k A_n$) cùng nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn (O) qua đường thẳng $A_k A_n$.

Từ đó, sử dụng góc định hướng giữa hai đường thẳng, ta được :

$$(H_i B_i, A_i A_k) = (A_k B_i, A_j A_k) = (A_j A_k, A_j A_i) \pmod{\pi} \quad (5)$$

$$\text{và } (H'_i B'_i, H_i A_k) = (A_n B'_i, A_n A_k) = (A_n A_k, A_n A_i) \pmod{\pi} \quad (6)$$

Lại vì A_i, A_j, A_k và A_n cùng nằm trên đường tròn (O) nên có :

$$(A_j A_k, A_j A_i) = (A_n A_k, A_n A_i) \pmod{\pi} \quad (7)$$

Bởi vậy, ta được :

$$(H_i B_i, H_i A_k) = (H_i B_i', H_i A_k) \pmod{\pi} \quad (8)$$

Từ đó suy ra hai đường thẳng $H_i B_i$ và $H_i B_i'$ phải trùng nhau ; nói khác là H_i nằm trên đường thẳng Steiner σ_i chứa các điểm B_i, B_i' và B_i'' . Đường thẳng Simson Δ_i của điểm A_i đối với (T_i) là ảnh của đường thẳng Steiner σ_i trong phép vị tự $V_{A_i}^{\frac{1}{2}}$ tâm A_i , tỉ số $\frac{1}{2}$; mà σ_i đi qua H_i nên Δ_i đi qua điểm $O' = V_{A_i}^{\frac{1}{2}}(H_i)$, là ảnh của H_i trong phép vị tự đó. Vậy bốn đường thẳng Simson Δ_i cùng đi qua O' .

Bài 70 (T9/233)

1) Đặt $2p = a + b + c$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta được :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}$$

Suy ra

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^4}{27} \text{ dẫn đến}$$

$$p \geq \sqrt[4]{27} \sqrt{S}, \text{ hay}$$

$$a + b + c \geq 2\sqrt[4]{27} \sqrt{S}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c$ (Tam giác là đều).

$$2) \text{ Ta có } 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq (b+c)^2 - a^2 = 4p(p-a) \Rightarrow m_a^2 \geq p(p-a).$$

$$\text{Tương tự } m_b^2 \geq p(p-b) \text{ và } m_c^2 \geq p(p-c).$$

Suy ra

$$m_a^2 m_b^2 m_c^2 \geq p^3 (p-a)(p-b)(p-c) = p^2 S^2 \quad (1)$$

Lại có

$$h_a h_b h_c = \frac{2S}{a} \cdot \frac{2S}{b} \cdot \frac{2S}{c} = \frac{8S^3}{abc} \geq \frac{27S^3}{p^3} \quad (2)$$

$$(\text{vì } abc \leq \frac{8p^3}{27} \text{ theo BĐT Cauchy})$$

Từ đó ta được

$$h_a m_b^4 + h_b m_c^4 + h_c m_a^4 \geq 3\sqrt[3]{h_a h_b h_c m_a^4 m_b^4 m_c^4} \geq 9\sqrt[3]{p \cdot S^7}. \quad (3)$$

Lại vì $p \geq \sqrt[4]{27} \sqrt{S}$ theo (1), thay vào (2) ta được $h_a m_b^4 + h_b m_c^4 + h_c m_a^4 \geq 9\sqrt[4]{3} \cdot S^2 \cdot \sqrt{S}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đẳng thức đồng thời xảy ra ở (1), (2), (3) và (4), và do đó, xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tam giác là đều.

★ *Ghi chú* : Ta có bài toán tổng quát hơn như sau :

Giả sử a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có diện tích là S ; các đường cao và trung tuyến tương ứng là h_a, h_b, h_c và m_a, m_b, m_c .

Chứng minh rằng

$$1) a^n + b^n + c^n \geq \frac{2^n (\sqrt{S})^n}{\sqrt[4]{3^{n-4}}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$2) h_a m_b^{4n} + h_b m_c^{4n} + h_c m_a^{4n} \geq S^{2n} \sqrt[4]{S} 3^{n+1} \sqrt[4]{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài toán đã cho ứng với $n = 1$.

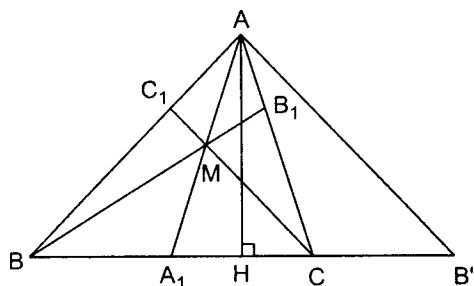
Bài 71 (T5/234)

Gọi A_1, B_1, C_1 là các giao điểm tương ứng của các tia AM, BM, CM với các cạnh BC, CA, AB . Vì M ở bên trong $\triangle ABC$ nên tia AM nằm giữa hai tia AB, AC , suy ra A_1 nằm giữa hai điểm B, C . Hạ đường cao AH , không làm mất tính tổng quát, giả sử $AB \geq AC$, ta có $BH \geq CH$ nên gọi B' là điểm đối xứng với B qua H , thì đoạn BB' chứa đoạn BC . Mà A_1 nằm giữa B, C nên A_1 nằm giữa B, B' , suy ra $A_1 H < BH$ hay $AA_1 < AB = \max \{AB, AC\}$. Do đó $AA_1 \cdot BC < \max \{AB, AC\} \cdot BC = \max \{AB \cdot BC, AC \cdot BC\} < \max \{AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB\}$.

Đặt $P = \max \{AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB\}$, ta có

$$MA \cdot BC = \frac{MA}{AA_1} AA_1 \cdot BC < \frac{MA}{AA_1} P. \text{ Tương tự}$$

$$MB \cdot CA < \frac{MB}{BB_1} P ; MC \cdot AB < \frac{MC}{CC_1} P.$$



Mặt khác, do M ở bên trong tam giác ABC nên tổng diện tích các tam giác MAB , MBC , MCA bằng diện tích tam giác ABC , suy ra

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1,$$

và

$$\frac{MA}{AA_1} + \frac{MB}{BB_1} + \frac{MC}{CC_1}$$

$$= 1 - \frac{MA_1}{AA_1} + 1 - \frac{MB_1}{BB_1} + 1 - \frac{MC_1}{CC_1} = 3 - 1 = 2.$$

Vậy $MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB < 2P$, hay

$$MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB$$

$$< 2\max \{AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB\}.$$

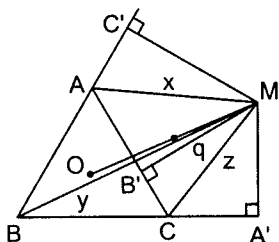
Bài 72 (T9/235)

a) Nếu điểm M trùng với một trong các đỉnh A, B, C thì dễ thấy BĐT sau đúng.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4(p^2 + q^2 + r^2) \quad (1)$$

Xét trường hợp M không trùng với bất kì đỉnh nào của tam giác. Gọi A', B', C' , lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB và G' là trọng tâm của hệ ba điểm $\{A', B', C'\}$. Theo công thức Leibnitz, ta có

$$MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 = 3MG'^2 + \frac{1}{3}(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2) \geq \frac{1}{3}(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2) \quad (2)$$



Mặt khác, tam giác $AB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kính $MA = x$, có $\widehat{B'AC'} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{B'AC'} = 120^\circ$, nên ta được (theo định lý sin):

$$B'C' = MA \sin 60^\circ (= MA \sin 120^\circ) = \frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{hay } B'C'^2 = \frac{3x^2}{4}.$$

Chứng minh tương tự có

$$C'A'^2 = \frac{3y^2}{4} \text{ và } A'B'^2 = \frac{3z^2}{4} \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta được

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2) + 3MG'^2 \quad (4)$$

Do đó ta thu được BDT (1) (đpcm).

Dễ thấy rằng dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi M trùng với trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ nói trên và do đó M trùng với G , điểm đối trọng tâm của tam giác đều ABC , nghĩa là M trùng với tâm O của tam giác đều ABC .

b) Giả sử tam giác ABC không đều. Chọn M là trọng tâm tam giác. Khi đó

$$\frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{1}{2}MA\right)^2 \geq MA'^2 = p^2. \quad \text{Tương tự}$$

$$\frac{1}{4}y^2 \geq q^2 \text{ và } \frac{1}{4}z^2 \geq r^2. \quad \text{Vì tam giác } ABC$$

không đều nên, trong ba bất đẳng thức trên phải có ít nhất một BDT thực sự và do đó có

$$4(p^2 + q^2 + r^2) < x^2 + y^2 + z^2$$

nghĩa là (1) không đúng. Nói khác đi là BDT (1) là đặc trưng cho tam giác đều.

★ Ghi chú: 1) Có thể thiết lập hệ thức

$$4(p^2 + q^2 + r^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = 3OM^2 \quad (5)$$

với điểm M bất kì và O là tâm của tam giác đều ABC .

Từ đó suy ra BDT (1) cần chứng minh là hệ quả trực tiếp của hệ thức (5) ở trên. Có thể chứng minh (5) từ hệ thức vector:

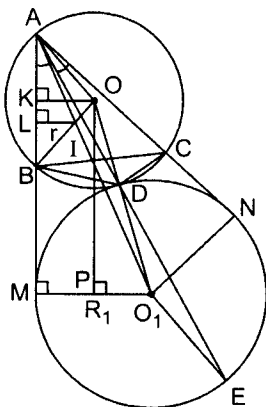
$$3\overrightarrow{MG'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

và do đó trọng tâm G' của hệ ba điểm $\{A', B', C'\}$ là trung điểm của OM .

Bài 73 (T9/236)

Cách 1.

Giả sử đường tròn (O_1) bán kính R_1 tiếp xúc ngoài với đường tròn (O) bán kính R ở D và tiếp xúc với hai tia AB , AC ở M và N (hình vẽ). Tia AD cắt đường tròn (O_1) ở E , thế thì



$$OO_1 = OD + DO_1 = R + R_1, OA \parallel O_1E \text{ và}$$

$$AM^2 = AN^2 = AD \cdot AE. \text{ Do đó}$$

$$\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{AD}{AE} = \frac{OD}{OO_1}, \text{ hay là}$$

$$\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{R}{R + R_1}.$$

Chúng minh tương tự, ta được

$$\frac{BD^2}{BM^2} = \frac{CD^2}{CN^2} = \frac{R}{R + R_1}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM} = \frac{CD}{CN} \quad (1)$$

Mặt khác, tứ giác lồi $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O) nên ta có (định lý Ptolemy):

$$AB \cdot CD + CA \cdot BD = BC \cdot AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được hệ thức

$$AB \cdot CN + CA \cdot BM = BC \cdot AM \quad (3)$$

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$,

thay $BM = AM - c$

và $CN = AN - b = AM - b$ vào (3), ta được

$$AM = AN = \frac{2bc}{b + c - a} \quad (4)$$

Gọi L là tiếp điểm của AB với đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , ta được

$$\frac{O_1M}{IL} = \frac{AM}{AL} \text{ hay là } \frac{R_1}{r} = \frac{AM}{AL}.$$

Thay $AL = p - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ và AM bởi (4), ta được

$$\frac{R_1}{r} = \frac{4bc}{(b + c - a)^2}$$

Chúng minh tương tự, ta được

$$\frac{R_2}{r} = \frac{4ca}{(c + a - b)^2} \text{ và } \frac{R_3}{r} = \frac{4ab}{(a + b - c)^2} \quad (5)$$

Từ các hệ thức (5) này, và theo BĐT Cauchy, ta được

$$\begin{aligned} \frac{R_1 + R_2 + R_3}{4r} &= \frac{bc}{(b + c - a)^2} + \\ &+ \frac{ca}{(c + a - b)^2} + \frac{ab}{(a + b - c)^2} \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2 b^2 c^2}{(b + c - a)^2 (c + a - b)^2 (a + b - c)^2}} \quad (6) \end{aligned}$$

Vì a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, nên ta có BĐT

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc \quad (7)$$

(Đây là một BĐT quen thuộc, bạn nào chưa biết hãy tự chứng minh).

