Moon.vn
Học để khẳng định mình

ĐẶNG VIỆT HÙNG - LÊ VĂN TUẤN
NGUYỄN THẾ DUY - VŨ VĂN BẮC

Pro S
TOÁN HỌC

Tập 2: Hàm số & Mũ - Logarit

- Nội dung bám sát chương trình đổi mới
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẶNG VIỆT HÙNG – LÊ VĂN TUẤN
NGUYỄN THẾ DUY - VŨ VĂN BẮC

PRO S Toán học

Tập 2

Hàm Số Và Mũ – Logarit

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Các em thân mến !

Từ năm 2017, theo tinh thần đổi mới, môn Toán đã chuyển sang hình thức thi trắc nghiệm (50 câu làm trong 90 phút). Nội dung đề thi bao quát toàn bộ chương trình sách giáo khoa, tăng cường phân hóa và các câu hỏi mở rộng nâng cao. Phần kiểm tra kiến thức cơ bản dùng để xét Tốt nghiệp và phân nâng cao để sàng lọc thí sinh trong tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng. Đề thi đảm bảo cả 4 mức độ : *Nhận biết, Thông hiểu, Vận dụng và Vận dụng cao.*

Nhằm giúp các em chuẩn bị kiến thức tốt nhất cho kì thi THPTQG, nhóm tác giả đã xây dựng khóa học trực tuyến trên website Moon.vn (Pro S.A.T) bao gồm các khóa học: *Luyện thi*, *Luyện đề* và *Tổng ôn* theo từng giai đoạn học của học sinh.

Mỗi đơn vị bài giảng trong khóa học bao gồm : video bài giảng, bài tập trắc nghiệm và đáp án, lời giải các bài tập đó trên hệ thống Moon.vn.

Tập 2 của bộ sách ProS được viết bám theo hai chủ đề: Hàm số và Mũ, Loga.

Điểm đặc biệt của cuốn sách này là hệ thống tra ID các bài tập tự luyện. Sau khi nhập mã ID trong sách lên thanh tìm kiếm trên website moon.vn, các em có thể ngay lập tức xem được lời giải chi tiết của một câu hỏi trong một bài bất kì. Sở hữu cuốn sách này, các em sẽ không cần phải in tài liệu hay tìm kiếm tài liệu mình cần, tất cả đã được hệ thống bài bản và khoa học.

Bộ sách ProS sẽ tiết kiệm thời gian chuẩn bị buổi học của các em, tránh việc thất thoát tài liệu do in rời quá nhiều tệp tin nhỏ và giúp các em dễ dàng theo dõi tiến độ học tập, đồng thời ôn tập lại các mảng kiến thức một cách hữu hiệu nhất.

Hàng năm, nhóm tác giả thường xuyên cập nhật và làm mới giáo trình, tài liệu, bài giảng. Bộ sách ProS với những đặc điểm ưu việt trên sẽ giúp các em học tập dễ dàng hơn, tiến thẳng tới đích một cách nhanh chóng.

Dù rất cố gắng nhưng chắc chắn trong quá trình biên soạn các tác giả không tránh được những sai xót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của quý độc giả, các em học sinh, để cung cấp cho bạn đọc bản cập nhật, bổ sung một cách nhanh chóng nhất.

Chúc các em thành công !

Chương IV

Chủ đề 1

TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

(Phần 1) [TV6043]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

1. Lý thuyết trọng tâm.

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên K. Ta nói:

+) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến (tăng) nếu với mọi cặp $x_1;x_2$ thuộc K mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$ tức là $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Ví dụ 1: Xét hàm số $y=f(x)=2x+1$.

Xét $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1+1<2x_2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ suy ra hàm số $y=f(x)=2x+1$ là một hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến (giảm) nếu với mọi cặp $x_1;x_2$ thuộc K mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$ tức là $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Ví dụ 2: Hàm số $y=f(x)=-7x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, vì: Giả sử $x_1<x_2$ ta có:

$$f(x_1)-f(x_2)=-7x_1+7x_2=7(x_2-x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

suy ra hàm số $y=f(x)=-7x+2$ là một hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là hàm số đơn điệu trên K.

Nhận xét: Từ định nghĩa trên ta thấy:

a) $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0; \forall x_1;x_2 \in K\ (x_1 \neq x_2)$.

b) $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0; \forall x_1;x_2 \in K\ (x_1 \neq x_2)$.

c) Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải, nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải.

Ví dụ 3: Xét sự biến thiên của hàm số $y=f(x)=x^2-4$ trên $(-\infty;0)$ và trên $(0;+\infty)$

+) $\forall x_1,x_2\in(-\infty;0), x_1\neq x_2$ ta có:

Xét $A=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{(x_1^2-4)-(x_2^2-4)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=\dfrac{(x_1-x_2).(x_1+x_2)}{x_1-x_2}$.

Vậy $A=x_1+x_2<0$ (vì $x_1,x_2\in(-\infty;0)$). Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$

+) $\forall x_1,x_2\in(0;+\infty), x_1\neq x_2$ ta có:

Xét $A=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{(x_1^2-4)-(x_2^2-4)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=\dfrac{(x_1-x_2).(x_1+x_2)}{x_1-x_2}$.

Vậy $A=x_1+x_2>0$ (vì $x_1,x_2\in(0;+\infty)$). Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

ĐỊNH LÝ: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên *K*.

a) Nếu $f'(x)>0$ với mọi *x* thuộc *K* thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên *K*.

b) Nếu $f'(x)<0$ với mọi *x* thuộc *K* thì hàm số $f(x)$ nghịch trên *K*.

Tóm lại xét trên *K* : $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến; $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ nghịch biến.

Chú ý: Nếu $f'(x)=0$ $(\forall x\in K)$ thì hàm số $y=f(x)$ là hàm số không đổi trên *K*.

Ghi nhớ công thức đạo hàm tại điểm $x=x_0$ là : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ để chứng minh định lý trên.

Ví dụ 1: Hàm số $y=5$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$

2. Phương pháp giải.

Ta sử dụng bảng biên thiên để xét tính đơn điệu của hàm số theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i=1,2,3.....,n)$ mà tại các điểm đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=2x^4+1$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=8x^3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=2x^4+1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$, đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ví dụ 2: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=2\sin x+1$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

Lời giải:

Ta có: $y'=2\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right.$ (Do xét $x\in(0;2\pi)$)

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Chú ý: Ta có định lý mở rộng sau đây:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên *K*. Nếu $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$, $\forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên *K*.

Ví dụ 3: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^3+3x^2+3x-4$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0$ $\forall\in\mathbb{R}$.

Mặt khác $y'=0$ chỉ tại điểm $x=-1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Chú ý: Các em có thể lập bảng biến thiên để xét dấu y'.

Để xét dấu cho biểu thức $g(x)=(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^q$ ta làm như sau:

Bước 1: Tìm tất cả các nghiệm của $g(x)$ và sắp sếp theo thứ tự tăng dần và điền vào trục số.

Bước 2: Cho $x\to+\infty$ để xác định dấu của $g(x)$ khi $x\to+\infty$.

Bước 3. Xác định dấu của các khoảng còn lại.

Ghi nhớ: Qua nghiệm bội lẻ thì $g(x)$ đổi dấu còn qua nghiệm bội chẵn thì $g(x)$ không đổi dấu (chẵn giữ nguyên, lẻ đổi dấu).

Ví dụ 4: Xét dấu của biểu thức $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3.(x-4).(x-5)^4$.

Bước 1: Ta thấy nghiệm của biểu thức trên là $1;2;4;5$ sắp xếp thứ tự tăng dần trên trục số

Bước 2: Khi $x\to+\infty$ ta thấy $f(x)>0$.

Bước 3: Xác định dấu của các khoảng còn lại. Do $(x-5)^4$ mũ chẵn nên qua 5 biểu thức không đổi dấu, do $(x-4)^1$ mũ lẻ nên qua 4 biểu thức đổi dấu.

Ta được bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		4		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Ví dụ 5: Tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$ biết rằng $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)^2(x-2)^3(x-4)(x-5)^4$.

Lời giải:

Lập bảng xét dấu cho $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		4		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(4;+\infty)$ và hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.

Ví dụ 6: Hàm số $y=\dfrac{2x^2-8x+11}{x^2-4x+5}$

A. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

C. Đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

D. Nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Lời giải:

Ngoài phương pháp sử dụng bảng biến thiên hoặc xét dấu cho y', các bạn có thể sử dụng **CASIO** cho ví dụ trên bằng cách như sau:

Sử dụng máy tính **Casio** kiểm tra tính đồng biến và nghịch biến

Bước 1: Nhập hàm số gán $x=X$ (nhấn SHIFT- Dấu tích phân).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X^2-8X+11}{X^2-4X+5}\right)\Bigg|_{x=X}$$

Bước 2: Thay các giá trị trong khoảng cần chọn vào (Ấn CALC nhập $X=3$).

CALC $3=$ ta được kết quả $\dfrac{-1}{2}$ ($y'(3)<0$ hàm số nghịch biến).

CALC $1=$ ta được kết quả $\dfrac{1}{2}$ ($y'(1)>0$ hàm số đồng biến).

Dựa vào kết quả trên suy ra **B** là đáp án đúng.

Chú ý: Không viết hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Trong chương trình toán THPT chúng ta chỉ học khái niệm hàm số đồng biến trên một khoảng, một đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)\le 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Với mọi $x_1;x_2\in\mathbb{R}$ và $x_1\ne x_2$ ta có: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$.

B. Với mọi $x_1;x_2\in\mathbb{R}$ và $x_1\ne x_2$ ta có: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

C. Với mọi $x_1;x_2;x_3\in\mathbb{R}$ và $x_1<x_2<x_3$ ta có: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}<0$.

D. Với mọi $x_1;x_2;x_3\in\mathbb{R}$ và $x_1>x_2>x_3$ ta có: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}<0$.

Lời giải:

Hàm số $f(x)$ có $f'(x)\le 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra với mọi $x_1;x_2\in\mathbb{R}$ và $x_1\ne x_2$ ta có: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$.

Với $x_1<x_2<x_3$ ta có: $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)\Rightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}>0$

Với $x_1>x_2>x_3$ ta có: $f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)\Rightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}>0$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+2$. Tìm khẳng định đúng.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1;2)$.

Lời giải:

Ta có: $y'=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. Xét dấu cho y'.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

Như vậy dễ thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Chọn C.

Ví dụ 3:[Trích đề thi THPT QG 2017] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải:

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$; $(0;2)$ và đồng biến trên trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Lời giải:

TXĐ: $D=[0;4]$. Ta có: $y'=\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}$

Do $y'>0 \Leftrightarrow 0<x<2$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Do $y'<0 \Leftrightarrow 2<x<4$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.

Chọn C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+12x+1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải:

Ta có: $y'=3x^2-12x+12=3(x-2)^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=|2x-1|$. Khẳng định nào sau đây là **sai:**

A. Hàm số đã cho có đạo hàm là $y'=\dfrac{4x-2}{\sqrt{4x^2-4x+1}}$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đã cho không có đạo hàm tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y=|2x-1|=\sqrt{4x^2-4x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{8x-4}{2\sqrt{4x^2-4x+1}}=\dfrac{4x-2}{\sqrt{4x^2-4x+1}}$.

Do đó hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn C.

Ví dụ 7:[Trích đề thi THPT QG 2017] Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải:

Ta có $y'=\left(\sqrt{2x^2+1}\right)'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}\Rightarrow\begin{cases}y'>0\Leftrightarrow x>0\\ y'<0\Leftrightarrow x<0\end{cases}$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$, đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn B.

Ví dụ 8: Hàm số $y=2x+\sin 2x$ đồng biến trên khoảng nào:

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;+\infty)$.

C $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải:

Ta có: $y'=2+2\cos 2x=2(1+\cos 2x)\geq 0\ (\forall x\in\mathbb{R})$.

Do dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm do vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^2(x+2)^2(x-5)^4$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

D. Tất cả các ý trên đều sai.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)=x^2(x-1)^2(x+2)^2(x-5)^4\geq 0\ (\forall x\in\mathbb{R})$.

Dấu bằng xảy ra chỉ tại $x=0;x=1;x=-2;x=5$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn A.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ biết $f'(x)=(1-x)(2-x)^2(x+1)^3$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Lập bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn C.

Ví dụ 11: Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{x}{x+1}$.

B. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y=(x^2-1)^2-3x+2$.

D. $y=\tan x$.

Lời giải:

Các hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ và $y=\tan x$ không xác định trên $\mathbb{R}$ nên ta loại đáp án **A** và **D**.

Xét hàm số $y=\left(x^2-1\right)^2-3x+2 \Rightarrow y'=4x\left(x^2-1\right)-3=4x^3-4x-3$ nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn B.

Ví dụ 12. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4-2x^2-5$.

B. $y=-x+1$.

C. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

D. $y=x^3+3x-1$.

Lời giải:

Hàm số $y=x^3+3x-1$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có $y'=3x^2+3>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn D.

Ví dụ 13: Hàm số $y=x+1-2\sqrt{x^2+3x+3}$:

A. Đồng biến trên $(-1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

B. Đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

D. Đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên $(-2;+\infty)$.

Lời giải:

Ta có: $y'=1-\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+3}}=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+3}-(2x+3)}{\sqrt{x^2+3x+3}}$.

Xét $\sqrt{x^2+3x+3}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{-3}{2} \\ x^2+3x+3=4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

Nhận thấy với $x>-1$ thì $y'<0$ và $x<-1$ thì $y'>0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

Chọn C.

Ví dụ 14: Hàm số $y=x^3+x-\cos x-4$

A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

D. Đồng biến trên $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 + 1 + \sin x = 3x^2 + (1 + \sin x) \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn A.

Ví dụ 15: Hàm số $y = \cos 2x - 2x + 3$.

A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

D. Đồng biến trên $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = -2\sin 2x - 2 = -2(1 + \sin 2x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn B.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$. Hàm số đã cho:

A. Đồng biến trên trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(0,1)$.

B. Đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải:

Ta có :TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $y' = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$

Lập bảng xét dấu ta có: $y' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, $y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

Chọn B.

Ví dụ 17: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là:

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

B. $y = -x^4 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

D. $y = -x^4 - x^2 + 2$.

Lời giải:

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ và $y = -x^4 + 1$; $y = -x^4 - x^2 + 2$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Chọn C.

Ví dụ 18: Hàm số nào sau đây **không** đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

A. $y=-x^3+6x^2-12x+3$.

B. $y=x+\sin x$.

C. $y=2x^4+1$.

D. $y=\frac{x^3}{3}+2x-\sin 2x+1$.

Lời giải:

Từ $y=-x^3+6x^2-12x+3$ suy ra $y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Hàm số $y=x+\sin x$ có $y'=1+\cos x\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x-\sin 2x+1$ có $y'=x^2+2+2\cos 2x=x^2+2(1+\cos 2x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=2x^4+1$ có $y'=8x^3<0\Leftrightarrow x<0$ và $y'>0\Leftrightarrow x>0$ do đó hàm số này không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Chọn B.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6044]

Câu 1: [526299] Hàm số $y=\frac{1}{2}x^4+x^3-x+5$ đồng biến trên:

A. $(-\infty;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

B. $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$.

C. $\left(-1;\frac{-1}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

D. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Câu 2: [526304] Hàm số $y=\frac{-x^2+2x-4}{x-2}$ đồng biến trên:

A. $(0;2)$ và $(2;4)$.

B. $(0;2)$ và $(4;+\infty)$.

C. $(-\infty;0)$ và $(4;+\infty)$.

D. $(-\infty;0)$ và $(2;4)$.

Câu 3: [526308] Cho hàm số $y=\frac{x+1}{1-x}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1:+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1:+\infty)$.

D. Cả hai câu A và B đều đúng.

Câu 4: [526311] Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)\cup(2;3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 5: [526314] Cho hàm số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;3)$.

D. Cả hai câu A và B đều kết luận đúng.

Câu 6: [526318] Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K. Điều kiện đủ để hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K là:

A. $f'(x)>0$ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng K.

B. $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in K$.

C. $f'(x)>0$ với mọi $x\in K$.

D. $f'(x)\leq 0$ với mọi $x\in K$.

Câu 7: [526322] Hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$

A. nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.

B. nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

D. đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 8: [526326] Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Điều kiện đủ để hàm số nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ là:

A. $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in[a;b]$.

B. $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in[a;b]$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;b)$.

D. $f'(x)\leq 0$ với mọi $x\in[a;b]$.

Câu 9: [526331] Cho hàm số $y=x^4-2x^2-5$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến với mọi x.

B. Hàm số nghịch biến với mọi x.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 10: [526338] Cho hàm số $y=x+\frac{4}{x}$. Kết luận nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

Câu 11: [526340] Hàm số $y=\sqrt{2+x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

B. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

C. $(2;+\infty)$.

D. $(-1;2)$.

Câu 12: [526343] Cho hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$. Kết luận nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có 2 khoảng đồng biến.

B. Hàm số có 2 khoảng nghịch biến.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số có 3 điểm tới hạn.

Câu 13: [526345] Hàm số nào đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$.

B. $y=\sqrt{x-1}$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$.

D. $y=-x^3+3x^2+3x+1$.

Câu 14: [526350] Hàm số nào nghịch biến trên $(1;3)$?

A. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$.

B. $y=\frac{2x-5}{x-1}$.

C. $y=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+9$.

D. $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$.

Câu 15: [526351] Hàm số có chiều biến thiên **khác** với chiều biến thiên của các hàm số còn lại là:

A. $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$

B. $f(x)=x^3-6x^2+17x+4$

C. $f(x)=x^3+x-\cos x-4$

D. $f(x)=\frac{-x^2-2x+3}{x+1}$

Câu 16: [526352] Hàm số nào sau đây không cùng chiều biến thiên trên R?

A. $f(x)=x^3-x-\cos x-4$

B. $f(x)=\sin 2x+2x-3$

C. $f(x)=x^3+x-\cos x-4$

D. $f(x)=\cos 2x-2x+3$

Câu 17: [526353] Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y=f(x+1)$ đồng biến trên $(a;b)$.

B. Hàm số $y=-f(x)-1$ nghịch biến trên $(a;b)$.

C. Hàm số $y=-f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

D. Hàm số $y=f(x)+1$ đồng biến trên $(a;b)$.

Câu 18: [526355] Cho hàm số $y=\sqrt{x^3-3x}$. Nhận định nào dưới đây là **Đúng** ?

A. Tập xác định $D=\left[-\sqrt{3};0\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 19: [526358] Hàm số $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 22$

A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 20: [526361] Cho hàm số sau: $y = -x + \sqrt{x^2+8}$, chọn câu phát biểu đúng nhất:

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-8;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;+\infty)$.

Câu 21: [526363] Cho hàm số $y = \sqrt{x^2-9}$. Kết luận **sai** về khoảng đơn điệu là:

A. Hàm số đồng biến trên $(3;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên $(3;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-3)$

D. Hàm số đồng biến trên $(4;8)$.

Câu 22: [526368] Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, mệnh đề nào sau đây là đúng :

A. Hàm số luôn nghịch biến.

B. Hàm số luôn đồng biến.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 23: [526370] Trong các khẳng định sau về hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$, hãy tìm khẳng định đúng ?

A. Hàm số có một điểm cực trị.

B. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Câu 24: [526371] Hàm số $y=\sqrt{25-x^2}$:

A. Đồng biến trên khoảng $(-5;0)$ và $(0;5)$.

B. Đồng biến trên khoảng $(-5;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;5)$.

C. Nghịch biến trên khoảng $(-5;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;5)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(-6;6)$.

Câu 25: [526372] Hàm số $y=\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+7}$:

A. Đồng biến trên khoảng $(-5;0)$ và $(0;5)$.

B. Đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

C. Nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(-6;1)$.

Câu 26: [526373] Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Hãy tìm khẳng định đúng :

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 27: [526375] Cho hàm số $y=\dfrac{2x+7}{x+2}$ có đồ thị (C). Hãy tìm mệnh đề **sai** :

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số có tập xác định là : $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $A\left(\dfrac{-7}{2};0\right)$.

D. Có đạo hàm $y'=\dfrac{-3}{(x+2)^2}$.

Câu 28: [526377] Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Tìm khẳng định đúng.

A. Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

B. Đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

C. Nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

D. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 29: [526378] Hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$ đồng biến trên :

A. $(-3;+\infty)$

B. $\mathbb{R}$

C. $(-\infty;3)$

D. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Câu 30: [526382] Hàm số $y = \dfrac{x^2-2x}{1-x}$.

A. Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

C. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 31: [526386] Hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$:

A. Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Nghịch biến trên $(-1;1)$.

D. Đồng biến trên *R*.

Câu 32: [526389] Cho các hàm số $y = f(x); y = g(x)$ là các hàm số dương trên (a,b), $f'(x) > 0$ trên $(a;b)$, $g'(x) < 0$ trên $(a;b)$. Khi đó, hàm số nào sau đây đồng biến trên $(a;b)$?

A. $f(x)g(x)$.

B. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

C. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

D. $f(x)+g(x)$.

Câu 33: [526394] Cho các hàm số $y=f(x);y=g(x)$ là các hàm số dương trên (a,b), $f'(x)>0$ trên $(a;b)$, $g'(x)>0$ trên $(a;b)$. Khi đó, hàm số nào sau đây đồng biến trên $(a;b)$?

A. $f(x)g(x)$. **B.** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. **C.** $\dfrac{g(x)}{f(x)}$. **D.** $f(x)-g(x)$.

Câu 34: [526395] Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$. Tìm câu **đúng** trong các câu sau.

A. Hàm số đồng biến trên $(-1;1)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1;1)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	02. A	03. D	04. A	05. C	06. C	07. A	08. C	09. D	10. B
11. A	12. C	13. B	14. C	15. D	16. A	17. A	18. A	19. A	20. B
21. B	22. B	23. C	24. B	25. C	26. C	27. A	28. A	29. A	30. A
21. B	22. B	23. C	24. B	25. C	26. C	27. A	28. A	29. A	30. A
31. A	32. B	33. A	34. D						

TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

(Phần 2-3). [TV6045-6046]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ

1. Lý thuyết trọng tâm.

Dấu của tam thức bậc 2: Xét tam thức bậc 2: $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ ta đã biết.

+) $y \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

+) $y \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Kiến thức về bất phương trình:

Ta có: bất phương trình: $m \geq f(x)\ \forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \underset{D}{Max}\, f(x)$.

Bất phương trình: $m \leq f(x)\ \forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \underset{D}{Min}\, f(x)$.

Kiến thức lượng giác:

+) Ta có: $-1 \leq \cos u(x); \sin u(x) \leq 1$; Do đó $-|a| \leq a\sin u \leq |a|; -|a| \leq a\cos u \leq |a|$.

+) $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$ hay $|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

2. Phương pháp giải.

Đối với hàm số bậc 3 chứa tham số m.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ ta có:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \leq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a < 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0\ (\forall x \in D)$.

Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0\ (\forall x \in D)$.

Chú ý: Trong trường hợp hệ số a chứa tham số m ta cần xét hệ số $a=0$ trước.

Đối với hàm số phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Ta có: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Nếu $ad=bc$ thì hàm số đã cho là hàm hằng. Do đó:

Hàm số đồng biến trên **mỗi khoảng xác định của nó** $\Leftrightarrow ad-bc>0$.

Hàm số nghịch biến trên **mỗi khoảng xác định của nó** $\Leftrightarrow ad-bc<0$.

Hàm số đồng biến trên miền $D=(i;j)\Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in(i;j)\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc>0\\ \dfrac{-d}{c}\notin(i;j)\end{cases}$.

Hàm số nghịch biến trên miền $D=(i;j)\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in(i;j)\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc<0\\ \dfrac{-d}{c}\notin(i;j)\end{cases}$.

Chú ý: Với hàm số hợp : $y=\dfrac{a.u(x)+b}{c.u(x)+d}\Rightarrow y'=\dfrac{ad-bc}{\left[c.u(x)+d\right]^2}.u'(x)$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

PHẦN 1: HÀM SỐ BẬC BA CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m+1)x^2-(m+1)x+1$ đồng biến trên tập xác định của nó khi và chỉ khi

A. $-2<m<-1$.

B. $\left[\begin{array}{l}m\ge -1\\ m\le -2\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-2\end{array}\right.$.

D. $-2\le m\le -1$.

Lời giải:

Ta có: $y'=x^2+2(m+1)x-(m+1)$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'_{y'}=(m+1)^2+(m+1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow(m+1)(m+2)\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le -1$.

Chọn D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\left(m^2-1\right)\frac{x^3}{3}+\left(m+1\right)x^2+3x+5$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

A. $m\ge 2$.
B. $m\le -1$.
C. $m\le -1$ hoặc $m\ge 2$.
D. $m=\pm 1$.

Lời giải:

Ta có $m=-1\Rightarrow y=3x+5$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m=1\Rightarrow y=2x^2+3x+5$ hàm số này không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m\ne\pm 1$ ta có: $y'=\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m+1\right)x+3$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=m^2-1>0\\ \Delta'_{y'}=\left(m+1\right)^2-3\left(m^2-1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m<-1\end{array}\right..$$

Kết hợp các trường hợp ta có $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(3m+2\right)x+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.$.
B. $m\le 2$.
C. $-2\le m\le -1$.
D. $-1\le m\le 0$.

Lời giải:

Ta có: $y'=-x^2+2mx+3m+2$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1<0\\ \Delta'_{y'}=m^2+3m+2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le -1$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Xác định m để hàm số $y=x^3-2mx^2+12x-7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3\le m\le 3$.
B. $-3<m<3$.
C. $m<3$.
D. $-1<m<1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 4mx + 12$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_{y'} = 4m^2 - 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3.$$

Chọn A.

Ví dụ 5: Xác định m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 3x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3 \leq m \leq 3$. **B.** $-3 < m < 3$.

C. $m < 3$. **D.** $-1 < m < 1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = -3x^2 + 2mx - 3$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta'_{y'} = m^2 - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3.$

Chọn A.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 - mx - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < -\frac{1}{3}$. **B.** $m \leq -\frac{1}{3}$.

C. $m \leq -\frac{4}{3}$. **D.** $m \geq \frac{1}{3}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 + 2x - m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta'_{y'} = 1 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{-1}{3}.$$

Chọn B.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3(m-1)x^2 - 3m^2x - 4m + 1$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \geq \frac{1}{2}$. **B.** $m \geq 1$.

C. $m \geq 0$ **D.** $m > \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = -3x^2 + 6(m-1)x - 3m^2 = 3\left[-x^2 + 2(m-1)x - m^2\right]$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=(m-1)^2-m^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2m+1 \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}.$$

Chọn A

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+(m+1)x-3m$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ với giá trị m là:

A. $m \ge 3$. **B.** $m<3$.

C. $m \le 3$. **D.** $m>3$.

Lời giải:

Ta có: $y'=x^2+4x+m+1$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'_{y'}=4-(m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 3.$$

Chọn A.

Ví dụ 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-2x^3-6(m+3)x^2+24mx+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<-9$. **B.** $-9<m<-1$.

C. $m \ge -9$. **D.** $-9 \le m \le -1$.

Lời giải:

Ta có: $y'=-6x^2-12(m+3)x+24m=6\left[-x^2-2(m+3)x+4m\right]$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=(m+3)^2+4m \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2+10m+9 \le 0 \Leftrightarrow -9 \le m \le -1$.

Chọn D.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{-1}{3}x^3+2x^2+(2m+1)x-3m+2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \le 0$. **B.** $m \ge \frac{5}{2}$.

C. $m<\frac{-5}{2}$. **D.** $m \le \frac{-5}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = -x^2 + 4x + (2m+1)$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4 + 2m + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le \dfrac{-5}{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m-2)x^2 + 3m^2x - 4m + 1$ đồng biến trên tập xác định của nó.

A. $m < 1$. **B.** $m \ge 1$

C. $m \ge 0$. **D.** $m \le 1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m-2)x + 3m^2$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta'_{y'} = 9(m-2)^2 - 9m^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4m + 4 \le 0 \Leftrightarrow m \ge 1$.

Chọn B.

Ví dụ 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + 4x + 3$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

A. $-1 < m < 1$. **B.** $-2 < m < 2$.

C. $-1 \le m \le 1$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 + 2mx + 4$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_{y'} = m^2 - 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Chọn D.

Ví dụ 13. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m+2)x^3 - (m+2)x^2 + (m-8)x + m^2 - 1$ luôn nghịch biến $\mathbb{R}$.

A. $-2 < m < 1$. **B.** $m < -2$.

C. $m \le 1$. **D.** $m \le -2$.

Lời giải:

Xét $m=-2$ ta có $y=-10x+3$ (hàm số này luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$).

Ta có: $y'=(m+2)x^2-2(m+2)x+m-8$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2<0 \\ \Delta'=(m+2)^2-(m+2)(m-8)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-2 \\ (m+2)(9-m)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-2.$$

Kết hợp 2 trường hợp.

Chọn D.

Ví dụ 14: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2+m)x^3-mx^2+2x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=0$.

B. $-2<m\le 0$.

C. $\left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Với $m=0\Rightarrow y=2x+1$ (hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$).

Với $m=-1\Rightarrow y=x^2+2x+1$ hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

Với $m^2+m\ne 0$. Ta có: $y'=(m^2+m)x^2-2mx+2$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m^2+m>0 \\ \Delta'_{y'}=m^2-2(m^2+m)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m>0 \\ m^2+2m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\le -2 \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -2 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Chọn C.

Ví dụ 15: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-m)x^3+mx^2-2x+1$ nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R}$.

A. $0\le m\le \frac{2}{3}$.

B. $0<m\le \frac{2}{3}$.

C. $\left[\begin{array}{l} m\ge \frac{2}{3} \\ m\le 0 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m>\frac{2}{3} \\ m\le 0 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Với $m=0 \Rightarrow y=-2x+1$ (hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$).

Với $m=1 \Rightarrow y=(x-1)^2$ (hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$).

Với $m^2-m \neq 0$ ta có: $y'=(m^2-m)x^2+2mx-2$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y' \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y'=0$ tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m<0 \\ \Delta'=m^2+2(m^2-m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<m<1 \\ 3m^2-2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m \leq \frac{2}{3}$$

Vậy $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

Chọn A.

Ví dụ 16:[Trích đề thi THPT QG năm 2017] Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 6.

C. 7. **D.** 5.

Lời giải:

Ta có $y'=\left(-x^3-mx^2+(4m+9)x+5\right)'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng

$$(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-\infty;+\infty) \Rightarrow \begin{cases} a=-3<0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+3(4m+9) \leq 0$$

$\Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Có 7 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Chọn C.

Ví dụ 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $-3 \leq m \leq 3$. **B.** $m \geq 3$.

C. $m>3$. **D.** $m<3$.

Lời giải:

Ta có: $y'=3x^2-6x+m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow y'=3x^2-6x+m \geq 0 \ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 6x = g(x)\ \left(\forall x \in (0;+\infty)\right) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} g(x)$

Mặt khác $g'(x) = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$; $g(1) = 3$.

Do vậy $\underset{(0;+\infty)}{Max}\, g(x) = +\infty$. Do đó $m \geq 3$ là giá trị cần tìm.

Chọn B.

Chú ý: Các em nên tham khảo bài toán **GTLN,GTNN** của hàm số trước khi làm bài này để hiểu rõ vấn đề hơn.

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m < -1$. **B.** $m \geq -1$.

C. $m > -1$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow y' \leq 0\ \ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x = g(x)\ \ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq \underset{(0;+\infty)}{min}\, g(x)$

Xét $g(x) = x^2 - 2x\ \left(x \in (0;+\infty)\right)$ ta có: $g'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0; \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty; g(1) = -1$ nên $\underset{(0;+\infty)}{min}\, g(x) = -1$

Do đó $m \leq -1$ là giá trị cần tìm.

Chọn D.

Ví dụ 19: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - mx + 1$. Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên đoạn $[-2;0]$.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \geq 0$.

C. $m > 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 + 2x - m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[-2;0] \Leftrightarrow y' \leq 0\left(\forall x \in [-2;0]\right)$

$\Leftrightarrow m \geq x^2 + 2x = g(x)\ \left(\forall x \in [-2;0]\right) \Leftrightarrow m \geq \underset{[-2;0]}{Max}\, g(x)$.

Mặt khác $g'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Lại có $g(-2)=0; g(0)=0; g(-1)=-1$. Do vậy $\underset{[-2;0]}{Max}\, g(x)=0$

Vậy $m\ge 0$ là giá trị cần tìm.

Chọn B.

Ví dụ 20: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$. Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên đoạn $[0;2]$

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\ge 0$.

C. $m>0$. **D.** $m<0$.

Lời giải:

Ta có: $y'=-x^2+4x+m$. Hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[0;2]\Leftrightarrow y'\ge 0\left(\forall x\in[0;2]\right)$

$\Leftrightarrow m\ge x^2-4x=g(x)\ \left(\forall x\in[0;2]\right)\Leftrightarrow m\ge \underset{[0;2]}{Max}\, g(x)$

Mặt khác $g'(x)=2x-4=0\Leftrightarrow x=2$. Ta có $g(2)=-4; g(0)=0$ do đó $\underset{[0;2]}{Max}\, g(x)$

Vậy $m\ge 0$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

PHẦN 2: HÀM SỐ PHÂN THỨC CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

A. $-2<m<2$. **B.** $-2\le m\le 2$.

C. $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có: $y'=\frac{-m^2+4}{(x-m)^2}$. Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'>0\ \left(\forall x\in D\right)\Leftrightarrow -m^2+4>0\ \forall x\in D\Leftrightarrow -2<m<2$

Chú ý: Với bài toán này các em không được giải $y'\ge 0$ vì khi $y'=0\Leftrightarrow m=\pm 2$ thì $y'=0\ \left(\forall x\in D\right)$ không thoã mãn dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Chọn A.

Ví dụ 2: Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx-3}{2x-m}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

A. $-\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$.

B. $-\sqrt{6}\le m\le\sqrt{6}$.

C. $\left[\begin{array}{l} m\ge\sqrt{6} \\ m\le-\sqrt{6} \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m>\sqrt{6} \\ m<-\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-m^2+6}{(2x-m)^2}$. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'>0\ (\forall x\in D)\Leftrightarrow -m^2+6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>\sqrt{6} \\ m<-\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{2x-m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le-2 \\ m\ge2 \end{array}\right.$.

B. $-2<m<2$.

C. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

D. $-2\le m\le2$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-m^2+4}{(2x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in D\Leftrightarrow -m^2+4>0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2<m<1$.

B. $\left[\begin{array}{l} m\ge1 \\ m\le-2 \end{array}\right.$.

C. $-2\le m\le1$.

D. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-m(m+1)+2}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in D \Leftrightarrow -m^2-m+2>0 \Leftrightarrow -2<m<1$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{-mx-5m+4}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $1<m<4$.

B. $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le 1 \end{array}\right.$.

C. $1\le m\le 4$.

D. $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-m^2+5m-4}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in D \Leftrightarrow -m^2+5m-4<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Chọn D.

Ví dụ 6: Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{mx-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $m>0$.

B. $m\ge 0$.

C. $m<0$.

D. $m\ge -1$.

Lời giải:

Với $m=0\Rightarrow y=\dfrac{-1}{2}$ không thoả mãn YCBT.

Với $m\ne 0$. **TXĐ:** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{m}\right\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-3m}{(mx-2)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in D \Leftrightarrow -3m<0 \Leftrightarrow m>0$.

Chọn A.

Ví dụ 7: Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x+m+1}{mx+2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ -2<m<-1 \end{array}\right.$.

B. $-2<m<1$.

C. $m=0$.

D. $0\le m<1$.

Lời giải:

Ta có $m=0\Rightarrow y=\dfrac{x+1}{2}$ (thỏa mãn đồng biến trên khoảng xác định).

Với $m\ne 0$ khi đó **TXĐ:** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-2}{m}\right\}$. Ta có: $y'=\dfrac{2-m(m+1)}{(mx+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in D\Leftrightarrow -m^2-m+2>0\Leftrightarrow -2<m<1$.