Từ (6) và (7) ta thu được BĐT cần chứng minh

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có các đẳng thức sau:

$$R_1 = R_2 = R_3 \quad \text{và} \quad b + c - a = c + a - b = a + b - c \text{ và do đó, khi và chỉ khi tam giác } ABC \text{ là đều.}$$

Cách 2. Hạ $OK \perp AM$ và $OP \perp O_1M$, đặt

$$AM = t, \text{ ta được } OP = KM = t - \frac{c}{2},$$

$$O_1P = O_1M - OK = R_1 - R \cos C$$

và $\tan \frac{A}{2} = \frac{O_1M}{AM} = \frac{IL}{AL}$, hay là

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{R_1}{t} = \frac{r}{p-a} \quad (\text{trong đó } 2p = a+b+c) \quad (8)$$

Lại từ tam giác OO_1P vuông ở P , ta có

$$(R + R_1)^2 = \left(t - \frac{c}{2}\right)^2 + (R_1 - R \cos C)^2$$

hay là

$$2RR_1(1 + \cos C) = t(t - c) \quad (9)$$

Từ (9) và (8), ta được

$$2R \frac{r}{p-a} (1 + \cos C) = (t - c), \text{ hay}$$

$$\frac{2Rr}{p-a} \cdot \frac{2p \cdot 2(p-c)}{2ab} = t - c \quad (10)$$

Mặt khác, lại có $S = pr = \frac{abc}{4R}$ nên từ (10)

$$\text{suy ra } t = c + \left(\frac{p-c}{p-a}\right)c = \frac{bc}{p-a} \quad (11)$$

Do đó, từ (8) và (11) ta được

$$\frac{R_1}{r} = \frac{t}{p-a} = \frac{bc}{(p-a)^2} \text{ hay}$$

$$\frac{R_1}{4r} = \frac{bc}{(b+c-a)^2} \quad \text{và hai hệ thức nữa}$$

tương tự.

Ta được kết quả như lời giải 1.

★ *Ghi chú* : Có thể giải bằng cách biểu thị R_1 theo p và các góc của tam giác :

$$R_1 = p \tan \frac{A}{2} \left(1 + \tan \frac{A}{2}\right) \quad \text{và hai hệ thức}$$

tương tự.

Sau đó sử dụng BĐT Cauchy và hai BĐT sau

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}, \quad p \geq 3\sqrt{3}r \quad \text{ta}$$

suy ra được BĐT cần tìm.

Bài 74. (T4/237)

Kẻ $KK_1 \parallel LL_1 \parallel BB'$. Theo định lí Thales ta có :

$$\frac{BK_1}{BA'} = \frac{B'K}{B'A'}$$

$$\text{và } \frac{K_1K}{BB'} = \frac{A'K}{A'B'}$$

Suy ra

$$\frac{BK_1}{KK_1} = \frac{B'K}{A'K} \cdot \frac{BA'}{BB'} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{B'K}{A'K} = \frac{CB'}{CA'} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{BK_1}{KK_1} = \frac{CB'}{CA'} \cdot \frac{BA'}{BB'} \quad (3)$$

Xét tam giác ABC với AA' , BB' là phân giác ta có

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}; \quad CB' = \frac{ab}{a+c} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \frac{BK_1}{KK_1} = \frac{ac}{a+c} \cdot \frac{1}{BB'}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{BL_1}{LL_1} = \frac{ac}{a+c} \cdot \frac{1}{BB'}, \text{ nên}$$

$$\frac{BK_1}{KK_1} = \frac{BL_1}{LL_1} \quad (5)$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{BK_1K} = 180^\circ - \widehat{KK_1C} = 180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}.$$

$$\widehat{BL_1L} = 180^\circ - \widehat{LL_1A} = 180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BK_1K} = \widehat{BL_1L}.$$

$$\text{Từ (5) và (6) ta có } \triangle BK_1K \sim \triangle BL_1L.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{LBL_1} = \widehat{KBK_1},$$

vậy BB' là phân giác góc KBL .

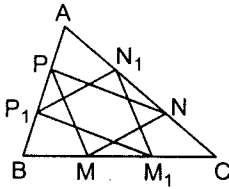
Bài 75 (T5/238)

Lời giải. Trước hết ta phát biểu và chứng minh **Bổ đề** sau đây.

Nếu trên các cạnh BC , CA , AB của tam giác ABC lấy các điểm tương ứng M , N , P và các điểm M_1 , N_1 , P_1 theo thứ tự đối xứng với M , N , P qua các trung điểm tương ứng của BC , CA , AB thì diện tích các tam giác $M_1N_1P_1$ và MNP bằng nhau.

Chứng minh bổ đề.

Đặt a, b, c và x, y, z là các độ dài của BC, CA, AB và BM, CN, AP tương ứng.



Hình 1

Sử dụng công thức

$$2S_{ABC} = ab \sin C \text{ ta có (h.1)}$$

$$\frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{BM \cdot BP}{BC \cdot BA} = \frac{x(c-z)}{ac},$$

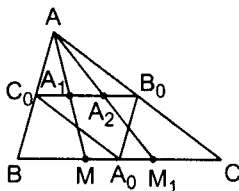
$$\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{y(a-x)}{ab},$$

$$\frac{S_{APN}}{S_{ABC}} = \frac{z(b-y)}{bc}.$$

Từ đó tính được

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}. \text{ Tính tương tự được } \frac{S_{M_1N_1P_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$$

$$\text{hay } S_{M_1N_1P_1} = S_{MNP}.$$



Hình 2

Trở về bài toán.

Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB .

Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 (h.2). Áp dụng bổ đề trên thì $S_{A_2B_2C_2} = S_{A_1B_1C_1}$. Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C_0$ (các cạnh tương ứng song song). Trên hai cạnh tương ứng BC và B_0C_0 ta có

$$\frac{A_2B_0}{A_2C_0} = \frac{A_1C_0}{A_1B_0} = \frac{MB}{MC}$$

(vì $A_1B_0 \parallel MC$) suy ra A_2 và M là hai phần tử tương ứng trong hai tam giác đồng dạng đó. Tương tự, ta cũng có B_2 tương ứng với N , C_2 tương ứng với P . Vậy $\triangle A_2B_2C_2$ tương ứng với $\triangle MNP$, do đó chúng đồng dạng, và ta có

$$\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{MNP}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Mà } S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$$

$$\text{nên } \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{MNP}} = \frac{1}{4}.$$

★ Ghi chú : Bài toán trên còn có thể giải theo hướng sau.

Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của MN, NP, PM . Ta có $A_1K \parallel B_1J$ vì cùng song song với AB . Suy ra $S_{B_1A_1K} = S_{J A_1 K}$. Xét tương tự đối với các cạnh và các đường chéo của lục giác lồi

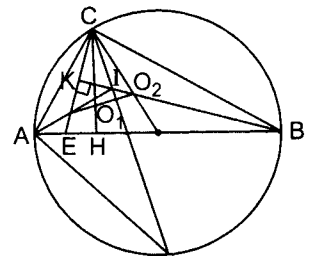
$$A_1KB_1IC_1J \text{ dẫn đến } S_{A_1B_1C_1} = S_{IJK} = \frac{1}{4} S_{MNP}.$$

Bài 76 (T5/239)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và E là giao điểm của tia CO_1 với AB , ta có $\triangle BCE$ cân đỉnh B (vì $\widehat{CEB} = \widehat{A} + \widehat{ACE} = \widehat{HCB} + \widehat{HCE} = \widehat{ECB}$). Mà BO_2 là đường phân giác trong của

$\widehat{EBC}$, nên ta có $BO_2 \perp CO_1$. Chứng minh tương tự, ta có $AO_1 \perp CO_2$ và suy ra I là trực tâm $\triangle CO_1O_2$. Gọi K là giao điểm của tia BO_2 với EC , ta có $\widehat{O_2KC} = 45^\circ$ (vì

CO_1, CO_2 là các tia phân giác của hai góc kề phụ nhau) nên $\triangle CO_2K$ vuông cân và ta có $KC = KO_2$. Suy ra $\triangle CKI = \triangle O_2KO_1$ (g.c.g) và do đó $O_1O_2 = CI$. Như vậy bài toán trở thành tìm vị trí của C sao cho CI có giá trị lớn nhất.



Gọi D là giao điểm của tia CI với cung $\widehat{AB}$ (đối xứng với cung $\widehat{ACB}$ qua AB), do CI là đường phân giác của $\triangle ABC$ ta có D là điểm chính giữa của cung này. Ta lại có $DI = DA$ không đổi (vì $\triangle DAI$ cân do $\widehat{DAI} = \widehat{DAB} + \widehat{BAI} = \widehat{DCB} + \widehat{CAI} = \widehat{ICA} + \widehat{CAI} = \widehat{DIA}$).

Như vậy, $CI = CD - DI = CD - DA$, mà DA không đổi nên CI đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi CD đạt giá trị lớn nhất, tức là bằng $2R$ hay C là điểm chính giữa cung $\widehat{AB}$ đã cho. Khi đó

$$O_1O_2 = CI = 2R - R\sqrt{2} = R(2 - \sqrt{2}).$$

Bài 77 (T9/240)

Trong tam giác ABC ta có

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C,$$

$$\sin^2 a + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

và $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. Từ đó ta thấy BĐT

cần chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$ (1) tương đương với BĐT

$$\begin{aligned} \cos A \cos B \cos C &\leq 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} = \\ &= (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \end{aligned} \quad (2)$$

• Nếu tam giác ABC vuông hoặc tù thì (2) hiển nhiên đúng.

• Nếu tam giác ABC nhọn thì $\cos A \cos B \cos C > 0$.

Đặt $x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}$ ($x, y, z > 0$), thế thì :

$$\cos A = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \cos B = \frac{1 - y^2}{1 + y^2},$$

$$\cos C = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \text{ và do đó}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2x}{1 - x^2} \cdot \frac{2y}{1 - y^2} \cdot \frac{2z}{1 - z^2} > \frac{1}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} \quad (3)$$

Thật vậy, chúng ta đã biết trong tam giác ABC (nhọn) có các hệ thức sau :

$$\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = \tan A + \tan B + \tan C \quad (4)$$

$$\text{và } \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \quad (5)$$

Mặt khác, ta có :

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B &= \frac{2 \sin(A + B)}{2 \cos A \cos B} = \\ &= \frac{2 \sin C}{\cos(A - B) + \cos(A + B)} \geq \frac{2 \sin C}{1 - \cos C} \\ &= 2 \cot \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

và hai BĐT tương tự. Cộng theo từng vế các BĐT (6) ta được :

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B + \tan C \\ \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Từ (4), (5) và (7) ta thu được (3) và do đó được (1) (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\cos(A - B) = \cos(B - C) = \cos(C - A) = 1$$

hay tam giác ABC là đều.

★ *Ghi chú*

1) Có thể sử dụng kết quả bài 63 (T9/224) :

$$\frac{r}{R} + \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2} \quad (8)$$

và hệ thức sau :

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) &= \\ &= 4(r^2 + 4Rr) \end{aligned} \quad (9)$$

Chẳng hạn, sử dụng công thức $S = pr = \frac{abc}{4R}$

và công thức Héron

$$\begin{aligned} S^2 &= p(p - a)(p - b)(p - c) = \\ &= p(p(bc + ca + ab) - p^3 - abc) \end{aligned}$$

sẽ thu được (9).

Từ (8) ta được

$$16Rr + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 8R^2,$$

hay là

$$16Rr + 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \leq 8R^2 \quad (10)$$

Từ (10) và (9) ta thu được BĐT (1) cần tìm.

2) Có thể sử dụng phương pháp vectơ kết hợp với lượng giác để giải bài toán trên như sau :

Với điểm O bất kì ta có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 + \\ &+ (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2. \end{aligned}$$

Nếu lấy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta được hệ thức sau :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 2(OA^2 + OB^2 + OC^2) - \\ &- 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}) \\ &= 6R^2 - 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \\ &= 8R^2 - 2R^2(1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \end{aligned}$$

Vì vậy, BĐT (1) cần chứng minh tương đương với

$$R^2(1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) + 2r^2 \geq 0 \quad (11)$$

Mặt khác, từ các BĐT quen thuộc :

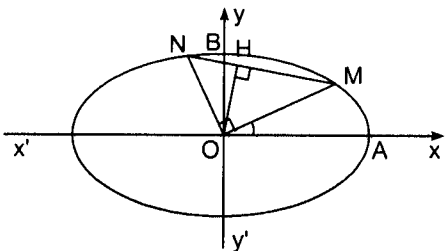
$$R \geq 2r \text{ và } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

ta thu được (11).

Bài 78 (T10/240)

1) Đặt $(Ox, OM) = \alpha$, thế thì $(Ox, ON) =$

$$\alpha + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi) \text{ và } \tan \alpha = k.$$



Trong hệ tọa độ Oxy vuông góc thì $y = kx$

và $y = -\frac{1}{k}x$ tương ứng là phương trình của các đường thẳng OM và ON . Vì M và N thuộc (E) nên :

$$OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \frac{(1+k^2)a^2b^2}{k^2a^2 + b^2}.$$

$$ON^2 = \frac{(1+k^2)a^2b^2}{k^2b^2 + a^2}.$$

Từ đó

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (\text{không đổi}) \quad (1)$$

và

$$\frac{1}{OM^2 \cdot ON^2} = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^4b^4} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } f(k) = \frac{k^2}{(1+k^2)^2}, \text{ dễ thấy rằng}$$

$$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{4} \quad (3)$$

(suy từ $(1-k)^2 = 1 + k^2 - 2k \geq 0$).

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{a^2b^2} \leq \frac{1}{OM^2 \cdot ON^2} \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2} \right)^2.$$

Và do đó

$$\frac{1}{2}ab \geq S_{OMN} = \frac{1}{2}OM \cdot ON \geq \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (4)$$

Như vậy

$$\max S_{OMN} = \frac{ab}{2} \Leftrightarrow k = 0, \text{ khi đó}$$

OM và ON là các bán trục lớn và nhỏ của (E) .

$$\min S_{OMN} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow k = \pm 1, \text{ khi đó } OM$$

và ON là phân giác của các góc vuông tạo bởi các trục tọa độ $x'Ox$ và $y'Oy$, cũng tức là đây cùng MN là một cạnh của hình vuông nội tiếp elip (E) .

2) Vì OH là đường cao hạ xuống cạnh huyền MN của tam giác vuông OMN nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \text{ (không đổi).}$$

Do đó

$$OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Suy ra H thuộc đường tròn (O) có tâm O , bán kính $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và dây cung MN luôn

tiếp xúc với đường tròn (O) nói trên. Có thể dễ dàng chứng minh rằng nếu một dây cung MN nào đó của elíp (E) mà tiếp xúc với đường tròn (O) bán kính r thì $OM \perp ON$ (hãy chứng minh điều đó). Ta đi đến kết luận:

Quỹ tích của H là đường tròn tâm O , bán kính $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

★ *Ghi chú*

1) Từ hệ thức (1) có

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

suy ra $OM^2 ON^2$ đạt min(max)

$\Leftrightarrow OM^2 + ON^2 = MN^2$ đạt min(max)
tức là:

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON \text{ đạt max(min)}$$

$\Leftrightarrow MN$ đạt max(min).

Tuy nhiên, việc tính $MN^2 = OM^2 + ON^2$ cho biểu thức phức tạp, công kênh hơn biểu thức $OM^2 \cdot ON^2$.

2) Có thể tính S_{OMN} theo a, b và góc $\alpha = (Ox, OM)$ hoặc $\beta = (Ox, ON) = \alpha + \frac{\pi}{2}$.
Bằng cách tính này, ta được

$$OM^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \alpha},$$

$$ON^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)}$$

(trong đó $c^2 = a^2 - b^2$)

và do đó

$$4S_{OMN}^2 = \frac{4a^4 b^4}{4a^2 b^2 + (a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\alpha}.$$

S_{OMN}^2 đạt max(min)

$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha$ đạt min (max)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2\alpha = 0$ (hoặc 1)

S_{OMN} đạt max $\Leftrightarrow \alpha = 0$ hoặc $\alpha = \pi$

S_{OMN} đạt min $\Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ hoặc

$$\alpha = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right)$$

Cuối cùng cũng đi đến kết quả như trên.

Bài 79 (T5/241)

Ta có $S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Mặt khác $AM \geq h$ (h là độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A).

$$\text{Suy ra } \frac{4}{a} = \frac{2h}{S_{ABC}} \leq \frac{2AM}{S_{ABC}} = \frac{AM}{S_{ABM}} \quad (1)$$

$$\frac{2}{r} = \frac{a+b+c}{S_{ABC}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy tiếp ra:

$$\frac{4}{a} + \frac{2}{r} \leq \frac{AM + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{S_{ABM}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{a} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $AM = h$ tức ΔABC cân tại A .

Bài 80 (T9/241)

Trước hết, trong bài toán này chúng ta cần đến những hệ thức lượng giác đã biết sau đây trong ΔABC .

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \quad (1)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (2)$$

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ (nếu ΔABC không vuông)

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$$

(nếu ΔABC nhọn) (4)

Ba hệ thức đầu là những bài tập quen thuộc. Ta chứng minh BĐT (4). Trong tam giác nhọn ABC , ta có

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B &= \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} \\ &= \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) + \cos(A+B)} \\ &\geq \frac{2 \sin C}{1 - \cos C} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2} \end{aligned}$$

và hai BDT tương tự đối với $2 \cot \frac{A}{2}$ và $2 \cot \frac{B}{2}$. Cộng theo từng vế ba BDT đó, ta thu được BDT (4).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos(A-B) = \cos(B-C) = \cos(C-A) = 1$, nghĩa là khi và chỉ khi ΔABC là tam giác đều.

Nhờ các hệ thức (1) và (3), từ (4) ta được

$$\tan A \tan B \tan C \geq \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \quad (5)$$

Từ đó, sau khi thay

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}; \cot \frac{A}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}};$$

$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}; 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$
và những hệ thức tương tự vào (5) ta được BDT sau :

$$\begin{aligned} (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \\ \geq \cos A \cos B \cos C \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (6), ta được

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C + \cos A \cos B + \cos B \cos C + \\ \cos C \cos A \geq 2 \cos A \cos B \cos C + \\ + 2(\cos A + \cos B + \cos C) - 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Mặt khác, từ (6) và (2), ta được

$$\cos A \cos B \cos C \leq 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2},$$

hay (vì $\cos A, \cos B, \cos C$ đều dương)

$$\sqrt{2 \cos A \cos B \cos C} \leq 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} =$$

$$= \cos A + \cos B + \cos C - 1;$$

hay là

$$\cos A + \cos B + \cos C \geq 1 + \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} 2(\cos A + \cos B + \cos C) - 1 + 2 \cos A \cos B \cos C \\ \geq (1 + \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C})^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Bây giờ ta chứng tỏ rằng các vế trái của BDT (7) và BDT cần chứng minh là bằng nhau, nghĩa là :

$$\begin{aligned} \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \\ = \cos A + \cos B + \cos C + \cos A \cos B + \\ + \cos B \cos C + \cos C \cos A \end{aligned} \quad (9)$$

Thật vậy, trong ΔABC ta có

$$\cos A = -\cos(B+C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C,$$

hay là

$$\sin B \sin C = \cos A + \cos B \cos C$$

và hai hệ thức tương tự. Cộng theo từng vế ba hệ thức này, ta được (9).

Cuối cùng từ (9), (7) và (8) ta thu được BDT cần chứng minh.

Dấu đẳng thức ở BDT cần chứng minh xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là đều.

★ Ghi chú.

Cùng với BDT cần chứng minh ta có thêm BDT sau đây đối với tam giác ABC bất kì :

$$\begin{aligned} \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \\ \leq (\cos A + \cos B + \cos C)^2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

Bài 81 (T8/242)

Giả sử $A \geq \frac{2\pi}{3}$. Khi đó $\frac{A}{2} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} &= \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right)} \\ &\geq \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} + 1 \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos^2 \frac{B+C}{4}} \\ &= 2 \tan \frac{B+C}{4} = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right). \end{aligned}$$

Do vậy

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \tan \frac{A}{2} + 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right) \quad (1)$$

Hàm số $f(A) = \tan \frac{A}{2} + 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right)$ đồng

biến trong $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right)$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} f'(A) &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{A}{2}} - \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right)} \\ &= \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right) - \cos^2 \frac{A}{2}}{2 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right)} > 0. \end{aligned}$$

Do đó, từ (1) ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} &\geq \\ &\geq \tan \frac{\pi}{3} + 2 \tan \frac{\pi}{12} = 4 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

(do $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$A = \frac{2\pi}{3}; B = C = \frac{\pi}{6}.$$

★ Ghi chú : Có thể chứng minh trực tiếp bất đẳng thức

$$\tan \frac{A}{2} + 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right) \geq \tan \frac{\pi}{3} + 2 \tan \frac{\pi}{12}$$

mà không cần sử dụng phương pháp đạo hàm.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 82 (T10/219)

Vì tứ diện $ABCD$ là gần đều, nên các mặt là những tam giác bằng nhau :

$\triangle ABC = \triangle ADC = \triangle DAB = \triangle DCB$. Gọi s là diện tích của mỗi mặt, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt và do đó, $S = 4s = \frac{abc}{R}$; thế thì

BĐT cần chứng minh $\frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} + \frac{1}{a^2 b^2} \leq \frac{9}{S^2}$ tương đương với BĐT

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 \quad (1)$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 \\ &= (\overline{OC} - \overline{OB})^2 + (\overline{OA} - \overline{OC})^2 + (\overline{OB} - \overline{OA})^2 \\ &= 6R^2 - 2(\overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA} + \overline{OA} \cdot \overline{OB}) \\ &= 9R^2 - (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \leq 9R^2. \end{aligned}$$

Đấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$, nghĩa là O trùng với trọng tâm G của tam giác ABC , và do đó ABC là một tam giác đều và $ABCD$ là một tứ diện đều.