Kết hợp các trường hợp.

Chọn B.

Ví dụ 8: Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{mx-1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=0$.

B. $m\ne 0$.

C. $m\in\mathbb{R}$.

D. Không tồn tại m.

Lời giải:

Với $m=0\Rightarrow\ y=-x$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Với $m\ne 0$ khi đó TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{m}\right\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-1-m^2}{(mx-1)^2}<0\ \ \forall x\in D$.

Khi đó hàm số nghịch biến trên từng khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{m}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{m};+\infty\right)$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Chọn A.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m>0$.

B. $m\ge 1$.

C. $m>-1$.

D. $m>1$.

Lời giải:

Xét $x \in D = (1;+\infty)$. Ta có: $y' = \dfrac{-1+m}{(x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow y' > 0\ \forall x \in D \Leftrightarrow m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.

Chọn D.

Ví dụ 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m>0$.

B. $m \geq 1$

C. $m<-1$.

D. $m<1$.

Lời giải:

Xét $x \in D = (1;+\infty)$. Ta có: $y' = \dfrac{-m+1}{(x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow y' > 0\ \forall x \in D \Leftrightarrow -m+1>0 \Leftrightarrow m<1$.

Chọn D.

Ví dụ 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $m<2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m<\dfrac{5}{2}$.

D. $2<m<\dfrac{5}{2}$

Lời giải:

Ta có: $y' = \dfrac{-2m+5}{(x-m)^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+5>0 \\ m \notin (2;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{5}{2} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2$.

Chọn B.

Ví dụ 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x+m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $1\le m<2$. **B.** $-1<m<2$.

C. $1\le m\le 2$. **D.** $1<m\le 2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-m-2}{(x+m-1)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2<0\\(1-m)\notin(0;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<2\\1-m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m<2$.

Chọn A.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{mx-1}$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

A. $m\le 0$. **B.** $m<-\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{-1}{2}<m\le 0$. **D.** $m<0$.

Lời giải:

Với $m=0\Rightarrow y=-x$ (không thoã mãn YCBT).

Với $m\ne 0$: Ta có: $y'=\dfrac{-1-2m}{(mx-1)^2}$. Hàm số đồng biến trên.

$[0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-1-2m>0\\\dfrac{1}{m}\in[0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{m}<0\end{cases}\Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{mx-2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty;2]$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>-1$.

C. $0<m\le 1$. **D.** $0\le m<1$.

Lời giải:

Với $m=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{2}x$ thỏa mãn điều kiện nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty;2]$.

Với $m\neq 0$: Ta có: $y'=\frac{-2-2m}{(mx-2)^2}$. Hàm số nghịch biến trên

$$(-\infty;2] \Leftrightarrow \begin{cases} -2-2m<0 \\ \frac{2}{m}\notin(-\infty;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ \frac{2}{m}>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ \frac{1-m}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1.$$

Vậy $0\leq m<1$ là giá trị cần tìm.

Chọn D.

Ví dụ 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m-1)x+2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $-1<m<0$. **B.** $m>-1$.

C. $-1<m\leq 0$. **D.** $-1\leq m<0$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\frac{m^2-m-2}{(x+m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2<0 \\ -m\notin(-\infty;0) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ -m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\leq 0.$$

Chọn C.

Ví dụ 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{\tan x-m}{\tan x-2}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\geq 2$. **B.** $m>2$.

C. $m<2$. **D.** $0<m<2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\frac{-2+m}{(\tan x-2)^2}.\frac{1}{\cos^2 x}$. Do $\frac{1}{(\tan x-2)^2.\cos^2 x}>0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Do vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2$.

Chọn B.

Ví dụ 17 [ĐỀ MINH HỌA 2017]: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$.

B. $m\le 0$.

C. $1\le m<2$.

D. $m\ge 2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-m+2}{(\tan x-m)^2}.\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ \tan x\ne m\left(\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ m\notin\left(\tan 0;\tan\dfrac{\pi}{4}\right)=(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}$.

Chọn A.

Ví dụ 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x+2}{\cot x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$.

B. $-2<m\le 1$.

C. $-2\le m<1$.

D. $m>-2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-m-2}{(\cot x-m)^2}.\dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m+2>0\\ \cot x\ne m\left(\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ m\notin(1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le 1$.

Chọn B.

Ví dụ 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$.

B. $1\le m<-2$.

C. $-2\le m<1$.

D. $m>2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-m+2}{(\cos x-m)^2}.(-\sin x)=\dfrac{m-2}{(\cos x-m)^2}.\sin x$.

Do $\sin x>0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Chọn D.

Ví dụ 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\tan x-1}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $\dfrac{1}{2}<m\le 1$.

B. $0<m<\dfrac{1}{2}$.

C. $m\le 0$.

D. $m>0$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-2m+1}{(\tan x-m)^2}.\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-2m+1>0\\ \tan x\ne m\left(\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{2}\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$$

Chọn C.

Ví dụ 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\sin x-2}{2\sin x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-m^2+4}{(2\sin x-m)^2}.\cos x$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4<0\\ \dfrac{m}{2}\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le 0 \end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Chọn A.

Ví dụ 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$.

B. $m\le 0$.

C. $1\le m<2$.

D. $m\ge 2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-m+2}{(m\cos x-1)^2}.\sin x$. Do $\sin x<0$ $\left(\forall x\in\left(\dfrac{-\pi}{2};0\right)\right)$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le 0 \end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$.

Chọn A.

Ví dụ 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+m-2}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A. $m\le 1$. **B.** $m<1$.

C. $m>1$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải:

Ta có: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $y=\dfrac{x^2-1+m-1}{x-1}=x+1+\dfrac{m-1}{x-1}\Rightarrow y'=1-\dfrac{m-1}{(x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{m-1}{(x-1)^2}\ge 0\ (\forall x\in D)\Leftrightarrow y'=\dfrac{(x-1)^2-(m-1)}{(x-1)^2}\ (\forall x\in D)$

$\Leftrightarrow m-1\le 0\Leftrightarrow m\le 1$.

Chọn A.

Chú ý: Bài toán này các em có thể lấy dấu bằng vì khi $m=1\Rightarrow y'=1>0\ (\forall x\in D)$ (Hàm số đã cho không phải hàm hằng trên D).

Ví dụ 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{-3x^2+mx-2}{2x-1}$ nghịch biến trên các khoảng xác định

A. $m>\dfrac{11}{2}$. **B.** $m\ge\dfrac{11}{2}$.

C. $m\ge\dfrac{9}{2}$. **D.** $m>\dfrac{9}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{(-6x+m)(2x-1)-2(-3x^2+mx-2)}{(2x-1)^2}=\dfrac{-6x^2+6x-m+4}{(2x-1)^2}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -6x^2+6x-m+4\le 0\left(\forall x\ne\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-6<0\\ \Delta'=9+6(4-m)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 33\le 6m\Leftrightarrow m\ge\dfrac{11}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 25: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

A. $m=-1$.

B. $m>1$.

C. $m\in(-1;1)$.

D. $m\le -\dfrac{5}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{-x^2+4x+2m+1}{(2-x)^2}$. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

$-x^2+4x+2m+1\le 0\,(\forall x\ne 2)\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1<0\\ \Delta'=4+2m+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le\dfrac{-5}{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 26: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$. Tìm giá trị của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $m\le 2$.

B. $m<2$.

C. $\begin{cases}m\le 2\\ m\ne 1\end{cases}$.

D. $\begin{cases}m<2\\ m\ne 1\end{cases}$.

Lời giải:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=6\left(x^2-m(x+1)x+m\right)\ge 0\ \ \forall x\in(2;+\infty)$.

$\Leftrightarrow(x-1)(x-m)\ge 0\ \ (\forall x\in(2;+\infty))\Leftrightarrow x\ge m\ \ (\forall x\in(2;+\infty))\Leftrightarrow 2\ge m$.

Chọn A.

Ví dụ 27: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+2)x^2+12mx+1$. Tìm giá trị của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

A. $m\le 3$.

B. $m\le 2$.

C. $\begin{cases}m\le 2\\ m\ne 1\end{cases}$.

D. $\begin{cases}m<3\\ m\ne 1\end{cases}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=6x^2-6(m+2)x+12m\ge 0\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+2m\ge 0$.

Giả thiết

$\Leftrightarrow(x-m)(x-2)\ge 0\ \ (\forall x>3)\Leftrightarrow x-m\ge 0\,(\forall x>3)\Leftrightarrow x\ge m\,(\forall x>3)\Leftrightarrow 3\ge m$.

Chọn A.

Ví dụ 28: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+1$. Tìm giá trị của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\le 1$. **B.** $m\le 2$.

C. $m<-1$. **D.** $m\le -1$.

Lời giải:

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$.Ta có : $y'\ge 0\Leftrightarrow x^2-2mx+\left(m^2-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-m-1)(x-m+1)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge m+1 \\ x\le m-1 \end{array}\right.$.

Do vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;m-1]$ và $[m+1;+\infty)$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 0\Leftrightarrow m\le -1$.

Chọn D.

PHẦN 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y=x+m\cos 2x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$.

C. $-1\le m\le 1$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải:

Ta có: $y'=1-2m\sin 2x$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\ (\forall x\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow 1-2m\sin 2x\ge 0\ (\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Min}\,y'=1-|2m|\ge 0\Leftrightarrow |2m|\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y=(m+1)\cos x-2x+1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-1\le m\le 3$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -3 \end{array}\right.$.

C. $m\ge 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Ta có $y'=-(m+1)\sin x-2$. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0\ (\forall x\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Max}\,y'=-2+|m+1|\le 0\Leftrightarrow |m+1|\ge 2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -3 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = m\sin x - 5x - 2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-5 < m < 5$.

B. $\left[\begin{array}{l} m \ge 5 \\ m \le -5 \end{array}\right.$.

C. $m \ge 5$.

D. $-5 \le m \le 5$.

Lời giải:

Ta có: $y' = m\cos x - 5$. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Max}\, y' = |m| - 5 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le 5$.

Chọn D.

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = \sin x + 2\cos x + mx - 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \ge 5$.

B. $\left[\begin{array}{l} m \ge \sqrt{5} \\ m \le -\sqrt{5} \end{array}\right.$.

C. $m \ge \sqrt{5}$.

D. $-\sqrt{5} \le m \le \sqrt{5}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \cos x - 2\sin x + m$.

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x - 2\sin x + m \ge 0 \left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$.

$\Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Min}\, y' = -\sqrt{1^2 + (-2)^2} + m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \sqrt{5}$.

Chọn C.

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = a\sin x + b\cos x + mx \ (a; b \in \mathbb{R})$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \le -\sqrt{a^2 + b^2}$.

B. $m < -\sqrt{a^2 + b^2}$.

C. $m > \sqrt{a^2 + b^2}$.

D. $m \ge \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = a\cos x - b\sin x + m = g(x)$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) \ge 0 \ \forall \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underset{R}{Min}\, g(x) \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} + m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \sqrt{a^2 + b^2}$.

Chọn D.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + m\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$. **B.** $m \leq 1$.

C. $m \in [-1;1] \setminus \{0\}$. **D.** $-1 \leq m \leq 1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 1 - m\sin x$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$.

$\Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Min}\, y' = 1 - |m| \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Chọn D.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x - m\cos x + \sin x$ luôn đồng biến $\mathbb{R}$.

A. $-1 < m < 1$. **B.** $-2 < m < 2$.

C. $-1 \leq m \leq 1$. **D.** $-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 2 + m\sin x + \cos x$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Min}\, y' = 2 - \sqrt{m^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$.

Chọn D.

Ví dụ 8: Xác định giá trị của b để hàm số $f(x) = \sin x - bx + c$ nghịch biến trên toàn trục số.

A. $b \leq 1$. **B.** $b < 1$.

C. $b > 1$. **D.** $b \geq 1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \cos x - b$. Hàm số nghịch biến trên
$\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x - b \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b \geq \cos x \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b \geq 1$

Chọn D.

Ví dụ 9: Xác định giá trị của m để hàm số $f(x) = \sin 2x + mx + c$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 2$. **B.** $-2 \leq m \leq 2$.

C. $m > 2$. **D.** $m \geq -2$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 2\cos 2x + m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Min}\, y' = -2 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn A.

Ví dụ 10: Xác định giá trị của m để hàm số $y = m\sin x + \cos x + (m+1)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 0$. **B.** $-1 \leq m \leq 1$.

C. $m > 1$. **D.** $m \geq -1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = m\cos x - \sin x + m + 1$. Hàm số đồng biến trên

$\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{Min}\, y' = -\sqrt{m^2+1} + m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m + 1 \geq \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m^2 + 2m + 1 \geq m^2 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \geq 0$.

Chọn A.

Ví dụ 11: Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-4 \leq m \leq \frac{2}{3}$. **B.** $-4 \leq m \leq 3$.

C. $-1 \leq m \leq \frac{2}{3}$. **D.** $-1 \leq m \leq 3$.

Lời giải:

Ta có: $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0\ \left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$

$\Leftrightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} y' = m - 3 + |2m+1| \leq 0 \Leftrightarrow 3 - m \geq |2m+1| \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ (3-m)^2 \geq (2m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ 3m^2 + 10m - 8 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}$.

Chọn A.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6047].

PHẦN 1 :

Câu 1: [527520] Tìm m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$:

A. $m\le -1$.
B. $m<-1$.
C. $m\ge -1$.
D. $m>-1$.

Câu 2: [527522] Tìm m để hàm số $y=\frac{-2}{3}x^3+(m+1)x^2+2mx+5$ đồng biến trên $(0;2)$:

A. $m\ge \frac{-2}{3}$.
B. $m\ge 0$.
C. $m<\frac{-2}{3}$.
D. $m<0$.

Câu 3: [527524] Tìm m để hàm số $y=\frac{-1}{3}x^3+mx^2+(m-2)x-\frac{1}{3}$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 4:

A. $m=2$.
B. $m=-2$.
C. $m=-3$.
D. Cả A và C đều đúng.

Câu 4: [527525] Tìm m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$?

A. $m\ge 0$.
B. $m\ge 12$.
C. $m\le 0$.
D. $m\le 12$.

Câu 5: [527527] Tìm m để hàm số $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m\le 1$.
B. $m<1$.
C. $m\le -3$.
D. $m<-3$.

Câu 6: [527528] Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-2\le m\le 0$.
B. $-2<m<0$.
C. $m>-2$.
D. $m=0$.

Câu 7: [527530] Tìm m để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2\le m<-1$.
B. $-2<m<-1$.
C. $-2\le m\le -1$.
D. $-2<m\le -1$.

Câu 8: [527531] Tìm GTNN của m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2-mx-m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m=0$.
B. $m=-4$.
C. $m=4$.
D. $m=-1$

Câu 9: [527533] Với giá trị nào của a thì hàm số $y=ax+x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $a\geq 0$.
B. $a<0$.
C. $a=0$.
D. $\forall a$.

Câu 10: [527535] Hàm số $y=\frac{-1}{3}x^3+(m-2)x^2-mx+3m$ nghịch biến trên khoảng xác định khi:

A. $m<0$.
B. $m>4$.
C. $1\leq m\leq 4$.
D. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Câu 11: [527537] Hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2+4x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi?

A. $-2\leq m\leq 2$.
B. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$.
C. $m\leq -2$.
D. $m\geq 2$.

Câu 12: [527538] Hàm số $y=\frac{-x^3}{3}+mx^2-4x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi:

A. $-2\leq m\leq 2$.
B. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$.
C. $m\leq -2$.
D. $m\geq 2$.

Câu 13: [527543] Tìm m để hàm số $y=(2m+1)\sin x+(3-m)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4\leq m\leq \frac{2}{3}$.
B. $-4<m<\frac{2}{3}$.
C. $m<-4$.
D. $m>\frac{2}{3}$.

Câu 14: [527545] Với giá trị nào của m thì hàm số $y=2m+1+x+m\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$:

A. $m>1$.
B. $m<-1$.
C. $-1\leq m\leq 1$.
D. $\forall m$.

Câu 15: [527547] Tìm m để hàm số $y=-x^3-3x^2+4mx-2$ nghịch biến trên $(-\infty;0]$

A. $m\le\frac{-3}{4}$.

B. $m\ge\frac{-3}{4}$.

C. $m\ge\frac{3}{4}$.

D. $m\le\frac{3}{4}$.

Câu 16: [527548] Cho hàm số $y=-x^3+(m+1)x^2-(m^2+2)x+m$. Tìm đáp án **đúng**.

A. Hàm số đồng biến trên $(-2;4)$.

B. Hàm số có cả khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến.

C. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-m;m^2+1)$.

Câu 17: [527550] Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m?

A. $y=-m^2x^3+m$.

B. $y=-m^2x^3+mx^2-3x+1$

C. $y=\frac{-mx+1}{x+m}$.

D. $y=x^3-2mx+1$.

Câu 18: [527551] Với giá trị nào của m, hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-mx+2$ nghịch biến trên tập xác định của nó ?

A. $m\le4$.

B. $m\ge4$.

C. $m>4$.

D. $m<4$.

Câu 19: [527557] Với điều kiện nào của m thì hàm số $y=x^3+(m-2)x^2+(m^2-4)x+9$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m\ge1$ hoặc $m\le-2$.

B. $m\ge2$ hoặc $m\le-4$.

C. $m\ge0$ hoặc $m\le-1$.

D. $m\ge3$ hoặc $m\le-3$.

Câu 20: [527559] Với giá trị nào của m, hàm số $y=\frac{(m-2)x+m}{x+m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

A. $m\ge2$ hoặc $m\le0$.

B. $m\ge3$ hoặc $m\le0$.

C. $m>2$ hoặc $m<0$.

D. $m>3$ hoặc $m<0$.

Câu 21: [527562] Với giá trị nào của m, hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ đồng biến trên $(0;+\infty)$?

A. $m \le -2$.
B. $m \le -3$.
C. $m \le 0$.
D. $m \le -4$.

Câu 22: [527564] Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \dfrac{x-m}{x-1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó là:

A. $m \le 1$.
B. $m > 1$.
C. $m < 1$.
D. $m \ge 1$.

Câu 23: [527565] Xét hai mệnh đề sau:

(I) Hàm số $y = (1-x)^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(II) Hàm số $y = (1-x)^4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hãy chọn câu đúng?

A. Chỉ (I)
B. Chỉ (II)
C. Cả hai đúng.
D. Cả hai sai.

Câu 24: [527567] Hàm số nào trong các hàm số sau chỉ có 1 chiều biến thiên trên tập xác định của nó?

A. $y = \dfrac{1}{x}$.
B. $y = \dfrac{1}{x^2}$.
C. $y = \dfrac{1}{|x|}$.
D. $y = \dfrac{x^2}{|x|}$.

Câu 25: [527569] Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + 4x$ đồng biến trên R là:

A. $-2 < m < 2$.
B. $-2 \le m \le 2$.
C. $m \le -2$.
D. $m \ge 2$.

Câu 26: [527571] Hàm số $y = \dfrac{(m+1)x + 2m + 2}{x+m}$ nghịch biến trên $(-1;+\infty)$ khi:

A. $m < 1$
B. $m > 2$
C. $1 \le m < 2$
D. $-1 < m < 2$

Câu 27: [527572] Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{m}{2}x^2 - 2x + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. $-1 \le m \le 1$. **B.** $m \le -1$.
C. $m \ge 1$. **D.** $m \le -2$.

Câu 28: [527520] Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (2m+1)x^2 - mx - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\frac{1}{4} \le m \le 1$. **B.** $-1 \le m \le -\frac{1}{4}$.

C. Không có giá trị m thỏa mãn. **D.** $m = 1$.

PHẦN 2: [TT6048].

Câu 1: [527680]Hàm số $y = \frac{x - m^2}{x - 4}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$ khi:

A. $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$.
C. $-2 \le m \le 2$. **D.** $-2 < m < 2$.

Câu 2: [527681]Hàm số $y = \frac{mx + 1}{4x + m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định thì:

A. $m \le 2$. **B.** $m < -2$.
C $-2 < m < 2$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

Câu 3: [527683] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$:

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$. **B.** $m \in \varnothing$.
C. $1 \le m < 2$. **D.** $m > 2$.

Câu 4: [527684] Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{1-5x} - 2}{\sqrt{1-5x} - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{5}\right)$:

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$. **B.** $m \le 0$.

C. $1 \le m < 2$. **D.** $m \ge 2$.

Câu 5: [527687] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\sin x-2}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$

A. $m\le 0$.

B. $m\le 0$ hoặc $\dfrac{1}{2}\le m<2$.

C. $\dfrac{1}{2}\le m<2$.

D. $m\ge 2$.

Câu 6: [527688] Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $m\le -3$.

B. $m\le -2$.

C. $m\le -1$.

D. $m\le 0$.

Câu 7: [527688] Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$ khi

A. $m>2$.

B. $m\ge 3$.

C. $m<2$.

D. $m<-3$.

Câu 8: [527692] Hàm số $y=x^3-2mx^2-(m+1)x+1$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ khi giá trị của m thỏa:

A. $m\le 2$.

B. $m\ge 2$.

C. $m\le \dfrac{11}{9}$.

D. $m\ge \dfrac{11}{9}$.

Câu 9: [527693] Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge 2$.

B. $m>1$.

C. $m>2$.

D. $m\ge 1$.

Câu 10: [527695] Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-(3m+2)x+2$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4.

A. $m=1$.

B. $m=3$.

C. $m=\dfrac{1}{3}$.

D. $m=5$.

Câu 11: [527697] Hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{mx^2}{2}-2x+1$ luôn đồng biến trên tập xác định khi:

A. $m<-2\sqrt{2}$.

B. $-8\le m\le 1$

C. $m>2\sqrt{2}$.

D. Không có giá trị m

Câu 12: [527699] Giá trị nhỏ nhất của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-mx-m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m=-1$.
B. $m=0$.
C. $m=1$.
D. $m=-2$.

Câu 13: [527700] Cho hàm số: $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+1$. Kết luận nào sau đây ***đúng*** ?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số có hai cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 1 với mọi m.

Câu 14: [527702] Hàm số: $y=\frac{m}{3}x^3-(m-1)x^2+3(m-2)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi:

A. $m\geq\frac{2}{3}$.
B. $m<\frac{2}{3}$.
C. $m<2$.
D. $m\leq 2$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

PHẦN 1:

01. A	02. B	03. D	04. B	05. B	06. D	07. D	08. D	09. A	10. C
11. A	12. A	13. A	14. C	15. A	16. C	17. B	18. B	19. B	20. D
21. B	22. C	23. D	24. A	25. B	26. C	27. B	28. B		

PHẦN 2:

01. A	02. C	03. D	04. A	05. B	06. A	07. B	08. D	09. A	10. C
11. D	12. A	13. C	14. A						

Chủ đề 2

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

(Phần 1-2-3) [TV6049-TV6050-TV6051]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

A. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathbb{D}$ $(\mathbb{D} \in \mathbb{R})$ và $x_0 \in \mathbb{D}$

a) x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $\begin{cases}(a;b) \subset \mathbb{D} \\ f(x) < f(x_0);\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}\end{cases}$.

Khi đó $f(x_0)$ là **giá trị cực đại** của hàm số f.

b) x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $\begin{cases}(a;b) \subset \mathbb{D} \\ f(x) > f(x_0);\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}\end{cases}$.

Khi đó $f(x_0)$ là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị.**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Như vậy, điểm cực trị là một điểm trong của tập hợp $\mathbb{D}$ $(\mathbb{D} \in \mathbb{R})$.

Nhấn mạnh: $x_0 \in (a;b) \subset \mathbb{D}$ nghĩa là x_0 là một điểm trong của $\mathbb{D}$.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Ta thấy rằng $f(x) > f(0)$ với mọi $x > 0$ nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực tiểu của hàm số vì tập hợp $[0;+\infty)$ không chứa bất kỳ một lân cận nào của điểm 0.

Chú ý:

- Giá trị cực đại (cực tiểu) nói chung không phải là GTLN (giá trị lớn nhất) (GTNN – giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên $\mathbb{D}$.

- Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp $\mathbb{D}$. Hàm số cũng có thể không có điểm cực trị.
- x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số.

B. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lý 1: Giả sử hàm số đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó nếu có đạo hàm tại điểm thì $f'(x) = 0$.

Chú ý:

- Đạo hàm f' **có thể** bằng tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số chỉ **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số đạt cực trị tại x_0 và nếu đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0; f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành.

Ví dụ: Hàm số $y = |x|$ và hàm số $y = x^3$.

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) < 0;\ x \in (a;x_0) \\ f'(x_0) > 0;\ x \in (x_0;b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0. Nói một cách khác, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
f'(x)		−	0	+	
f(x)	f(a)	↘	$f(x_0)$	↗	f(b)

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) > 0;\ x \in (a;x_0) \\ f'(x_0) < 0;\ x \in (x_0;b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0. Nói một cách khác, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
f'(x)		+	0	−	
f(x)	f(a)	↗	$f(x_0)$	↘	f(b)

Định lý 3: giả sử hàm số có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

- Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.
- Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Chú ý: Không cần xét hàm số có hay không có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ nhưng không thể bỏ qua điều kiện " hàm số liên tục tại điểm x_0 "

Ví dụ: Hàm số $f(x)=\begin{cases}1-x & khi\ x\le 0\\ x & khi\ x>0\end{cases}$ không đạt cực trị tại $x=0$. Vì hàm số không liên tục tại điểm $x=0$.

II. CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

VẤN ĐỀ 1. MỞ ĐẦU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2$. Hàm số $g(x)=f'(x)-4x^2$ đạt cực tiểu tại x_1, đạt cực đại tại x_2. Tích $g(x_1).g(x_2)$ có giá trị bằng

A. $-\frac{496}{27}$.

B. $\frac{496}{27}$.

C. $-\frac{248}{27}$.

D. $\frac{248}{27}$.

Lời giải

Ta có $f(x)=x^4-2x^2 \Rightarrow f'(x)=4x^3-4x$ suy ra $g(x)=4x^3-4x^2-4x$.

Xét hàm số $g(x)$, có $g'(x)=12x^2-8x-4$. Phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Lại có $g''(x)=24x-8 \longrightarrow \begin{cases} g''(1)>0 \\ g''\left(-\dfrac{1}{3}\right)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x_1)=-4 \\ g(x_2)=-\dfrac{124}{27} \end{cases}$.

Vậy tích $g(x_1).g(x_2)=(-4).\left(-\dfrac{124}{27}\right)=\dfrac{496}{27}$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 1.

C. 0. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$, ta có $y'=\dfrac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$.

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2-2x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn A.

Ví dụ 3 [ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2017]: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây **sai** ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. **D.** Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng:

- Hàm số đã cho có ba điểm cực trị và $x=-1$, $x=1$ là hai điểm cực tiểu.
- Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0, có giá trị cực đại bằng 3.

Chọn C.

Ví dụ 4: Hàm số nào dưới đây có duy nhất một điểm cực trị ?

A. $y=x^3+2$.

B. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

C. $y=\cot x$.

D. $y=x^4+x^2$.

Lời giải

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $y=x^3+2 \longrightarrow y'=3x^2\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow y=x^3+2$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ suy ra hàm số đã cho không có cực trị.
- $y=\dfrac{x+1}{x-1} \longrightarrow y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0, \forall x\ne 1 \Rightarrow y=\dfrac{x+1}{x-1}$ là hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ suy ra hàm số đã cho không có cực trị.
- $y=\cot x \longrightarrow y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}<0, \forall x\ne k\pi \Rightarrow y=\cot x$ là hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định suy ra hàm số đã cho không có cực trị.
- $y=x^4+x^2 \longrightarrow y'=4x^3+2x=2x(2x^2+1)$, $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ suy ra hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị.

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho các hàm số $f(x)=x^3+3x$, $g(x)=x^4-8x^3+18x^2+1$, $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Gọi m là số hàm số có một điểm cực trị, n là số hàm số có hai điểm cực trị. Tổng $m+n$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

+) Xét hàm số $f(x)=x^3+3x$, có $f'(x)=3x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Do đó, hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

+) Xét hàm số $g(x)=x^4-8x^3+18x^2+1$, ta có

$$g'(x)=4x^3-24x+36x=4x(x-3)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow$ Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua nghiệm $x=0$ suy ra hàm số $y=g(x)$ có một điểm cực trị.

+) Xét hàm số $h(x)=x+\frac{1}{x}$, có $h'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$; $\forall x\neq 0$.

Phương trình $h'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ suy ra hàm số $y=h(x)$ có hai điểm cực trị.

Vậy $m=n=1$ suy ra $m+n=2$.

Chọn B.

Ví dụ 6 [THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH – NGHỆ AN]: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-4)$, $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

C. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=2$.

D. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)$, ta có $f'(x)=x^2(x^2-4)$ và $f''(x)=4x(x^2-2)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$. Dễ thấy $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai nghiệm $x=2$, $x=-2$ và không đổi dấu khi đi qua nghiệm $x=0$. Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị và $\begin{cases}f''(2)=16>0\\f''(-2)=-16<0\end{cases}\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại tại $x=-2$.

Chọn A.

Nhận xét: Để tìm hiểu rõ dạng toán, giả thiết cho $f'(x)$ là một hàm đa thức và yêu cầu xác định số điểm cực trị của hàm số, ta sẽ xét ví dụ dưới đây.

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)^3(x+2)^4$, $x\in\mathbb{R}$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Xét bài toán tổng quát: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=g(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_m\\x=x_n\end{array}\right.$, $(x_m, x_n\in\mathbb{R})$.

- Với $x=x_m$ là nghiệm bội lẻ của $g(x)=0$, tức là $(x-x_m)^a$ với a là số lẻ.
- Với $x=x_n$ là nghiệm bội chẵn của $g(x)=0$, tức là $(x-x_n)^b$ với b là số chẵn.

Khi đó, $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua nghiệm bội lẻ (hoặc nghiệm đơn) và không đổi dấu khi đi qua nghiệm bội chẵn. Suy ra số điểm cực trị của hàm số chính là số nghiệm bội lẻ (hoặc nghiệm đơn) của phương trình $f'(x)=0$.

Quay trở lại với ví dụ 7, ta thấy $f'(x)=0$ có nghiệm bội lẻ duy nhất là $x=1$ nên hàm số duy nhất một điểm cực trị.

Chọn B.

Ví dụ 8 [ĐỀ THI MINH HỌA THPT QG BGD – 2017]: Giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y=x^3-3x+2$ bằng

A. $y_{CĐ}=4$. **B.** $y_{CĐ}=1$.

C. $y_{CĐ}=0$. **D.** $y_{CĐ}=-1$.

Lời giải

Áp dụng định lý 3

- Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số.
- Tìm các nghiệm x_i $(i=1,2,3,...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- Với mỗi x_i, tính giá trị x_i.
  - Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.
  - Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ với $x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$ và $f''(x) = 6x;\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$.

Suy ra $x = -1$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy $y_{CĐ} = f(-1) = 4$.

Chọn A.

Ví dụ 9 [ĐỀ THI THỬ NGHIỆM THPT QG – 2017]: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3.

B. Cực tiểu của hàm số bằng 1.

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6.

D. Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Lời giải

Nhắc lại kiến thức: $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \to y' = \left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$.

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ với $x \neq -1$, ta có $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $f'(x) = \dfrac{8}{(x+1)^3}$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right. \Rightarrow f''(1) = 1 > 0$.

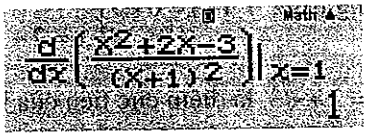
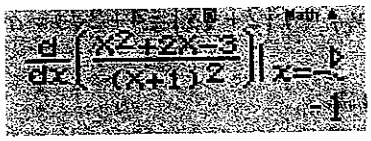
Suy ra $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy cực tiểu của hàm số bằng $f(1) = 2$.

Chọn D.

Đặt vấn đề: Việc tìm điểm cực tiểu, điểm cực đại của hàm số, ta có thể lập bảng biến thiên hoặc tính đạo hàm cấp hai tại điểm x_0 (các định lý đã giới thiệu) nhưng với bài toán trên, tính ***đạo hàm cấp hai*** bằng cách thông thường rất dài và mất nhiều thời gian nên ta nhờ công cụ máy tính để rút ngắn thời gian, bằng cách sử dụng $\left.\dfrac{d}{dx}\left(f'(x)\right)\right|_{x=x_0}$ (được hiểu là tính đạo hàm của hàm số $f'(x)$ tại điểm $x = x_0$) như sau:

✓ Ta có $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$, phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$. Ta cần xét xem $f''(1)$ hoặc $f''(-3)$ mang giá trị âm hay dương để tìm **cực tiểu, cực đại** của hàm số.

✓ Nhập biểu thức $\dfrac{d}{dx}\left(f'(x)\right)\Big|_{x=x_0}\to\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\right)\Big|_{x=1}$.

Các giá trị x_i	**Màn hình hiển thị**
Với $x_i=1\to f''(1)>0\to x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.	
Với $x_i=-3\to f''(-3)<0\to x=-3$ là điểm cực tiểu của hàm số.	

Kết luận: *Để giải quyết một bài toán, bằng cách này hay cách khác sẽ luôn ra được kết quả, tuy nhiên ta cần lựa chọn cách giải ngắn, ít thời gian để giải quyết nhanh nó (như phần **đặt vấn đề**), dành thời gian cho các bài toán khó hơn.*

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x}$ có giá trị cực đại là y_1 và giá trị cực tiểu là y_2. Tính hiệu $S=y_2-y_1$.

A. $S=-1$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=4$. **D.** $S=-4$.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}-3$ với $x\neq 0$, ta có $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$; $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}f''(1)=2>0\\f''(-1)=-2<0\end{cases}$.

Suy ra hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1\Rightarrow y_2=f(1)=-1$.

Và hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=-1\Rightarrow y_1=f(-1)=-5$. Vậy $S=y_2-y_1=4$.

Chọn C.

Ví dụ 11: Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ bằng $a+2\sqrt{b}$. Tính tổng $a+b$.

A. 7. **B.** 6.

C. 4. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$, có $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$, $\forall x\neq 2$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{3}\\x=2+\sqrt{3}\end{array}\right.$ suy ra $f''(2+\sqrt{3})>0$.

$\Rightarrow x=2+\sqrt{3}$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy $y_{CT}=f(2+\sqrt{3})=4+2\sqrt{3}=a+2\sqrt{b}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=7.$

Chọn A.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=-2x+3\sqrt{x^2+1}$ có giá trị cực trị được biểu diễn dưới dạng $m\sqrt{n}$ với m, n là các số nguyên dương. Tổng $m+n$ bằng

A. 8. **B.** 5.

C. 7. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $y=-2x+3\sqrt{x^2+1}$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có $y'=-2+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{3x-2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3x=2\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Và $y''\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)>0\Rightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $y_{CT}=y\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}=m\sqrt{n}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=5\end{cases}\Rightarrow m+n=6$.

Chọn D.

Ví dụ 13: Gọi a và b là hai giá trị để hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2ax+6+\dfrac{b}{x}$ với $x>0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$ và cực đại tại $x=2$. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b=-4$. **B.** $a+b=-5$.

C. $a+b=1$. **D.** $a+b=2$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f'(x)=2ax+6+\frac{b}{x}\Rightarrow f''(x)=2a-\frac{b}{x^2}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và cực đại tại $x=2$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f'(1)=0\ \&\ f''(1)>0\\ f'(2)=0\ \&\ f''(2)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+6+b=0\ \&\ 2a-b>0\\ 8a+12+b=0\ \&\ 8a-b<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-4\end{cases}\Rightarrow a+b=-5$.

Chọn B.

Ví dụ 14: Cực tiểu của hàm số $y=(x-3)\sqrt{|x|}$ bằng

A. -2. **B.** 0.

C. 1. **D.** -1.

Lời giải

Nhắc lại kiến thức về dấu trị tuyệt đối: $|A|=\begin{cases}A\ khi\ A\ge 0\\ -A\ khi\ A<0\end{cases}$.