★ *Ghi chú.* Có thể sử dụng công thức

Leibnitz với điểm M bất kì, còn G là trọng tâm ΔABC :

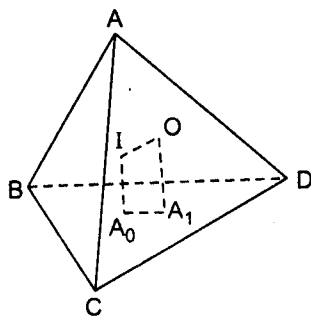
$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 \\ &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3MG^2. \end{aligned}$$

Cho điểm M trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC ta có ngay

$$9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2. \quad (1)$$

Bài 83 (T10/222)

Cách 1. Giả sử mặt cầu (I, r) nội tiếp tứ diện $ABCD$ tiếp xúc với các mặt (BCD) , (CDA) , (DAB) và (ABC) lần lượt ở A_0, B_0, C_0 và D_0 (hình vẽ).



Vì O nằm trong tứ diện nên $\overrightarrow{OA_1}$ và $\overrightarrow{IA_0}$ cùng chiều, do đó

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{IA_0} = OA_1 \cdot r > 0, \text{ ta được}$$

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} \cdot (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{A_0I})$$

$$= \overrightarrow{OA_1}^2 + \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{A_0I} = OA_1^2 - rOA_1.$$

Từ đó cùng các kết quả tương tự và chú ý đến giả thiết

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0} \quad (1)$$

ta thu được

$$\begin{aligned} OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 + OD_1^2 - \\ -(OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1)r \\ = (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}) \cdot \overrightarrow{OI} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{hay } r = \frac{OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 + OD_1^2}{OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1} \quad (2)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunyakovski :

$$\begin{aligned} 4(OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 + OD_1^2) \\ \geq (OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được BĐT cần chứng minh

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 \leq 4r \quad (4)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$ tức là $O \equiv I \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{IA_0} + \overrightarrow{IB_0} + \overrightarrow{IC_0} + \overrightarrow{ID_0} = \vec{0} \quad (5)$$

Nếu gọi S_1, S_2, S_3 và S_4 là diện tích các mặt của tứ diện, tương ứng đối diện với các đỉnh A, B, C và D , theo định lí "con nhím", ta có (vì $IA_0 = IB_0 = IC_0 = ID_0 = r$)

$$S_1 \cdot \overrightarrow{IA_0} + S_2 \cdot \overrightarrow{IB_0} + S_3 \cdot \overrightarrow{IC_0} + S_4 \cdot \overrightarrow{ID_0} = \vec{0}$$

Từ đó suy ra (5) $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Leftrightarrow ABCD$ là một tứ diện gần đều.

Cách 2.

Gọi $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ theo thứ tự là vectơ đơn vị pháp tuyến ngoài (pháp vectơ đơn vị ngoài) của các mặt có diện tích S_1, S_2, S_3, S_4 và các mặt đó tương ứng đối diện với các đỉnh A, B, C và D của tứ diện $ABCD$. Thế thì điều kiện (1) được viết lại như sau :

$$OA_1 \vec{e}_1 + OB_1 \vec{e}_2 + OC_1 \vec{e}_3 + OD_1 \vec{e}_4 = \vec{0} \quad (6)$$

Mặt khác, theo định lí "con nhím", ta có hệ thức

$$S_1 \vec{e}_1 + S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3 + S_4 \vec{e}_4 = \vec{0},$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} (6) \Leftrightarrow \frac{OA_1}{S_1} = \frac{OB_1}{S_2} = \frac{OC_1}{S_3} = \frac{OD_1}{S_4} \\ = \frac{OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1}{S_{tp}} \end{aligned} \quad (7)$$

(trong đó $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{tp} = \frac{3V}{r}$ là diện tích toàn phần của tứ diện).

Từ (7) và BĐT Bunyakovski có

$$\begin{aligned} \frac{OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1}{S_{\eta}} &= \frac{S_1 \cdot OA_1}{S_1^2} \\ &= \frac{S_2 \cdot OB_1}{S_2^2} = \frac{S_3 \cdot OC_1}{S_3^2} = \frac{S_4 \cdot OD_1}{S_4^2} \\ &= \frac{3V}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} \\ &\leq \frac{4 \times 3V}{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2} = \frac{4S_{\eta}r}{S_{\eta}^2} = \frac{4r}{S_{\eta}} \end{aligned} \quad (8)$$

Từ (8) ta được BĐT (4) cần tìm.

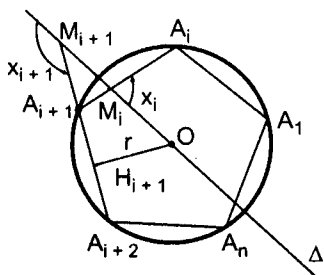
Đẳng thức $OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 = 4r$ đạt được khi và chỉ khi $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ tức là $ABCD$ là một tứ diện gần đều.

★ *Ghi chú.* 1) Về thực chất, cách giải 1 không cần đến định lí "con nhím" vì ta có thể chứng minh trực tiếp (bằng phương pháp thông thường), nếu các tâm các mặt cầu nội và ngoại tiếp một tứ diện mà trùng nhau thì tứ diện là gần đều. Còn cách giải 2 sử dụng định lí "con nhím" và phương pháp thể tích.

2) Kết quả của bài toán có thể tổng quát hoá cho một khối n – diện lồi ngoại tiếp được một mặt cầu (cũng vậy, trong mặt phẳng cho một n – giác lồi ngoại tiếp được một đường tròn). Khi đó, trong BĐT (4) số $4r$ được thay bởi số nr .

Bài 84 (T9/223)

Ta giải bài toán tổng quát với chóp n – giác đều bất kì $S.A_1A_2...A_n$ và sử dụng góc có hướng giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và mặt phẳng đáy hình chóp, gọi M_i là giao điểm của Δ với đường thẳng



A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$; quy ước $A_{n+1} = A_1$).

Giả sử đa giác $A_1A_2...A_n$ có hướng dương, thế thì $(A_iA_{i+1}, A_{i+1}A_{i+2}) = \frac{2\pi}{n}$ (là góc ngoài của đa giác đáy ở đỉnh A_{i+1}) và nếu đặt

$x_i = (\Delta, A_iA_{i+1}) \pmod{\pi}$ thì ta có hệ thức (xét tam giác $A_{i+1}M_iM_{i+1}$):

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2\pi}{n} \pmod{\pi}$$

hay là

$$x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{n} (= \alpha) \pmod{\pi}.$$

Từ đó

$$x_i = x_1 + (i-1) \frac{2\pi}{n} = x_1 + (i-1)\alpha$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

Gọi H_i là trung điểm cạnh A_iA_{i+1} thì $OH_i \perp (A_iA_{i+1})$ và $OH_i = r$ (bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đáy).

Từ đó $OM_i = \frac{r}{\sin x_i}$ và $\tan \alpha_i = \frac{h}{OM_i}$ ($h = SO$).

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \sum_{i=1}^n \tan^2 \alpha_i &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{r} \right)^2 \sin^2 x_i = \\ &= \left(\frac{h}{r} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i \right). \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh $\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i$

không đổi.

Thay $\sin^2 x_i = \frac{1 - \cos 2x_i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x_i$ ta được

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \cos 2x_i \right) = \frac{n}{2}.$$

Để chứng minh $M = \sum_{i=1}^n \cos 2x_i = 0$,

(với $x_i = x_1 + (i-1)\frac{2\pi}{n}$) ta chứng minh

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot M = 0 \left(\alpha = \frac{2\pi}{n} \right)$$

Thật vậy

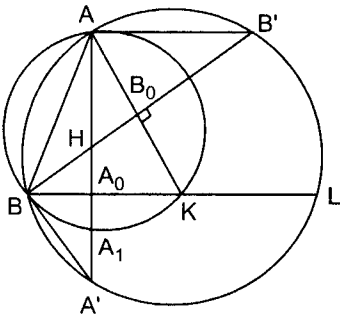
$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\alpha}{n} \cdot M &= \sum_{i=0}^{n-1} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos(2x_1 + i\alpha) \\ &= \sin \left(2x_1 + \frac{2n-1}{2}\alpha \right) - \sin \left(2x_1 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 \cos \left(2x_1 + \frac{n-1}{2}\alpha \right) \sin \frac{n\alpha}{2} = 0. \end{aligned}$$

Kết quả là $\sum_{i=1}^n \tan^2 \alpha_i = \frac{n}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2$ không đổi.

Bài 85 (T10/223)

Cách 1. Hai đường cao AA_0 và BB_0 nằm trong mặt (ABH) đi qua cạnh AB của tứ diện ; $(ABH) \perp CD$. Cạnh CD cắt mp (ABH) tại K . Mặt phẳng chứa mặt (ABK) cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABA'B'$ (xem hình vẽ) do đó

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' \quad (1)$$



Lại vì ABA_0B_0 cũng là một tứ giác nội tiếp nên ta có

$$HA \cdot HA_0 = HB \cdot HB_0 \quad (2)$$

Trừ theo từng vế của (1) và (2), ta được :

$$HA \cdot A_0A' = HB \cdot B_0B' \quad (3)$$

Suy ra

$$A_0A' = B_0B' \Leftrightarrow HA = HB.$$

Chứng minh tương tự, ta đi đến kết luận :

$$A_0A' = B_0B' = C_0C' = D_0D'$$

$$\Leftrightarrow HA = HB = HC = HD$$

$$\Leftrightarrow H \equiv O \text{ (tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } ABCD).$$

Từ đó A_0 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.

Như vậy, A_0 vừa là trực tâm, vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD , nên BCD là một tam giác đều. Chứng minh tương tự, tất cả các mặt của tứ diện $ABCD$ là những tam giác đều, do đó $ABCD$ là một tứ diện đều.

Cách 2. Xét tứ giác nội tiếp $ABA'B'$ ta được :

$\widehat{AA'B} = \widehat{AB'B}$ và $\widehat{A'AB'} = \widehat{A'BB'}$ cũng tức là : $\widehat{A_0A'B} = \widehat{B_0B'A}$ và $\widehat{HAB'} = \widehat{HBA'}$. Vậy

nếu $A_0A' = B_0B'$ thì suy ra $\triangle A_0A'B = \triangle B_0B'A$ (gcg) và do đó $BA' = AB'$. Từ đó ta được $\triangle HAB' = \triangle HBA'$, và do đó $HA = HB$. Chứng minh tương tự có $HA = HB = HC = HD$, nghĩa là H trùng với tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, và do đó $ABCD$ là một tứ diện đều.

Cách 3. Sử dụng kết quả của bài toán sau : Nếu H là trực tâm của tứ diện trực tâm $ABCD$ thì ta có :

$$\frac{HA'}{HA_0} = \frac{HB'}{HB_0} = \frac{HC'}{HC_0} = \frac{HD'}{HD_0} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vì vậy } A_0A' = B_0B' = C_0C' = D_0D'$$

$$\Leftrightarrow HA_0 = HB_0 = HC_0 = HD_0$$

$$\Leftrightarrow H \equiv I \text{ (Tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện trực tâm } ABCD).$$

Từ đó suy ra được $ABCD$ là một tứ diện đều.

Bài 86 (T10/224)

Dựng hình lập phương $AB_1CD.C_1DA_1B$ ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$, hình lập phương này có độ dài cạnh bằng $\sqrt{2}$. Chọn D_1 làm

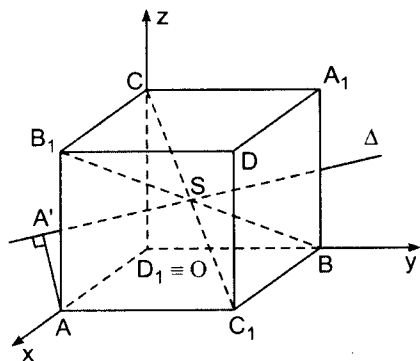
gốc O của hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ sao cho $A \in Ox$, $B \in Oy$ và $C \in Oz$. Thế thì, trong hệ tọa độ này, ta có

$$A(\sqrt{2}; 0; 0), B(0; \sqrt{2}; 0), C(0; 0; \sqrt{2}),$$

$$D(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}) \text{ và } S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Suy ra

$$\begin{cases} \vec{SA} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{SB} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \vec{SC} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{SD} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{cases}$$



Gọi $\vec{e} = (x; y; z)$ là vectơ đơn vị của đường thẳng Δ , thế thì

$$SA' = |\vec{e} \cdot \vec{SA}|, SB' = |\vec{e} \cdot \vec{SB}|, SC' = |\vec{e} \cdot \vec{SC}|$$

và $SD' = |\vec{e} \cdot \vec{SD}|$. Từ đó ta được (với chú ý rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 1$);

$$\begin{aligned} s &= SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4 \\ &= \frac{1}{4}((-x + y + z)^4 + (x - y + z)^4 + \\ &\quad + (x + y - z)^4 + (x + y + z)^4) \\ &= 1 + 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \\ &\leq 1 + \frac{4}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } s_{\max} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Suy ra có bốn vị trí của}$$

Δ thỏa mãn điều kiện tổng s đạt giá trị lớn nhất, tương ứng có vectơ đơn vị chỉ phương là :

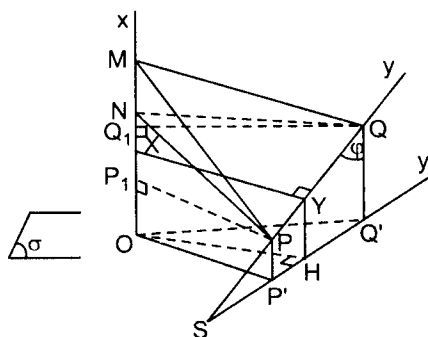
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Đó là bốn đường thẳng SA, SB, SC và SD đi qua các đỉnh của tứ diện đều.

Bài 87 (T9/225)

Gọi V, S và r lần lượt là thể tích, diện tích toàn phần và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện $MNPQ$; XY là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng x và y , X trên x và Y trên y , $XY = d$, $(x, y) = \varphi$.



$$\text{Ta có } r = \frac{3V}{S}$$

$$V = \frac{1}{6} MN \cdot PQ \cdot XY \sin(x, y).$$

hay : $V = \frac{1}{6} abd \sin \varphi$ không đổi. Từ đó suy ra :

r đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S đạt giá trị nhỏ nhất.

Hạ $MM_1 \perp y$, $NN_1 \perp y$, và $PP_1 \perp x$, $QQ_1 \perp x$, gọi M_1, N_1, P_1, Q_1 tương ứng là chân các đường vuông góc đó, ta có :

$$2S = MN(P P_1 + Q Q_1) + P Q(M M_1 + N N_1) = 2S_1 + 2S_2$$

trong đó : $2S_1 = a(P P_1 + Q Q_1)$

$$\text{và } 2S_2 = b(M M_1 + N N_1).$$

Ta chứng minh rằng S_1, S_2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi S đạt giá trị nhỏ nhất. Thật vậy, hãy chiếu toàn bộ hình vẽ lên một mặt phẳng σ nào đó vuông góc với x ở điểm O . Gọi y' là hình chiếu của y trên σ , trong đó O, H, P' và Q' theo thứ tự là hình chiếu trên σ của X, Y, P và Q . Dễ thấy rằng $OH \parallel XY$, $OH = XY = d$, $P'Q' = PQ \cdot \sin \varphi$ nghĩa là $P'Q' = b' = b \sin \varphi$ (không đổi) ; cũng vậy : $PP_1 = OP'$ và $QQ_1 = OQ'$ và $PP_1 \parallel OP'$, $OQ_1 \parallel OQ'$.

Từ đó $2S_1 = a(OP' + OQ')$. Suy ra

S_1 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $OP' + OQ'$ đạt giá trị nhỏ nhất

Vì $OH \perp P'Q'$, $OH = d$ và $P'Q' = b' = b \sin \varphi$ nên tam giác $OP'Q'$ có diện tích không đổi. Từ đó dễ thấy rằng tam giác $OP'Q'$ có chu vi nhỏ nhất, cũng tức là $OP' + OQ'$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi và chỉ khi nó là tam giác cân ở O , cũng tức là khi và chỉ khi P' và Q' đối xứng với nhau qua H , và do đó P và Q đối xứng nhau qua Y .

Bài 88 (T9/226)

Giả sử M khác G và đường thẳng GM không song song với cạnh nào của đáy ABC . Gọi

A_1, B_1 và C_1 là giao điểm của đường thẳng GM theo thứ tự với các đường thẳng BC, CA và AB ; thế thì các điểm A', B' và C' chính là giao điểm

của các đường thẳng DA_1, DB_1 và DC_1 với đường thẳng đi qua M song song với DG (hình vẽ).

Vì G và M đều nằm trong tam giác ABC và $MA' \parallel GD$ nên

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{MA'}{GD} \overrightarrow{GD} = \frac{MA_1}{GA_1} \overrightarrow{GD} =$$

$$= \frac{S_{MBC}}{S_{GBC}} \overrightarrow{GD} = \frac{3S_{MBC}}{S_{ABC}} \overrightarrow{GD} \quad (1)$$

và hai đẳng thức tương tự :

$$\overrightarrow{MB'} = \frac{MB'}{GD} \overrightarrow{GD} = \frac{3S_{MCA}}{S_{ABC}} \overrightarrow{GD} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{MC'} = \frac{MC'}{GD} \overrightarrow{GD} = \frac{3S_{MAB}}{S_{ABC}} \overrightarrow{GD} \quad (3)$$

Cộng theo từng vế (1), (2) và (3), ta được

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = 3\overrightarrow{GD} \quad (4)$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DC'} = 3\overrightarrow{GM} \quad (5)$$

Từ (5) ta được bất đẳng thức cần tìm

$$DA' + DB' + DC' \geq 3GM \quad (6)$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv G$ (lúc đó A', B' và C' đều trùng với D).

★ *Ghi chú* : 1) Bất đẳng thức (6) không chỉ nghiệm đúng với những điểm M nằm trong tam giác ABC , mà đúng với mọi điểm M thuộc mặt phẳng đáy ABC . Thật vậy, khi M là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng ABC , ta vẫn có các đẳng thức (1), (2) và (3) duy chỉ có điều là thay các độ dài không thường bằng các độ dài đại số, các diện tích thông thường bởi các diện tích đại số. Chẳng hạn :

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{MA'}{GD} \cdot \overrightarrow{GD} = \frac{3\overline{S}_{MBC}}{S_{ABC}} \cdot \overrightarrow{GD}$$

Với chú ý rằng

$\overline{S}_{MBC} + \overline{S}_{MCA} + \overline{S}_{MAB} = \overline{S}_{ABC}$ với mọi $M \in mp(ABC)$, ta thu được (4) với (5) và do đó được BĐT (6).

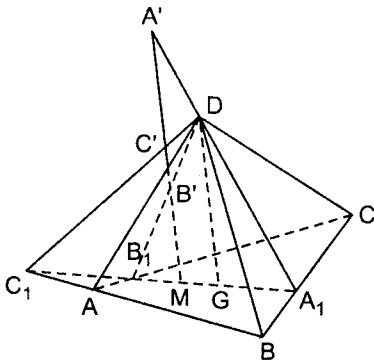
2) Có thể thay tứ diện (chóp tam giác) $D.ABC$ bởi chóp n -giác $S.A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$).

Khi đó, BĐT (6) được thay bởi BĐT

$$\sum_{i=1}^n SA'_i \geq nGM.$$

Bài 89 (T9/227)

Đặt $BC = a', CA = b', AB = c'$, thế thì $a'^2 = b'^2 + c'^2$, $b'^2 = c'^2 + a'^2$, $c'^2 = a'^2 + b'^2$.



Theo định lí côsin

$$\cos A = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'} = \frac{a^2}{b'c'}$$

Do đó

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{a^2}{b'c' \sin A} = \frac{a^2}{2S}; \text{ từ đó}$$

$a \cot A = \frac{a^3}{2S}$ (trong đó S là diện tích tam giác ABC) và hai đẳng thức tương tự. Cuối cùng thu được

$$a \cot A + b \cot B + c \cot C = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2S} \quad (1)$$

Mặt khác, nếu V là thể tích của tứ diện vuông $O.ABC$ thì ta có hệ thức $6V = abc = 2Sh$; (2)

Từ (1) và (2), ta được

$$a \cot A + b \cot B + c \cot C = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} h \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad (4)$$

Từ (3) và (4) thu được bất đẳng thức cần tìm.

Đấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $a = b = c$, tức là tứ diện vuông cân.

Bài 90 (T10/228)

Kí hiệu độ lớn các mặt của góc tam diện đỉnh S như sau $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{CSA} = \beta$, $\widehat{ASB} = \gamma$. Vì $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ nên có thể xem α , β và γ là ba góc của một tam giác nào đó. Tổng diện tích ba mặt bên của hình chóp bằng:

$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a + b + c = 2p$; sử dụng định lí côsin, ta tính được

$$a = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, b = 2 \sin \frac{\beta}{2}, c = 2 \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Ta tính được diện tích đáy ABC của hình chóp theo công thức Héron:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &\leq \sqrt{p \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3} = \sqrt{\frac{p^4}{27}}, \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} S_{ABC} &\leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2}{3\sqrt{3}} \\ &\leq \frac{9}{4 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra diện tích toàn phần của hình chóp không lớn hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Đấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tức là khi hình chóp $SABC$ là một tứ diện đều.

Bài 91 (T10/229)

Gọi R là bán kính mặt cầu (O) , thì

$$\begin{aligned} GA.GA_1 + GB.GB_1 + GC.GC_1 + GD.GD_1 &= \mathcal{P}_{G/(O)} \\ &= R^2 - OG^2 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 &= (R^2 - OG^2) \times \\ &\times \left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} 4(R^2 - OG^2) &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 - 4OG^2 \\ &= (\overline{OG} + \overline{GA})^2 + (\overline{OG} + \overline{GB})^2 + (\overline{OG} + \overline{GC})^2 + \\ &+ (\overline{OG} + \overline{GD})^2 - 4OG^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + \\ &+ GD^2 + 2OG(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD}) = GA^2 + \\ &+ GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq \frac{1}{4}(GA + GB + GC + GD)^2. \end{aligned}$$

hay là

$$R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{16}(GA + GB + GC + GD)^2 \quad (2)$$

Mặt khác, ta lại có (theo bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovski):

$$(GA + GB + GC + GD) \left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} \right) \geq 16 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta được BĐT cần chứng minh

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 \geq GA + GB + GC + GD$$

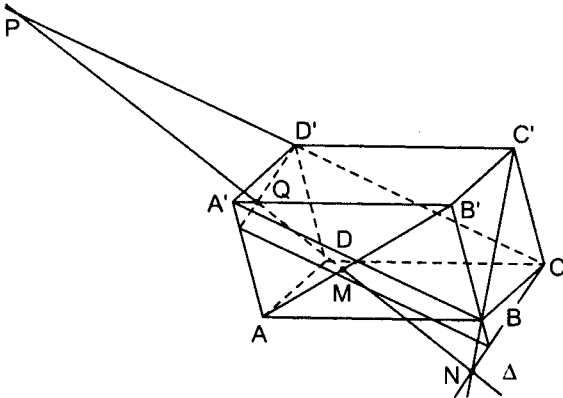
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $GA = GB = GC = GD = R$, nghĩa là G trùng với O và lúc đó tứ diện $ABCD$ là gần đều (Có thể chứng minh điều này bằng phương pháp vector).