Chú ý: Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại điểm $x=0$, khi xét cực trị hàm số ta không cần chứng minh hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$ (xem định lý 2, giải tích 12 nâng cao).

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $y=\begin{cases}(x-3)\sqrt{x}\ khi\ x\ge 0\\ (x-3)\sqrt{-x}\ khi\ x<0\end{cases}$.

Khi đó $y'=\begin{cases}\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}\ khi\ x>0\\ \frac{3-x}{2\sqrt{-x}}+\sqrt{-x}\ khi\ x<0\end{cases}$. Trên $(-\infty;0)\to y'>0$ và $(0;+\infty)\to y'=0\Leftrightarrow x=1$.

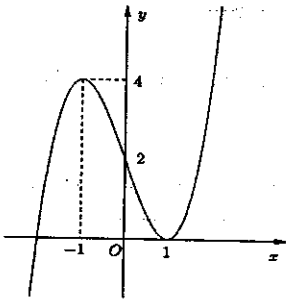
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $f(0)=0$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$, $f(1)=-2$.

Chọn A.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=f(|x|+m)$ có năm điểm cực trị.



A. $m>1$. **B.** $m>-1$.

C. $m<1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, dễ thấy hàm số $f(x)=x^3-3x+2$.

Xét hàm số $f(|x|+m)=(|x|+m)^3-3(|x|+m)+2$ với $x\in\mathbb{R}$.

Chú ý: Cực trị là điểm làm y' đổi dấu và $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\dfrac{x}{|x|}$.

Do đó $f'(|x|+m)=3\left[(|x|+m)^2-1\right].\dfrac{x}{|x|}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(|x|+m)^2=1\quad(*)\end{array}\right.$

Khi đó $y=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow(*)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<-1$.

Chọn D.

Ví dụ 16: Biết rằng $x=m$ là một điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{3}{2}mx^2+x$. Tính m.

A. $m=0$. **B.** $m=1$.

C. $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=1\pm\sqrt{3}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{3}{2}mx^2+x$, ta có $y'=2x^2-3mx+1$ và $y''=4x-3m;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $x=m$ là điểm cực trị của hàm số $\Rightarrow y'(m)=0\Leftrightarrow 2m^2-3m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Chọn B.

Ví dụ 17: Tập hợp tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 + m\sqrt{4-x^2}$ có 3 cực trị là

A. $(-6;6)\setminus\{0\}$.

B. $[-6;6]\setminus\{0\}$.

C. $[-2;2]\setminus\{0\}$.

D. $(-2;2)\setminus\{0\}$.

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = [-2;2]$, ta có $y' = 3x^2 - \dfrac{mx}{\sqrt{4-x^2}}$, $\forall x \in (-2;2)$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \dfrac{mx}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x.\left(3x\sqrt{4-x^2} - m\right)}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ m = 3x\sqrt{4-x^2} \end{array}\right.$ $(*)$

Để hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Xét hàm số $f(x) = 3x\sqrt{4-x^2}$ trên $(-2;2)$, ta có

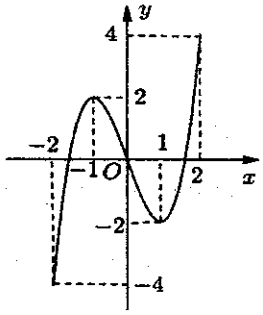
$$f'(x) = \frac{12-6x^2}{\sqrt{4-x^2}};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Và $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$; $f\left(\sqrt{2}\right) = 6$; $f\left(-\sqrt{2}\right) = -6$.

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m \in (-6;6)\setminus\{0\}$.

Chọn A.

Ví dụ 18 [ĐỀ THI THỬ NGHIỆM THPT QG – 2017]: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?



A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

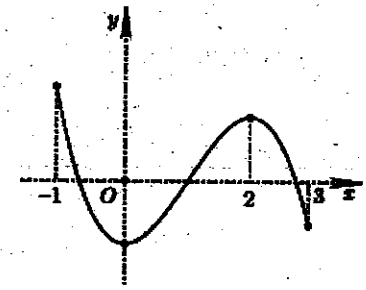
D. $x = 2$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, dễ thấy $x = -1$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn B.

Ví dụ 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên trục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?



A. Hàm số có hai điểm cực đại là $x = -1$, $x = 2$.

B. Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = 0$, $x = 3$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = -1$.

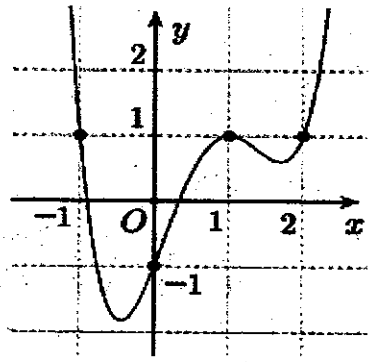
Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng:

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn C.

Ví dụ 20: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x = -1$. **B.** $x = 0$.

C. $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$, có $g'(x) = f'(x) - 1$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 = 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, kẻ đường thẳng $y = 1$, ta thấy rằng $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai điểm $x = -1$, $x = 2$.

Mà $g'(x)$ đổi dấu "+" $\longrightarrow$ "−" khi đi qua $x = 2 \Rightarrow x = 2$ là điểm cực đại của hàm số $g(x)$.

Chọn D.

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6052]

Câu 1: [530568] Cho hàm số $y=2x^3-5x^2+4x+1999$. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là hoành độ hai điểm cực đại và cực tiểu của hàm số. Kết luận nào sau đây là **đúng** ?

A. $x_2-x_1=\frac{2}{3}$.

B. $2x_2-x_1=\frac{1}{3}$.

C. $2x_1-x_2=\frac{1}{3}$.

D. $x_1-x_2=\frac{1}{3}$.

Câu 2: [530569] Số điểm cực trị của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x+1999$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 3: [530571] Hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2016$ có hai điểm cực trị lần lượt là A và B. Kết luận nào sau đây là **đúng**?

A. $A(-2;2035)$.

B. $B(2;2008)$.

C. $A(-2;2036)$.

D. $B(2;2009)$.

Câu 4: [530573] Giá trị cực đại của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x+1999$ là:

A. $\frac{54001}{27}$.

B. 2.

C. $\frac{54003}{27}$.

D. 4.

Câu 5: [530574] Giá trị cực tiểu của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2016$ là:

A. 2006.

B. 2007.

C. 2008.

D. 2009.

Câu 6: [530576] Hàm số $y=3x^3-4x^2-x+2016$ đạt cực tiểu tại:

A. $x=\frac{-2}{9}$.

B. $x=1$.

C. $x=\frac{-1}{9}$.

D. $x=2$.

Câu 7: [530577] Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2017$. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là hoành độ hai điểm cực đại và cực tiểu của hàm số. Kết luận nào sau đây là **đúng**?

A. $x_1-x_2=4$.

B. $x_2-x_1=3$.

C. $x_1x_2=-3$.

D. $(x_1-x_2)^2=8$.

Câu 8: [530580] Hàm số $y=-x^3+8x^2-13x-1999$ đạt cực đại tại:

A. $x=\frac{13}{3}$.

B. $x=1$.

C. $x=\frac{-13}{3}$.

D. $x=2$.

Câu 9: [530582] Hàm số $y=x^3-10x^2+17x+25$ đạt cực tiểu tại:

A. $x=\frac{10}{3}$.

B. $x=25$.

C. $x=17$.

D. $x=\frac{17}{3}$.

Câu 10: [530583] Cho hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2016$. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là hoành độ hai điểm cực đại và cực tiểu của hàm số. Kết luận nào sau đây là **đúng**?

A. $x_1-x_2=4$.

B. $x_2-x_1=3$.

C. $x_1x_2=-3$.

D. $(x_1-x_2)^2=8$.

Câu 11: [530585] Hàm số $y=3x^3-4x^2-x+258$ đạt cực đại tại:

A. $x=\frac{-2}{9}$.

B. $x=1$.

C. $x=\frac{-1}{9}$.

D. $x=-\frac{1}{9}$.

Câu 12: [530587] Hàm số $y=-x^3+8x^2-13x-1999$ đạt cực tiểu tại:

A. $x=3$.

B. $x=1$.

C. $x=\frac{1}{3}$.

D. $x=2$.

Câu 13: [530588] Biết hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ có 2 điểm cực trị là $A(x_1,y_1)$ và $B(x_2,y_2)$. Nhận định nào sau đây **không** đúng.

A. $|x_1-x_2|=2$.

B. $y_1y_2=-4$.

C. $y_1=-y_2$.

D. $AB=2\sqrt{6}$.

Câu 14: [530589] Hàm số nào dưới đây có cực đại ?

A. $y=x^4+x^2+1$.

B. $y=\frac{x-1}{x+2}$.

C. $y=\frac{2-x}{x^2+2}$.

D. $y=\sqrt{x^2-2x}$.

Câu 15: [530591] Tổng số điểm cực đại của hai hàm số $y=f(x)=x^4-x^2+3$ và $y=g(x)=-x^4+x^2+2$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 16: [530592] Tổng số điểm cực tiểu của hai hàm số $y=f(x)=x^3-x^2+3$ và $y=g(x)=-x^4+x^2+2$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 17: [530594] Cho hai hàm số $y=f(x)=x^3-x^2+3$ và $y=g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-x+2$. Tổng số điểm cực trị, cực đại, cực tiểu của 2 hàm số lần lượt là:

A. 5; 2; 3. **B.** 5; 3; 2.

C. 4; 2; 2. **D.** 3; 1; 2.

Câu 18: [530595] Cho hàm số $y=-x^3+6x^2-9x-4\,(C)$. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là:

A. $A(1;-8)$. **B.** $A(3;-4)$.

C. $A(2;-2)$. **D.** $A(-1;10)$.

Câu 19: [530597] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4\,(C)$. Gọi A và B là toạ độ 2 điểm cực trị của (C). Diện tích tam giác OAB bằng:

A. 4. **B.** 8.

C. 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 20: [530598] Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+2\,(C)$ có điểm cực đại cực tiểu lần lượt là $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Tính $T=x_1y_2-x_2y_1$.

A. 4. **B.** – 4.

C. 46. **D.** – 46.

Câu 21: [530599] Cho hàm số $y=x^3-x^2-x+1\,(C)$. Khoảng cách từ O đến điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là:

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2.

C. $\sqrt{\frac{1105}{729}}$. **D.** 1.

Câu 22: [530600] Khẳng định nào sau đây là sai:

A. Hàm số $y=x^3+3x+2$ không có cực trị.

B. Hàm số $y=x^3-2x^2-x$ có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=x^3-6x^2+12x+2$ có cực trị.

D. Hàm số $y=x^3+1$ không có cực trị.

Câu 23: [530603] Giả sử hàm số $y=x^3-3x^2+3x+4$ có a điểm cực trị, hàm số $y=x^4+4x^2+2$ có b điểm cực trị và hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có c điểm cực trị. Giá trị của $T=a+b+c$ là:

A. 0 **B.** 3

C. 2 **D.** 1.

Câu 24: [530604] Hàm số $y=f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Câu 25: [530606] Cho hàm số $y=f(x)=-x^4-4x^2+2$. Chọn phát biểu đúng:

A. Hàm số trên có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu

B. Hàm số trên có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

C. Hàm số có 1 điểm cực trị là điểm cực đại.

D. Hàm số có 1 điểm cực trị là điểm cực tiểu.

Câu 26: [530607] Hàm số nào sau đây không có cực trị:

A. $y=x^3+x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

C. $y=x^4+3x^3+2$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Câu 27: [530612] Hàm số $y=f(x)=x^3+x^2-x+4$ đạt cực trị khi:

A. $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Câu 28: [530613] Cho hàm số $y=f(x)=3x^4-2x^2+2$. Chọn phát biểu **sai:**

A. Hàm số trên có 3 điểm cực trị.

B. Hàm số trên có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

C. Hàm số trên có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D. Hàm số có cực đại và cực tiểu.

Câu 29: [530615] Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-\frac{5x^2}{2}-x-4$ đạt cực đại khi:

A. $x=1$.

B. $x=-\frac{1}{6}$.

C. $x=-1$.

D. $x=\frac{1}{6}$.

Câu 30: [530616] Hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$ có phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là

A. $2x+y-1=0$.

B. $x+2y-1=0$.

C. $2x-y-1=0$.

D. $x-2y+1=0$.

Câu 31: [530617] Hàm số $(C): y=x^3-2x^2+x+1$ đạt cực trị khi:

A. $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{-1}{3} \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{-10}{3} \end{array}\right.$.

Câu 32: [530618] Cho hàm số $(C): y=2x^3-2x$. Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại $(y_{CĐ})$ và giá trị cực tiểu (y_{CT}) của hàm số đã cho là

A. $y_{CT}=2y_{CĐ}$.

B. $2y_{CT}=3y_{CĐ}$.

C. $y_{CT}=-y_{CĐ}$.

D. $y_{CT}=y_{CĐ}$.

Câu 33: [530621] Cho hàm số $(C): y=\sqrt{x^2-x+1}$. Hàm số đạt cực trị tại

A. $x=1$.

B. $x=\frac{1}{2}$.

C. $x=-\frac{1}{2}$.

D. $x=-1$.

Câu 34: [530622] Hàm số $(C): y=(x^2-2)^2-3$ đạt cực đại khi:

A. $x=-\sqrt{2}$.
B. $x=\sqrt{2}$.
C. $x=1$.
D. $x=0$.

Câu 35: [530623] Cho hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

(1). Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

(2). Hàm số có $-3x_{CĐ}=x_{CT}$.

(3). Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

(4). Hàm số đồng biến trên $(-1;3)$.

Các phát biểu đúng là:

A. (1), (4)
B. (1), (2).
C. (1), (3).
D. (2), (3).

Câu 36: [530625] Cho hàm số $(C): y=2x^2-x^4$. Chọn phát biểu **sai** trong các phát biểu dưới đây:

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.

C. Hàm số có hai cực trị.

D. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0;0)$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	02. B	03. C	04. A	05. D	06. B	07. C	08. A	09. D	10. B
11. C	12. B	13. D	14. C	15. C	16. B	17. A	18. B	19. A	20. B
21. D	22. C	23. D	24. A	25. C	26. B	27. D	28. B	29. B	30. A
31. A	32. C	33. B	34. D	35. B	36. C				

VẤN ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA

[TV6050]

1. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Bài toán: *Cho hàm số* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. *Tìm điều kiện để hàm số có cực trị.*

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (*)$.

a. **Hàm số không có cực trị:** Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ thì $y' = 2bx + c$.

Điều kiện là y' không đổi dấu $\Leftrightarrow b = 0$ và $c \neq 0$.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ thì điều kiện y' không đổi dấu $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$.

b. **Hàm số có cực trị:** Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow 2bx + c = 0$. Điều kiện là $b \neq 0$.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$.

c. **Hàm số có cực đại, cực tiểu:**

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$.

d. **Hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ thỏa mãn điều kiện** K.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$.

Khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức Viet.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện K.

e. **Hàm số có cực đại, cực tiểu trong khoảng** I

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trong khoảng I.

f. **Hàm số có cực đại trong khoảng I.**

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a=0$ thì $(*) \Leftrightarrow 2bx+c=0 \quad (1)$.

Điều kiện là phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc I và qua đó y' đổi dấu dương sang âm $\Leftrightarrow \begin{cases} b<0 \\ -\dfrac{c}{2b} \in I \end{cases}$.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$, ta thực hiện như các bước:

Bước 1: Hàm số có cực đại

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$.

Khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Bước 2: Tùy theo a, ta lập bảng biến thiên của hàm số.

Từ bảng biến thiên suy ra hoành độ điểm cực đại $x_{CĐ}$.

Bước 3: Hàm số có cực đại trong khoảng $I \Leftrightarrow x_{CĐ} \in I$.

Tương tự cho trường hợp cực tiểu.

g. **Hàm số đạt cực tiểu tại x_0** $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)>0 \end{cases}$.

h. **Hàm số đạt cực đại tại x_0** $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases}$.

i. **Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.**

Bước 1: Tìm miền xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

Bước 2: Tính đạo hàm y', thiết lập phương trình $y'=0$, giả sử $f(x)=0 \ (2)$.

Bước 3: Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Bước 4: Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Bước 5: Để xác định phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, ta thực hiện theo cách sau:

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được $y = y'.g(x) + h(x)$.

Ta có:

+) Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cực đại hoặc cực tiểu của đồ thị hàm số $y'(x_0) = 0$.

Do đó $y_0 = y(x_0) = y'(x_0).g(x_0) + h(x_0) = h(x_0)$.

+) Thấy ngay rằng tọa độ các điểm cực đại và cực tiểu cùng thỏa mãn phương trình $y_0 = h(x_0)$. *Vậy phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng* $y = h(x)$.

2. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 4$ có các điểm cực tiểu và điểm cực đại lần lượt là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Giá trị của biểu thức $T = x_1y_2 - x_2y_1$ bằng

A. $T = -56$. **B.** $T = 56$.

C. $T = 136$. **D.** $T = -136$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 4$, ta có $y' = 3x^2 - 18x + 24$ và $y'' = 6x - 18; \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \to y = 24 \\ x = 4 \to y = 20 \end{array}\right.$ và $\begin{cases} y''(2) = -6 < 0 \\ y''(4) = 6 > 0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1; y_1) = (4; 20) \\ (x_2; y_2) = (2; 24) \end{cases} \Rightarrow T = x_1y_2 - x_2y_1 = 4.24 - 2.20 = 56.$$

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$. Gọi $x = a$ và $x = b$ lần lượt là các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số đã cho. Giá trị của biểu thức $T = \frac{a+1}{b-2}$ là

A. $T = -1$. **B.** $T = 1$.

C. $T = -\frac{1}{2}$. **D.** $T = 2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$, ta có $y' = -x^2 - x + 2; \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Do hệ số $a=-\frac{1}{3}<0$ nên $\begin{cases} x_{CĐ}=1 \\ x_{CT}=-2 \end{cases}$

Vậy giá trị của biểu thức $T=\frac{a+1}{b-2}=\frac{1+1}{-2-2}=-\frac{1}{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ bằng

A. $d=\sqrt{2}$.

B. $d=2\sqrt{2}$.

C. $d=\sqrt{5}$.

D. $d=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$, ta có $y'=3x^2-6x;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \to y(0)=0 \\ x=2 \to y(2)=-4 \end{array}\right.$.

Suy ra hai điểm cực trị là $A(0;0)$ và $B(2;-4)$. Vậy $AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

Chọn D.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;b)$. Biết điểm $x_0\in(a;b)$ thỏa mãn $f'(x_0)=0$ và $f''(x)=(x_0-2)x+m^2-m+2$ với m là tham số thực. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

B. Hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và đạo hàm cấp hai là $f''(x)=(x_0-2)x+m^2-m+2$.

Ta có $f'(x_0)=0 \Rightarrow x_0$ là điểm cực trị của hàm số. Và $f''(x_0)=(x_0-2)x_0+m^2-m+2$.

$$\Rightarrow f''(x_0)=x_0^2-2x_0+m^2-m+2=(x_0-1)^2+\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0;\ \forall\begin{cases} x_0\in\mathbb{R} \\ m\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Suy ra x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và $M(3;2)$, $N(-1;0)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Đường thẳng MN cắt (d) tại P. Tính tỉ số $\frac{MP}{NP}$.

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Để giải quyết được bài toán, điểm mấu chốt chính là viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số, ta có thể làm theo ba cách sau:

- **Cách 1.** Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

  Khi đó, phương trình đường thẳng AB có dạng $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_2}$.

- **Cách 2.** Thực hiện phép chia đa thức y cho y' như phần lý thuyết.

- **Cách 3.** Thực hiện phép tính $g(x) = y - \frac{y'.y''}{18a}$ [CT] với a là hệ số của x^3 và y', y'' lần lượt là đạo hàm cấp một, cấp hai của hàm số. Khi đó $y = g(x)$ chính là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$, ta có $y' = 3x^2 - 6x$ và $y'' = 6x - 6$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y(0) = 4 \\ x = 2 \to y(2) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A(0;4) \\ B(2;0) \end{cases}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2;-4) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(AB)}} = (2;1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $(AB): 2x + y - 4 = 0$.

Hoặc sử dụng [CT]: $g(x) = y - \frac{y'.y''}{18a}$, ta thấy $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4 - \frac{(3x^2-6x)(6x-6)}{18}$.

Gán $x = 100 \xrightarrow{casio} g(100) = -196 = -2.100 + 4 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Vậy phương trình đường thẳng $(d): 2x + y - 4 = 0$.

Ta có $d_{M\to(d)}=\dfrac{|2.3+2-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$,

$$d_{N\to(d)}=\frac{|2.(-1)+0-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{MP}{NP}=\frac{d_M}{d_N}=\frac{2}{3}.$$

Chọn D.

Ví dụ 6: Gọi (Δ) đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$. Giá trị của tham số m ***dương và gần giá trị nào nhất*** để ba đường thẳng để ba đường thẳng $(\Delta),(d_1),(d_2)$ với $(d_1):2x+y-1=0$, $(d_2):(m+1)x-y+m^2-2=0$ đồng quy là

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$, ta có $y'=3x^2-6x-9;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\to y(3)=-26\\x=-1\to y(-1)=6\end{array}\right.\Rightarrow(\Delta):8x+y+2=0.$

Tọa độ giao điểm của (Δ) và (d_1) là $\begin{cases}8x+y+2=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=2\end{cases}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};2\right).$

Vì $(\Delta),(d_1),(d_2)$ đồng quy nên $M\in(d_2)$ suy ra $\begin{cases}m>0\\2m^2-m-9=0\end{cases}\to m=\dfrac{1+\sqrt{73}}{4}$ và m gần giá trị 2 nhất.

Chọn C.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+2x+1$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(\Delta):36m^2x-9y+9m+10=0$.

A. $\sum m=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\sum m=0$.

C. $\sum m=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\sum m=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3-2x^2+2x+1$, ta có $y'=3x^2-4x+2$ và $y''=6x-4;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Tuy nhiên, dễ thấy phương trình $y'=0$ có nghiệm vô tỷ (nghiệm xấu) nên việc viết phương trình đường thẳng (d) theo cách thông thường thì sẽ dài và tốn thời gian. Vậy trong trường hợp này ta sẽ dụng công cụ tổng quát [CT]: $g(x)=y-\dfrac{y'.y''}{18a}$.

Ta có $g(x)=x^3-2x^2+2x+1-\dfrac{(3x^2-4x+2)(6x-4)}{18}$.

Gán $x=100\xrightarrow{casio} g(100)=\dfrac{413}{9}=\dfrac{4.100+13}{9}=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{13}{9}\Rightarrow y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{13}{9}$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Theo bài ra, ta có $(d)\parallel(\Delta)\Rightarrow\begin{cases}4m^2=\dfrac{4}{9}\\ m+\dfrac{10}{9}\neq\dfrac{13}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2=1\\ m\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 8: Gọi a,b,c là các giá trị sao cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x=-2$ và đồ thị hàm số của nó đi qua điểm $M(1;0)$. Tính tổng $a^2+b^2+c^2$.

A. 36. **B.** 29.

C. 25. **D.** 40.

Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;0)$ suy ra $f(1)=0\Leftrightarrow a+b+c+1=0\Leftrightarrow a+b+c=-1$ (1).

Xét hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, ta có $f'(x)=3x^2+2ax+b;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=-2$ và $f(-2)=0$ suy ra

$$\begin{cases}f'(-2)=0\\ f(-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12-4a+b=0\\ 4a-2b+c-8=0\end{cases}\quad(2).$$

Từ (1),(2) ta được $\begin{cases}a+b+c=-1\\ 4a-b=12\\ 4a-2b+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=0\\ c=-4\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=25.$

Chọn C.

Ví dụ 9 [ĐỀ THI THỬ NGHIỆM THPT QG – 2017]: Biết hai điểm $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $y(-2)=2$.
B. $y(-2)=22$.
C. $y(-2)=6$.
D. $y(-2)=-18$.

Lời giải

Xét hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, ta có $y'=3ax^2+2bx+c;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm cực trị $M(0;2)$, $N(2;-2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(0)=y'(2)=0 \\ y(0)=2;\ y(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0;\ d=2 \\ 12a+4b+c=0 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1;\ b=-3 \\ c=0;\ d=2 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x^2+2.$$

Vậy giá trị của hàm số tại $x=-2$ là $f(-2)=-18$.

Chọn D.

Ví dụ 10: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x=2$.

A. $m=-9$.
B. $m=2$.
C. $m=-2$.
D. $m=9$.

Lời giải

Xét hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$, ta có $y'=12x^2+2mx-12$ và $y''=24x+2m;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12.2^2+2m.2-12=0 \\ 24.2+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+36=0 \\ m+24>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-9.$

Chọn A.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=-2x^3+(2m-1)x^2-(m^2-1)x+2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

A. 4.
B. 5.
C. 3.
D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)$, ta có $y'=-6x^2+2(2m-1)x-m^2+1;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 6x^2-2(2m-1)x+m^2-1=0\quad(*)$

Để hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow(2m-1)^2-6(m^2-1)>0\Leftrightarrow 2m^2+4m-7<0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}<m<-\dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m=\{-3;-2;-1;0;1\}$.

Chọn B.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+2$. Biết hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{9}{5}$.

C. $\dfrac{7}{10}$. **D.** $\dfrac{9}{10}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+ax^2+bx+2$, ta có $y'=3x^2+2ax+b$ và $y''=6x+2a;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1\Leftrightarrow\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+2a+b=0\\6+2a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a-3\\a>-3\end{cases}$

Khi đó $T=a^2+b^2=a^2+(-2a-3)^2=a^2+4a^2+12a+9=5a^2+12a+9$.

Xét hàm số $f(a)=5a^2+12a+9$ với $a>-3$, ta có

$f'(a)=10a+12;\ f'(a)=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{6}{5}$

Tính $f\left(-\dfrac{6}{5}\right)=\dfrac{9}{5};\ f(-3)=18;\ \lim\limits_{a\to+\infty}f(a)=+\infty\to\min f(a)=\dfrac{9}{5}\Rightarrow T_{\min}=\dfrac{9}{5}$.

Chọn B.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=2x^3-3x^2-m$ có các giá trị cực trị trái dấu

A. -1 và 0. **B.** $(-\infty;0)\cup(-1;+\infty)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $[0;1]$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=6x^2-6x;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=-m \\ f(1)=-m-1 \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m(m+1)<0 \Leftrightarrow -1<m<0$.

Chọn C.

Ví dụ 14: Gọi $x_1,\ x_2$ là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ Giá trị của tham số m để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$ là

A. $m=0$.

B. $m=\pm\frac{9}{2}$.

C. $m=\pm\frac{1}{2}$.

D. $m=\pm 2$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=3\left[x^2-2mx+(m^2-1)\right]$.

Do $\Delta'=m^2-m^2+1=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$.

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m^2-1 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=7 \Leftrightarrow 4m^2-3(m^2-1)=7 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Chọn D.

Ví dụ 15: Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1,\ x_2$ nằm hai phía trục tung khi và chỉ khi

A. $a>0,\ b<0,\ c>0$.

B. $a,\ c$ trái dấu.

C. $b^2-12ac\geq 0$.

D. $b^2-12ac>0$.

Lời giải

Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung khi và chi khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ trái dấu. Suy ra a và c trái dấu.

Chọn B.

Ví dụ 16: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có

hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m>2$. **B.** $m<2$.

C. $m=2$. **D.** $0<m<2$.

Lời giải

Ta có $y'=x^2-2mx+m+2$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\ S=x_1+x_2>0\\ P=x_1x_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)(m-2)>0\\ 2m>0\\ m+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-1\end{array}\right.\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow m>2.$$

Chọn A.

Ví dụ 17: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.

C. $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+6m$, $y'=0\Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=m\end{array}\right.$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 1$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A(1;m^3+3m-1)$ và $B(m;3m^2)$.

Suy ra $AB^2=(m-1)^2+(m^3-3m^2+3m-1)^2=(m-1)^2+(m-1)^6$

Theo bài ra ta có

$$AB^2=2\Leftrightarrow (m-1)^6+(m-1)^2-2=0\Leftrightarrow \left[(m-1)^2\right]^3-1+\left[(m-1)^2-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(m-1)^2-1\right].\left[(m-1)^4+(m-1)^2+2\right]=0\Leftrightarrow (m-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=0\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.$$

Chọn B.

Ví dụ 18: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ với m là tham số, có đồ thị là (C_m).

Xác định tham số m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành ?

A. $m<2$. **B.** $m\le 3$.

C. $m<3$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải

Đạo hàm $y'=3x^2+6x+m$. Với $\Delta'_{y'}=9-3m$.

Đồ thì hàm số có cực đại và cực tiểu khi: $\Delta'_{y'}>0\Leftrightarrow m<3$.

Ta có $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right).y'+\left(\frac{2m}{3}-2\right)x+\left(\frac{2m}{3}-2\right)$.

Gọi x_1,x_2 là hoành độ của 2 điểm cực trị khi đó: $\begin{cases} y_1=\left(\frac{2m}{3}-2\right)x_1+\left(\frac{2m}{3}-2\right) \\ y_2=\left(\frac{2m}{3}-2\right)x_2+\left(\frac{2m}{3}-2\right) \end{cases}$

Hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoàng khi:

$$y_1.y_2<0\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{2}-2\right)^2(x_1+1)(x_2+1)<0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{2}-2\right)^2(x_1x_2+x_1+x_2+1)<0\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{3}-2\right)^2\left(\frac{m}{2}-1\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases} m<2 \\ m\ne 3 \end{cases}.$$

Chọn C.

Ví dụ 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax+1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\left(x_1^2+x_2+2a\right)\left(x_2^2+x_1+2a\right)=9$.

A. $a=2$. **B.** $a=-4$.

C. $a=-3$. **D.** $a=-1$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax+1$, ta có $y'=x^2-x+a;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow x^2-x+a=0\quad(*)$, có $\Delta=(-1)^2-4a=1-4a$.

Để hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow a<\frac{1}{4}$.

Khi đó, gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

Ta có $\left(x_1^2+x_2+2a\right)\left(x_2^2+x_1+2a\right)=9$.

$$\Leftrightarrow \left(x_1x_2\right)^2+x_1x_2+x_1^3+x_2^3+2a\left(x_1^2+x_2^2+x_1+x_2\right)+4a^2=9$$

Mà $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]=1-3a$ và $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=1-2a$.

Suy ra $a^2+a+1-3a+2a\left(2-2a\right)+4a^2=9 \Leftrightarrow a^2+2a-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-4 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $a<\frac{1}{4} \to a=2$ là giá trị cần tìm.

Chọn A.

Ví dụ 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\left(m+5\right)x^2+mx$ có cực đại, cực tiểu thỏa mãn điều kiện $\left|x_{CĐ}-x_{CT}\right|=5$.

A. $m=0$. **B.** $m=-6$.

C. $m=\{0;6\}$. **D.** $m=\{0;-6\}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\left(m+5\right)x^2+mx$, ta có $y'=x^2-\left(m+5\right)x+m;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x^2-\left(m+5\right)x+m=0 \quad (*)$, có $\Delta=\left(m+5\right)^2-4m=m^2+6m+10$.

Để hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m^2+6m+10=\left(m+3\right)^2+1>0;\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó, gọi $x_{CĐ}$, x_{CT} lần lượt là hoành độ điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_{CĐ}+x_{CT}=m+5 \\ x_{CĐ}.x_{CT}=m \end{cases}$.

Mặt khác $\left|x_{CĐ}-x_{CT}\right|=5 \Leftrightarrow \left(x_{CĐ}-x_{CT}\right)^2=25$

$$\Leftrightarrow \left(x_{CĐ}+x_{CT}\right)^2-4.x_{CĐ}.x_{CT}=25 \Rightarrow \left(m+5\right)^2-4m=25 \Leftrightarrow m^2+6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-6 \end{array}\right.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=\{0;-6\}$.

Chọn D.

Ví dụ 21: Cho hàm số $y=x^3+\left(2m-1\right)x^2+\left(m+1\right)x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị đồng thời hoành

độ của điểm cực đại không nhỏ hơn -1.

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]\cup\{2\}$.

B. $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)$.

D. $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\{2\}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+(2m-1)x^2+(m+1)x$, ta có $y'=3x^2+2(2m-1)x+m+1;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+2(2m-1)x+m+1=0\quad(*)$.

Để hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=4m^2-7m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-\frac{1}{4}\end{array}\right.\quad(\mathrm{I})$.

Vì hệ số $a=1>0$ nên $x_{CĐ}<x_{CT}$ suy ra $x_{CĐ}=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1-2m-\sqrt{4m^2-7m-2}}{3}$.

Theo bài ra, ta có $x_{CĐ}\ge-1\Leftrightarrow\frac{1-2m-\sqrt{4m^2-7m-2}}{3}\ge-1\Leftrightarrow 1-2m-\sqrt{4m^2-7m-2}\ge-3$.

$\Leftrightarrow\sqrt{4m^2-7m-2}\le 4-2m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le-\frac{1}{4}\\ m=2\end{array}\right.$. Kết hợp (I), ta được $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$.

Chọn C.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN[TT6053]

Câu 1: [532053] Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2-15x-5$ là

A. $(5;-105)$.

B. $(-1;8)$.

C. $(-1;3)$.

D. $(5;-100)$.

Câu 2: [532054] Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2+5$ là

A. $(0;5)$.

B. $(0;0)$.

C. $(2;9)$.

D. $(2;5)$.

Câu 3: [532055] Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ là

A. $(1;1)$. **B.** $(1;0)$.

C. $\left(\frac{1}{3};\frac{31}{27}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{31}{27}\right)$.

Câu 4: [532057] Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=-2x^3+2x^2+2x+5$ là

A. $(1;7)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{125}{27}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3};\frac{125}{27}\right)$. **D.** $(-1;7)$.

Câu 5: [532058] Giả sử hai điểm A,B lần lượt là cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+4$ khi đó độ dài đoạn thẳng AB là

A. $\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 6: [532059] Cho hàm số $y=x^3-3mx+1\ (C)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (C) đạt cực đại tại điểm có hoành độ $x=-1$

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.

C. $\forall m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 7: [532060] Cho hàm số $y=x^3-mx^2+x+1\ (C)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (C) đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ $x=1$

A. $m=1$ **B.** $m=-1$.

C. $m=2$. **D.** $m=-2$.

Câu 8: [532061] Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-2m^2+1(C)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (C) có cực đại, cực tiểu tại x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|=2$

A. $m=1$. **B.** $m=-3$.

C. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 9: [532062] Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+(m^2-3)x\ (C)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (C) có cực đại, cực tiểu tại x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2=6$

A. $m=0$. **B.** $m=1$.

C. $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 10: [532063] Cho hàm số $\frac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(m^2+4m+3)x+6m+9\ (C)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (C) có cực đại tại x_1, cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1^2=x_2$

A. $m=1$.

B. $m=-2$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

D. $m\in\varnothing$.

Câu 11: [532064] Tìm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

A. $y_{cd}=\frac{19}{6};y_{ct}=-\frac{4}{3}$.

B. $y_{cd}=\frac{16}{9};y_{ct}=-\frac{3}{4}$.

C. $y_{cd}=-\frac{19}{6};y_{ct}=-\frac{3}{4}$.

D. $y_{cd}=\frac{19}{6};y_{ct}=\frac{4}{3}$.

Câu 12: [532065] Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số hàm số $y=x^3-3x^2+6$ là:

A. $x_0=4$.

B. $x_0=3$.

C. $x_0=1$.

D. $x_0=2$.

Câu 13: [532066] Giá trị cực đại của hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+2x+2$ là

A. $\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{10}{3}$.

D. -1.

Câu 14: [532067] Cho hàm số $y=-x^3+2x^2-x+4$. Tổng giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số là:

A. $\frac{212}{27}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{121}{27}$.

D. $\frac{212}{72}$.

Câu 15: [532068] Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$. Khoảng cách giữa 2 điểm cực đại, cực tiểu là:

A. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{37}}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{31}}{3}$.