★ *Ghi chú* : Ta có bài toán tổng quát sau : Nếu G là trọng tâm của hệ n điểm $\{A_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$ nằm trên mặt cầu (O) và các đường thẳng $A_i G$ cắt lại (O) ở $A'_i (i = 1, 2, \dots, n)$, thì ta có BĐT

$$\sum_{i=1}^n GA'_i \geq \sum_{i=1}^n GA_i.$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $G \equiv O$.

Bài 92 (T10/230)



a) Giả sử M, N và P cùng nằm trên đường thẳng Δ . Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'}, \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'} \text{ và } \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{b} + \vec{c}) \\ \overrightarrow{AN} = \vec{b} + \frac{x}{x-1}(\vec{c} + \vec{a}) \\ \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{y}{y-1}(\vec{c} - \vec{b}) \end{cases} \quad (1)$$

Lại vì M, N và P thuộc Δ nên tồn tại duy nhất λ sao cho : $\overrightarrow{NM} = \lambda\overrightarrow{NP}$, hay là .

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \lambda(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN}) \quad (2)$$

Thay $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AP}$ bởi các biểu thức (1) và (2) rồi rút gọn, ta được :

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1-x}\vec{a} + \frac{1}{k-1}\vec{b} + \left(\frac{x}{1-x} + \frac{k}{k-1}\right)\vec{c} \\ &= \frac{\lambda}{1-x}\vec{a} + \lambda\frac{y}{1-y}\vec{b} + \lambda\left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{y-1}\right)\vec{c}. \end{aligned}$$

Vì $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng nên

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{1-x} = \frac{x}{1-x} \\ \lambda\frac{y}{1-y} = \frac{1}{k-1} \\ \lambda\left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{y-1}\right) = \frac{x}{1-x} + \frac{k}{k-1} \end{cases}$$

dẫn tới
$$\begin{cases} \lambda = x = \frac{1+k}{1-k} \\ y = -\frac{1}{k} \end{cases}$$

Ta đi đến kết luận : Qua điểm M (trên đường thẳng AB' xác định bởi $k = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB'}}$; $(0 \neq k < \infty, k \neq 1)$ có duy nhất một đường thẳng Δ cắt cả ba đường thẳng AB', BC' và CD' lần lượt ở các điểm M, N và P sao cho

$$x = \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC'}} = \frac{1+k}{1-k} ; y = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PD'}} = -\frac{1}{k} ;$$

đồng thời : $\overrightarrow{NM} = \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{NP}$, tức là $\frac{\overrightarrow{NM}}{\overrightarrow{NP}} = \frac{1+k}{1-k}$

$$= \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC'}} = x.$$

Để thấy rằng đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BC'M)$ và $(CD'M)$.

b) Chứng minh tương tự, qua điểm P trên đường thẳng CD' (xác định bởi $y = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PD'}} = -\frac{1}{k}$)

có duy nhất một đường thẳng Δ' cắt cả ba đường thẳng CD', DA' và AB' lần lượt ở các

điểm P, Q và M' sao cho $\frac{\overline{QD}}{\overline{QA'}} = \frac{1+y}{1-y}$ và

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B'}} = -\frac{1}{y} \text{ đồng thời } \frac{\overline{QM}}{\overline{QM'}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{QA'}}. \text{ Thay}$$

$$y = -\frac{1}{k} \text{ ta được } \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B'}} = k \text{ và } \frac{\overline{QD}}{\overline{QA'}} = \frac{k-1}{k+1} =$$

$$= -\frac{1}{x} \text{ do đó } M' \equiv M, \text{ tức là } \Delta' \text{ trùng với } \Delta. \text{ Ta đi}$$

đến kết luận : Nếu một đường thẳng Δ nào đã cắt ba trong bốn đường thẳng AB', BC', CD' và DA' thì cũng cắt đường thẳng còn lại, đồng thời qua mỗi điểm M trên đường thẳng AB' ($M \neq A, M \neq B'$) có duy nhất một đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng nói trên.

Cho M thay đổi trên đường thẳng AB' , tức là cho k thay đổi ($k \neq 0, k \neq 1$) ta được vô số đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng AB', BC', CD' và DA' . Lại vì $\frac{\overline{QP}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{QA'}} = -\frac{1}{x}$ nên

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{QP}} = -x \text{ do đó } (MPNQ) = \frac{\overline{NM}}{\overline{NP}} : \frac{\overline{QM}}{\overline{QD}} = -1,$$

tức là bốn giao điểm M, N, P, Q của một đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng AB', CD', BC' và DA' lập thành một hàng điểm điều hoà.

Bài 93 (T10/231). Gọi M, M', N, N' và P, P' theo thứ tự là giao điểm của các mặt phẳng $(DAJ), (BCJ), (DBJ), (CAJ)$ và $(DCJ), (ABJ)$ với các cạnh đối diện tương ứng (hình vẽ). Do J nằm trong tứ diện nên các điểm này cũng nằm trên các cạnh của tứ diện. Vì (DAM) là mặt phân giác của nhị diện cạnh DA , nên khoảng cách $d(M, DCA) = d(M, DAB)$, do đó ta được :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{V_{DAMD}}{V_{DAMC}} = \frac{S_{DAB}}{S_{DCA}} \text{ tức là}$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{S_c}{S_b} \quad (1)$$

Lại vì M thuộc cạnh BC nên $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{S_c}{S_b}$,

hay là

$$S_b \overline{MB} + S_c \overline{MC} = \vec{0}$$

Từ đó bằng cách thay $\overline{MB} = \overline{JB} - \overline{JM}$, $\overline{MC} = \overline{JC} - \overline{JM}$ suy ra

$$S_b \overline{JB} + S_c \overline{JC} = (S_b + S_c) \overline{JM} \quad (2)$$

Chúng minh tương tự, ta được

$$S_d \overline{JD} + S_a \overline{JA} = (S_d + S_a) \overline{JM'} \quad (3)$$

Để ý rằng các vector $\overline{JM}, \overline{JM'}, \overline{MM'}$ cùng phương nên khi đặt $\vec{v} = S_a \overline{JA} + S_b \overline{JB} + S_c \overline{JC} + S_d \overline{JD}$, thì từ (1) và (2) ta được $\overline{MM'}$ cùng phương với

$$\vec{v} = (S_b + S_c) \overline{JM} + (S_d + S_a) \overline{JM'}$$

Chúng minh tương tự vector $\vec{v}$ cùng phương với $\overline{NN'}$ và $\overline{PP'}$ nhưng $\overline{MN'}, \overline{NN'}$ và $\overline{PP'}$ không đồng phẳng, lại càng không thể cùng phương và như vậy chỉ xảy ra $\vec{v} = \vec{0}$ hay

$$S_a \overline{JA} + S_b \overline{JB} + S_c \overline{JC} + S_d \overline{JD} = \vec{0} \quad (4)$$

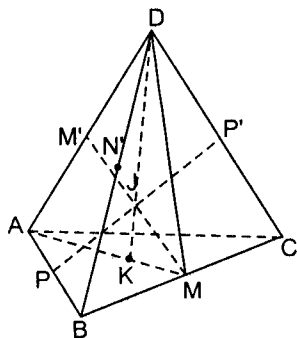
★ *Ghi chú* : 1) Có nhiều cách chứng minh hệ thức vector (4) ; tuy nhiên, cách giải nào cũng đều phải chứng minh hệ thức (1), tức là chứng minh tính chất hình học sau đây : Mặt phẳng phân giác của một nhị diện nào đó của một tứ diện thì chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với diện tích các mặt kề với hai đoạn đó (tương tự như tính chất đường phân giác của một tam giác trong hình học phẳng).

2) Chú ý rằng

$$\frac{3}{r} = \frac{S_a}{V_{JB CD}} = \frac{S_b}{V_{JC DA}} = \frac{S_c}{V_{JD AB}} = \frac{S_d}{V_{JA BC}}$$

nên ta cũng có đẳng thức vector

$$V_{JB CD} \overline{JA} + V_{JC DA} \overline{JB} + V_{JD AB} \overline{JC} + V_{JA BC} \overline{JD} = \vec{0}.$$



Bài 94 (T10/232)

1) Trước hết, nhắc lại rằng : Nếu X và Y là hai điểm phân biệt thì điều kiện cần và đủ để đường thẳng XY đi qua điểm S là với mỗi điểm O có hai số thực x và y thoả mãn các điều kiện sau :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY} \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Theo giả thiết, ta có $a_{n+1} = a_n + d$ hay $a_{n+1} - a_n = d$ cũng tức là $\frac{a_{n+1}}{d} - \frac{a_n}{d} = 1$. Bởi vậy nếu I là điểm được xác định bởi hệ thức vectơ :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_{n+1}}{d} \overrightarrow{OB_n} - \frac{a_n}{d} \overrightarrow{OA_n} \text{ thì điểm } I \text{ thuộc đường thẳng } A_n B_n. \quad (2)$$

Nhưng theo giả thiết lại có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= a_n \overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB} = a_{n+1} \overrightarrow{OB_n} \text{ nên} \\ \overrightarrow{OI} &= \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{d} = \frac{\overrightarrow{AB}}{d} \end{aligned} \quad (3)$$

Vậy với mọi n nguyên dương, đường thẳng $A_n B_n$ luôn đi qua một điểm I cố định, được xác định bởi hệ thức (3).

Chứng minh tương tự, ta thấy rằng : với mọi n nguyên dương các đường thẳng $B_n C_n$ và $C_n A_n$ cũng lần lượt đi qua các điểm cố định J và K được xác định bởi các hệ thức sau đây :

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{d} \overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d} \overrightarrow{AC}.$$

2) Từ kết quả trên ta có

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$$

$$\text{hay : } 2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ không những ba điểm I, J, K thẳng hàng mà K còn là trung điểm của đoạn IJ .

Cũng từ chứng minh trên, ta có nhận xét thêm rằng nếu ba tia Ox, Oy và Oz không đồng

phẳng (cũng tức là ba cạnh của một góc tam diện) thì mặt phẳng $(A_n B_n C_n)$ luôn đi qua một đường thẳng cố định Δ (chứa ba điểm thẳng hàng I, J và K).

★ *Ghi chú* : Bài toán này còn có nhiều cách giải khác. Chẳng hạn, sử dụng định lí Menelaus : Xét trường hợp $A_n B_n$ cắt $A_1 B_1$ tại điểm I , chứng minh được rằng $\frac{IA_1}{IB_1} = -\frac{a_1 + d}{a_1}$ nên I cố định. Cũng có thể sử dụng định lí Thales, chứng minh rằng đường thẳng $A_n B_n$ cắt đường thẳng đi qua O và song song với AB ở điểm I cố định hoặc sử dụng phương pháp tọa độ nhưng lời giải thường không gọn.

Bài 95 (T10/235)

Để giải bài toán này, trước hết ta giải bài toán tương tự trong hình học phẳng.

a) Giả sử M là một điểm thuộc cạnh BC của một tam giác ABC . Một đường thẳng bất kì cắt các cạnh AB, AC và đoạn AM theo thứ tự ở B', C' và M' . Thế thì ta có :

$$AM + AM' < \max \{AB + AB', AC + AC'\} \quad (1)$$

b) Đặc biệt, nếu đường thẳng đi qua A , tức là B', C' và M' trùng nhau ở A ; khi đó

$$AM < \max \{AB, AC\} \quad (2)$$

Thật vậy, nếu $AM \perp BC$ tại M thì $AM < AB$ và $AM < AC$ và ta được (2). Nếu AM không vuông góc với BC thì trong hai góc $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ ắt phải có một góc tù, đó AM nhỏ hơn một trong hai cạnh AB hoặc AC tùy theo góc tù đó đối diện với AB hay AC và ta thu được (2).

Bây giờ ta chứng minh mệnh đề a). Xét hai trường hợp sau.

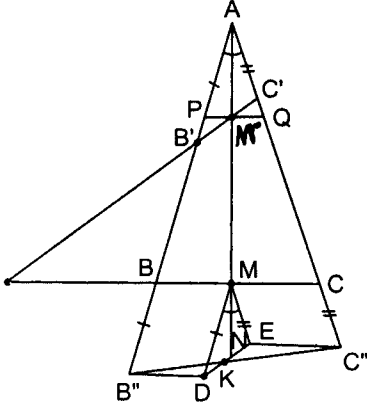
1) Nếu $B'C' \parallel BC$, không mất tổng quát, giả sử $AB' = \max \{AB', AC'\}$.

Suy ra $AB = \max \{AB, AC\}$ mà $AM' < AB'$, $AM < AB$. Do đó

$AM + AM' < AB + AB' = \max\{AB + AB', AC + AC'\}$
và ta thu được (1).

2) $B'C'$ không song song với BC , không mất tổng quát giả sử giao điểm của các đường thẳng BC và $B'C'$ nằm trên tia CB và tia $C'B'$ (hình 1). Qua M' dựng đường thẳng $PQ \parallel BC$, cắt AB và AC theo thứ tự ở P và Q , ta được

$$\frac{MB}{MC} = \frac{M'P}{M'Q} = \frac{S_{AM'P}}{S_{AM'Q}} < \frac{S_{AM'B'}}{S_{AM'C'}} = \frac{M'B'}{M'C'}.$$



Hình 1

Trên tia AB và tia AC theo thứ tự lần lượt lấy hai điểm B'' và C'' sao cho $B'B'' = AB$, $C'C'' = AC$ và do đó $BB'' = AB'$, $CC'' = AC'$. Sau đó dựng hai hình bình hành $MBB''D$ và $MCC''E$, giả sử đoạn DE cắt các đường thẳng AM và $B''C''$ lần lượt tại N và K .

Để thấy rằng $\triangle MDE = \triangle AB'C'$ và $MN = AM'$, do đó $AN = AM + AM'$. Ta có :

$$\frac{KD}{KE} = \frac{DB''}{EC''} = \frac{MB}{MC} < \frac{M'B'}{M'C'} = \frac{ND}{NE}.$$

Vì K và N đều thuộc đoạn DE nên suy ra $KE > NE$ và do đó N thuộc đoạn KE , tức là điểm N thuộc miền tam giác $AB''C''$ (vì đoạn thẳng KE nằm trong tam giác $AB''C''$). Từ đó

$$AN < \max\{AB'', AC''\}, \text{ hay}$$

$$AM + AM' < \max\{AB + AB', AC + AC'\}.$$

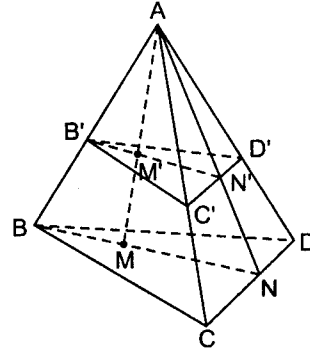
Trở lại bài toán (h.2).

Giả sử đường thẳng BM cắt cạnh CD tại N , đường thẳng $B'M'$ cắt cạnh $C'D'$ tại N' , thế thì N' thuộc giao tuyến AN của hai mặt phẳng ABM và

ACD . Áp dụng mệnh đề a) vào hai tam giác ABN và ACD , ta được

$$AM + AM' < \max\{AB + AB', AN + AN'\} \quad (3)$$

$$AN + AN' < \max\{AC + AC', AD + AD'\} \quad (4)$$



Hình 2

Từ (3) và (4) suy ra

$$AM + AM' < \max\{AB + AB', AC + AC', AD + AD'\}$$

(đpcm).

★ Ghi chú : Có thể giải bài toán trên bằng phương pháp vectơ. Vì điểm M thuộc đoạn BC thì tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ ($0 < \alpha < 1$) sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AC}$ và do đó tồn tại α , $\beta \in \mathbb{R}$ ($0 < \alpha, \beta$ và $0 < \alpha + \beta < 1$) sao cho

$$\overrightarrow{AM'} = (1 - \beta) \overrightarrow{AB'} + \beta \overrightarrow{AC'}.$$

Từ đó suy ra

$$AM + AM' < \frac{1 + \alpha - \beta}{2} (AB + AB') + \frac{1 + \beta - \alpha}{2} (AC + AC') < \max\{AB + AB', AC + AC'\}.$$

Sau cùng, sử dụng kết quả này vào việc giải bài toán trong không gian.

Bài 96 (T10/236)

Trên các tia OA , OB , OC và OD theo thứ tự lấy các vectơ đơn vị : $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ và $\overrightarrow{OD'}$. Khi đó với giả thiết đã cho ta được : $B'C' = D'A'$, $C'A' = D'B'$, $A'B' = D'C'$ do đó $A'B'C'D'$ là một tứ diện gần đều nhận O làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, đồng thời O cũng là trọng tâm của tứ diện gần đều $A'B'C'D'$ này.

$$\text{Từ } \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$$

suy ra

$$\vec{p} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} + \frac{\overrightarrow{OD}}{OD} = \vec{0}.$$

Với mọi điểm M trong không gian, ta có

$$\begin{aligned} MA &= \frac{MA \cdot OA}{OA} \geq \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OA}}{OA} = \\ &= \frac{(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OA}}{OA} = OA + \overrightarrow{MO} \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{OA} \right). \end{aligned}$$

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng phương, tức là

$$MA = OA + \overrightarrow{MO} \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{OA} \right) \Leftrightarrow M \text{ thuộc tia } AO.$$

Chúng minh tương tự, rồi lấy tổng được

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD &\geq OA + OB + OC + OD + \overrightarrow{MO} \cdot \vec{p} = \\ &= OA + OB + OC + OD. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi, đồng thời M thuộc cả bốn tia AO , BO , CO và DO , nghĩa là M trùng O .

★ *Ghi chú.* 1) Điểm O thoả mãn điều kiện của bài toán (nhìn hai cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ dưới cùng một góc) cũng là điểm nhìn các mặt của tứ diện $ABCD$ dưới những góc tam diện bằng nhau và cùng hướng :

$$\begin{aligned} (OB, OC, OD) &= (OA, OD, OC) \\ &= (OD, OA, OB) = (OC, OB, OA). \end{aligned}$$

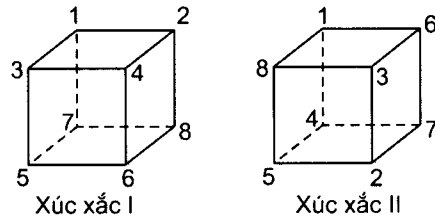
2) Bài toán trên đây chỉ ra điều kiện đủ để một điểm O nằm trong một tứ diện $ABCD$ là "điểm cực tiểu" (điểm mà tổng khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tứ diện $ABCD$ là nhỏ nhất). Điểm này còn được gọi là "điểm Torricelli hay "điểm Fermat" (của hệ bốn điểm không đồng phẳng).

3) Có thể chứng minh rằng : Điểm Fermat P của một hệ bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng là tồn tại và duy nhất. Điểm này không

thuộc một cạnh nào, cũng như một mặt nào của tứ diện, nhưng có thể trùng với một trong các đỉnh của tứ diện $ABCD$. Nếu $P \neq A, P \neq B, P \neq C, P \neq D$ thì P là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$ và đặc trưng bởi : tổng các vector đơn vị hướng từ P đến các đỉnh của tứ diện bằng vector không, hay là P nhìn các mặt của tứ diện $ABCD$ dưới những góc tam diện bằng nhau và cùng hướng, hay là P nhìn các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ dưới những cặp góc (tương ứng) bằng nhau.

Đó cũng chính là những tính chất đặc trưng (có ý nghĩa định tính) (điều kiện cần và đủ) của "điểm Fermat" P của một hệ bốn điểm không đồng phẳng.

Bài 97 (T3/239)

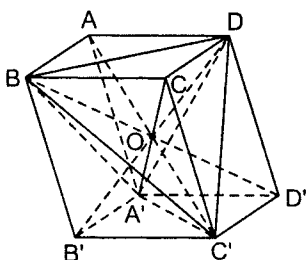


Ta có thể tô như ở hình trên, trong đó các số 1, 2, 3, ..., 8 là các tên đặt cho 8 mẫu đôi một khác nhau. Trước hết, dễ dàng thấy điều kiện 1) đã được thoả mãn. Ta sẽ kiểm tra xem điều kiện 2) có được thoả mãn hay không bằng cách xét mỗi mặt của xúc xắc I với từng mặt của xúc xắc II. Do ở xúc xắc I mặt bên trái gồm toàn số lẻ, mặt bên phải gồm toàn số chẵn trong khi ở xúc xắc II mỗi mặt đều gồm hai số chẵn, hai số lẻ nên dễ dàng thấy hai mặt đó của I đã được kiểm tra xong. Đối với mặt trên và mặt đáy của xúc xắc I, ta sẽ tìm cách đưa về trường hợp tương tự như trên bằng cách đánh số lại một số đỉnh của hai con xúc xắc như sau : $1 \rightarrow 10$; $3 \rightarrow 30$; $8 \rightarrow 81$; $6 \rightarrow 61$. Dễ dàng thấy sau khi đánh số lại thì mặt trên của xúc xắc I sẽ gồm toàn số chẵn, đồng thời mặt đáy gồm toàn số lẻ, trong khi đó ở xúc xắc II mỗi mặt vẫn gồm hai số chẵn và hai số lẻ, và hai mặt đó của

xúc xắc I đã được kiểm tra xong. Còn mặt trước và mặt sau của xúc xắc I thì sẽ được kiểm tra bằng cách đánh số lại (xuất phát từ cách đánh số lúc đầu) như sau : $1 \rightarrow 10$; $7 \rightarrow 70$; $4 \rightarrow 41$; $6 \rightarrow 61$. Dễ dàng kiểm tra tương tự như trên. Vậy cách tô màu nêu trên là một giải đáp cần tìm.