Câu 16: [532069] Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+(m-1)x+6$ đạt cực tiểu tại $x_o=1$ khi

A. $m>2$.

B. $m\geq 2$.

C. $m=2$.

D. $m=-2$.

Câu 17: [532070] Hàm số $y=\frac{x^3}{3}-m\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}$ đạt cực tiểu tại $x_o=2$ khi m bằng:

A. $m=1$.

B. $m=2$.

C. $m=3$.

D. Đáp án khác.

Câu 18: [532071] Cho hàm số $y=x^3-mx^2-mx$. Giả sử hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$. Vậy giá trị của cực tiểu khi đó là:

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. Không tồn tại.

Câu 19: [532072] Cho hàm số $y=4x^3+mx^2-3x+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1=-2x_2$.

A. $m=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $m=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. $m=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

D. Không có giá trị của m.

Câu 20: [532074] Hàm số $y=(m-3)x^3-2mx^2+3$ không có cực trị khi

A. $m=3$.

B. $m=0$ hoặc $m=3$.

C. $m=0$.

D. $m\neq 3$.

Câu 21: [532075] Hàm số $y=x^3-3x^2-9x-7$ đạt cực đại tại:

A. $x=-1$.

B. $x=3$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

D. $\begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases}$.

Câu 22: [532076] Hàm số $y=-x^3+5x^2-3x+12$ có điểm cực tiểu có tọa độ là:

A. $(3;21)$.

B. $(3;0)$.

C. $\left(\frac{1}{3};\frac{311}{27}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{3};0\right)$.

Câu 23: [532077] Hàm số $y=x^3-12x+15$ có 2 điểm cực trị là A và B. Một nửa của độ dài đoạn thẳng AB là:

A. $4\sqrt{65}$. **B.** $2\sqrt{65}$.
C. 1040. **D.** 520.

Câu 24: [532078] Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+nx+1$. Biết đồ thị hàm số nhận điểm $M(-1;4)$ là điểm cực trị. Giá trị của biểu thức $T=m+n$ là:

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 4.
C. $\frac{-16}{3}$ **D.** Không tồn tại m,n.

Câu 25: [532079] Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+1$ (C). Giả sử $x_1;x_2$ là hoành độ các điểm cực trị. Biết $x_1^2+x_2^2=2$. Giá trị của tham số m là:

A. $m=\pm1$. **B.** $m=-1$.
C. $m=1$. **D.** $m=\pm2$.

Câu 26: [532080] Cho hàm số $y=-x^3+2(m+1)x^2+mx+3$. Giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=\frac{4}{3}$ là:

A. $m=0$. **B.** $m=1$.
C. $m=2$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 27: [532081]Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m-1)x$. Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=-1$?

A. $m=0$. **B.** $m=-1$.
C. $m=\varnothing$. **D.** Đáp án khác.

Câu 28: [532082] Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía của trục tung ?

A. $m<0$. **B.** $m>0$.
C. $m=0$. **D.** $m=1$.

Câu 29: [532083] Đồ thị hàm số $y=x^3-9x^2+24x+4$ có các điểm cực tiểu và điểm cực đại lần lượt là $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Giá trị của biểu thức $x_1y_2-x_2y_1$ là:

A. -56. **B.** 56.
C. 136. **D.** -136.

Câu 30: [532084] Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-4x^2+3x-1$.

A. $y=-\frac{14}{9}x+\frac{1}{3}$.

B. $y=-\frac{14}{9}x-\frac{1}{3}$.

C. $y=\frac{14}{9}x+\frac{1}{3}$.

D. $y=\frac{14}{9}x-\frac{1}{3}$.

Câu 31: [532085] Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-5x^2+4x-1$. Giá trị của biểu thức $\left|y(x_1)+y(x_2)\right|$ **gần với giá trị nào sau đây nhất** ?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Câu 32: [532086] Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$ (C_m). Các mệnh đề dưới đây:

(a) Hàm số (C_m) có một cực đại và một cực tiểu nếu $m\neq 1$.

(b) Nếu $m>1$ thì giá trị cực tiểu là $3m-1$.

(c) Nếu $m<1$ thì giá trị cực đại là $3m-1$.

Mệnh đề nào **đúng** ?

A. Chỉ (a) đúng.

B. (a) và (b) đúng, (c) sai.

C. (a) và (c) đúng, (b) sai.

D. (a), (b), (c) đều đúng.

Câu 33: [532087] Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+m$ đạt cực đại tại $x=2$.

A. $m=2$.

B. $m=3$.

C. $m=1$.

D. $m=4$.

Câu 34: [532088] Toạ độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2-12x+1$ là:

A. $(-1;8)$.

B. $(2;-19)$.

C. $(-1;2)$.

D. $(2;-1)$.

Câu 35: [532090] Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ lần lượt là toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+1$. Giá trị của biểu thức $T=\frac{x_1}{y_2}-\frac{x_2}{y_1}$ bằng:

A. $-\frac{7}{18}$.

B. $\frac{7}{13}$.

C. $\frac{6}{13}$.

D. $-\frac{6}{18}$.

Câu 36: [532091]Gọi A,B là toạ độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+2\ (C)$ Độ dài AB là:

A. $2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $5\sqrt{2}$.

Câu 37: [532092]Cho hàm số có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	||	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng.

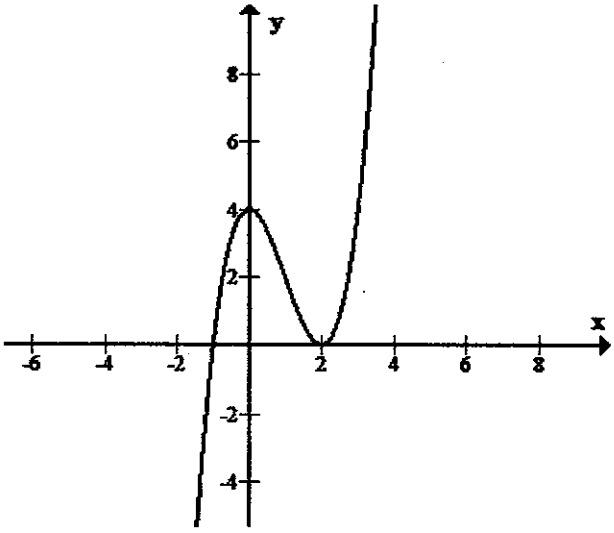
A. Hàm số đã cho có một điểm cực trị tại $x=-1$.

B. Giá trị của cực đại là $y_{CD}=4$ và giá trị của cực tiểu là $y_{CT}=0$.

C. Giá trị của cực đại là $y_{CD}=+\infty$ và giá trị của cực tiểu là $y_{CT}=-\infty$.

D. Hàm số đã cho không đạt cực trị tại điểm $x=1$.

Câu 38: [532093]Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng.



A. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=4$ và cực tiểu tại $x=2$

B. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=4$

C. Giá trị của cực đại là $y_{CD}=4$ và giá trị của cực tiểu là $y_{CT}=2$

D. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ và có giá trị của cực tiểu là $y_{CT}=0$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	02. C	03. A	04. B	05. D	06. B	07. C	08. C	09. A	10. C
11. A	12. D	13. C	14. A	15. B	16. A	17. B	18. B	19. A	20. C
21. A	22. C	23. B	24. C	25. B	26. D	27. A	28. A	29. B	30. A
31. B	32. A	33. B	34. B	35. C	36. B	37. B	38. D		

VẤN ĐỀ 3: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG (BẬC BỐN) [TV6051]

1. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

✪ Xét hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ với hệ số $a \neq 0$.

Ta có một số kết quả sau:

- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.
- Hàm số có một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

✪ Một số công thức tính nhanh liên quan đến cực trị của hàm số bậc bốn.

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ và hàm số có ba điểm cực trị.

Khi đó gọi $A(0;c)$, $B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$; $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ với $\Delta = b^2 - 4ac$.

Xét ΔABC cân, đặt $BAC = \alpha$, ta có

$$8a(1+\cos\alpha) + b^3(1-\cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3+8a}{b^3-8a}.$$

Và diện tích $S = \frac{1}{4}.\frac{b^2}{|a|}.\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là

$$x^2 + y^2 - (c+n)x + cn = 0 \text{ với } n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}.$$

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(ab < 0)$ có ba điểm cực trị $A \in Oy$, B, C tạo thành:

ĐỦ KIỆN GIẢ THIẾT	CÔNG THỨC TÍNH NHANH
Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0.$
Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0.$
$BAC = \alpha$	$8a + b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0.$
$S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3.(S_0)^2 + b^5 = 0.$
$r_{\Delta ABC} = r_0$ (bán kính đường tròn nội tiếp)	$r_0 = \dfrac{b^2}{\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)}.$
$BC = m_0$	$a.m_0^2 + 2b = 0.$
$AB = AC = n_0$	$16a^2.n_0^2 - b^4 + 8b = 0.$
$B, C \in Ox$ (ba điểm cực trị nằm trên cùng một trục tọa độ)	$b^2 - 4ac = 0.$
Tam giác có trọng tâm $O(0;0)$ (gốc tọa độ)	$b^2 - 6ac = 0.$
Tam giác có trực tâm $O(0;0)$ (gốc tọa độ)	$b^3 + 8a - 4ac = 0.$
$R_{\Delta ABC} = R_0$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp)	$R_0 = \dfrac{b^3 - 8a}{8\lvert a\rvert b}.$

2. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 6$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Cực tiểu của hàm số đã cho là 0.

B. Cực đại của hàm số đã cho là -2.

C. Cực tiểu của hàm số đã cho là 6.

D. Cực đại của hàm số đã cho là 6.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 6$, ta có

$$y' = 4x^3 - 16x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y(0) = 6 \\ x = \pm 2 \Rightarrow y(\pm 2) = -10 \end{array}\right..$$

Mặt khác $y'' = 8x^2 - 16$ suy ra $\begin{cases} y''(0) = -16 \\ y''(\pm 2) = 16 \end{cases} \Rightarrow$ cực đại của hàm số đã cho là 6.

Chọn D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3 \quad (C)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Đồ thị (C) đi qua điểm cực tiểu $A(0;3)$.

B. Đồ thị (C) có duy nhất một điểm cực trị.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

D. Giá trị cực đại của hàm số bằng -1.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$, ta có

$$y' = 4x^3 - 8x \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y(0) = 3 \\ x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y(\pm\sqrt{2}) = -1 \end{array}\right..$$

Lại có, hệ số $a = 1 > 0$ suy ra $A(0;3)$ là điểm cực đại của đồ thị (C).

Và giá trị cực tiểu của hàm số bằng $y(\pm\sqrt{2}) = -1$.

Mặt khác $x^4 - 4x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 4 - 1 = (x^2 - 2)^2 - 1 \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \min y = -1$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Đồ thị hàm số $y = 3x^4 - 2x^2 + 2017$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành tam giác cân tại A. Khi đó, số đo góc BAC bằng

A. 120^0. **B.** 90^0.

C. 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Áp dụng công thức giải nhanh $BAC=\alpha \to 8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0.$

Với hệ số $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$ suy ra $\tan^2\frac{\alpha}{2}=-\frac{8a}{b^3}=3 \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=60^0 \Rightarrow \alpha=120^0$.

Vậy số đo góc BAC bằng 120^0.

Chọn A.

Ví dụ 4: Parabol (P) đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+3$ và cắt đường thẳng $d: y=2x-1$ tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Tính giá trị biểu thức $P=x_A.y_B+x_B.y_A$, với $x_A>x_B$.

A. $P=7$. **B.** $P=-7$.

C. $P=-3$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-4x^2+3$, ta có $y'=4x^3-8x=4(x^3-2x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x=0$.

Khi đó, hoành độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Ta xét $y=x^4-4x^2+3=x^4-2x^2+3-2x^2=x\left(\underbrace{x^3-2x}_{y'=0}\right)+3-2x^2$.

Suy ra $y=3-2x^2$ là phương trình parabol (P) đi qua ba điểm cực trị.

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và d là $3-2x^2=2x-1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy $\begin{cases} x_A=1 \Rightarrow y_A=1 \\ x_B=-2 \Rightarrow y_B=-5 \end{cases} \Rightarrow P=x_A.y_B+x_B.y_A=-7.$

Chọn B.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-2$ (1). Gọi A,B,C lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Tính diện tích tam giác ABC (đơn vị diện tích).

A. $S_{\Delta ABC}=1$. **B.** $S_{\Delta ABC}=2$.

C. $S_{\Delta ABC}=4$. **D.** $S_{\Delta ABC}=\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có $y' = 4x^3 - 4x;\ y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Khi đó $A(0;-2)$, $B(1;-3)$, $C(-1;-3)$ suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.d(A;BC).BC = 1$.

Cách 2. Sử dụng công thức giải nhanh $S_{\Delta ABC} = S_0 \to 32a^3.(S_0)^2 + b^5 = 0$.

Với hệ số $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ suy ra $(S_0)^2 = -\frac{b^5}{32a^3} = -\frac{(-2)^5}{32} = 1 \Rightarrow S_0 = 1$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng 1.

Chọn A.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có đồ thị (C). Gọi I là tâm đường tròn (T) đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số và điểm $M(1;0)$. Độ dài đoạn thẳng IM bằng

A. $IM = \sqrt{2}$. **B.** $IM = 2$. **C.** $IM = \sqrt{3}$. **D.** $IM = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$, ta có $y' = 4x^3 - 4x;\ y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Khi đó $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(1;-1)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi phương trình đường tròn đi qua ba điểm (ABC) là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (T)$

Vì $A, B, C \in (T)$ nên ta có $\begin{cases} 4 - 4b + c = 0 \\ 2 - 2a - 2b + c = 0 \\ 2 - 2a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow (T): (x+1)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow I(-1;0)$

là tâm đường tròn $(T) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2;0) \Rightarrow IM = 2$.

Chọn B.

Ví dụ 7: Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ đạt cực đại tại $A(0;-3)$ và cực tiểu $B(-1;-5)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + 2b + 3c$.

A. $P = -5$. **B.** $P = -9$. **C.** $P = -15$. **D.** $P = 3$.

Lời giải

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$ và $y'' = 12ax^2 + 2b;\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm cực đại $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu $B(-1;-5)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(0)=y'(-1)=0 \\ y(0)=-3;\ y(-1)=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b=0 \\ c=-3 \\ a+b+c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow P=a+2b+3c=-15.$$

Chú ý: Với $a=2;\ b=-4;\ c=-3$ ta được $y=2x^4-4x^2-3 \to y''(0)=-8<0 \Rightarrow x=0$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn C.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+m$ có đồ thị là (C). Gọi A là điểm cực đại của đồ thị hàm số (C), điểm $B(m-1;m^2-m)$ với $m\ge -1$. Gọi m_1, m_2 là hai giá trị sao cho độ dài AB ngắn nhất, tổng m_1+m_2 bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-2x^2+m$, ta có $y'=4x^3-4x;\ y'=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Vì hệ số $a=1>0$ nên $A(0;m)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Ta có $B(m-1;m^2-m) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(m-1;m^2-2m) \Rightarrow AB=\sqrt{(m-1)^2+(m^2-2m)^2}$

Đặt $t=m^2-2m+1=(m-1)^2\ge 0$, khi đó $AB=\sqrt{t+(t-1)^2}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ge \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AB_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2-2m+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow m_1+m_2=2$.

Chọn B.

Ví dụ 9: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+3m+1$ chỉ có đúng một cực trị.

A. $0\le m\le 1$.

B. $m\ge 1$.

C. $m\le 0$.

D. $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le 0 \end{array}\right.$.

Lời giải

TH1. Với $m=0$, khi đó hàm số trở thành $y=1-x^2$ là hàm số bậc hai nên có duy nhất một điểm cực trị, hệ số $a=-1<0$ nên hàm số có điểm cực đại.

TH2. Với $m\neq 0$, xét hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+3m+1$, ta có $y'=4mx^3+2(m-1)x$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4mx^3+2(m-1)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2mx^2=1-m\quad(*)\end{array}\right.$

Để hàm số có duy nhất một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=0$ hoặc phương trình $(*)$ vô nghiệm. Khi đó $\left[\begin{array}{l}1-m=0\\\dfrac{1-m}{2m}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m>1\\m<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 1\\m<0\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m\geq 1\\m\leq 0\end{array}\right.$ là giá trị để hàm số đã cho có đúng một cực trị.

Chọn D.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ là nhỏ nhất.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-2x^2$, ta có $y'=4x^3-4x$; $y'=0\Leftrightarrow x(x^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1\end{array}\right.$.

Suy ra $A(0;0)$, $B(1;-1)$, $C(-1;-1)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Phương trình đường thẳng Δ có hệ số góc m và đi qua điểm A là $y=mx\Leftrightarrow mx-y=0$.

Ta có $d(B;(\Delta))=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$; $d(C;(\Delta))=\dfrac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$, khi đó

$$T=d_{B\to\Delta}+d_{C\to\Delta}=\frac{|m+1|+|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{T}{\sqrt{2}}=\frac{|m+1|+|m-1|}{\sqrt{(m+1)^2+(m-1)^2}}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{ với }\begin{cases}a=|m+1|\geq 0\\b=|m-1|\geq 0\end{cases}\Rightarrow ab\geq 0.$$

Mặt khác $2ab \ge 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge a^2+b^2 \Leftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \ge 1 \Rightarrow \dfrac{T}{\sqrt{2}} \ge 1 \Leftrightarrow T \ge \sqrt{2} \Rightarrow T_{\min} = \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |m+1|=0 \\ |m-1|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Chọn D.

Ví dụ 11: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$ có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu và thỏa mãn khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3-4(m^2-m+1)x=4x\left[x^2-(m^2-m+1)\right]$;

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x\left[x^2-(m^2-m+1)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m^2-m+1} \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị có hai điểm cực tiểu là $A\left(-\sqrt{m^2-m+1}; y_{CT}\right)$ và $B\left(\sqrt{m^2-m+1}; y_{CT}\right)$.

Khi đó $AB^2=4(m^2-m+1)=4\left[\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right] \ge 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 12 [ĐỀ THI MINH HỌA THPT QUỐC GIA – BGD]: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4+2mx^2+1$, ta có $y'=4x^3+4mx;\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow 4x(x^2+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \quad (*) \end{array}\right.$

Đề đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi $-m>0 \Leftrightarrow m<0$.

Khi đó, gọi $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{-m};-m^2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{-m};-m^2\right)$.

Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow m+m^4=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Hoặc sử dụng công thức tính nhanh với hàm số $y=ax^4+bx^2+c=x^4+2mx^2+1 \Rightarrow \begin{cases} a=c=1 \\ b=2m \end{cases}$

Tam giác ABC vuông cân $8a+b^3=0 \Leftrightarrow 8+(2m)^3=0 \Leftrightarrow m^3=-1 \Leftrightarrow m=-1$.

Chọn B.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2-4$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị của m để tất cả các điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên các trục tọa độ.

A. $m \le 0$.

B. $m=2$.

C. $m>0$.

D. $m \le 0$ hoặc $m=2$.

Lời giải

Ta có $y'=-4x^3+4mx=-4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;-4)\in Oy$, $\begin{cases} B\left(-\sqrt{m};m^2-4\right) \\ C\left(\sqrt{m};m^2-4\right) \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow B,C\in Ox \Leftrightarrow m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=-2 & (L) \\ m=2 & (tm) \end{array}\right.$.

Chọn B.

Ví dụ 14: Giá trị của tham số m bằng bao nhiêu để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\pm 4$.

B. $m=\sqrt{2}$.

C. $m=4$.

D. $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Suy ra tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{m};1-m^2\right)$

Yêu cầu bài toán: $BC = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Chọn C.

Ví dụ 15: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{2}{3}$. **B.** $m = \frac{2}{3}$. **C.** $m = -\frac{1}{3}$. **D.** $m = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $y' = x^3 - 2(3m+1)x = x\left[x^2 - 2(3m+1)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow 2(3m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Khi đó đồ thị có ba điểm cực trị là

$$A(0;2(m+1)),\ B\left(-\sqrt{2(3m+1)};-9m^2-4m+1\right) \text{ và } C\left(\sqrt{2(3m+1)};-9m^2-4m+1\right).$$

Suy ra tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G = \left(0;\frac{2(m+1)+2\left(-9m^2-4m+1\right)}{3}\right)$

Yêu cầu bài toán: $G \equiv O \Leftrightarrow 2(m+1) + 2\left(-9m^2 - 4m + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = \frac{1}{3} & (tm) \\ m = -\frac{2}{3} & (L) \end{array}\right.$.

Chọn D.

Ví dụ 16: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 2$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 thì giá trị của m là

A. $m = -2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 4$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 2$, có $y' = 4x^3 - 2mx;\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ 2x^2 = m & (*) \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó, gọi $A(0; m-2)$, $B(x_B; y)$, $C(x_C; y)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Với x_B, x_C là hai nghiệm của phương trình $(*) \Rightarrow x_B = -x_C = \sqrt{\frac{m}{2}}$ và $y = -\frac{m^2}{4} + m - 2$.

Tam giác ABC cân tại A có $AB = AC$ suy ra $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{2AB + BC}{2}$.

Gọi H là trung điểm của BC suy ra $AH \perp BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AH.BC$.

Mặt khác, bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 1 suy ra $S_{\Delta ABC} = p$.

Ta có $AB = \sqrt{\frac{m}{2} + \frac{m^4}{16}}$, $AH = \frac{m^2}{4}$, $BC = \sqrt{2m}$ suy ra $2\sqrt{\frac{m}{2} + \frac{m^4}{16}} + \sqrt{2m} = \frac{m^2\sqrt{2m}}{4}$

Thay các giá trị m ở đáp án, ta thấy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Chọn D.

Ví dụ 17: Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị $A(0;2)$, $B(1;m)$. Biểu thức $P = 2(a^2 - m^2) - b^2$ đạt giá trị lớn nhất khi $a + b + c + m$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A(0;2)$, $B(1;m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(1) = 0 \\ y(1) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 & \\ 2a + b = 0 & (1) \\ a + b = m - 2 & (2) \end{cases}.$$

Lấy $(1) - 2\times(2)$, ta được $(2a+b)^2 - 2(a+b)^2 = -2(m-2)^2 \Leftrightarrow 2a^2 - b^2 = -2(m-2)^2$.

Khi đó $P = 2a^2 - b^2 - 2m^2 = -2(m-2)^2 - 2m^2 = -4 - 4(m-1)^2 \le -4 \Rightarrow P_{\max} = -4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=1$. Vậy $\begin{cases}2a+b=0\\a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Rightarrow P=a+b+c+m=2.$

Chọn B.

Ví dụ 18: Biết đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+m$ có ba điểm cực trị là A, B, C. Tìm giá trị thực của tham số m sao cho tam giác ABC bị hai trục tọa độ Ox, Oy chia thành bốn phần có diện tích bằng nhau.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-2x^2+m$, ta có $y'=4x^3-4x,\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị lần lượt là $A(0;m)$ và $B(-1;-1+m), C(1;-1+m)$.

Đặt $AB\cap Ox=D,\ BC\cap Oy=H$ thì hai tam giác AOD, ABH đồng dạng.

Theo bài ra, tỷ lện đồng dạng này phải là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên

$$m=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|m-(-1+m)\right|\Leftrightarrow m\sqrt{2}=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn B.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6054].

Câu 1: [532112] Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+3$ là

A. $(0;-3)$. **B.** $(1;2)$.
C. $(-1;2)$. **D.** $(0;3)$.

Câu 2: [532117] Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-x^4+8x^2+1$ là

A. $(2;17)$. **B.** $(-2;17)$.
C. $(0;1)$. **D.** $(2;17)$ và $(-2;17)$.

Câu 3: 532118] Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-x^4+6x^2+9$ là

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 4: [532120] Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 6$ là

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 5: [532121] Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 - 6x^2 - 9$ là

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 6: [532128] Cho hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + m^2 - m + 1\ (C)$. Tìm m để đồ thị hàm số (C) chỉ có một cực trị

A. $m < 0$. **B.** $m \le 0$.
C. $m \ge 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$.

Câu 7: [532129] Cho hàm số $y = x^4 - (m-1)x^2 + m^3 + 1\ (C)$. Tìm m để đồ thị hàm số (C) không có cực đại

A. $m = 1$. **B.** $m > 1$.
C. $m \le 1$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 8: [532142] Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1\ (C)$. Tìm m để đồ thị hàm số (C) có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất

A. $m \ge 1$. **B.** $m \le 1$.
C. $m = 1$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Câu 9: [532143] Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m\ (C)$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1

A. $m = 1$. **B.** $m = 0$.
C. $m = -2$. **D.** $m = 2$.

Câu 10: [532144] Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **B.** $m = 2$.
C. $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Câu 11: [532154] Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5$ có mấy điểm cực trị có hoành độ lớn hơn -1 ?

A. 0. **B.** 1.
C. 2 **D.** 3.

Câu 12: [532155] Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số chỉ có cực đại.

B. Hàm số chỉ có cực tiểu.

C. Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D. Hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Câu 13: [532130] Cho hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + 15$. Tung độ của điểm cực tiểu của hàm số là:

A. 15. **B.** 24.
C. 0. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 14: [532145] Cho hàm số $y = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$. Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực tiểu của hàm số là:

A. $y = \frac{15}{16}$. **B.** $x = \frac{7}{16}$.
C. $y = \pm\frac{1}{2}$. **D.** $y = \frac{1}{4}x + 1$..

Câu 15: [532147] Gọi A là điểm cực đại, B,C là 2 điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 35$. Tọa độ chân đường cao hạ từ A của ΔABC là:

A. $(4;-29)$. **B.** $(-2;7)$..
C. $(0;-29)$. **D.** $(2;7)$.

Câu 16: [532156] Cho hàm số $y = -x^4 - 2mx^2 + 2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $m < 0$. **B.** $m \geq 0$.
C. $m \geq 1$. **D.** $m = \varnothing$.

Câu 17: [532157] Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2m + 2$ (C). Với giá trị nào của m thì hàm số có 3 điểm cực trị tại A,B,C sao cho tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm?

A. $m=\frac{1}{3}$.

B. $m=\frac{-2}{3}$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{3} \\ m=\frac{-2}{3} \end{array}\right.$.

D. $m=\varnothing$.

Câu 18: [532158] Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (C)$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 3 điểm cực trị tại A,B,C sao cho $OA+OB+OC=3$ với O là gốc tọa độ.

A. $m=0$.

B. $m=1$.

C. $m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

D. Cả **A, B** đều đúng.

Câu 19: [532160] Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2+1$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của tam giác vuông cân ?

A. $m=0$.

B. $m=1$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

D. $m=-1$.

Câu 20: [532161] Cho hàm số $y=x^4-8m^2x^2+1$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của tam giác có diện tích bằng 64 ?

A. $m=\pm\sqrt{2}$.

B. $m=\pm\sqrt[3]{2}$.

C. $m=\pm\sqrt[5]{2}$.

D. $m=\pm 2$.

Câu 21: [532162] Cho hàm số $y=-x^4+4x^2+1\,(C)$. Toạ độ điểm cực tiểu của (C) là

A. $(0;0)$.

B. $(0;1)$.

C. $(\sqrt{2};5)$ và $(-\sqrt{2};5)$.

D. $(1;0)$.

Câu 22: [532122] Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2\,(C)$. Toạ độ điểm cực tiểu của (C) là:

A. $\left(1;\frac{1}{4}\right)$ và $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$.

B. $(0;-2)$.

C. $(2;-2)$ và $(-2;-2)$.

D. $(0;2)$.

Câu 23: [532123] Cho các hàm số sau: $y=x^4+1\ (1)$; $y=-x^4-x^2+1\ (2)$; $y=x^4-2x^2\ (3)$. Đồ thị hàm số nhận điểm $A(0;1)$ là điểm cực trị là :

A. (1) và (2). **B.** (1) và (3).

C. Chỉ có (3). **D.** Cả $(1);(2);(3)$.

Câu 24: [532127] Giả sử hàm số $y=\left(x^2-1\right)^2$ có a điểm cực trị, Hàm số $y=x^4+3$ có b điểm cực trị và hàm số $y=-x^4-4x^2-4$ có c điểm cực trị. Tổng $a+b+c$ bằng:

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 25: [532146] Gọi A,B,C là toạ độ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$. Chu vi tam giác ABC bằng:

A. $4\sqrt{2}+2$. **B.** $2\sqrt{2}+1$.

C. $2\left(\sqrt{2}+1\right)$. **D.** $1+\sqrt{2}$.

Câu 26: [532149] Cho hàm số có dạng $y=(m-1)x^4+\left(m^2-1\right)x^2+2\,(C)$. Khẳng định nào sau đây là **sai:**

A. Hàm số đã cho không thể có 2 điểm cực trị với mọi $m\in R$.

B. Điểm $A(0;2)$ luôn là một điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho với mọi $m\in R$.

C. Hàm số đã cho có tối đa 3 điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho luôn có cực trị với mọi giá trị của *m*.

Câu 27: [532150] Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (C)$. Giá trị của *m* để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tại A,B,C sao cho $OA=BC$ (với A là điểm cực trị thuộc trục tung) là:

A. $m=\frac{1}{4}$. **B.** $m=\pm\frac{1}{4}$.

C. $m=\pm 2$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 28: [532152] Cho hàm số $y=x^4+ax^2+b$. Biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1;4)$ là điểm cực tiểu. Tổng $2a+b$ bằng:

A. -1. **B.** 0.

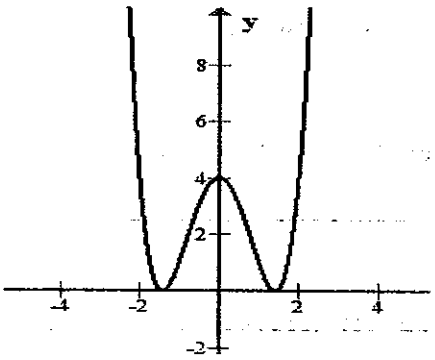
C. 1. **D.** 2.

Câu 29: [532163] Cho hàm số $y=(m-1)x^4+\left(m^2-4\right)x^2+1$. Điều kiện để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

A. $m\in(0;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $m\in(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-2)\cup(1;2)$. **D.** $m\in\mathbb{R}/\{1\}$.

Câu 30: [532165] Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + n$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của m và n lần lượt là:



A. $m = 1; n = 4$.

B. $m = n = 4$.

C. $m = -3; n = 4$.

D. $m = 2; n = 4$

Câu 31: [532166] Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 1$ có tọa độ là ?

A. $\left(\sqrt{2}; -5\right)$.

B. $(0; -1)$.

C. $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{5}\right)$.

D. $\left(\pm\sqrt{2}; -\sqrt{5}\right)$.

Câu 32: [532124] Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 4$ là ?

A. $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

B. $(0; 4)$.

C. $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

D. $(1; 2)$.

Câu 33: [532125] Đường thẳng đi qua điểm $M(1; 4)$ và điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ có phương trình là ?

A. $x = 4$.

B. $y = 4$.

C. $x = 1$.

D. $x - 2y + 7 = 0$.

Câu 34: [532126] Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ đạt cực đại tại $x = a$, đạt cực tiểu tại $x = b$. Tổng $a + b$ bằng ?

A. 1 hoặc 0.

B. 0 hoặc -1.

C. -1 hoặc 2.

D. 1 hoặc -1.

Câu 35: [532132] Tích giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ bằng ?

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. $-\frac{9}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 36: [532133] Tìm giá trị của m để hàm số $y = x^4 + mx^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. $m \le 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \ge 0$.

D. $m > 0$.

Câu 37: [532135] Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$ là :

A. $x + y - 14 = 0.$ **B.** $y + 13 = 0.$

C. $x + y - 3 = 0.$ **D.** $y = 3.$

Câu 38: [532136] Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích của tam giác ABC.

A. $S = 4.$ **B.** $S = 2.$

C. $S = 1.$ **D.** $S = \frac{1}{2}.$

Câu 39: [532138] Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ và các khẳng định sau :

(1). Nếu $ab \geq 0$ thì hàm số có đúng một điểm cực trị.

(2). Nếu $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

(3). Nếu $a < 0 < b$ thì hàm số có một cực đại, hai cực tiểu.

(4). Nếu $b < 0 < a$ thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.

Trong các khẳng định trên, những khẳng định nào đúng ?

A. 1, 2, 3. **B.** 1, 2, 4.

C. 1, 3, 4. **D.** 2, 3, 4.

Câu 40: [532140] Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + 3$ (C_m). Biết hàm số (C_m) có giá trị cực tiểu bằng -1 và giá trị cực đại bằng 3. Tìm giá trị của số thực m thỏa mãn yêu cầu đề bài ?

A. $m = 2.$ **B.** $m = -2.$

C. $m = 3.$ **D.** $m = 4.$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	02. D	03. C	04. D	05. B	06. D	07. C	08. D	09. D	10. B
11. C	12. B	13. A	14. A	15. C	16. B	17. A	18. D	19. B	20. C
21. B	22. A	23. A	24. A	25. C	26. B	27. A	28. C	29. C	30. B
31. B	32. C	33. B	34. D	35. B	36. C	37. B	38. C	39. B	40. A

Chủ đề 3

Vấn đề 1. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT & NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

[TV6055-TV6056]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Một số kiến thức mở đầu

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D.

+ Nếu có $x_0 \in D$ mà $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in D$ thì $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$.

Kí hiệu $\max\limits_{x \in D} y = M$.

+ Nếu có $x_0 \in D$ mà $f(x) \ge f(x_0)$, $\forall x \in D$ thì $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$.

Kí hiệu $\min\limits_{x \in D} y = m$.

2. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Đối với bài toán tìm GTLN và GTNN của hàm số, ta có một cách làm tổng quát đó là lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó đưa ra kết luận. Các bước cơ sở của cách làm này như sau:

+ *Bước 1.* Đưa ra tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

+ *Bước 2.* Tính đạo hàm y' và giải phương trình $y' = 0 \rightarrow$ các nghiệm.

+ *Bước 3.* Lập bảng biến thiên và kết luận.

➢ **Lưu ý quan trọng**

Nếu đề bài yêu cầu tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ mà hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có thể làm nhanh như sau mà không cần lập bảng biến thiên:

+ *Bước 1.* Tính đạo hàm y' và giải $\begin{cases} x \in (a;b) \\ y' = 0 \end{cases} \rightarrow$ các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$.

+ *Bước 2.* Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ và so sánh kết quả, kết quả nào lớn nhất thì đó chính là GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, kết quả nào nhỏ nhất thì đó chính là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Với cách làm này, ta đặc biệt lưu ý đến tính xác định và liên tục của hàm số trên một đoạn. Chẳng hạn, hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ không xác định và không liên tục trên $[0;2]$, việc sử dụng cách làm trên để tìm GTLN và GTNN của $y = \frac{1}{x-1}$ trên $[0;2]$ là hoàn toàn sai lầm.

Nếu đề bài yêu cầu tìm GTLN và GTNN của hàm số mà không nói gì thêm thì ta hiểu là tìm GTLN và GTNN của hàm số trên tập xác định.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\min\limits_{[1;3]} y = -3$.

B. $\min\limits_{[1;3]} y = -1$.

C. $\min\limits_{[1;3]} y = 1$.

D. $\min\limits_{[1;3]} y = 2$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[1;3]$.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1$; $\begin{cases} x \in (1;3) \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Mà $y(1) = -1$; $y(3) = 11 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} y = -1$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{[0;2]} y = 5$.

B. $\max\limits_{[0;2]} y = \frac{19}{2}$.

C. $\max\limits_{[0;2]} y = 13$.

D. $\max\limits_{[0;2]} y = 20$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[0;2]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $\begin{cases} x \in (0;2) \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Mà $y(0) = 5$; $y(2) = 13$; $y(1) = 4 \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y = 13$.

Chọn C.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;4]$.

A. $\max\limits_{[0;4]} y=\dfrac{7}{6}$.

B. $\max\limits_{[0;4]} y=\dfrac{1}{3}$.

C. $\max\limits_{[0;4]} y=\dfrac{4}{3}$.

D. $\max\limits_{[0;4]} y=1$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[0;4]$.

Ta có $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\in(0;4)$. Mà $y(0)=-\dfrac{1}{2};\ y(4)=\dfrac{7}{6}\Rightarrow \max\limits_{[0;4]} y=\dfrac{7}{6}$.

Chọn A

Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{16}{x}$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $\min\limits_{[1;4]} y=17$.

B. $\min\limits_{[1;4]} y=12$.

C. $\min\limits_{[1;4]} y=20$.

D. $\min\limits_{[1;4]} y=10$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[1;4]$.

Ta có $y'=2x-\dfrac{16}{x^2};\ \begin{cases}x\in(1;4)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(1;4)\\ 2x^3=16\end{cases}\Leftrightarrow x=2$. Mà $y(1)=17;\ y(4)=20;\ y(2)=12\Rightarrow \min\limits_{[1;4]} y=12$.

Chọn B

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

A. $\max\limits_{[0;4]} y=4$.

B. $\max\limits_{[0;4]} y=\dfrac{10}{3}$.

C. $\max\limits_{[0;4]} y=6$.

D. $\max\limits_{[0;4]} y=\dfrac{24}{5}$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[0;4]$.

Ta có $y=\dfrac{x(x+1)+4}{x+1}=x+\dfrac{4}{x+1}\Rightarrow y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2};\ \begin{cases}x\in(0;4)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;4)\\ (x+1)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Mà $y(0)=4;\ y(4)=\dfrac{24}{5};\ y(1)=3\Rightarrow \max\limits_{[0;4]} y=\dfrac{24}{5}$.

Chọn D

Ví dụ 6. [Trích đề minh họa lần 1 năm 2017 của BGD & ĐT] Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=6$.

B. $\min\limits_{[2;4]} y=-2$.

C. $\min\limits_{[2;4]} y=-3$.

D. $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[2;4]$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-1+4}{x-1}=x+1+\dfrac{4}{x-1}\Rightarrow y'=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}$; $\begin{cases}x\in(2;4)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(2;4)\\ (x-1)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$

Mà $y(2)=7;\ y(4)=\dfrac{19}{3};\ y(3)=6\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=6.$

Chọn A

Ví dụ 7. Kí hiệu M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$. Tính giá trị của biểu thức $S=M^2+2m^2$.

A. $S=20$.

B. $S=12+2\sqrt{3}$.

C. $S=16$.

D. $S=12+4\sqrt{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $-2\le x\le 2$.

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-2;2]$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$; $\begin{cases}x\in(-2;2)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-2;2)\\ 2+x=2-x\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$

Mà $y(-2)=2;\ y(2)=2;\ y(0)=2\sqrt{2}\Rightarrow M=2\sqrt{2},\ m=2\Rightarrow S=16.$

Chọn C

Ví dụ 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{4-x^2}$ bằng ?

A. 2.

B. $1+3\sqrt{3}$.

C. $6+2\sqrt{2}$.

D. $4+2\sqrt{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$.

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-2;2]$.

Đặt $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \ge 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2+x)(2-x)} = 4 + 2\sqrt{4-x^2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{4-x^2} = t^2 - 4 \Rightarrow y = t + t^2 - 4.$

Theo ví dụ trên, ta có ngay $2 \le t \le 2\sqrt{2} \Rightarrow t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 4$, với $t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$ ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0,\ \forall t \in \left(2;2\sqrt{2}\right)$.

Mà $f(2) = 2; f\left(2\sqrt{2}\right) = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \max\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]} f(t) = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y = 4 + 2\sqrt{2}.$

Chọn D

Nhận xét

Ta có thể khảo sát trực tiếp hàm số $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{4-x^2}$ trên đoạn $[-2;2]$ như sau:

Xét hàm số $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{4-x^2}$, với $x \in [-2;2]$ có

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Do đó $\begin{cases} x \in (-2;2) \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;2) \\ \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} - 4x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;2) \\ \dfrac{2-x-(2+x)}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}} - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;2) \\ -2x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}} + 2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Mà $y(-2) = 2; y(2) = 2; y(0) = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y = 4 + 2\sqrt{2}.$

Chọn D

Ví dụ 9. Kí hiệu M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{9-x^2}$. Tính giá trị của biểu thức $S = 2M^2 + m^3$.

A. $S = 9$.

B. $S = 63$.

C. $S = -9$.

D. $S = 18 + 54\sqrt{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $9-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$.

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-3;3]$.

Ta có $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$; $\begin{cases} x\in(-3;3) \\ y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;3) \\ \sqrt{9-x^2}=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;3) \\ \begin{cases} x\ge 0 \\ 9-x^2=x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Mà $y(-3)=-3$; $y(3)=3$; $y\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2} \Rightarrow M=3\sqrt{2}$, $m=-3 \Rightarrow S=9$.

Chọn A

Ví dụ 10. [THPT Chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x+3\sqrt{9-x^2}$ bằng ?

A. -6. **B.** -9.
C. 9. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $9-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$.

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-3;3]$.

Ta có $y'=2-\dfrac{3x}{\sqrt{9-x^2}}$; $\begin{cases} x\in(-3;3) \\ y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;3) \\ 2\sqrt{9-x^2}=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;3) \\ \begin{cases} x\ge 0 \\ 4(9-x^2)=9x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

Mà $y(-3)=-6$; $y(3)=6$; $y\left(\dfrac{6}{\sqrt{13}}\right)=3\sqrt{13} \Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} y=-6$.

Chọn A

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

D. Hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Điều kiện: $4x-x^2\ge 0\Leftrightarrow x(4-x)\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le 4.$

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[0;4]$.

Ta có $y'=\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}$; $\begin{cases}x\in(0;4)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Mà $y(0)=0;\ y(4)=0;\ y(2)=2\Rightarrow \max\limits_{[0;4]} y=2;\ \min\limits_{[0;4]} y=0.$

Chọn C

Ví dụ 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x(\ln x-2)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$.

A. $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=e-2.$

B. $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=-e$

C. $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=-2.$

D. $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=-1-\dfrac{1}{2}\ln 2.$

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$.

Ta có $y=x\ln x-2x\Rightarrow y'=\ln x+x.\dfrac{1}{x}-2=\ln x-1.$

Do đó $\begin{cases}x\in\left(\dfrac{1}{2};e\right)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(\dfrac{1}{2};e\right)\\ \ln x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(\dfrac{1}{2};e\right)\\ x=e\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Mà $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}-1=-1-\dfrac{1}{2}\ln 2;\ y(e)=-e\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=-e.$

Chọn B

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$.

A. $\max\limits_{\left[1;e^2\right]} y=\dfrac{2}{e^2}.$

B. $\max\limits_{\left[1;e^2\right]} y=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

C. $\max\limits_{\left[1;e^2\right]} y=\dfrac{1}{3}\ln 3.$

D. $\max\limits_{\left[1;e^2\right]} y=\dfrac{1}{e}.$

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $\left[1;e^2\right]$.

Ta có $y'=\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $\begin{cases}x\in\left(1;e^2\right)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(1;e^2\right)\\ \ln x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=e.$

Mà $y(1)=0;\ y\left(e^2\right)=\dfrac{2}{e^2};\ y(e)=\dfrac{1}{e}\Rightarrow\max\limits_{\left[1;e^2\right]}y=\dfrac{1}{e}.$

Chọn D

Ví dụ 14. [SGD & ĐT Hà Nội năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1;e^3\right]$.

A. $\max\limits_{\left[1;e^3\right]}y=\dfrac{9}{e^3}.$

B. $\max\limits_{\left[1;e^3\right]}y=\dfrac{1}{2}\ln^2 2.$

C. $\max\limits_{\left[1;e^3\right]}y=\dfrac{4}{e^2}.$

D. $\max\limits_{\left[1;e^3\right]}y=\dfrac{1}{e}.$

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $\left[1;e^3\right]$.

Ta có $y=\dfrac{1}{x}.\ln^2 x\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{x^2}.\ln^2 x+\dfrac{1}{x}.2\ln x.\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}.$

Do đó $\begin{cases}x\in\left(1;e^3\right)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(1;e^3\right)\\ \left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ \ln x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=e^2.$

Mà $y(1)=0;\ y\left(e^3\right)=\dfrac{9}{e^3};\ y\left(e^2\right)=\dfrac{4}{e^2}\Rightarrow\max\limits_{\left[1;e^3\right]}y=\dfrac{4}{e^2}.$

Chọn C

Ví dụ 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-2\right)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. $\min\limits_{[-1;2]}y=-e^2.$

B. $\min\limits_{[-1;2]}y=-2e^2.$

C. $\min\limits_{[-1;2]}y=2e^4.$

D. $\min\limits_{[-1;2]}y=2e^2.$

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-1;2]$.

Ta có $y' = 2xe^{2x} + (x^2-2)e^{2x}.2$; $\begin{cases} x \in (-1;2) \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;2) \\ x + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Mà $y(-1) = -\frac{1}{e^2}$; $y(2) = 2e^4$; $y(1) = -e^2 \Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} y = -e^2$.

Chọn A

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Xét các khẳng định sau:

1. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$.
2. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng -1.
3. Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$.
4. Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất với $x \in (-\infty;1)$.

Trong các khẳng định trên, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng ?

A. 1. **B.** 2.
C. 4. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số đã cho đạt có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ tại $x = 1$.

Hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất.

Do đó chỉ có khẳng định 1 là đúng.

Chọn A

Ví dụ 17. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 8x$.

A. $y_{\min} = 0$. **B.** $y_{\min} = 5$.
C. $y_{\min} = -4$. **D.** $y_{\min} = -3$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 12x^2 + 8;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	5	↘	-4	↗	$+\infty$

Từ bảng trên ta được giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -4.

Chọn C

Ví dụ 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+8}}$ bằng ?

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+8} - (x+4).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}}{x^2+8} = \dfrac{x^2+8-(x^2+4x)}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\sqrt{3}$	↘	1

Từ bảng trên ta được giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $\sqrt{3}$.

Chọn B

Ví dụ 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=5.$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=6.$

C. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=-3.$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=4.$

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y=\dfrac{(x+1)(x+2)+4}{x+1}=x+2+\dfrac{4}{x+1}\Rightarrow y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}.$

Do đó $\begin{cases} x\in(0;+\infty) \\ y'=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(0;+\infty) \\ (x+1)^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'	||	$-$	0	$+$	
y	|| 6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng trên $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=5.$

Chọn A

Nhận xét

Từ bảng biến thiên trên $\Rightarrow$ hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bài toán có cách làm khác như sau:

Ta có $y=\dfrac{(x+1)(x+2)+4}{x+1}=x+2+\dfrac{4}{x+1}.$

Với $x\in(0;+\infty)$, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$x+2+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}+1\ge 2\sqrt{(x+1).\frac{4}{x+1}}+1=5.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ x+1=\dfrac{4}{x+1} \end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=5.$

Ví dụ 20. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y=\dfrac{2\sin x-\cos^2 x+10}{\sin x+2}$.

A. $y_{\max}=10$.
B. $y_{\max}=4$.
C. $y_{\max}=8$.
D. $y_{\max}=6$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x\in[-1;1]\Rightarrow \cos^2 x=1-t^2\Rightarrow y=\dfrac{2t-(1-t^2)+10}{t+2}=\dfrac{t^2+2t+9}{t+2}=t+\dfrac{9}{t+2}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{9}{t+2}$, với $t\in[-1;1]$ có

$$f'(t)=1-\frac{9}{(t+2)^2};\ \begin{cases}t\in(-1;1)\\ f'(t)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(-1;1)\\ (t+2)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow t\in\varnothing.$$

Hàm số $f(t)$ đã xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

Mà $f(-1)=8; f(1)=4\Rightarrow y_{\max}=\max\limits_{[-1;1]}f(t)=8$.

Chọn C

Ví dụ 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+3\cos x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

A. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=\dfrac{12\sqrt{3}-1}{8}$.
B. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=\dfrac{12-3\sqrt{3}}{8}$.
C. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=-3$.
D. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=-4$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-\pi;\pi]$.

Ta có $y'=3\sin^2 x\cos x-3\sin x=3\sin x(\sin x\cos x-1)=3\sin x\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x-1\right)$.

Do đó $\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin 2x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ \sin x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ x=k\pi\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Suy ra $-\pi<k\pi<\pi\Leftrightarrow -1<k<1\Leftrightarrow k=0\Rightarrow x=0$.

Mà $f(-\pi)=-3; f(\pi)=-3; f(0)=3\Rightarrow \min\limits_{[-\pi;\pi]}y=-3$.

Chọn C

Ví dụ 22. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y=\dfrac{2\sin x+\cos x-3}{2\cos x-\sin x+4}$.

A. $y_{\max}=-\dfrac{5}{4}$.

B. $y_{\max}=-\dfrac{1}{6}$.

C. $y_{\max}=-\dfrac{1}{3}$.

D. $y_{\max}=-\dfrac{2}{11}$.

Lời giải

Ta có $2\cos x-\sin x+4\ge -2-1+4>0\Rightarrow$ hàm số đã cho đã xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $y=\dfrac{2\sin x+\cos x-3}{2\cos x-\sin x+4}\Leftrightarrow y(2\cos x-\sin x+4)=2\sin x+\cos x-3$

$$\Leftrightarrow (2y-1)\cos x-(y+2)\sin x=-4y-3.$$

Cần có $(2y-1)^2+[-(y+2)]^2\ge(-4y-3)^2\Leftrightarrow 11y^2+24y+4\le 0\Leftrightarrow -2\le y\le -\dfrac{2}{11}$.

Do đó $y_{\max}=-\dfrac{2}{11}$.

Chọn D

Ví dụ 23. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+1|$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} y=1$.

B. $\max\limits_{[-2;2]} y=4$.

C. $\max\limits_{[-2;2]} y=2$.

D. $\max\limits_{[-2;2]} y=3$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, với $x\in[-2;2]$ ta có

$$f'(x)=3x^2-3;\ \begin{cases}x\in(-2;2)\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$.

Mà $f(-2)=-1; f(2)=3; f(1)=-1; f(-1)=3\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} f(x)=3;\ \min\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$

$\Rightarrow -1\le f(x)\le 3\Rightarrow -3<f(x)\le 3\Rightarrow |f(x)|\le 3\Rightarrow y\le 3.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=3.$

Chọn D

Ví dụ 24. [Trích đề thi THPT Quốc gia năm 2017] Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $m<-1$.
B. $3<m\le 4$.
C. $m>4$.
D. $1\le m<3$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[2;4]$.

Đạo hàm $y'=\frac{-1-m}{(x-1)^2}\ne 0$, ta cần so sánh $y(2)$ và $y(4)$.

Ta có $y(2)=m+2$, $y(4)=\frac{m+4}{3}\Rightarrow y(2)-y(4)=\frac{2m+2}{3}$.

+ TH1. $m>-1\Rightarrow y(2)>y(4)\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\frac{m+4}{3}=3\Rightarrow m=5$, thỏa mãn $m>-1$.

+ TH2. $m<-1\Rightarrow y(2)<y(4)\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=y(2)=m+2=3\Rightarrow m=1$, không thỏa mãn $m<-1$.

Chọn C

Nhận xét

Khi xét $m>-1$, ta được $y'<0$, $\forall x\in(2;4)$, từ đó hàm số nghịch biến trên $[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(4)$.

Khi xét $m<-1$, ta được $y'>0$, $\forall x\in(2;4)$, từ đó hàm số đồng biến trên $[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(2)$.

Với cách làm này thì ta không cần tính $y(2)-y(4)$.

Ví dụ 25. [Trích đề thi THPT Quốc gia năm 2017] Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $m\le 0$.
B. $m>4$.
C. $0<m\le 2$.
D. $2<m\le 4$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[1;2]$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}\neq 0\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y$ luôn bằng $y(1)+y(2)$.

Ta có $y(1)+y(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=5$.

Chọn B

Ví dụ 26. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x-m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;3]} y=-1$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $m\leq 0$.
B. $m>10$.
C. $0<m\leq 2$.
D. $2<m\leq 8$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[1;3]$.

Ta có $y'=3x^2-4x+1$; $\begin{cases} x\in(1;3) \\ y'=0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Ta có $y(1)=-m$, $y(3)=-m+12\Rightarrow y(1)<y(3)\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} y=y(1)\Rightarrow -m=-1\Rightarrow m=1$.

Chọn C

Vấn đề 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT & NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Bước 1: Đặt ẩn x cho giá trị cần xác định. (Xác định điều kiện của ẩn x).

(Ví dụ: là cạnh hình vuông, x là chi phí một cuốn sách, x là vận tốc của xe.....)

Bước 2: Dựa vào các giả thiết của bài toán. Xác định các đại lượng thành phần cấu tạo nên yếu tố tổng hợp.

(Ví dụ: Xác định quãng đường AB, BC dựa vào x, xác định chi phí trong các giai đoạn 1, giai đoạn 2.....)

Bước 3: Biểu diễn yếu tố tổng hợp (yếu tố cần xác định GTLN, NN) qua hàm $f(x)$, quay về bài toán tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $f(x)$.

Chú ý: Chúng ta có thể vận dụng linh hoạt **CASIO** và phím **CALC** để chọn đáp án nhanh và chính xác nhất. Khi đề bài cho 4 giá trị của x, ta dùng **CALC** để lựa chọn phương án cho giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: [Trích đề thi THPT QG năm 2017]. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi vật bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $24(m/s)$. **B.** $108(m/s)$.

C. $64(m/s)$. **D.** $18(m/s)$.

Lời giải:

Ta có $v(t)=\left(-\frac{1}{2}t^3+6t^2\right)'=-\frac{3}{2}t^2+12t(m/s)\Rightarrow v'(t)=-3t+12=0\Leftrightarrow t=4.$

Suy ra $v(0)=0,\ v(4)=24,\ v(6)=18\Rightarrow \max\limits_{[0;6]} v(t)=24(m/s).$

Chọn A.

Ví dụ 2: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+12t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 512 (m/s). **B.** 90 (m/s).

C. 700 (m/s). **D.** 96 (m/s).

Lời giải

Ta có $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+24t.$

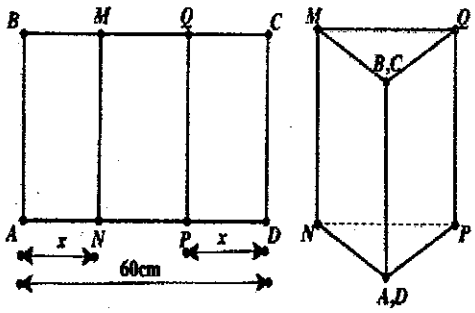
Xét hàm số $v(t)=-\frac{3}{2}t^2+24t,$ với $t\in[0;10]$ ta có $v'(t)=-3t+24;$ $\begin{cases} t\in(0;10) \\ v'(t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=8.$

Hàm số $v(t)$ liên tục và xác định trên $[0;10]$.

Mà $v(0)=0,\ v(10)=90,\ v(8)=96 \Rightarrow \max\limits_{[0;10]} v(t)=96$ (m/s).

Chọn D

Ví dụ 3: Cho một tấm tôn hình chữ nhật ABCD có $AD=60cm$. Ta gập tấm tôn theo 2 cạnh MN và QP vào phía trong sao cho BA trùng với CD để được lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khối lăng trụ có thể tích lớn nhất khi x bằng bao nhiêu?



A. $x=20cm$. **B.** $x=22,5cm$

C. $x=25cm$. **D.** $x=29cm$.

Lời giải:

Thể tích khối lăng trụ được tạo thành là $V=S_{NAD}.MN$.

Thể tích đạt GTLN khi S_{NAD} lớn nhất.

$$S_{NAD}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{30(30-x)(30-x)[30-(60-2x)]}$$

Hay $S=\sqrt{30(30-x)^2.(2x-30)}$

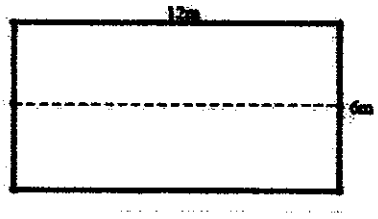
Xét hàm số $f(x)=(30-x)^2(2x-30)=(30-x)(30-x)(2x-30)\le\frac{(30-x+30-x+2x-30)^3}{27}$

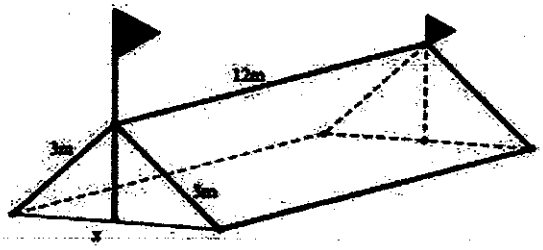
(Áp dụng BĐT $abc\le\frac{(a+b+c)^3}{27}$) $\Leftrightarrow f(x)\le 1000$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 30-x=2x-30 \Leftrightarrow x=20$.

Chọn A.

Ví dụ 4: [Trích đề thi thử THPT Lương Tài 2] Từ một tấm bạt hình chữ nhật có kích thước $12m\times 6m$ như hình vẽ. Một nhóm các bạn học sinh trong quá trình đi dã ngoại đã gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm 2 cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho 2 mép chiều dài của tấm bạt sát đất và cách nhau $x(m)$ (như hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.





A. $x=4$.

B. $x=3\sqrt{3}$.

C. $x=3$.

D. $x=3\sqrt{2}$.

Lời giải:

Phân không gian trong lều được tính bởi công thức thể tích hình lăng trụ đứng.

Ta có: $V=S_d.h=S_d.12$. Như vậy thể tích lớn nhất khi diện tích tam giác đáy là lớn nhất.

Dễ thấy tam giác đó là tam giác cân có 2 cạnh bằng $3m$.

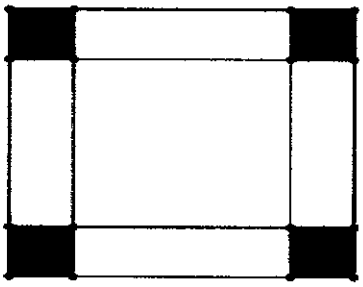
$$S=\frac{1}{2}x.\sqrt{3^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}x.\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{4}x\sqrt{36-x^2}\le\frac{1}{4}.\left(\frac{x^2+36-x^2}{2}\right)^2=81.$$

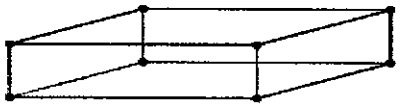
Ở đây ta áp dụng BĐT $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, các em có thể tính diện tích tam giác đã cho theo công thức Herong là: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x^2=36-x^2\Leftrightarrow x^2=18\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}\ (m)$.

Chọn D.

Ví dụ 5: [Đề MH THPT QUỐC GIA 2017]: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\,(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





A. $x=6$

B. $x=3$

C. $x=2$

D. $x=4$

Lời giải:

Thể tích của khối hộp là $V=(12-2x)^2.x=f(x)\ (0\le x\le 6)$.

Cách 1: $f(x)=4(x^3-4x^2+4x)\Rightarrow f'(x)=3(3x^2-8x+4)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

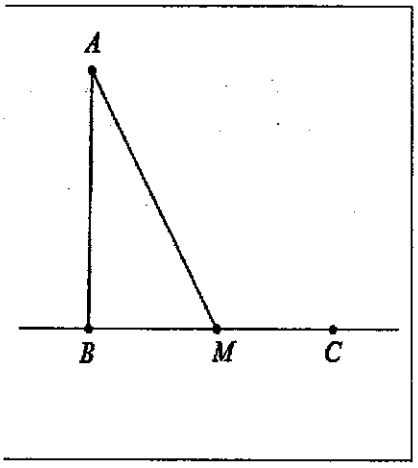
Lại có $f(0)=f(6)=0; f(2)=128; f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2048}{27}$. Vậy thể tích lớn nhất $\Leftrightarrow x=2$.

Cách 2: $f(x)=\dfrac{1}{4}(12-2x)(12-2x).4x\le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{12-2x+12-2x+4x}{3}\right)^3=128$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 12-2x=4x\Leftrightarrow x=2$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=4$ (km). Trên bờ biển có một cái kho ở trị trí C cách B một khoảng $BC=7$ (km). Người canh hải đăng phải chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 6 (km/h) rồi đi xe đạp từ M đến C với vận tốc 10 (km/h) (như hình vẽ). Xác định khoảng cách từ M đến C để người đó đi từ A đến C là nhanh nhất.



A. 6 (km). **B.** 3 (km).

C. 4 (km). **D.** 9 (km).

Lời giải

Đặt $MC=x\ (0\le x\le 7)\Rightarrow$ Thời gian đi quãng đường MC là $\dfrac{x}{10}$ (giờ)

Quãng đường $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{16+(7-x)^2}$

$\Rightarrow$ Thời gian đi quãng đường AM là $\dfrac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6}$ (giờ)

Tổng thời gian người đó đi từ A đến C là $\dfrac{x}{10}+\dfrac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{10}+\dfrac{\sqrt{16+(x-7)^2}}{6}$, với $x\in[0;7]$ ta có

$$f'(x)=\frac{1}{10}+\frac{1}{6}.\frac{x-7}{\sqrt{16+(x-7)^2}}=0;\ \begin{cases}x\in(0;7)\\6\sqrt{16+(x-7)^2}=10(7-x)\end{cases}$$

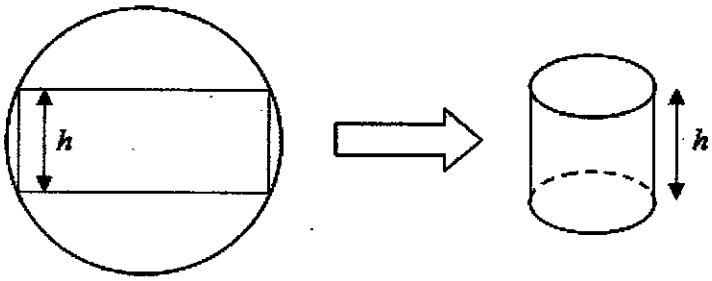
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;7)\\36\left[(x-7)^2+16\right]=100(7-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;7)\\64(7-x)^2=36.16\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;7]$ mà $f(0)=\frac{\sqrt{65}}{6};f(7)=\frac{41}{30};f(4)=\frac{37}{30}$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;7]} f(x)=f(4)=\frac{37}{30}\Rightarrow MC=x=4\ (km)$ thỏa mãn bài toán.

Chọn C

Ví dụ 7: Từ một tấm tôn dạng hình tròn với bán kính $R=50cm$, một người thợ cần cắt một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp hình tròn trên. Anh ta gò tấm tôn hình chữ nhật này thành một hình trụ không đáy (như hình vẽ) để đổ thóc vào trong. Thể tích lớn nhất của khối trụ thu được gần nhất với kết quả nào dưới đây ?



A. $0,28m^3$.

B. $0,02m^3$.

C. $0,29m^3$.

D. $0,03m^3$.

Lời giải

Khối trụ thu được có thể tích là $V=\pi r^2h$.

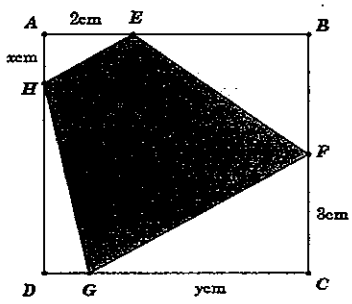
Gọi chiều dài của hình chữ nhật là $b\Rightarrow b^2+h^2=(2R)^2=1\ (R=0,5m)$

Ta có $2r\pi=b\Rightarrow r=\frac{b}{2\pi}=\frac{\sqrt{1-h^2}}{2\pi}\Rightarrow V=\pi.\frac{1-h^2}{4\pi^2}.h=\frac{h-h^3}{4\pi}=f(h)$.

Đạo hàm $f'(h)=\frac{1-3h^2}{4\pi}=0\Rightarrow h=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow V\le f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 0,03m^3$.

Chọn D

Ví dụ 8: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $x+y=7$. **B.** $x+y=5$.

C. $x+y=\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **D.** $x+y=4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S=S_{\Delta AEH}+S_{\Delta CGF}+S_{\Delta DGH}$ lớn nhất (do $S_{\Delta BEF}$ không đổi).

Tính được $2S=2x+3y+(6-x)(6-y)=xy-4x-3y+36.$ (1)

Ta có $EFGH$ là hình thang $\rightarrow AEH=CGF$

$\longrightarrow \Delta AEH \sim \Delta CGF \longrightarrow \frac{AE}{CG}=\frac{AH}{CF} \Leftrightarrow \frac{2}{y}=\frac{x}{3} \longrightarrow xy=6.$ (2)

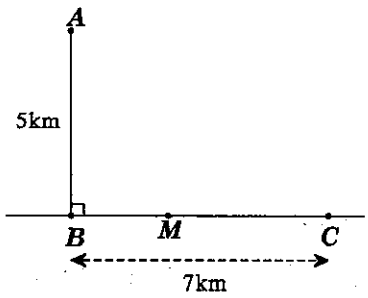
Từ (1) và (2) suy ra $2S=42-\left(4x+\frac{18}{x}\right)$. Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x+\frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có $4x+\frac{18}{x}\geq 2\sqrt{4x.\frac{18}{x}}=12\sqrt{2} \longrightarrow S_{max}=21-6\sqrt{2}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x=\frac{18}{x} \Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow y=2\sqrt{2} \Rightarrow x+y=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$

Chọn C.

Ví dụ 9: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất ?



A. 3,0 km. **B.** 7,0 km.

C. 4,5 km. **D.** 2,1 km.

Lời giải

Đặt $BM = x$ km $(0 \le x \le 7) \longrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{x^2+25} \text{ km} \\ MC = (7-x) \text{ km} \end{cases}$.

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ h.

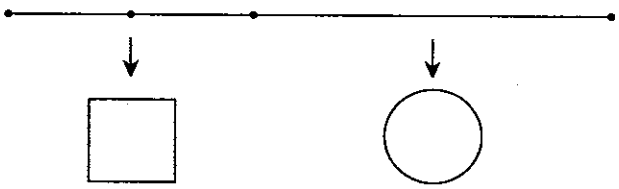
Thời gian đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \dfrac{7-x}{6}$ h $\longrightarrow$ Thời gian người canh hải đăng đi từ $A \to C$ là $t = t_{AM} + t_{MC} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ h.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ trên $[0;7]$, ta được $\min\limits_{[0;7]} f(x) = f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$.

Vậy người đó đến kho nhanh nhất khi vị trí của điểm M cách B một khoảng $x = 2\sqrt{5} \approx 4,5$km.

Chọn C.

Ví dụ 10: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng:



A. $\dfrac{a}{r} = 1$.

B. $\dfrac{a}{r} = 2$.

C. $\dfrac{a}{r} = 3$.

D. $\dfrac{a}{r} = 4$.

Lời giải

Gọi x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0 < x < 60) \Rightarrow$ Chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} \longrightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi.r^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Và diện tích hình vuông cạnh $\frac{60-x}{4}$ là $S_2=\left(\frac{60-x}{4}\right)^2$.

Tổng diện tích hai hình: $S=\frac{x^2}{4\pi}+\left(\frac{60-x}{4}\right)^2=\frac{(4+\pi).x^2-120\pi x+3600\pi}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S'=\frac{(4+\pi).x-60\pi}{8\pi}$; $S'=0\Leftrightarrow x=\frac{60\pi}{4+\pi}$; $S''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0$.

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x=\frac{60\pi}{4+\pi}$.

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\frac{60\pi}{4+\pi}$.

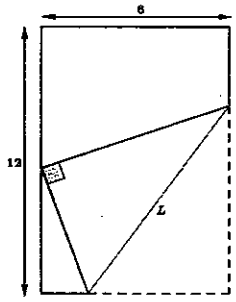
Với $x=\frac{60\pi}{4+\pi}\longrightarrow r=\frac{30}{(4+\pi)}\,\&\,a=\frac{240}{(4+\pi).4}\longrightarrow\frac{a}{r}=\frac{240}{120}=2.$

Chọn B.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có $S=\frac{x^2}{4\pi}+\left(\frac{60-x}{4}\right)^2\geq\frac{60^2}{4\pi+16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{4\pi}=\frac{60-x}{16}\rightarrow x=\frac{60\pi}{4+\pi}$.

Ví dụ 11: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12 *cm* và chiều rộng 6 *cm*. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại. Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?



A. $\min L=6\sqrt{2}$ cm.

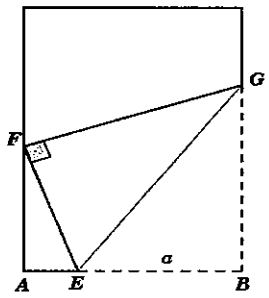
B. $\min L=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm.

C. $\min L=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm.

D. $\min L=9\sqrt{2}$ cm.

Lời giải

Đặt $EB=a>0$ như hình vẽ bên $\longrightarrow\begin{cases}EF=a\\AE=6-a\end{cases}$.



Trong tam giác vuông AEF có

$\cos AEF=\frac{6-a}{a}\longrightarrow\cos FEB=\frac{a-6}{a}$ (hai góc bù nhau).

Ta có $\Delta BEG = \Delta FEG \longrightarrow FEG = BEG = \frac{1}{2}FEB$.

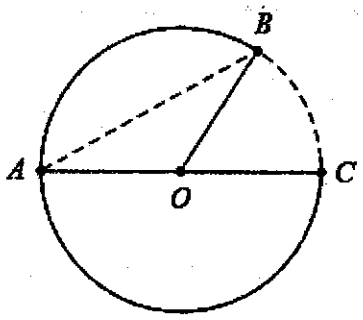
Suy ra $\cos FEB = \cos\left(2EFG\right) = 2\left(\cos EFG\right)^2 - 1 = \frac{a-6}{a} \Rightarrow \cos FEG = \sqrt{\frac{a-3}{a}}$.

Trong tam giác vuông EFG có $EG = \frac{EF}{\cos FEG} = \sqrt{\frac{a^3}{a-3}}$.

Xét hàm $f\left(a\right) = \frac{a^3}{a-3}$ với $a > 3$, ta được $\min f\left(a\right)$ đạt tại $a = \frac{9}{2} \longrightarrow EG = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 12: Một người đang ngồi trên một chiếc thuyền ở vị trí A trên hồ nước hình tròn có bán kính $10\ km$, dự định vị trí C đối diện với A qua tâm của hồ nước bằng cách bơi thuyền đến vị trí B với vận tốc $8\ km/h$ sau đó lên bờ đi dọc đến vị trí C với vận tốc $5\ km/h$ (nét đứt của hình vẽ bên biểu hiện quãng đường đi). Hỏi thời gian đi từ vị trí A đến vị trí C nằm trong khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(2;6\right)$ giờ. **B.** $\left(2,5;2\pi\right)$ giờ.

C. $\left(2;2\pi\right)$ giờ. **D.** $\left(2,5;6\right)$ giờ.

Phân tích lời giải

- Bài toán hỏi khoảng thời gian đi từ vị trí $A \to C$, tức là tìm khoảng giữa thời gian nhanh nhất và thời gian lâu nhất đi từ $A \to C : \left(min\, t_{A\to C}; max\, t_{A\to C}\right)$.
- Tổng thời gian đi từ $A \to C$ là $t_{A\to C} = t_{A\to B} + t_{B\to C} = \frac{AB}{v_{AB}} + \frac{BC}{v_{BC}}$.
- Độ dài cung tròn của đường tròn bán kính r, chắn góc ở tâm φ (đo bằng radian) được tính bằng công thức $\frac{L}{\text{chuvi}} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow L = \varphi.R$, sử dụng lý thuyết để tìm độ dài BC.
- Chọn ẩn thích hợp, đưa về xét hàm số liên quan đến thời gian để tìm min, max.

Lời giải

Đặt $BOC = 2x\ \left(rad\right) \Rightarrow$ độ dài cung BC là $L = 20x\ \left(km\right) \Rightarrow t_{B\to C} = \frac{L}{v_{BC}} = 4x\ \left(h\right)$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-1;2]$.