Bài 98 (T10/239)

Gọi O là tâm hình hộp (giao điểm của bốn đường chéo AC' , BD' , CA' và DB' , đồng thời cũng là trung điểm chung của chúng) (hình vẽ). Thế thì phép đối xứng tâm O biến hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành chính nó, trong đó các đỉnh A, B, C, D theo thứ tự biến thành các đỉnh C', D', A', B' ; do đó biến tứ diện $AB'CD'$ thành tứ diện $C'DA'B$. Và như vậy, phép đối xứng tâm O cũng biến tâm I_1 hình cầu nội tiếp $AB'CD'$ thành tâm I_2 hình cầu nội tiếp tứ diện $A'BC'D$. Từ đó suy ra



$I_1 \equiv I_2 \Leftrightarrow I_1 \equiv I_2 \equiv O$ (1)

Mặt khác, lại biết rằng các trọng tâm G_1 và G_2 của hai tứ diện này trùng nhau và trùng với tâm O của hình hộp : $G_1 \equiv G_2 \equiv O$ (một kết quả quen thuộc, hãy chứng minh!). (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$I_1 \equiv I_2 \Leftrightarrow I_1 \equiv G_1 \equiv O \text{ và } I_2 \equiv G_2 \equiv O.$$

Ngoài ra, có thể chứng minh rằng một tứ diện có trọng tâm trùng với tâm hình cầu nội tiếp là một tứ diện gần đều (và ngược lại). Có thể chứng minh $AB'CD'$ là tứ diện gần đều như sau : Gọi s_1, s_2, s_3 và s_4 lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B', C và D' của tứ diện ; thế thì ta có hệ thức vector

$$s_1 \overrightarrow{OA} + s_2 \overrightarrow{OB'} + s_3 \overrightarrow{OC} + s_4 \overrightarrow{OD'} = \vec{0} \quad (3)$$

(vì O là tâm hình cầu nội tiếp các tứ diện $AB'CD'$ và $A'BC'D$).

Mặt khác, lại vì O là tâm hình hộp nên dễ dàng chứng minh được :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OB'}, \text{ hay} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD'} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (4)$$

Vì ba vector $\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OD'}$ không đồng phẳng, nên từ (3) và (4) ta được $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$ và do đó, $AB'CD'$ là một tứ diện gần đều (Một kết quả quen thuộc nữa, hãy chứng minh!). Và như vậy, các cạnh đối diện bằng nhau : $AC = B'D', AB' = CD', AD' = CB'$.

Từ đó suy ra các mặt $ABCD, ABB'A', ADD'A'$ là những hình chữ nhật và do đó, hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình hộp chữ nhật.

Đảo lại (điều kiện đủ) cũng đúng. Thật vậy, nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình hộp chữ nhật thì các tứ diện $AB'CD'$ và $A'BC'D$ là gần đều, và do đó $I_1 \equiv G_1 = O$ và $I_2 \equiv G_2 \equiv O$; suy ra $I_1 \equiv I_2 (\equiv O)$.

★ *Ghi chú.* Cũng có thể giải bài toán trên theo hướng : Vì O là trọng tâm của tứ diện $AB'CD'$ nên ta có

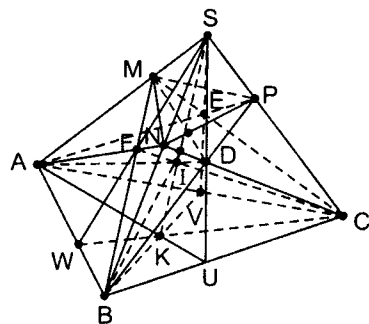
$$V_{OAB'C} = V_{OB'CD'} = V_{OCD'A} = V_{OD'AB'}.$$

Lại vì $O \equiv I_1$, mà I_1 cách đều các mặt của tứ diện $AB'CD'$ nên $S_{AB'C} = S_{B'CD'} = S_{CD'A} = S_{D'AB'}$ và do đó, tứ diện $AB'CD'$ có các mặt tương đương, là một tứ diện gần đều.

Bài 99 (T10/241)

Cách 1.

Gọi D, E, F theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng BP và CN , CM và AP, AN



và BM . Dễ thấy các giao tuyến AD, BE, CF của các cặp mặt phẳng (CAN) và (ABP) ; (ABP) và (BCM) ; (BCM) và (CAN) đồng quy tại giao điểm I của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$. Cũng vậy, các giao tuyến MD, NE và PF của các cặp mặt phẳng (BPM) và (CMN) ; (CMN) và (ANP) , (ANP) và (BPM) đồng quy tại J .

Gọi U, V và W theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng SD và BC ; SE và CA, SF và AB (hình vẽ). Suy ra AU, BV và CW đồng quy tại một điểm K trên giao tuyến SI của ba mặt phẳng $(SAD), (SBE)$ và (SCF) , đồng thời K cũng nằm trên giao tuyến SJ của ba mặt phẳng $(SMD), (SNE)$ và (SPF) . Vậy bốn điểm S, I, J và K thẳng hàng (trên giao tuyến chung của hai bộ ba mặt phẳng nói trên).

Để ý rằng ba điểm N, I, V thẳng hàng, áp dụng định lý Van – Oben vào hai tam giác SCA (với ba đường thẳng SV, CM, AP đồng quy ở E) và SBV (với ba đường thẳng SK, BE, VN đồng quy ở I) ta có các hệ thức

$$\frac{PS}{PC} + \frac{MS}{MA} = \frac{ES}{EV} \text{ và } \frac{ES}{EV} + \frac{NS}{NB} = \frac{IS}{IK}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} = \frac{IS}{IK} \quad (1)$$

Mặt khác, lại có $(SIJK) = -1$ (tính chất điều hoà của tứ giác toàn phần có ba đường chéo là SI, NE và BV); suy ra :

$$\frac{KS}{KI} = \frac{JS}{JI} \text{ hay } \frac{JS}{JI} = 1 + \frac{IS}{IK} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được hệ thức cần tìm

$$\frac{JS}{JI} = 1 + \frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC}$$

Cách 2.

Giả sử BP cắt CN tại X, CM cắt AP tại Y và AN cắt BM tại Z . thế thì trong mp (BCM) có BY cắt CZ tại I và trong mp (ANP) có NY và PZ cắt nhau tại J .

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{SP} = z\overrightarrow{PC}$; thế thì

$$\overrightarrow{SM} = \frac{x}{1+x}\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \frac{y}{1+y}\vec{b}, \overrightarrow{SP} = \frac{z}{1+z}\vec{c} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

Trong mp $(SAB), AN$ cắt BM ở Z nên

$$\overrightarrow{SZ} = \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA}$$

hay

$$\frac{\alpha x}{1+x}\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} = \frac{\beta y}{1+y}\vec{b} + (1-\beta)\vec{a}.$$

Vì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương nên ta phải có

$$\frac{\alpha x}{1+x} = 1-\beta \text{ và } \frac{\beta y}{1+y} = 1-\alpha$$

Từ đó

$$\overrightarrow{SZ} = \frac{x}{x+y+1}\vec{a} + \frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$$

Tương tự

$$\overrightarrow{SX} = \frac{y}{y+z+1}\vec{b} + \frac{z}{y+z+1}\vec{c}$$

$$\text{và } \overrightarrow{SY} = \frac{z}{z+x+1}\vec{c} + \frac{x}{z+x+1}\vec{a}.$$

Làm tương tự như trên với giao điểm I của BY và CZ , giao điểm J của NY và PZ và để ý rằng ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta thu được :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{SJ} = \frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI}.$$

$$\text{hay } \overrightarrow{SJ} = (x+y+z+1)\overrightarrow{JI}.$$

Từ đó ta đi đến kết luận

Ba điểm S, I, J thẳng hàng và

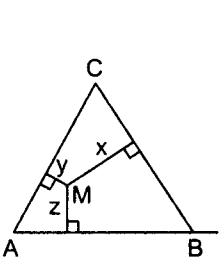
$$\frac{SJ}{JI} = \frac{IS}{JI} = 1 + \frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC}.$$

Bài 100 (T10/242)

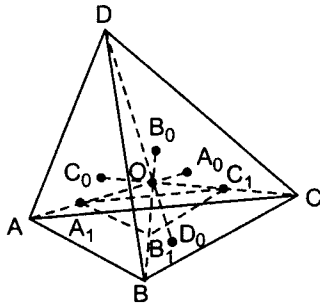
Cách 1.

Gọi x, y và z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB và h là chiều cao của tam giác đều ABC (h.1). Thế thì với điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{x}{h} \overrightarrow{OA} + \frac{y}{h} \overrightarrow{OB} + \frac{z}{h} \overrightarrow{OC} \quad (1)$$



Hình 1



Hình 2

Lại gọi A_0, B_0 và C_0 lần lượt là trọng tâm các tam giác đều BCD, CDA và DAB , gọi O là trọng tâm tứ diện đều $ABCD$; thế thì (h.2) có:

$$\frac{MA'}{AA_0} = \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{x}{h}$$

Vì $\overrightarrow{MA'}$ và $\overrightarrow{AA_0}$ cùng phương nên

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{x}{h} \overrightarrow{AA_0} = -\frac{4}{3} \frac{x}{h} \overrightarrow{OA}.$$

Tương tự

$$\overrightarrow{MB'} = -\frac{4}{3} \frac{y}{h} \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{MC'} = -\frac{4}{3} \frac{z}{h} \overrightarrow{OC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = -\frac{4}{3} \overrightarrow{OM} \quad (3)$$

Vì G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = 3\overrightarrow{MG} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

Để M là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ điều kiện cần và đủ là

$$3\overrightarrow{MG} = -\frac{4}{3} \overrightarrow{OM}, \text{ hay } \overrightarrow{OG} = \frac{5}{9} \overrightarrow{OM} \quad (5)$$

Vậy $G = V_0^{5/9}(M)$ là ảnh của M trong phép vị tự tâm O , tỉ số $\frac{5}{9}$. Ta đi đến kết luận:

Khi M chuyển động trong miền tam giác ABC thì G chuyển động trong miền tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trong tứ diện và song song với đáy ABC , trong đó A_1, B_1 và C_1 được xác định bởi

$$\frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{OC_1}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{5}{9}.$$

Cách 2. Giả sử M là một điểm tùy ý nằm trong tứ diện đều $ABCD$; A', B', C' và D' lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt $(BCD), (CDA), (DAB)$ và (ABC) . Gọi O là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$ và DO cắt mp(ABC) tại D_0 (D_0 cũng là trọng tâm của mặt (ABC)). Thế thì ta có

$$\frac{MD'}{OD_0} = \frac{V_{MABC}}{V_{OABC}} \text{ hay là}$$

$$V_{ABCD} \cdot MD' = \frac{4}{3} V_{MABC} \cdot DO.$$

Vì $MD' \parallel DO$, nên

$$V_{ABCD} \cdot \overrightarrow{MD'} = \frac{4}{3} V_{MABC} (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MD}).$$

Chứng minh tương tự ta có các hệ thức sau:

$$V_{ABCD} \cdot \overrightarrow{MA'} = \frac{4}{3} V_{MBCD} (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA})$$

$$V_{ABCD} \cdot \overrightarrow{MB'} = \frac{4}{3} V_{MCDA} (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB})$$

$$V_{ABCD} \cdot \overrightarrow{MC'} = \frac{4}{3} V_{MCAB} (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC})$$

Mặt khác, lại có (vì M thuộc miền tứ diện $ABCD$):

$$V_{MBCD} \cdot \overrightarrow{MA} + V_{MCDA} \cdot \overrightarrow{MB} + V_{MDAB} \cdot \overrightarrow{MC} + V_{MABC} \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\text{và } V_{MBCD} + V_{MCDA} + V_{MDAB} + V_{MABC} = V_{ABCD}.$$

Từ các hệ thức trên ta được

$$\overrightarrow{MA}' + \overrightarrow{MB}' + \overrightarrow{MC}' + \overrightarrow{MD}' = \frac{4}{3} \overrightarrow{MO}.$$

Đặt biệt, M thuộc miền tam giác ABC thì M trùng với D' và ta được

$$\overrightarrow{MA}' + \overrightarrow{MB}' + \overrightarrow{MC}' = \frac{4}{3} \overrightarrow{MO}.$$

Do đó

$$G \text{ là trọng tâm } A'B'C' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \frac{4}{3} \overrightarrow{MO} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{5}{9} \overrightarrow{OM}.$$

Từ đó suy ra kết luận như ở cách 1.