Ta có $y' = 2xe^{2x} + (x^2-2)e^{2x}.2$; $\begin{cases} x \in (-1;2) \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;2) \\ x + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Mà $y(-1) = -\frac{1}{e^2}$; $y(2) = 2e^4$; $y(1) = -e^2 \Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} y = -e^2$.

Chọn A

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Xét các khẳng định sau:

1. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$.
2. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng -1.
3. Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$.
4. Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất với $x \in (-\infty;1)$.

Trong các khẳng định trên, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng ?

A. 1. **B.** 2.
C. 4. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số đã cho đạt có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ tại $x = 1$.

Hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất.

Do đó chỉ có khẳng định 1 là đúng.

Chọn A

Ví dụ 17. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 8x$.

A. $y_{\min} = 0$. **B.** $y_{\min} = 5$.
C. $y_{\min} = -4$. **D.** $y_{\min} = -3$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 12x^2 + 8;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	5	↘	-4	↗	$+\infty$

Từ bảng trên ta được giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -4.

Chọn C

Ví dụ 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+8}}$ bằng ?

A. 2.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

D. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+8} - (x+4).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}}{x^2+8} = \dfrac{x^2+8-(x^2+4x)}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\sqrt{3}$	↘	1

Từ bảng trên ta được giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $\sqrt{3}$.

Chọn B

Ví dụ 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=5.$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=6.$

C. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=-3.$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=4.$

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y=\dfrac{(x+1)(x+2)+4}{x+1}=x+2+\dfrac{4}{x+1}\Rightarrow y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

Do đó $\begin{cases} x\in(0;+\infty) \\ y'=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(0;+\infty) \\ (x+1)^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖ 6	↘	5	↗	$+\infty$

Từ bảng trên $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=5.$

Chọn A

Nhận xét

Từ bảng biến thiên trên $\Rightarrow$ hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bài toán có cách làm khác như sau:

Ta có $y=\dfrac{(x+1)(x+2)+4}{x+1}=x+2+\dfrac{4}{x+1}$.

Với $x\in(0;+\infty)$, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$x+2+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}+1\ge 2\sqrt{(x+1).\frac{4}{x+1}}+1=5.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ x+1=\dfrac{4}{x+1} \end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=5.$

Ví dụ 20. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y=\dfrac{2\sin x-\cos^2 x+10}{\sin x+2}$.

A. $y_{\max}=10$.
B. $y_{\max}=4$.
C. $y_{\max}=8$.
D. $y_{\max}=6$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x\in[-1;1]\Rightarrow\cos^2 x=1-t^2\Rightarrow y=\dfrac{2t-(1-t^2)+10}{t+2}=\dfrac{t^2+2t+9}{t+2}=t+\dfrac{9}{t+2}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{9}{t+2}$, với $t\in[-1;1]$ có

$$f'(t)=1-\frac{9}{(t+2)^2};\ \begin{cases}t\in(-1;1)\\ f'(t)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(-1;1)\\ (t+2)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow t\in\varnothing.$$

Hàm số $f(t)$ đã xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

Mà $f(-1)=8; f(1)=4\Rightarrow y_{\max}=\max\limits_{[-1;1]}f(t)=8$.

Chọn C

Ví dụ 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+3\cos x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

A. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=\dfrac{12\sqrt{3}-1}{8}$.
B. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=\dfrac{12-3\sqrt{3}}{8}$.
C. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=-3$.
D. $\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=-4$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[-\pi;\pi]$.

Ta có $y'=3\sin^2 x\cos x-3\sin x=3\sin x(\sin x\cos x-1)=3\sin x\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x-1\right)$.

Do đó $\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin 2x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ \sin x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\pi;\pi)\\ x=k\pi\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Suy ra $-\pi<k\pi<\pi\Leftrightarrow-1<k<1\Leftrightarrow k=0\Rightarrow x=0$.

Mà $f(-\pi)=-3; f(\pi)=-3; f(0)=3\Rightarrow\min\limits_{[-\pi;\pi]}y=-3$.

Chọn C

Ví dụ 22. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y=\dfrac{2\sin x+\cos x-3}{2\cos x-\sin x+4}$.

A. $y_{\max}=-\dfrac{5}{4}$.

B. $y_{\max}=-\dfrac{1}{6}$.

C. $y_{\max}=-\dfrac{1}{3}$.

D. $y_{\max}=-\dfrac{2}{11}$.

Lời giải

Ta có $2\cos x-\sin x+4\ge -2-1+4>0\Rightarrow$ hàm số đã cho đã xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $y=\dfrac{2\sin x+\cos x-3}{2\cos x-\sin x+4}\Leftrightarrow y(2\cos x-\sin x+4)=2\sin x+\cos x-3$

$$\Leftrightarrow (2y-1)\cos x-(y+2)\sin x=-4y-3.$$

Cần có $(2y-1)^2+\left[-(y+2)\right]^2\ge(-4y-3)^2\Leftrightarrow 11y^2+24y+4\le 0\Leftrightarrow -2\le y\le -\dfrac{2}{11}$.

Do đó $y_{\max}=-\dfrac{2}{11}$.

Chọn D

Ví dụ 23. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+1\right|$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} y=1$.

B. $\max\limits_{[-2;2]} y=4$.

C. $\max\limits_{[-2;2]} y=2$.

D. $\max\limits_{[-2;2]} y=3$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, với $x\in[-2;2]$ ta có

$$f'(x)=3x^2-3;\ \begin{cases}x\in(-2;2)\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$.

Mà $f(-2)=-1; f(2)=3; f(1)=-1; f(-1)=3\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} f(x)=3;\ \min\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$

$\Rightarrow -1\le f(x)\le 3\Rightarrow -3<f(x)\le 3\Rightarrow \left|f(x)\right|\le 3\Rightarrow y\le 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=3$.

Chọn D

Ví dụ 24. [Trích đề thi THPT Quốc gia năm 2017] Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $m<-1$.
B. $3<m\le 4$.
C. $m>4$.
D. $1\le m<3$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[2;4]$.

Đạo hàm $y'=\frac{-1-m}{(x-1)^2}\ne 0$, ta cần so sánh $y(2)$ và $y(4)$.

Ta có $y(2)=m+2$, $y(4)=\frac{m+4}{3}\Rightarrow y(2)-y(4)=\frac{2m+2}{3}$.

+ TH1. $m>-1\Rightarrow y(2)>y(4)\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\frac{m+4}{3}=3\Rightarrow m=5$, thỏa mãn $m>-1$.

+ TH2. $m<-1\Rightarrow y(2)<y(4)\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=y(2)=m+2=3\Rightarrow m=1$, không thỏa mãn $m<-1$.

Chọn C

Nhận xét

Khi xét $m>-1$, ta được $y'<0$, $\forall x\in(2;4)$, từ đó hàm số nghịch biến trên $[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(4)$.

Khi xét $m<-1$, ta được $y'>0$, $\forall x\in(2;4)$, từ đó hàm số đồng biến trên $[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(2)$.

Với cách làm này thì ta không cần tính $y(2)-y(4)$.

Ví dụ 25. [Trích đề thi THPT Quốc gia năm 2017] Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $m\le 0$.
B. $m>4$.
C. $0<m\le 2$.
D. $2<m\le 4$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[1;2]$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}\neq 0\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y$ luôn bằng $y(1)+y(2)$.

Ta có $y(1)+y(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=5$.

Chọn B

Ví dụ 26. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x-m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;3]} y=-1$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $m\leq 0$.
B. $m>10$.
C. $0<m\leq 2$.
D. $2<m\leq 8$.

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên $[1;3]$.

Ta có $y'=3x^2-4x+1$; $\begin{cases} x\in(1;3) \\ y'=0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Ta có $y(1)=-m$, $y(3)=-m+12\Rightarrow y(1)<y(3)\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} y=y(1)\Rightarrow -m=-1\Rightarrow m=1$.

Chọn C

Vấn đề 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT & NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Bước 1: Đặt ẩn x cho giá trị cần xác định. (Xác định điều kiện của ẩn x).

(Ví dụ: là cạnh hình vuông, x là chi phí một cuốn sách, x là vận tốc của xe.....)

Bước 2: Dựa vào các giả thiết của bài toán. Xác định các đại lượng thành phần cấu tạo nên yếu tố tổng hợp.

(Ví dụ: Xác định quãng đường AB, BC dựa vào x, xác định chi phí trong các giai đoạn 1, giai đoạn 2.....)

Bước 3: Biểu diễn yếu tố tổng hợp (yếu tố cần xác định GTLN, NN) qua hàm $f(x)$, quay về bài toán tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $f(x)$.

Chú ý: Chúng ta có thể vận dụng linh hoạt **CASIO** và phím **CALC** để chọn đáp án nhanh và chính xác nhất. Khi đề bài cho 4 giá trị của x, ta dùng **CALC** để lựa chọn phương án cho giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: [Trích đề thi THPT QG năm 2017]. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi vật bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $24(m/s)$. **B.** $108(m/s)$.

C. $64(m/s)$. **D.** $18(m/s)$.

Lời giải:

Ta có $v(t)=\left(-\frac{1}{2}t^3+6t^2\right)'=-\frac{3}{2}t^2+12t(m/s)\Rightarrow v'(t)=-3t+12=0\Leftrightarrow t=4.$

Suy ra $v(0)=0,\ v(4)=24,\ v(6)=18\Rightarrow \max\limits_{[0;6]} v(t)=24(m/s).$

Chọn A.

Ví dụ 2: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+12t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 512 (m/s). **B.** 90 (m/s).

C. 700 (m/s). **D.** 96 (m/s).

Lời giải

Ta có $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+24t.$

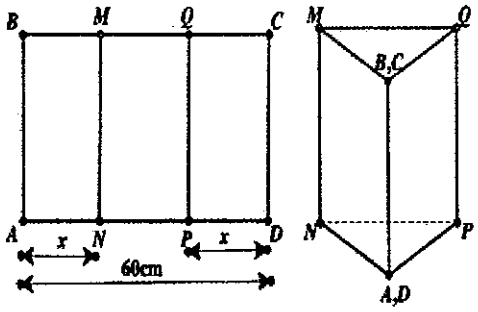
Xét hàm số $v(t)=-\frac{3}{2}t^2+24t,$ với $t\in[0;10]$ ta có $v'(t)=-3t+24;$ $\begin{cases} t\in(0;10) \\ v'(t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=8.$

Hàm số $v(t)$ liên tục và xác định trên $[0;10]$.

Mà $v(0)=0,\ v(10)=90,\ v(8)=96 \Rightarrow \max\limits_{[0;10]} v(t)=96$ (m/s).

Chọn D

Ví dụ 3: Cho một tấm tôn hình chữ nhật ABCD có $AD=60cm$. Ta gập tấm tôn theo 2 cạnh MN và QP vào phía trong sao cho BA trùng với CD để được lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khối lăng trụ có thể tích lớn nhất khi x bằng bao nhiêu?



A. $x=20cm$. **B.** $x=22,5cm$

C. $x=25cm$. **D.** $x=29cm$.

Lời giải:

Thể tích khối lăng trụ được tạo thành là $V=S_{NAD}.MN$.

Thể tích đạt GTLN khi S_{NAD} lớn nhất.

$$S_{NAD}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{30(30-x)(30-x)[30-(60-2x)]}$$

Hay $S=\sqrt{30(30-x)^2.(2x-30)}$

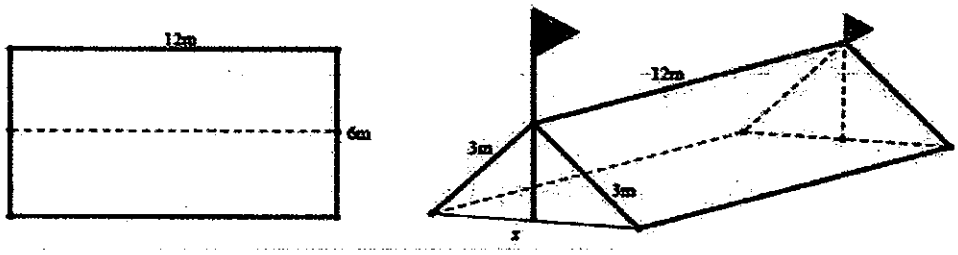
Xét hàm số $f(x)=(30-x)^2(2x-30)=(30-x)(30-x)(2x-30)\le\frac{(30-x+30-x+2x-30)^3}{27}$

(Áp dụng BĐT $abc\le\frac{(a+b+c)^3}{27}$) $\Leftrightarrow f(x)\le 1000$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 30-x=2x-30 \Leftrightarrow x=20$.

Chọn A.

Ví dụ 4: [Trích đề thi thử THPT Lương Tài 2] Từ một tấm bạt hình chữ nhật có kích thước $12m\times 6m$ như hình vẽ. Một nhóm các bạn học sinh trong quá trình đi dã ngoại đã gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm 2 cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho 2 mép chiều dài của tấm bạt sát đất và cách nhau $x(m)$ (như hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.



A. $x=4$.

B. $x=3\sqrt{3}$.

C. $x=3$.

D. $x=3\sqrt{2}$.

Lời giải:

Phân không gian trong lều được tính bởi công thức thể tích hình lăng trụ đứng.

Ta có: $V=S_d.h=S_d.12$. Như vậy thể tích lớn nhất khi diện tích tam giác đáy là lớn nhất.

Dễ thấy tam giác đó là tam giác cân có 2 cạnh bằng $3m$.

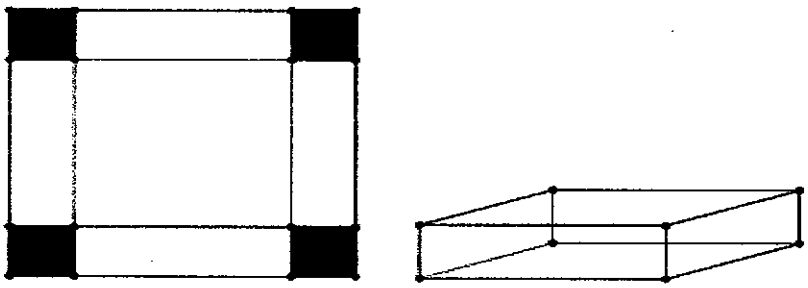
$$S=\frac{1}{2}x.\sqrt{3^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}x.\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{4}x\sqrt{36-x^2}\le\frac{1}{4}.\left(\frac{x^2+36-x^2}{2}\right)^2=81.$$

Ở đây ta áp dụng BĐT $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, các em có thể tính diện tích tam giác đã cho theo công thức Herong là: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x^2=36-x^2\Leftrightarrow x^2=18\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}\ (m)$.

Chọn D.

Ví dụ 5: [Đề MH THPT QUỐC GIA 2017]: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\,(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=6$

B. $x=3$

C. $x=2$

D. $x=4$

Lời giải:

Thể tích của khối hộp là $V=(12-2x)^2.x=f(x)\ (0\le x\le 6)$.

Cách 1: $f(x)=4(x^3-4x^2+4x)\Rightarrow f'(x)=3(3x^2-8x+4)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

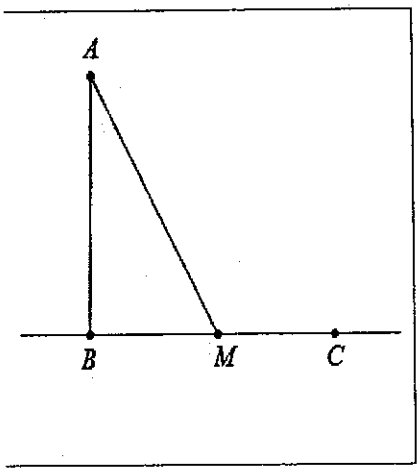
Lại có $f(0)=f(6)=0; f(2)=128; f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2048}{27}$. Vậy thể tích lớn nhất $\Leftrightarrow x=2$.

Cách 2: $f(x)=\dfrac{1}{4}(12-2x)(12-2x).4x\le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{12-2x+12-2x+4x}{3}\right)^3=128$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 12-2x=4x\Leftrightarrow x=2$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=4$ (km). Trên bờ biển có một cái kho ở trị trí C cách B một khoảng $BC=7$ (km). Người canh hải đăng phải chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 6 (km/h) rồi đi xe đạp từ M đến C với vận tốc 10 (km/h) (như hình vẽ). Xác định khoảng cách từ M đến C để người đó đi từ A đến C là nhanh nhất.



A. 6 (km). **B.** 3 (km).

C. 4 (km). **D.** 9 (km).

Lời giải

Đặt $MC=x\ (0\le x\le 7)\Rightarrow$ Thời gian đi quãng đường MC là $\dfrac{x}{10}$ (giờ)

Quãng đường $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{16+(7-x)^2}$

$\Rightarrow$ Thời gian đi quãng đường AM là $\dfrac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6}$ (giờ)

Tổng thời gian người đó đi từ A đến C là $\dfrac{x}{10}+\dfrac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{10}+\dfrac{\sqrt{16+(x-7)^2}}{6}$, với $x\in[0;7]$ ta có

$$f'(x)=\frac{1}{10}+\frac{1}{6}.\frac{x-7}{\sqrt{16+(x-7)^2}}=0;\ \begin{cases}x\in(0;7)\\6\sqrt{16+(x-7)^2}=10(7-x)\end{cases}$$

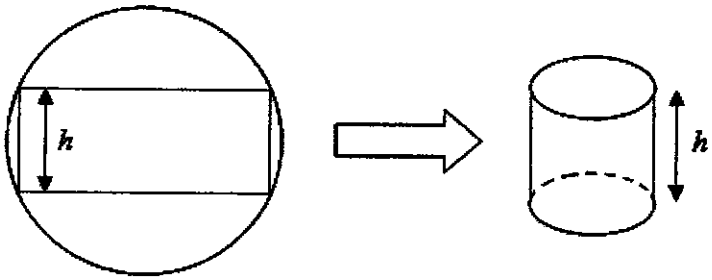
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;7)\\36\left[(x-7)^2+16\right]=100(7-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;7)\\64(7-x)^2=36.16\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;7]$ mà $f(0)=\frac{\sqrt{65}}{6};f(7)=\frac{41}{30};f(4)=\frac{37}{30}$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;7]} f(x)=f(4)=\frac{37}{30}\Rightarrow MC=x=4\ (km)$ thỏa mãn bài toán.

Chọn C

Ví dụ 7: Từ một tấm tôn dạng hình tròn với bán kính $R=50cm$, một người thợ cần cắt một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp hình tròn trên. Anh ta gò tấm tôn hình chữ nhật này thành một hình trụ không đáy (như hình vẽ) để đổ thóc vào trong. Thể tích lớn nhất của khối trụ thu được gần nhất với kết quả nào dưới đây ?



A. $0,28m^3$.

B. $0,02m^3$.

C. $0,29m^3$.

D. $0,03m^3$.

Lời giải

Khối trụ thu được có thể tích là $V=\pi r^2h$.

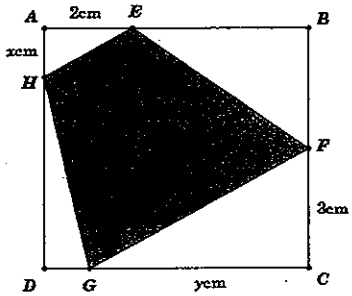
Gọi chiều dài của hình chữ nhật là $b\Rightarrow b^2+h^2=(2R)^2=1\ (R=0,5m)$

Ta có $2r\pi=b\Rightarrow r=\frac{b}{2\pi}=\frac{\sqrt{1-h^2}}{2\pi}\Rightarrow V=\pi.\frac{1-h^2}{4\pi^2}.h=\frac{h-h^3}{4\pi}=f(h)$.

Đạo hàm $f'(h)=\frac{1-3h^2}{4\pi}=0\Rightarrow h=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow V\le f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 0,03m^3$.

Chọn D

Ví dụ 8: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $x+y=7$.

B. $x+y=5$.

C. $x+y=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

D. $x+y=4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S=S_{\Delta AEH}+S_{\Delta CGF}+S_{\Delta DGH}$ lớn nhất (do $S_{\Delta BEF}$ không đổi).

Tính được $2S=2x+3y+(6-x)(6-y)=xy-4x-3y+36.$ (1)

Ta có $EFGH$ là hình thang $\rightarrow AEH=CGF$

$$\longrightarrow \Delta AEH \sim \Delta CGF \longrightarrow \frac{AE}{CG}=\frac{AH}{CF}\Leftrightarrow \frac{2}{y}=\frac{x}{3}\longrightarrow xy=6. \quad (2)$$

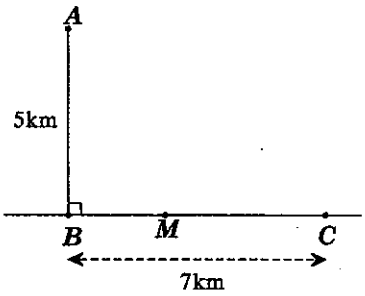
Từ (1) và (2) suy ra $2S=42-\left(4x+\frac{18}{x}\right)$. Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x+\frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có $4x+\frac{18}{x}\geq 2\sqrt{4x.\frac{18}{x}}=12\sqrt{2}\longrightarrow S_{\max}=21-6\sqrt{2}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x=\frac{18}{x}\Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\rightarrow y=2\sqrt{2}\Rightarrow x+y=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$

Chọn C.

Ví dụ 9: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất ?



A. 3,0 km.

B. 7,0 km.

C. 4,5 km.

D. 2,1 km.

Lời giải

Đặt $BM = x$ km $(0 \le x \le 7) \longrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{x^2+25} \text{ km} \\ MC = (7-x) \text{ km} \end{cases}$.

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ h.

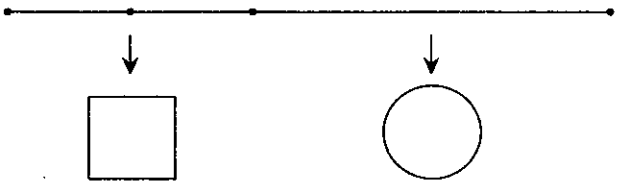
Thời gian đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \dfrac{7-x}{6}$ h $\longrightarrow$ Thời gian người canh hải đăng đi từ $A \to C$ là $t = t_{AM} + t_{MC} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ h.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ trên $[0;7]$, ta được $\min\limits_{[0;7]} f(x) = f(2\sqrt{5}) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$.

Vậy người đó đến kho nhanh nhất khi vị trí của điểm M cách B một khoảng $x = 2\sqrt{5} \approx 4,5$km.

Chọn C.

Ví dụ 10: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng:



A. $\dfrac{a}{r} = 1$. **B.** $\dfrac{a}{r} = 2$.

C. $\dfrac{a}{r} = 3$. **D.** $\dfrac{a}{r} = 4$.

Lời giải

Gọi x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0 < x < 60) \Rightarrow$ Chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} \longrightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi r^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Và diện tích hình vuông cạnh $\frac{60-x}{4}$ là $S_2=\left(\frac{60-x}{4}\right)^2$.

Tổng diện tích hai hình: $S=\frac{x^2}{4\pi}+\left(\frac{60-x}{4}\right)^2=\frac{(4+\pi).x^2-120\pi x+3600\pi}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S'=\frac{(4+\pi).x-60\pi}{8\pi}$; $S'=0\Leftrightarrow x=\frac{60\pi}{4+\pi}$; $S''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0$.

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x=\frac{60\pi}{4+\pi}$.

Do đó S đạt gia trị nhỏ nhất tại $x=\frac{60\pi}{4+\pi}$.

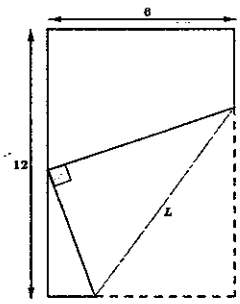
Với $x=\frac{60\pi}{4+\pi}\longrightarrow r=\frac{30}{(4+\pi)}\,\&\,a=\frac{240}{(4+\pi).4}\longrightarrow\frac{a}{r}=\frac{240}{120}=2.$

Chọn B.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có $S=\frac{x^2}{4\pi}+\left(\frac{60-x}{4}\right)^2\geq\frac{60^2}{4\pi+16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{4\pi}=\frac{60-x}{16}\rightarrow x=\frac{60\pi}{4+\pi}$.

Ví dụ 11: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12 *cm* và chiều rộng 6 *cm*. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại. Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?



A. $\min L=6\sqrt{2}$ cm.

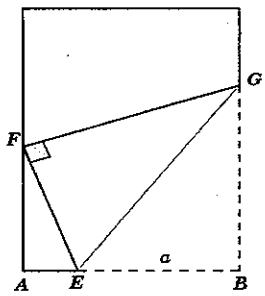
B. $\min L=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm.

C. $\min L=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm.

D. $\min L=9\sqrt{2}$ cm.

Lời giải

Đặt $EB=a>0$ như hình vẽ bên $\longrightarrow\begin{cases}EF=a\\AE=6-a\end{cases}$.



Trong tam giác vuông AEF có

$\cos AEF=\frac{6-a}{a}\longrightarrow\cos FEB=\frac{a-6}{a}$ (hai góc bù nhau).

Ta có $\Delta BEG = \Delta FEG \longrightarrow FEG = BEG = \frac{1}{2}FEB.$

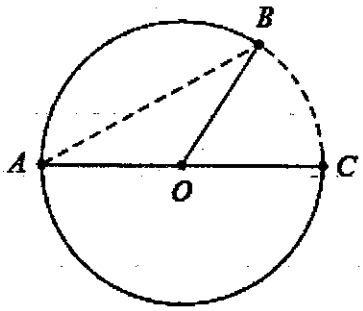
Suy ra $\cos FEB = \cos\left(2EFG\right) = 2\left(\cos EFG\right)^2 - 1 = \frac{a-6}{a} \Rightarrow \cos FEG = \sqrt{\frac{a-3}{a}}.$

Trong tam giác vuông EFG có $EG = \frac{EF}{\cos FEG} = \sqrt{\frac{a^3}{a-3}}.$

Xét hàm $f\left(a\right) = \frac{a^3}{a-3}$ với $a > 3$, ta được $\min f\left(a\right)$ đạt tại $a = \frac{9}{2} \longrightarrow EG = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$

Chọn B.

Ví dụ 12: Một người đang ngồi trên một chiếc thuyền ở vị trí A trên hồ nước hình tròn có bán kính $10\ km$, dự định vị trí C đối diện với A qua tâm của hồ nước bằng cách bơi thuyền đến vị trí B với vận tốc $8\ km/h$ sau đó lên bờ đi dọc đến vị trí C với vận tốc $5\ km/h$ (nét đứt của hình vẽ bên biểu hiện quãng đường đi). Hỏi thời gian đi từ vị trí A đến vị trí C nằm trong khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(2;6\right)$ giờ. **B.** $\left(2,5;2\pi\right)$ giờ.

C. $\left(2;2\pi\right)$ giờ. **D.** $\left(2,5;6\right)$ giờ.

Phân tích lời giải

- Bài toán hỏi khoảng thời gian đi từ vị trí $A \to C$, tức là tìm khoảng giữa thời gian nhanh nhất và thời gian lâu nhất đi từ $A \to C : \left(min\, t_{A\to C}; max\, t_{A\to C}\right)$.
- Tổng thời gian đi từ $A \to C$ là $t_{A\to C} = t_{A\to B} + t_{B\to C} = \frac{AB}{v_{AB}} + \frac{BC}{v_{BC}}.$
- Độ dài cung tròn của đường tròn bán kính r, chắn góc ở tâm φ (đo bằng radian) được tính bằng công thức $\frac{L}{\text{chuvi}} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow L = \varphi.R$, sử dụng lý thuyết để tìm độ dài BC.
- Chọn ẩn thích hợp, đưa về xét hàm số liên quan đến thời gian để tìm min, max.

Lời giải

Đặt $BOC = 2x\ \left(rad\right) \Rightarrow$ độ dài cung BC là $L = 20x\ \left(km\right) \Rightarrow t_{B\to C} = \frac{L}{v_{BC}} = 4x\ \left(h\right).$

Ví dụ 2: Tìm tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-3x+2}(C)$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=-\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=+\infty$) nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của (C)

Tương tự đường thẳng $x=2$ cũng là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ví dụ 3: Tìm các tiệm cận ngang và đứng của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x^2-x+4}{-3+4x-x^2}$.

b) $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{3x-2}$.

Lời giải:

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{-3}{x^2}+\frac{4}{x}-1}=-2$ nên đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lại có: $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x^2-x+4}{(x-1)(3-x)}=+\infty;\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Tương tự ta cũng có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

b) TXĐ: $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{2}{x^2}} = 0.$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận ngang là $y = \quad = 0$.

Tiệm cận ngang $y=\frac{2}{3}$ khi $x\to+\infty$ và tiệm cận ngang $y=0$ khi $x\to-\infty$

Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} y$.

Ví dụ 4: Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

a) $y=\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$

b) $y=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$

Lời giải

a) TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có: $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}=+\infty$ do vậy $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$

Do vậy $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

b) TXĐ $D=\mathbb{R}$. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{2+\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{2+\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=0$

Do vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=0$ và $y=\frac{1}{2}$ mà không có tiệm cận đứng.

Ví dụ 5: Biện luận số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{x+\sqrt{mx^2+1}}{x+2}$ theo tham số *m*.

Lời giải

+) Với $m<0$ (ví dụ $m=-1\Rightarrow y=\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x+2}$) khi đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$. Do vậy với $m<0$ đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

+) Với $m=0\Rightarrow y=\frac{x+1}{x+2}$ đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một đường tiệm cận ngang là $y=1$

+) Với $m>0$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{mx^2+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=1+\sqrt{m}$, do đó $y=1+\sqrt{m}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{mx^2+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=1-\sqrt{m}$ do đó $y=1-\sqrt{m}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Như vậy với $m>0$ thì đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang là $y=1+\sqrt{m}$ và $y=1+\sqrt{m}$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 [ĐỀ MINH HOẠ THPT QUỐC GIA 2017]: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Lời giải:

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ là 1 đường tiệm cận ngang.

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \Rightarrow y=-1$ là một đường tiệm cận ngang.

Chọn C.

Ví dụ 2: [Đề thi thử nghiệm BGD&ĐT năm 2017] Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

A. $x=1$. **B.** $y=-1$.

C. $y=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)} y=\infty$ nên đồ thị hàm số nhận $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Chọn D.

Ví dụ 3.[Đề thi THPT QG năm 2017] Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 3.

C. 1. **D.** 2.

Lời giải:

Ta có $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x+2}$.

Khi đó $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0\\ x+2=0 \Leftrightarrow x=-2\end{cases} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 TCĐ và 1 TCN.

Chọn D.

Ví dụ 4: Giả sử $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\lim\limits_{x\to2} y=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to2} y=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to2} y=+\infty$.

C. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=2\end{cases}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} y=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=2\end{array}\right.$.

Lời giải:

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty);(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu **ít nhất** một trong các điều kiện sau được thoã mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} = y_0; \lim\limits_{x\to-\infty} = y_0$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Với giả thiết đó, hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

B. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

C. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

D. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ nên đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Chọn A.

Ví dụ 6: Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	↗	5 ‖ $-\infty$	↗	3

Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.

Lời giải:

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3; \lim\limits_{x\to-\infty} y=1$ nên đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận ngang là $y=3$ và $y=1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to(-2)^+} =-\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng là $x=-2$.

Chọn C.

Ví dụ 7: Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	4 ‖ 2	↗	$+\infty$

Nhận xét nào sau đây là đúng.

A. Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng là $x=4$ và $x=2$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang là $y=4$ và $y=2$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to1^-} y=4; \lim\limits_{x\to1^+} y=2$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Chọn D.

Ví dụ 8: Đồ thị hàm số nào sau đây **không** nhận các đường thẳng $x=1$ và $y=2$ là các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

B. $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$.

C. $y=\dfrac{6x+1}{3x-3}$.

D. $y=\dfrac{4x+3}{2x-2}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$ có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=1$.

Chọn B.

Ví dụ 9: Đồ thị hàm số nào trong các ham số sau nhận các đường thẳng $x=2$ và $y=2$ là các đường tiệm cận.

A. $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$.

B. $y=\dfrac{x-1}{2x-4}$.

C. $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

D. $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$ các đường thẳng $x=2$ và $y=2$ lần lượt là các đường tiệm cận đứng và ngang.

Chọn A.

Ví dụ 10: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau đây có 2 đường tiệm cận là $x=1$ và $y=-2$.

A. $y=\dfrac{1-2x}{1-x}$.

B. $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$.

D. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

D. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$ có 2 đường tiệm cận là $x=1$ và $y=-2$.

Chọn B.

Ví dụ 11: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau không có tiệm cận ngang.

A. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

B. $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

C. $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$.

D. $y=\dfrac{2x-1}{x}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ ko có tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}=-\infty$.

Chọn B.

Ví dụ 12: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau nhận các đường thẳng $x=1$ và $y=-3$ là các đường tiệm cận

A. $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$.

B. $y=\dfrac{3x+1}{1-x}$.

C. $y=\dfrac{1-3x}{1-x}$.

D. $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{1-x}$ nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng và nhận đường thẳng $y=-3$ là tiệm cận ngang.

Chọn B.

Ví dụ 13: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ là:

A. $x=-1;x=-2$.
B. $x=3;x=1$.
C. $x=2;x=1$.
D. $x=0$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. Ta có: $y=\dfrac{2x}{(x-1)(x-2)}$. Dễ thấy $\lim\limits_{x\to1}y=\infty;\lim\limits_{x\to2}y=\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng là $x=1;x=2$.

Chọn C.

Ví dụ 14: [Trích đề thi THPT QG 2017]. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$:

A. 2.
B. 3.
C. 0.
D. 1.

Lời giải:

Ta có $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{x+1}{x+4}\Rightarrow x+4=0\Leftrightarrow x=-4$. Suy ra đồ thị có 1 tiệm cận đứng.

Chọn D.

Ví dụ 15: [Trích đề thi THPT QG 2017]. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$:

A. 2.
B. 3.
C. 0.
D. 1.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\dfrac{(x-4)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x-4}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}y=1\\x+1=0\Leftrightarrow x=-1\end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Chọn A.

Ví dụ 16: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x-5}$ là:

A. $x=5$. **B.** $x=-5$.
C. $x=-5; x=1$. **D.** $x=5; x=-1$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;5\}$. Ta có: $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x-5}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)}$. Do đó

$\lim\limits_{x\to-1} y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{x-5}=\dfrac{1}{3}$ nên đồ thị hàm số đã cho chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x=5$.

Chọn A.

Ví dụ 17: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ là:

A. $x=0$. **B.** $x=1$.
C. $x=-1$. **D.** $x=\pm1$.

Lời giải:

TXĐ: $D=(-1;+\infty)\setminus\{1\}$. Ta có: $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$.

Do $\lim\limits_{x\to1} y=\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng là $x=\pm1$.

Chọn D.

Ví dụ 18: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ là:

A. $x=\pm1$. **B.** $x=1$.
C. $x=-1$. **D.** $x=0$.

Lời giải:

TXĐ: $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Ta có: $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=+\infty$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{-(-x-1)}{\sqrt{(1-x)(-x-1)}} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{1-x}} = 0$

nên đồ thị hàm số **không** có tiệm cận đứng $x=-1$.

Chọn B.

Ví dụ 19: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$ là:

A. $x=\pm 1$. **B.** $x=1$.
C. $x=-1$. **D.** $x=0$.

Lời giải:

TXĐ $D=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$.

Do $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-1}=\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=1$.

Chú ý không tồn tại $\lim\limits_{x\to(-1)} y$ vì tại $x\to(-1)^+; x\to(-1)^-$ hàm số không tồn tại.

Chọn B.

Ví dụ 20: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$.

A. $x=\pm 1$. **B.** $x=1$.
C. $x=-1$. **D.** $x=0$.

Lời giải:

TXĐ $D=(1;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}.(x+1)}=+\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là $x=1$

Chọn B.

Ví dụ 21: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$ là:

A. $x=\pm 3$. **B.** $x=3$.

C. $x=-3$. **D.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Lời giải:

TXĐ: $D=[2;+\infty)\setminus\{3\}$.

Ta có: $y=\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\dfrac{\dfrac{3-x}{1+\sqrt{x-2}}}{x^2-9}=\dfrac{-1}{(x+3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}$

Hàm số không xác định khi $x\to-3$. Do đó dễ thấy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Chọn D.

Ví dụ 22: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

TXĐ: $D=[-2;+\infty)\setminus\{2\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}(x-2)}=-\infty$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to2} y=\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=-2$.

Chọn B

Ví dụ 23: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

$D=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. Ta có: $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}$

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x+2}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}=0$ và $\lim\limits_{x\to1+} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng duy nhất là $x=1$.

Ví dụ 24: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. Đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng là $x=\pm1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

Chọn C.

Ví dụ 25: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

$D=(-1;1)$. Do $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=+\infty;\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty;$ nên đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và $x=1$. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang vì $D=(-1;1)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

Chọn B.

Ví dụ 26: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-1}}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

$D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng là $x=\pm1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2-1}}=0$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận.

Chọn C.

Ví dụ 27: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

TXĐ: $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=-1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}=1$

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}=-1$ nên đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Chọn D.

Ví dụ 28: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-4}}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

TXĐ: $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=-2$ và $x=2$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}=3$ nên $y=3$ là một tiệm cận ngang.

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}=-2$ nên $y=-2$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn D.

Ví dụ 29: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{2x-1}$ là:

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

TXĐ: $D=[-1;1]$

Đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{2}$ và không có tiệm cận ngang vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

Chọn A.

Ví dụ 30: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$ là:

A. 2. **B.** 1.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$

Ta có: $y=\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-3)}$. Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}=1$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn C.

Ví dụ 31: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình lần lượt là:

A. $x=\sqrt{2}, y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=4, y=-\dfrac{1}{2}$.
C. $x=2, y=1$. **D.** $x=4, y=1$.

Lời giải:

TXĐ: $D=[0;+\infty)\setminus\{4\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 4} y=\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}=1$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=4$ và một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Chọn D.

Ví dụ 32: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$ là:

A. 0. **B.** 2.

C. 3. **D.** 1.

Lời giải:

$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$. Đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm đứng là $x=-\dfrac{3}{2}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{2}$ nên $y=\dfrac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{2+\dfrac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{-1}{2}$ nên $y=\dfrac{-1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn C.

Ví dụ 33: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau không có tiệm cận

A. $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2-x}$. **B.** $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$.

C. $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2+\sqrt{x}}$. **D.** $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2-x}$ có 1 đường tiệm cận đứng là $x=2$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$ có 1 đường tiệm cận đứng $x=-2$ và 2 đường tiệm cận ngang $y=\pm 1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2+\sqrt{x}}$ có đường tiệm ngang là $y=1$

Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$ **không** có tiệm cận vì không tồn tại $\lim y$ khi $x\to\pm\infty; x\to -2$.

Chọn D.

Ví dụ 34: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau không có tiệm cận ngang

A. $y=\frac{x+1}{x-2}$.

B. $y=\frac{1-x}{\sqrt{2-x^2}}$.

C. $y=\frac{x^2+1}{x^2-2}$.

D. $y=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2+2}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\frac{1-x}{\sqrt{2-x^2}}$ không có tiệm cận ngang vì không tồn tại $\lim y$ khi $x\to\pm\infty$.

Chọn B.

Ví dụ 35: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau không có tiệm cận đứng.

A. $y=\frac{3x-1}{x^2-1}$.

B. $y=\frac{\sqrt{3x+1}}{x^2-9}$.

C. $y=\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+3}}$.

D. $y=\frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+3}}$ không có tiệm cận đứng vì

$$\lim_{x\to(-3)^+}\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{(x+1)(x+3)}{\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to(-3)^+}(x+1)\sqrt{x+3}=0.$$

Chọn C.

Ví dụ 36: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau có cả tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

A. $y=\frac{x^2-2}{2x^2+x+1}$.

B. $y=\frac{x+1}{x^2+1}$.

C. $y=\frac{2+x}{x-\sqrt{x^2+1}}$.

D. $y=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-x-12}}$.

Lời giải:

Đồ thị các hàm số $y=\frac{x^2-2}{2x^2+x+1}$ và $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ không có tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2+x}{x-\sqrt{x^2+1}}$ cũng không có tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-x-12}}$ có cả tiệm cận đứng $x=-3$ và tiệm cận ngang $y=\pm 1$.

Chọn D.

Ví dụ 37: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau có 2 đường tiệm cận ngang

A. $y=\dfrac{1}{3x+\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+4}}{x+2}$.

C. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

D. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+\sqrt{x^2-1}}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có một tiệm cận ngang là $y=1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+4}}{x+2}$ không có tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{3x+\sqrt{x^2+1}}$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+\sqrt{x^2-1}}$ có 2 đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$ khi $x\to+\infty$ và $y=\dfrac{-1}{2-1}=-1$ khi $x\to-\infty$.

Chọn D.

Ví dụ 38: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau có đúng 1 đường tiệm cận đứng.

A. $y=\dfrac{x+3}{x^2-4}$.

B. $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

D. $y=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-4}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}$ không có tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ có 1 đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}}=\frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x+2}}$ không có tiệm cận đứng.

Chọn C.

Ví dụ 39: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau nhận các đường thẳng $x=1$ và $y=2$ là các đường tiệm cận.

A. $y=\frac{x+2}{x^2-3x+2}$.

B. $y=\frac{x+1}{x-2}$.

C. $y=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-1}$.

D. $y=\frac{2x^2-2}{x^2-x}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2-2}{x^2-x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{2(x+1)}{x}$ nên không nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng.

Chỉ có đồ thị hàm số $y=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ nhận các đường thẳng $x=1$ và $y=2$ là các đường tiệm cận.

Ví dụ 40: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau nhận các đường thẳng $x=2$ và $y=1$ là các đường tiệm cận:

A. $y=\frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y=\frac{x-1}{x^2-4}$.

C. $y=\frac{x^2+1}{x-2}$.

D. $y=\frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{2x}-2}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$.

Đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x^2-4}$ có tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+1}{x-2}$ không có tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{2x}-2}$ nhận các đường thẳng $x=2$ và $y=1$ là các đường tiệm cận.

Chọn D.

Ví dụ 41: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau có duy nhất một đường tiệm cận:

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$.

B. $y=\dfrac{x^2-1}{3x-3}$.

C. $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$.

D. $y=\dfrac{|x|+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ có 2 đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{3x-3}=\dfrac{x+1}{3}$ không có tiệm cận.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$ có 3 đường tiệm cận $x=\pm 2; y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x|+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có một đường tiệm cận là $y=1$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$.

Chọn D.

Ví dụ 42: Gọi $a;b;c$ lần lượt là số tiệm cận ngang của đồ thị của các hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2}{2x+\sqrt{x^2+1}}$; $y=\dfrac{1}{3x+2\sqrt{x^2+1}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $a=b>c$.

B. $a=c<b$.

C. $a>b>c$.

D. $a=b=c$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2}{2x+\sqrt{x^2+1}}$ có 2 đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$ khi $x\to+\infty$ và $y=\dfrac{-1}{2-1}=-1$ khi $x\to-\infty$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3x+2\sqrt{x^2+1}}$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$

Do đó $a=c<b$.

Chọn B.

Ví dụ 43: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau có nhiều hơn 1 đường tiệm cận ngang.

A. $y=\dfrac{1}{3x+2\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

C. $y=\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

D. $y=\dfrac{2x+1}{|x|+1}$.

Lời giải:

Hàm số $y=\dfrac{1}{3x+2\sqrt{x^2+1}}$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ có duy nhất 1 đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{|x|+1}$ có 2 đường tiệm cận ngang là $y=2$ khi $x\to+\infty$ và $y=-2$ khi $x\to-\infty$.

Chọn D.

Ví dụ 44: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau có 3 đường tiệm cận.

A. $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3+3x^2}}$

B. $y=\dfrac{x+1}{2|x|+1}$.

C. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

D. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3+3x^2}}\left(D=(-3;+\infty)\setminus\{0\}\right)$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x=0; x=3$ và có 1 đường tiệm cận ngang duy nhất là $y=0$ khi $x\to+\infty$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2|x|+1}$ có đúng 2 đường tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ có 2 đường tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.

Chọn A.

Ví dụ 45 : [Đề thi thử nghiệm của BGD&ĐT năm 2017]. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=-3; x=-2$ **B.** $x=-3$.

C. $x=3; x=2$. **D.** $x=3$.

Lời giải:

Ta có: $y=\dfrac{(2x-1)^2-(x^2+x+3)}{x^2-5x+6}=\dfrac{3x^2-5x-2}{(x-2)(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$$=\frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}.$$

Do vậy chỉ có đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn D.

PHẦN 2: BÀI TOÁN TIỆM CẬN CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+1}{2-x}$ có 2 đường tiệm cận là:

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

C. $m\neq-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\neq 2$.

Lời giải:

Ta có: $y=\dfrac{mx+1}{-x+2}$ có $y'=\dfrac{2m+1}{(-x+2)^2}$. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ hàm số đã cho không suy biến $\Leftrightarrow m\neq-\dfrac{1}{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{mx-2}$ không có tiệm cận là:

A. $m=-2$.

B. $m=-\dfrac{1}{2}$.

C. $m\neq -2$.

D. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=0 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Với $m=0\Rightarrow y=\dfrac{x+1}{-2}$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $m\neq 0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận $\Leftrightarrow$ hàm số đã cho bị suy biến $\Leftrightarrow -2-m=0\Leftrightarrow m=-2$

Chọn D.

Ví dụ 3: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x-1}$ nhận đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang là:

A. $m=1$.

B. $m=-2$.

C. $m\neq 2$.

D. $m=2$.

Lời giải:

ĐK để hàm số không suy biến là $-m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1$.

Khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=m$. Giả thuyết suy ra $m=2$.

Chọn D.

Ví dụ 4: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{m^2x+1}{x+m}$ nhận đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang là:

A. $m=1$.

B. $m=-1$.

C. $m=\pm 1$.

D. $m=\pm 2$.

Lời giải:

Điều kiện để hàm số không suy biến là $m^3-1\neq 0$

Khi đó tiệm cận ngang là $y=m^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1\ (loai) \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Ví dụ 5: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-8}{x-m^2}$ nhận đường thẳng $x=4$ là đường tiệm cận đứng là:

A. $m=2$.

B. $m=-2$.

C. $m=\pm 1$.

D. $m=\pm 2$.

Lời giải:

Điều kiện để hàm số không bị suy biến là $-m^3+8\neq 0$.

Khi đó tiệm cận đứng là $x=m^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (loai)\\ m=-2\end{array}\right.$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{nx-2}$. Giá trị của tổng $m+n$ để đồ thị hàm số đã cho nhận các đường thẳng $x=1$ và $y=2$ là các đường tiệm cận là:

A. 6. **B.** 8.
C. -2. **D.** 10.

Lời giải:

Hàm số không suy biến khi $-2m-2n\neq 0\Leftrightarrow m+n\neq 0$.

Khi đó tiệm cận đứng là $x=\dfrac{2}{n}=1\Rightarrow n=2$. Tiệm cận ngang là $y=\dfrac{m}{n}=\dfrac{m}{2}=2\Leftrightarrow m=4$

Do vậy $m=4;n=2$.

Chọn A.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-mx-2}$. Giá trị của m để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là:

A. $m\neq -1$. **B.** $m=-1$.
C. $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq 1$.

Lời giải:

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-mx-2}$ có 2 đường tiệm cận đứng thì $g(x)=x^2-mx-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_{g(x)}=m^2+8>0\\ g(1)=1-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq -1$.

Chọn A.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x^2-3x}$. Giá trị của m để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là:

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\neq 3$.
C. $m\neq\dfrac{1}{3}$. **D.** $m=3$.

Lời giải:

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x^2-3x}$ có 2 tiệm cận thì $PT: mx-1=0$ không nhận $x=3$ và $x=0$ là đường tiệm cận $\Leftrightarrow \begin{cases} m.0-1\neq 0 \\ m.3-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq \dfrac{1}{3}$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-(2m+1)x+m}$. Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;3)$

A. $m=0$.

B. $m\neq 0$.

C. $m=1$.

D. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Vì tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;3)$ suy ra TCĐ là $x=1$. Khi đó phương trình: $x^2-(2m+1)x+m$ có nghiệm $x=1 \Rightarrow 1-(2m+1).1+m=0 \Leftrightarrow m=0$.

Chọn A.

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

B. $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

D. $m>2$.

Lời giải:

Vì $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}=0$ nên đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$

Để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì nó phải có 2 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow PT: g(x)=x^2-2mx+4$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = m^2 - 4 > 0 \\ g(-1) = 5 + 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-5}{2} \end{cases}.$$

Chọn C.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2mx + 1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận

A. $-1 < m < 1$.

B. $-1 \leq m \leq 1$.

C. $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2mx + 1} = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow PT: g(x) = x^2 + 2mx + 1 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < -1$.

Chọn A.

Chú ý: Khi $m = 1 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{x+1}$ (đồ thị hàm số vẫn có tiệm cận đứng) hoặc khi $m = -1 \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x-2}$ thì đồ thị hàm số vẫn có tiệm cận đứng.

Ví dụ 12: [ĐỀ MINH HOẠ 2017]: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có 2 tiệm cận ngang.

A. Không có giá trị thực nào của m.

B. $m < 0$.

C. $m = 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải:

Khi $m > 0$ ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là một tiệm cận ngang.

+) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1 - \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{-x}} = \dfrac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y = \dfrac{-1}{\sqrt{m}}$ là một tiệm cận ngang.

Khi đó đồ thị hàm số có 2 tiệm cận

Với $m=0$ suy $y=\frac{x+1}{1}$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $m<0$ đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

Chọn D.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số : $y=\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x-2}$ có 2 tiệm cận ngang.

A. Không có giá trị thực nào của m. **B.** $m<0$.

C. $m=0$. **D.** $m>0$.

Lời giải:

Khi $m>0$ ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=\sqrt{m}\Rightarrow y=\sqrt{m}$ là một tiệm cận ngang.

+) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{mx^2+1}}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=-\sqrt{m}\Rightarrow y=-\sqrt{m}$ là một tiệm cận ngang.

Khi đó đồ thị hàm số có 2 tiệm cận:

Với $m=0$ suy $y=\frac{1}{x-2}$ đồ thị hàm số có duy nhất đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Với $m<0$ đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

Chọn D.

Ví dụ 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{mx+\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có 2 đường tiệm cận ngang là $y=a$ và $y=b$ sao cho $a^2+b^2=10$.

A. $m=\pm2$. **B.** $m=\pm3$.

C. $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx+\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=m+1\Rightarrow y=m+1$ là một tiệm cận ngang.

+) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx+\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=m-1\Rightarrow y=m-1$ là một tiệm cận ngang. Khi đó $a^2+b^2=(m+1)^2+(m-1)^2=2m^2+2=10\Leftrightarrow m=\pm2$.

Chọn A.

Ví dụ 15 : Cho hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{b^2x^2+1}}{x-1}$. Nhận xét nào sau đây là **SAI.**

A. Đồ thị hàm số đã cho luôn có 2 đường tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho luôn có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

C. Đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua điểm có toạ độ $(0;-1)$.

D. Đồ thị hàm số đã cho luôn có ít nhất 2 đường tiệm cận.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\dfrac{2+|b|}{1};\lim\limits_{x\to-\infty}y=\dfrac{2-|b|}{1}$.

Khi $b=0$ đồ thị hàm số đã cho chỉ có một tiệm cận ngang duy nhất là $y=2$.

Chọn A.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{mx+n}$. Giá trị của m và n để đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $y=1$ và $x=2$ là các đường tiệm cận là:

A. $\left[\begin{array}{l}m=1;n=-2\\m=-1;n=2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=2;n=-1\\m=-2;n=1\end{array}\right.$

C. $m=1;n=\pm2$. **D.** $m=-1;n=\pm2$.

Lời giải:

Để $x=2$ là tiệm cận đứng thì $x=\dfrac{-n}{m}=2\ (m\neq0)$.

Mặt khác với $m\neq0$ ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{mx+n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{m+\dfrac{n}{x}}=\dfrac{1}{m}$ do đó $y=\dfrac{1}{m}$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{mx+n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{m+\dfrac{n}{x}} = \dfrac{-1}{m}$ do đó $y = \dfrac{-1}{m}$ là đường tiệm cận ngang.

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow n = -2 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} \\ \dfrac{-1}{m} = 1 \Leftrightarrow m = -1 \Leftrightarrow n = 2 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{-x+2} \end{array}\right.$.

Chọn A.

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2+m}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận

A. $m < 0$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2+m} = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì nó phải có 2 tiệm cận đứng .

Khi đó PT $x^2 + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Chọn D.

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+2mx+4}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 đường tiệm cận.

A. $m = \pm 1$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $m = \pm 2$.

D. $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^2+2mx+4} = 1$ nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì nó có đúng một tiệm cận đứng. Vì tử số $x^2 - x + 1 > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ nên để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng thì

$PT:\ x^2 + 2mx + 4 = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Chọn C.

Ví dụ 19: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2mx+4}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

A. $m=\pm 1$.

B. $-2<m<2$.

C. $m=\pm 2$.

D. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2mx+4}=1$ nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì nó có đúng một tiệm cận đứng. Vì tử số $x^2-x+1>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ nên để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng thì

$PT:\ x^2+2mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Chọn D.

Ví dụ 20: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.

A. $m=\pm 1$.

B. $-2<m<2$.

C. $m=\pm 2$.

D. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận $\Leftrightarrow$ nó bị suy biến $\Leftrightarrow m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Chọn C.

Ví dụ 21: Cho hàm số $y=\dfrac{(m^2-1)x^2+(m-1)x+1}{2x+1}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.

A. $m=\pm 1$.

B. $-1<m<1$.

C. $m=-1$.

D. $m=1$.

Lời giải:

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(m^2-1)x^2+(m-1)x+1}{2x+1}=y_0 \Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Chọn A.

Ví dụ 22: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho có tiệm cận đứng.

A. $m<2$.
B. $m=2$.
C. $m>2$.
D. $m\le 2$.

Lời giải:

TXĐ: $D=(-\infty;2]\setminus\{m\}$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $\lim\limits_{x\to m^+}\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-m}=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to m^-}\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-m}=\infty$.

Khi đó $m\le 2$. Chu ý khi $m=2\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-2}=\dfrac{-1}{\sqrt{2-x}}$ đồ thị hàm số vẫn có tiệm cận đứng là $x=2$ bởi vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-1}{\sqrt{2-x}}=-\infty$.

Chọn D.

Ví dụ 23: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=0\end{array}\right.$.
C. $0<m<1$.
D. $\begin{cases} m\ne 0 \\ m\ne 1\end{cases}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}\ne\infty$.

Khi đó $x=m$ là nghiệm của PT $2x^2-3x+m\Leftrightarrow 2m^2-3m+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1\end{array}\right.$.

Chọn B.

Ví dụ 24: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+m+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang khi và chỉ khi.

A. $m>1$.
B. $m<1$.
C. $m\ne 1$.
D. $m=1$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang khi và chỉ khi hàm số không bị suy biến $\Leftrightarrow 2m-(m+1)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Chọn C.

Ví dụ 25: Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-2mx+1}$ có một đường tiệm cận đứng.

A. $m>1$. **B.** $m<1$.

C. $m=1$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải:

Để đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng thì PT $x^2-2mx+m+1$ có nghiệm (nghiệm phân biệt hoặc nghiệm kép) trong đó có nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-1\geq 0\\ (1)^2-2m+1=0\end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Với $m=1 \Rightarrow y=\dfrac{x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{x-1}$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Chọn C.

Ví dụ 26: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+1}{\sqrt{x^2+n}}$. Giá trị của m và n để đồ thị hàm số đã cho nhận các đường thẳng $x=1$ và $y=2$ là các đường tiệm cận là:

A. $n=1; m=2$. **B.** $n=-1; m=\pm 2$.

C. $n=1; m=\pm 2$. **D.** $n=-1; m=-2$.

Lời giải:

Để $x=1$ là tiệm cận của đồ thị hàm số thì $(1)^2+n=0 \Leftrightarrow n=-1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx+1}{\sqrt{x^2+n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{n}{x^2}}}=m$, và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx+1}{\sqrt{x^2+n}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{n}{x^2}}}=-m$.

Do vậy để đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang thì $\left[\begin{array}{l} m=2\\ -m=2\end{array}\right. \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Chọn B.

Ví dụ 27: Cho hàm số $y=\dfrac{m^2x+2}{4x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$:

A. $m=\pm 2$.
B. $m=-2$.
C. $m=2$.
D. $m=\pm 1$.

Lời giải:

Để $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì $\begin{cases}\dfrac{m^2}{4}=1\\ m^3-8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Chọn B.

Chú ý: Khi $m^3-8=0\Leftrightarrow m=2$ $(ad=bc)$ thì hàm số đã cho suy biến thành hàm hằng.

Ví dụ 28: Cho hàm số $y=\dfrac{m^2x-2}{mx-1}$. Giá trị của m để đồ thị hàm số có tiệm cận đi qua điểm là $A(1;2)$.

A. $m=2$.
B. $m=1$
C. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=2\end{array}\right.$.
D. $m=\pm 2$.

Lời giải:

Điều kiện để hàm số không suy biến là $-m^2+2m\neq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\neq 0\\ m\neq 2\end{array}\right.$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{m}$, tiệm cận ngang là $y=\dfrac{m^2}{m}=m$.

Cho $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{m}=1\\ m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=2\ (loai)\end{array}\right.$.

Chọn B.

Ví dụ 29: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$ và $y=\dfrac{2mx+1}{x-2}$. Giá trị của m để đồ thị 2 hàm số trên có chung một đường tiệm cận ngang là:

A. $m=\pm\dfrac{1}{3}$.
B. $m=\pm\dfrac{1}{2}$.
C. $m=\pm 1$.
D. $m=\pm\dfrac{1}{4}$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx+\sqrt{x^2-1}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{m+1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx+\sqrt{x^2-1}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{m-1}{2}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$ có 2 đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{m+1}{2}$ và $y=\dfrac{m-1}{2}$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+1}{x-2}$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y=2m$.

Cho $\left[\begin{array}{l}\dfrac{m+1}{2}=2m\\ \dfrac{m-1}{2}=2m\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{3}$.

Chọn A.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6060]

Câu 1: [535480] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-7}$ là:

A. $x=7$. **B.** $x=14$.

C. $x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

Câu 2: [535481] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{8x-25}{x-3}$ là:

A. $x=7$. **B.** $x=14$.

C. $x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

Câu 3: [535482] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{8x-1999}{4x-6}$ là:

A. $x=7$. **B.** $x=14$.

C. $x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

Câu 4: [535483] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-7}$ là:

A. $y=7$.
B. $y=14$.
C. $y=\frac{3}{2}$.
D. $y=2$.

Câu 5: [535484] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{8x-25}{x-3}$ là:

A. $y=8$.
B. $y=3$.
C. $y=\frac{25}{8}$.
D. $y=2$.

Câu 6: [535485] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{8x-1999}{4x-6}$ là:

A. $y=8$.
B. $y=3$.
C. $y=\frac{3}{2}$.
D. $y=2$.

Câu 7: [535486] Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=25x-8+\frac{1}{x-99}$ là:

A. $y=25x-8$.
B. $y=25$.
C. $y=25x-99$.
D. $y=25x$.

Câu 8: [535487] Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ là:

A. $y=x-1$.
B. $y=x$.
C. $y=x+1$.
D. $y=-x$.

Câu 9: [535489] Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2-3x-1}{x-2}$ là:

A. $y=2x-1$.
B. $y=x-2$.
C. $y=2x+1$.
D. $y=-x+2$.

Câu 10: [535490] Trong các hàm số sau, đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận ngang:

A. $y=x^3+25x^2+8$.
B. $y=x^4-8x^2+99$.
C. $y=\frac{-3x-1}{x^2-2}$.
D. $y=\frac{2x^2-1}{x-2}$.

Câu 11: [535491] Trong các hàm số sau, đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận xiên:

A. $y=x^3+25x^2+8$.

B. $y=x^4-8x^2+99$.

C. $y=\dfrac{-3x-1}{x^2-8}$.

D. $y=\dfrac{25x^2-1}{x-2}$.

Câu 12: [535493] Trong các hàm số sau, đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận xiên:

A. $y=x^3+25x^2+8$.

B. $y=x^4-8x^2+99$.

C. $y=\dfrac{-3x-1}{x^2-8}$.

D. $y=\dfrac{25x^2-1}{x-2}$.

Câu 13: [535494] Số đường tiệm cận của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^3+3x^2-1}{x^2-1}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 14: [535495] Đường thẳng $x=\dfrac{-1}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số nào ?

A. $y=\dfrac{-3x-1}{x^2-8}$.

B. $y=x^3+25x^2+8$.

C. $y=\dfrac{2x^2-1}{x-2}$.

D. $y=\dfrac{8x-25}{3x+1}$.

Câu 15: [535497] Đường thẳng $y=-8$ là tiệm cận ngang của đồ thị của hàm số nào ?

A. $y=\dfrac{2x+7}{x^2-9}$.

B. $y=\dfrac{16x-25}{3-2x}$.

C. $y=\dfrac{2x^2-1}{16x-2}$.

D. $y=\dfrac{8x-25}{1-3x}$.

Câu 16: [535498] Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ là:

A. $y=1, x=2$.

B. $y=2, x=1$.

C. $y=\dfrac{1}{2}, x=1$.

D. $y=1, x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 17: [535499] Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) có hai điểm phân biệt M,N tổng khoảng cách từ M và N đến hai tiệm cận là nhỏ nhất. Khi đó MN^2 bằng

A. 68.

B. 48.

C. 16 .

D. 32 .

Câu 18: [535500] Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x^2-3x+2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số trên là:

A. 1 **B.** 2 .

C. 3. **D.** 0 .

Câu 19: [535501] Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}}{x-1}$ và $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$. Tổng số đường tiệm cận của hai đồ thị là

A.3. **B.** 4.

C. 5 . **D.** 6 .

Câu 20: [535502] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{m^2x-4}{mx-1}$ có tiệm cận đi qua điểm $A(1;4)$

A. $m=1$. **B.** $m=2$.

C. $m=3$. **D.** $m=4$.

Câu 21: [535503] Giả sử $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường phân giác góc phần tư thứ nhất (của mặt phẳng tọa độ) với tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Tính x_0+y_0.

A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 8.

Câu 22: [535506] Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2-4x+5}{3x(x-1)}$. Đồ thị hàm số đã cho có các đường tiệm cận nào?

A. Có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. **B.** Chỉ có tiệm cận đứng.

C. Chỉ có tiệm cận ngang. **D.** Không có tiệm cận.

Câu 23: [535507] Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2mx+m^2-1}$ có mấy đường tiệm cận:

A. 1. **B.** 3.

C. 2. **D.** 4.

Câu 24: [535508] Gọi *a, b, c* lần lượt là số tiệm cận của các đồ thị hàm số sau: $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+4}$; $y=\dfrac{17}{4x^2+x-2}$; $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$. Nhận định nào sau đây là đúng ?

A. $b>c>a$. **B.** $b>a>c$.

C. $a>c>b$. **D.** $c>a>b$.

Câu 25: [535509] Cho hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+n}$. Nếu đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$ và có tiệm cận ngang và đi qua điểm $A(2;5)$ thì phương trình hàm số là:

A. $\frac{-2x+1}{x-3}$ B. $\frac{-3x+1}{x-3}$

C. $\frac{-5x+1}{x-3}$ D. $\frac{3x+1}{x-3}$

Câu 26: [535511] Đường thẳng $x=a$ được gọi tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu:

A. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a$. B. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

C. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=a$ D. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Câu 27: [535512] Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm phân thức chỉ có tiệm cận ngang khi bậc của tử số lớn hơn bậc của mẫu số.

B. Đồ thị hàm phân thức chỉ có tiệm cận ngang khi bậc của tử số không lớn hơn bậc của mẫu số.

C. Đồ thị hàm phân thức luôn có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm phân thức luôn có tiệm cận đứng.

Câu 28: [535513] Cho hàm số $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=\pm 3$ và 2 đường tiệm cận ngang là $y=\pm 1$. **B.** Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=\pm 3$ và 1 đường tiệm cận ngang là $y=1$.
C. Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=3$ và 1 đường tiệm cận ngang là $y=1$.

D. Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=3$ và không có tiệm cận ngang.

Câu 29: [535515] Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+5$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 0. B. 1.

C. 2. D. 3.

Câu 30: [535517] Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $y=2$ là 1 đường tiệm cận ?

A. $y=\frac{3x}{x-2}$. B. $y=\frac{-2x+1}{2-x}$.

C. $y=\frac{2x-1}{2-x}$. D. $y=x-2$.

Câu 31: [535518] Đồ thị hàm số nào sau đây có 2 đường tiệm cận ngang?

A. $y=\frac{x-1}{2x+3}$. B. $y=\frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

C. $y=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3}$. D. $y=x^3-3x^2-1$ $(2;7)$.

Câu 32: [535519] Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng ?

A. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.
B. $y=\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$.
C. $y=\dfrac{x+2}{x^2-x-1}$.
D. $y=\dfrac{x-1}{(x+2)^2}$

Câu 33: [535520] Gọi A là 1 điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$ (C). Gọi S tổng khoảng cách từ A đến 2 đường tiệm cận của (C). Giá trị nhỏ nhất của S là:

A. $\sqrt{6}$.
B. $2\sqrt{6}$.
C. 6.
D. 12.

Câu 34: [535521] Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, có đồ thị (C). Gọi P,Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P hoặc Q tới 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là:

A. $4\sqrt{2}$.
B. $5\sqrt{2}$.
C. 4.
D. $2\sqrt{2}$.

Câu 35: [535522] Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4x+m}$. Với giá trị nào của m thì đồ hàm số có 1 đường tiệm cận đứng?

A. $m=4$.
B. $m\geq 4$.
C. $m<4$.
D. $m\in\varnothing$.

Câu 36: [535522] Cho hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+9}$ (C). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) là

A. $x=-6$.
B. $y=1$.
C. $x=-9$.
D. $y=-6$.

Câu 37: [535524] Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-5}$ (C). Tọa độ giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) là

A. $(3;5)$.
B. $(5;3)$.
C. $(3;1)$.
D. $(5;1)$.

Câu 38: [535526] Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$ (C). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) là

A. $y=x+3$.
B. $y=x-3$.
C. $y=x+2$.
D. $y=x-2$.

Câu 39: [535527] Cho hàm số $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,(C)$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) là

A. $x=1$.
B. $x=-1$.
C. $x=1$ và $x=-1$.
D. Đồ thị không có tiệm cận đứng.

Câu 40: [535528] Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x^2+4x-5}\,(C)$. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) là

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Câu 41: [535529] Cho hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\,(C)$. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (C) là

A. $y=1$.
B. $y=-1$.
C. $y=1$ và $y=-1$.
D. $x=1$ và $x=-1$.

Câu 42: [535531] Cho hàm số $y=\frac{6x+9}{\sqrt{3x^2+5}}\,(C)$. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (C) là

A. $y=2\sqrt{3}$.
B. $y=-2\sqrt{3}$.
C. $y=2\sqrt{3}$ và $y=-2\sqrt{3}$.
D. $x=2\sqrt{3}$ và $x=-2\sqrt{3}$.

Câu 43: [535532] Cho hàm số $y=\frac{x-2}{2x^2+x+2m}\,(C)$. Tìm m để đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận đứng

A. $m<\frac{1}{4}$.
B. $m>\frac{1}{4}$.
C. $m>\frac{1}{16}$.
D. $m<\frac{1}{16}$.

Câu 44: [535533] Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x^2+x+m}\,(C)$. Tìm m để đồ thị hàm số (C) có một tiệm cận đứng

A. $m=0$.
B. $m=\frac{1}{4}$.
C. $m=0$ và $m=\frac{1}{4}$.
D. $m\in\varnothing$.

Câu 45: [535535] Cho hàm số $y=\frac{2x^2+mx-2}{x+1}\,(C)$. Tìm m để đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4

A. $m=6$ và $m=-2$.
B. $m=2$ và $m=-2$.
C. $m=6$ và $m=-6$.
D. $m\in\varnothing$.

Câu 46. [535536] Tìm giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$.

A. (1;2). **B.** (2;1).
C. (1;1). **D.** (1;3).

Câu 47: [535538] Cho hàm số $y=\frac{3x+5}{2x-3}$ có đường cong (*C*). Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. (*C*) không tồn tại tiệm cận.

B. (*C*) có tiệm cận ngang là $y=\frac{3}{2}$.

C. (*C*) nhận $y=\frac{2}{3}$ là tiệm cận xiên.

D. (*C*) có hai đường tiệm cận đứng.

Câu 48: [535539] Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=2x+1-\frac{1}{x}$.

A. 2. **B.** 1.
C. 3. **D.** 0.

Câu 49: [535541] Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2-3x-1}{x-2}$.

A. $y=2x$. **B.** $y=2$.
C. $y=2x-3$. **D.** $y=2x+1$.

Câu 50: [535542] Tìm giao điểm của trục tung với tiệm cận xiên của đường cong $y=\frac{x^2-3x+4}{2x+1}$.

A. $\left(0;-\frac{7}{4}\right)$. **B.** (0;4).
C. (0;– 2). **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 51: [535543] Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x^3-x}$.

A. $y=x$. **B.** $y=2x$.
C. $y=2x-3$. **D.** $y=1-x$.

Câu 52: [535545] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m+1}{x-1}$ không tồn tại đường tiệm cận xiên.

A. $m=-1$.
B. $m=0$.
C. $m\neq -1$.
D. $m=3$.

Câu 53: [535546] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y=\dfrac{mx^3-2}{x^2-3x+2}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m\notin\left\{2;\dfrac{1}{4}\right\}$.
B. $m\notin\left\{3;\dfrac{1}{2}\right\}$.
C. $m\neq -1$.
D. $m\notin\{2;1\}$.

Câu 54: [535548] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y=\dfrac{4x^2-m}{x^2-4x+3}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m\notin\{4;36\}$.
B. $m\notin\{2;1\}$.
C. $m\notin\{3;4\}$.
D. $m\neq -1$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	02. D	03. C	04. D	05. A	06. D	07. A	08. B	09. C	10. C
11. D	12. D	13. C	14. D	15. B	16. B	17. D	18. C	19. C	20. A
21. A	22. A	23. B	24. A	25. B	26. D	27. B	28. A	29. A	30. B
31. C	32. B	33. B	34. A	35. A	36. C	37. D	38. A	39. C	40. C
41. C	42. C	43. C	44. C	45. A	46. A	47. B	48. A	49. D	50. A
51.A	52. B	53. A	54. A						

Chủ đề 5

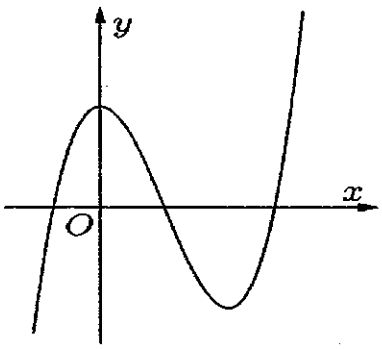
NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3

[TV6061]

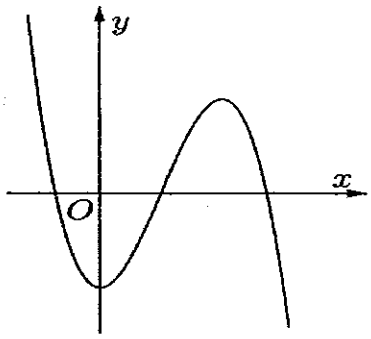
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Lý thuyết về đồ thị hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

Dạng 1: Có 2 điểm cực trị (khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt)



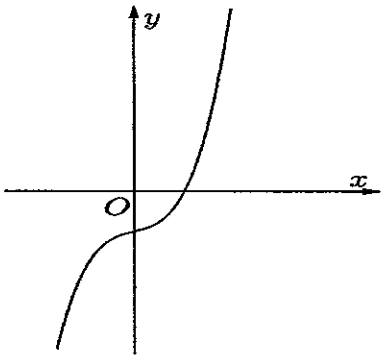
(Hệ số $a > 0$; $x_{CD} < x_{CT}$)



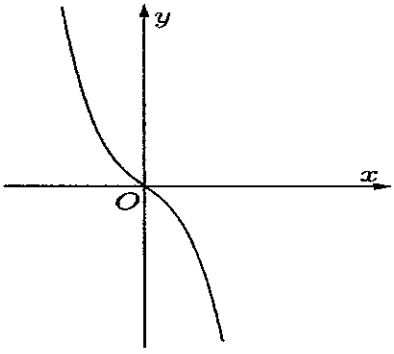
(Hệ số $a < 0$; $x_{CD} > x_{CT}$)

Chú ý: Trong trường hợp hàm số bậc 3 có 2 điểm cực trị thì $y_{CD} > y_{CT}$.

Dạng 2: Không có cực trị (khi và chỉ khi $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$)



(Hệ số $a > 0$)



(Hệ số $a < 0$)

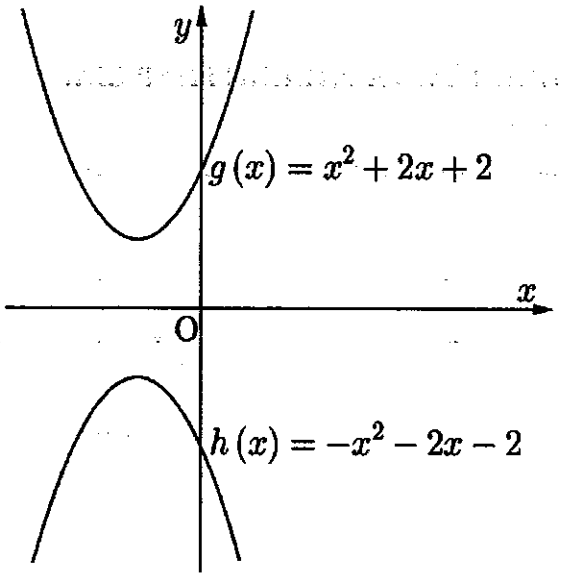
Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm có toạ độ $(0;c)$

Sự đối xứng của hai đồ thị hàm số.

1. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành:

Ví dụ 1: +) Đồ thị các hàm số $y=x^2$ và $y=-x^2$ đối xứng nhau qua trục hoành.

+) Đồ thị hàm số $y=\log_3 x$ và $y=\log_{\frac{1}{3}} x=-\log_3 x$ (phần loga chúng ta sẽ nghiên cứu) đối xứng nhau qua trục hoành.

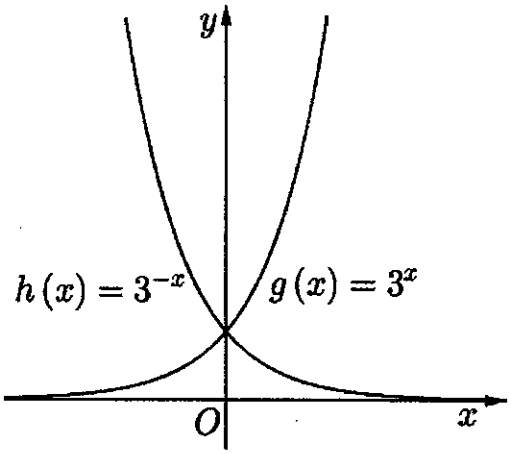


2. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f(-x)$ đối xứng nhau qua trục tung.

Ví dụ 2: +) Đồ thị hàm số $y=x^2+x$ và $y=(-x)^2-x$ đối xứng nhau qua trục tung.

+) Đồ thị hàm số $y=3^x$ và $y=3^{-x}$ đối xứng nhau qua trục tung.

+) Đồ thị hàm số $y=\sin x$ và $y=\sin(-x)$ đối xứng nhau qua trục tung.



2. Phương pháp giải:

Để nhận diện đồ thị hàm số bậc 3 ta làm như sau:

+) Dựa vào $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ để xác định hệ số a.

Nếu $a>0$ thì nhánh cuối đi lên $x; y$ tiến về vô cùng.

Nếu $a<0$ thì nhánh cuối đi xuống $x\to+\infty$ và $y\to-\infty$.

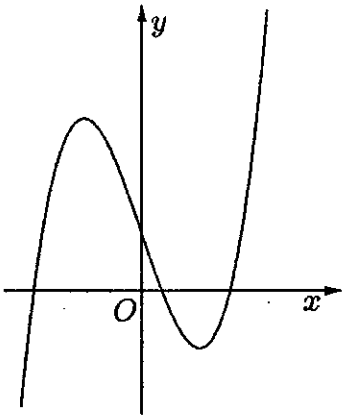
+) Dựa vào giao điểm với trục tung $A(0;c)$ suy ra tính chất của hệ số c.

+) Dựa vào số điểm cực trị của đồ thị hàm số suy ra số nghiệm của phương trình $y'=0$.

+) Dựa vào vị trí của các điểm cực trị, toạ độ các điểm cực trị và các điểm mà đề bài đã cho thuộc đồ thị hàm số.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: [Đề minh hoạ THPT QG năm 2017] : Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=-x^2+x-1$ **B** $y=-x^3+3x+1$.

C $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

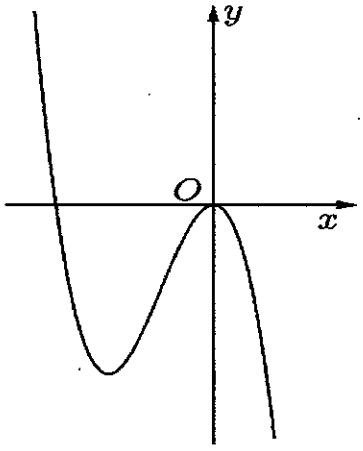
Lời giải:

Do đồ thị hàm số có 2 cực trị nên ta rễ ràng loại **A** và **C.**

Ta thấy rằng hàm số này có hệ số $a>0$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$ nên loại đáp án **B.**

Chọn D.

Ví dụ 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=-x^2+3x$. **B.** $y=-x^3+3x^2$

C. $y=-x^3-3x^2$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

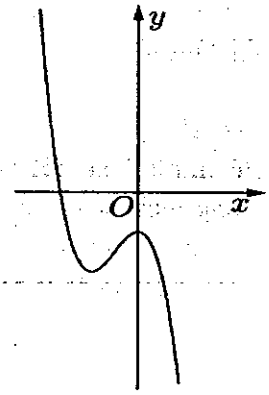
Lời giải:

Do đồ thị hàm số có 2 cực trị nên ta rễ ràng loại **A**.
Đồ thị hàm số đã cho có hệ số $a<0$ nên ta loại đáp án **D.**

Mặt khác ở đáp án $y=-x^3+3x^2$ ta thấy $y'=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ nên hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=0; x=2$ không thoã mãn vì trong hình vẽ đồ thị hàm số đạt cực trị tại một điểm $x=0$ và một điểm $x<0$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=-2x^3-3x^2-1$.

B. $y=-2x^3+3x^2-1$.

C. $y=-2x^3-3x^2+1$.

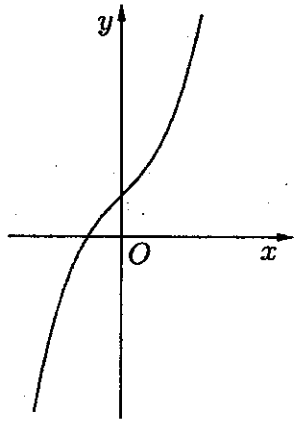
D. $y=2x^3+3x^2-1$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho có dạng của hàm số bậc 3 có hệ số $a<0$ (loại **D**)
Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;c)$ dựa vào đồ thị ta thấy rằng $c<0$ (loại **C**)
Lại có đồ thị hàm số đạt cực trị tại $x=0$ và một điểm có hoành độ $x<0$. Do đó chỉ có đáp án **A** thoã mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Ví dụ 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=-2x^3-x^2+2$.

B. $y=-x^3-3x+1$

C. $y=\frac{x^3}{3}+x+1$.

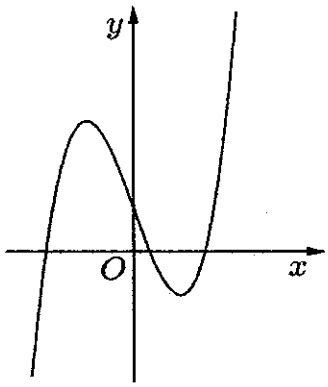
D. $y=\frac{x^3}{3}-x+2$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy. Hàm số đã cho có hệ số $a>0$ (loại đáp án **A** và **B**).
Hàm số đã cho không có cực trị (loại đáp án **D**).

Chọn C.

Ví dụ 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^3 - 3x - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = -x^3 - 3x + 1$

Lời giải:

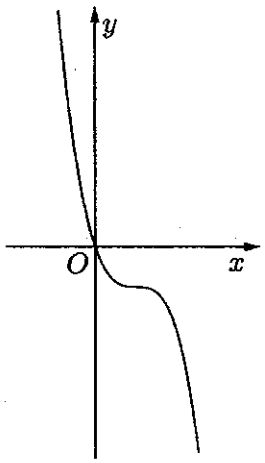
Dễ thấy đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương nên loại **A.**

Hàm số có hệ số $a > 0$ nên loại **D.**

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1 < 0 < x_2$ nên loại **B.**

Chọn C.

Ví dụ 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -x^3 - 3x^2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 3x$.

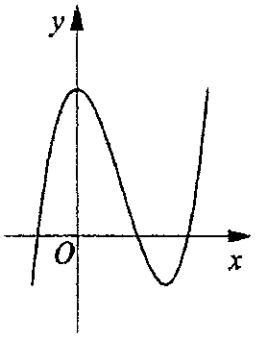
D. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy, hàm số đã cho không có cực trị nên loại đáp án **A** và có hệ số $a < 0$ loại đáp án **B.** Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3x$ có $y' = -3x^2 + 6x + 3 = 0$ có 2 nghiệm nên loại đáp án **C.**

Chọn D.

Ví dụ 7: [Trích đề thi THPT QG năm 2017] Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

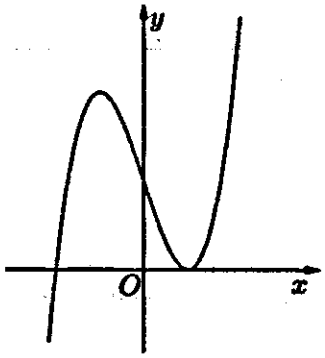
D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta loại đáp án **B** và **C**, mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ (loại **D**).

Chọn A.

Ví dụ 8:[Trích đề thi THPT QG năm 2017] Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



A. $y=x^3-3x+2$.

B. $y=x^4-x^2+1$.

C. $y=x^4+x^2+1$.

D. $y=-x^3+3x+2$.

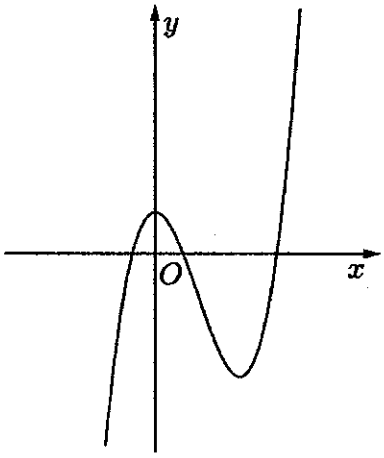
Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

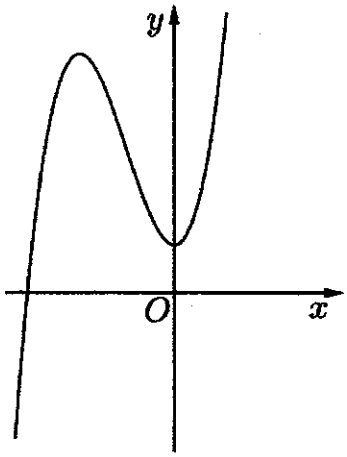
Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên hệ số $a>0$.

Chọn A.

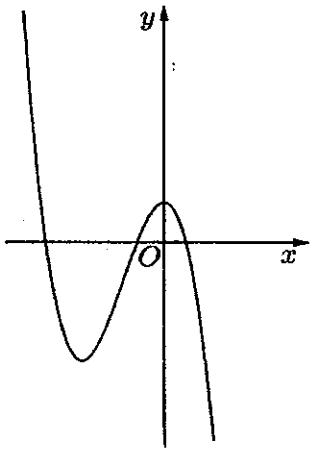
Ví dụ 9: Đâu là đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ trong các đồ thị sau:



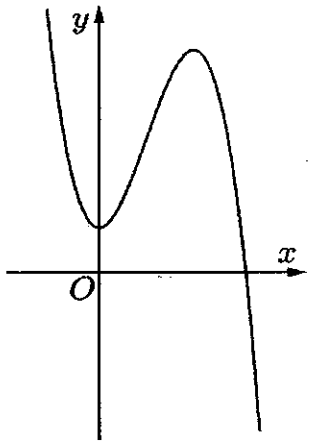
A.



B.



C.



D.

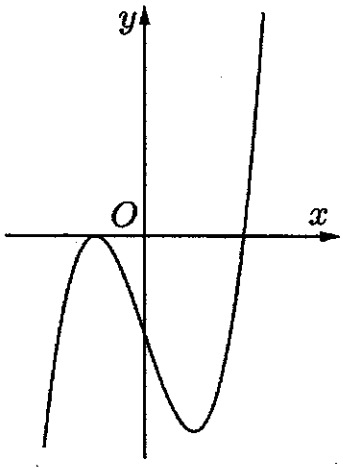
Lời giải:

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có hệ số $a > 0$ nên ta loại 2 đồ thị **C** và **D**

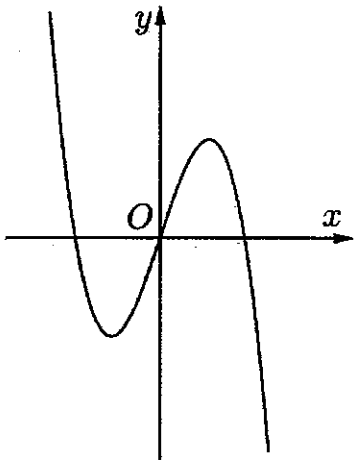
Mặt khác hàm số này có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Dựa vào đồ thị 2 hình **A** và **B** ta thấy chỉ đáp án **A** thỏa mãn một cực trị $x = 0$ và một cực trị dương.

Chọn A.

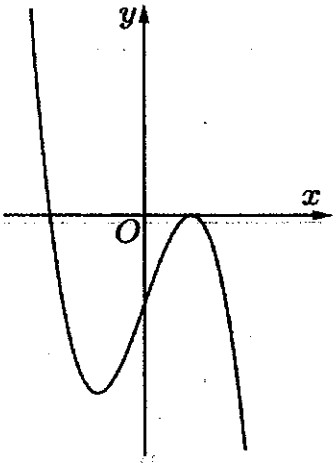
Ví dụ 10: Đâu là đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ trong các đồ thị sau:



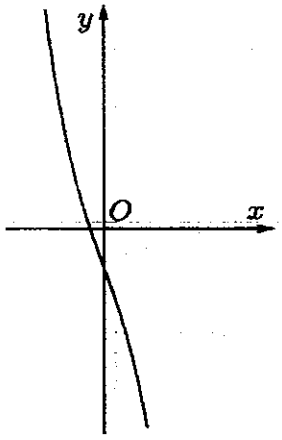
A.



B.



C.



D.

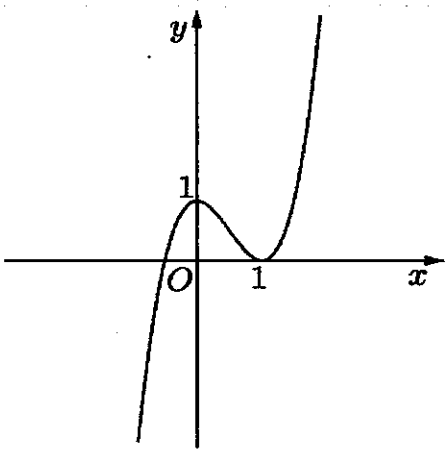
Lời giải:

Hàm số $y=-x^3+3x-2$ có hệ số $a<0$ nên ta loại đáp án **A.** Hàm số có $c=-2<0$ nên cắt trục tung tại điểm có tung độ âm (loại **B**).

Mặt khác $y'=-3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ nên đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị loại **D.**

Chọn C.

Ví dụ 11: Cho đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ (C) như hình vẽ.



Giá trị của tham số *m* để phương trình $x^3-\frac{3}{2}x^2+2m+1=0$ có 3 nghiệm phân biệt là:

A. $\frac{1}{4}\ge m\ge\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}>m>\frac{1}{2}$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ m=\frac{1}{4} \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m>\frac{1}{2} \\ m<\frac{1}{4} \end{array}\right.$.

Lời giải:

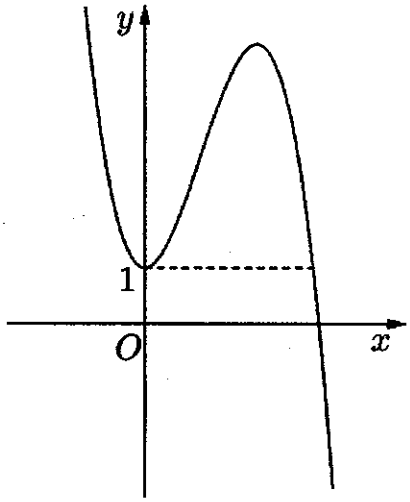
Ta có $PT \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = -4m - 1$ (1).

Số nghiệm của PT (1) là số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = -4m - 1$ (đường thẳng nay song song với trục Ox).

Để PT đã cho có 3 nghiệm thì $0 < -4m - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > m > \frac{1}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 12: Cho đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ (C) như hình vẽ.



Giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 6x^2 + m - 2 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là:

A. $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = 5 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 1 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m = 8 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

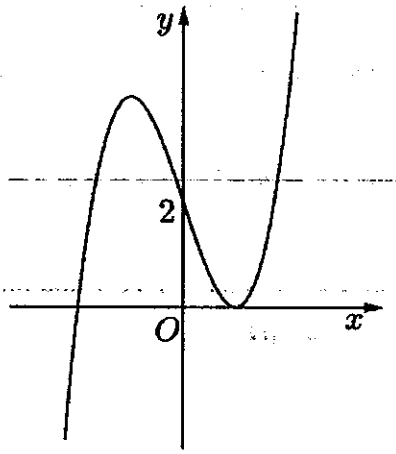
Ta có: $PT \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + \frac{m}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -x^3 + 3x^2 + 1$

Số nghiệm của PT đã cho phụ thuộc vào số giao điểm của $(C): -x^3 + 3x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = \frac{m}{2}$

Dựa vào đồ thị ta thấy: PT đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m}{2} = 4 \\ \frac{m}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 8 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Chọn D.

Ví dụ 13: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C) như hình vẽ:



Giá trị của tham số m để phương trình $|x^3 - 3x + 2| = m$ có 4 nghiệm phân biệt là:

A. $0 < m < 4$.
B. $0 \le m \le 4$.
C. $0 < m \le 4$.
D. Không tồn tại m.

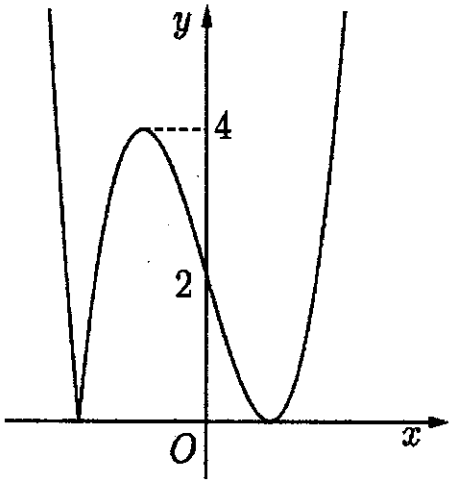
Lời giải:

Xét hàm số $y = |x^3 - 3x + 2| = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 \text{ khi } x^3 - 3x + 2 \ge 0 \\ -(x^3 - 3x + 2) \text{ khi } x^3 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$ (C_1)

Do vậy (C_1) gồm 2 phần

Phần 1: Là phần của (C) nằm bên trên trục Ox.

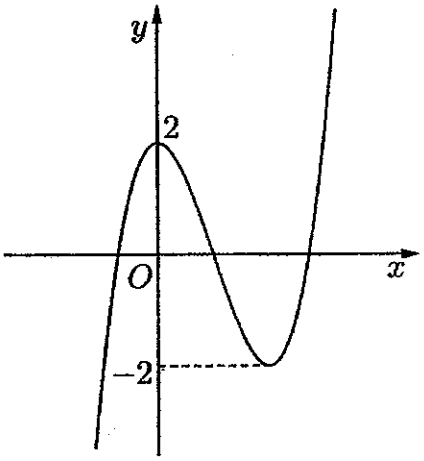
Phần 2: Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua Ox.



Dựa vào đồ thị ta thấy PT đã cho có 4 nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Chọn A.

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của tham số m để phương trình $|x^3 - 3x^2 + 2| = 2m + 1$ có 6 nghiệm phân biệt là:

A. $0 < m < 2$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $\frac{-1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

D. $-1 < m < 3$.

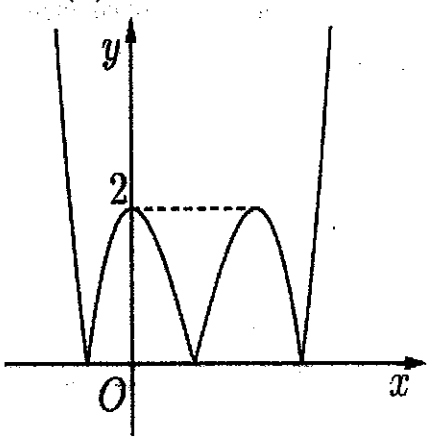
Lời giải:

Đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 2| = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 & \text{khi } x^3 - 3x^2 + 2 \geq 0 \\ -(x^3 - 3x^2 + 2) & \text{khi } x^3 - 3x^2 + 2 < 0 \end{cases}$

Gồm 2 phần:

Phần 1: Là phần của (C) nằm trên trục Ox.

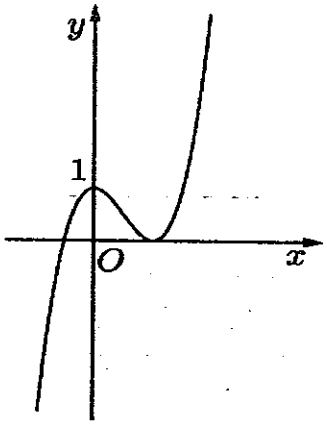
Phần 2: Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua trục Ox ta được đồ thị như hình vẽ.



Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì $0 < 2m + 1 < 2 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 15: Cho đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ như hình vẽ:



Giá trị của tham số m để phương trình $2|x^3| - 3x^2 + 2m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là:

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $m < \frac{1}{2}$.

D. $0 < m < \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Xét $y = 2x^3 - 3x^2 + 1 = f(x)$. Ta có: $PT \Leftrightarrow 2|x^3| - 3|x^2| + 1 = 2 - 2m$.

Xét hàm số $y = 2|x^3| - 3|x^2| + 1 = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \geq 0 \\ f(-x) \text{ khi } x < 0 \end{cases} (C_1)$.

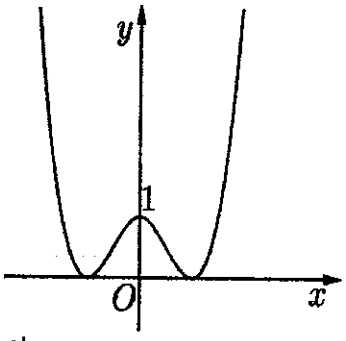
Do vậy (C_1) gồm 2 phần:

Phần 1: Là phần của (C) ứng với miền $x \geq 0$

Phần 2: Ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên nhận trục tung là trục đối xứng

Do vậy phần 2 ta lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy

Ta được đồ thị như hình vẽ.



Từ đó suy ra $PT \Leftrightarrow 2|x^3| - 3|x^2| + 1 = 2 - 2m$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2 - 2m > 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Chọn C.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6062]

Câu 1: [539238] Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

A. $y=x^3-3x^2+3x.$ **B.** $y=-x^3+3x^2-3x.$

C. $y=x^3+3x^2-3x.$ **D.** $y=-x^3-3x^2-3x.$

Câu 2: [539239] Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

A. $y=x^3-3x^2-1.$ **B.** $y=-x^3+3x^2-1.$

C. $y=x^3+3x^2-1.$ **D.** $y=-x^3-3x^2-1.$

Câu 3: [539242] Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	|	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 4: [539244] Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+1$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↘		↗		↘	

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

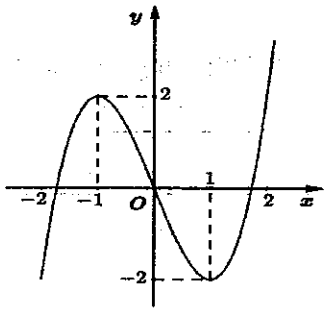
A. $b<0, c<0$.

B. $b>0, c>0$.

C. $b>0, c<0$.

D. $b<0, c>0$.

Câu 5: [539245] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



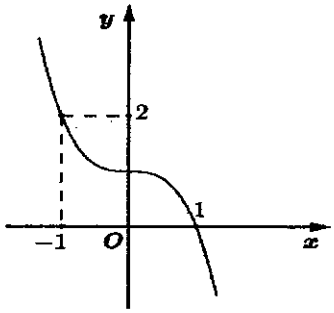
A. $y=x^3+3x$.

B. $y=x^3-3x$.

C. $y=-x^3+2x$.

D. $y=-x^3-2x$.

Câu 6: [539246] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



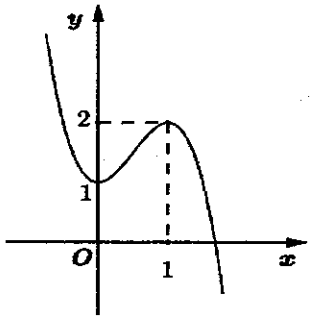
A. $y=-x^3+1$.

B. $y=-2x^3+x^2$.

C. $y=3x^2+1$.

D. $y=-4x^3+1$.

Câu 7: [539247] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



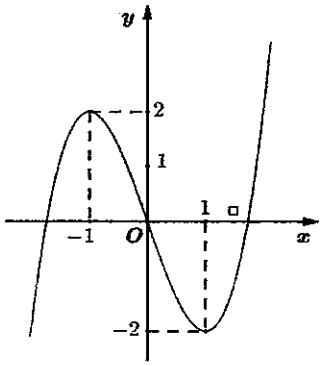
A. $y=2x^3+3x^2+1$.

B. $y=2x^3-3x^2+1$.

C. $y=-2x^3-3x^2+1$.

D. $y=-2x^3+3x^2+1$.

Câu 8: [539248] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



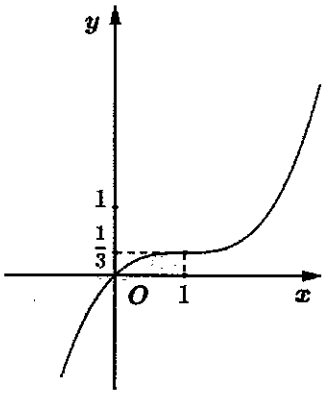
A. $y = x^3 - 3x.$

B. $y = -x^3 - 3x.$

C. $y = -x^3 + 3x + 1.$

D. $y = x^3 - 3x + 1.$

Câu 9: [539249] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



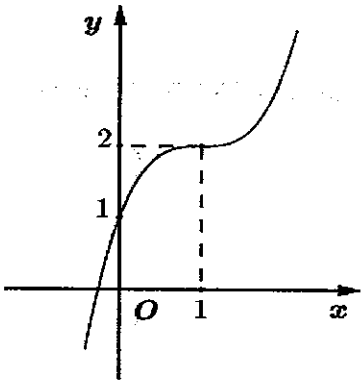
A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x.$

B. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1.$

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x.$

D. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2.$

Câu 10: [539250] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



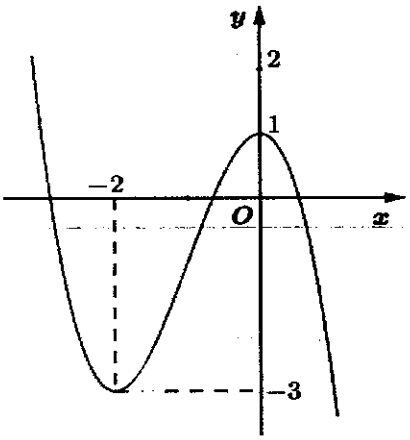
A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

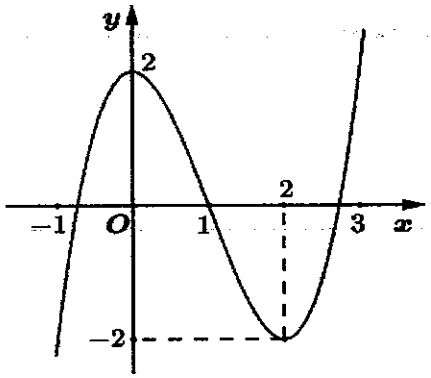
C. $y = x^3 - 3x + 1.$

D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1.$

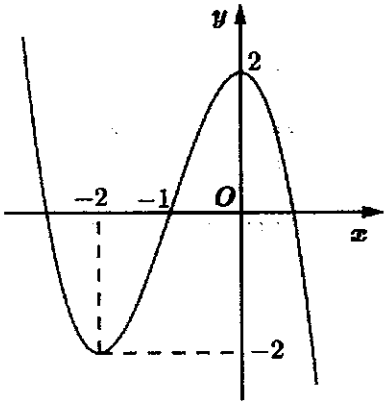
Câu 11: [539252] Đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ có dạng



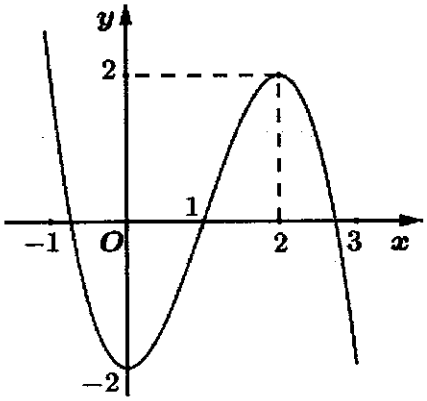
A



B

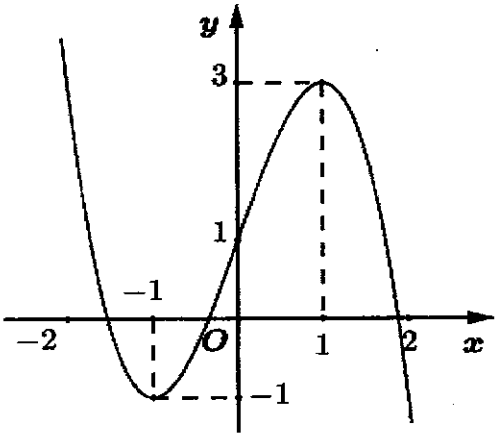


C

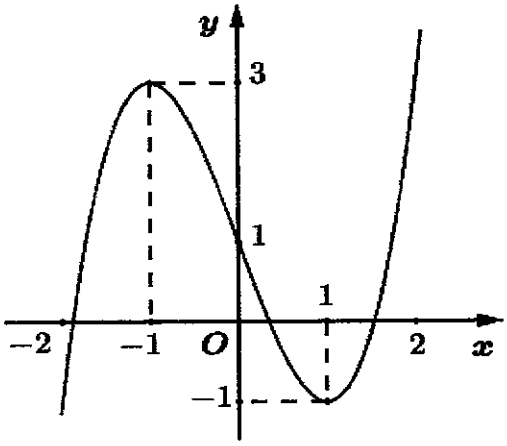


D

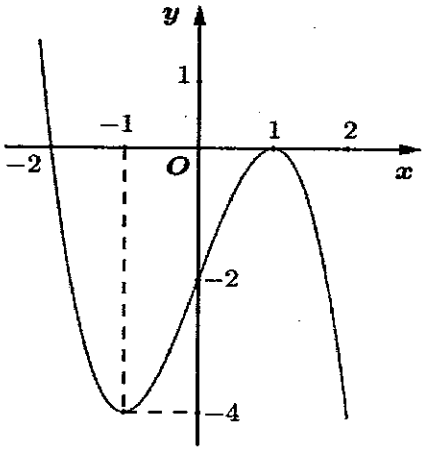
Câu 12: [539253] Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có dạng



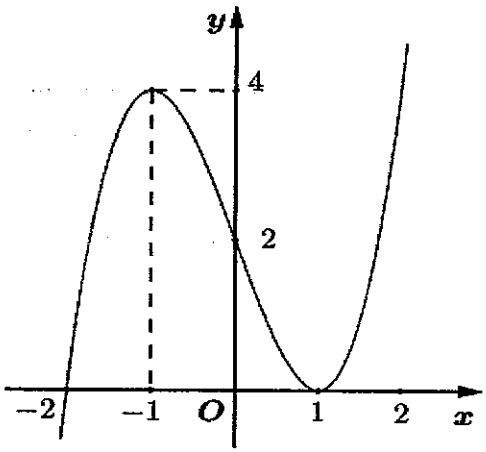
A



B

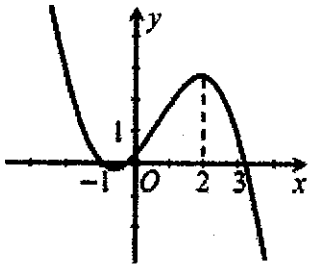


C



D

Câu 13: [539255] Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Mệnh đề nào sau đây đúng?



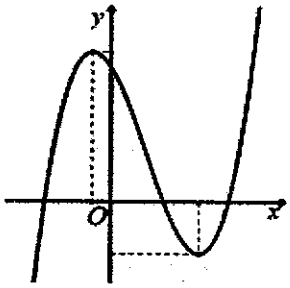
A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0.$

B. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0.$

C. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0.$

D. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0.$

Câu 14: [539257] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khẳng định nào sau đây đúng?



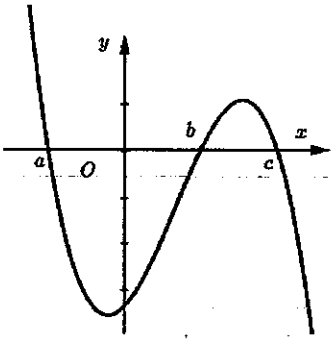
A. $a, b, c < 0; d > 0.$

B. $a, b, d < 0; c > 0.$

C. $a, c, d < 0; b < 0.$

D. $a, d > 0; b, c < 0.$

Câu 15: [539258] Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



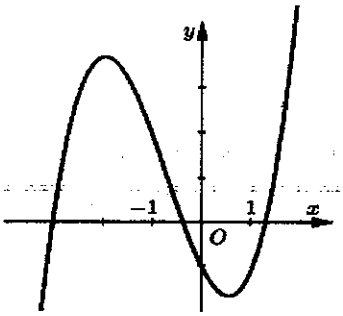
A. $f(c)>f(a)>f(b)$.

B. $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$.

D. $f(b)>f(a)>f(c)$.

Câu 16: [539259] Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



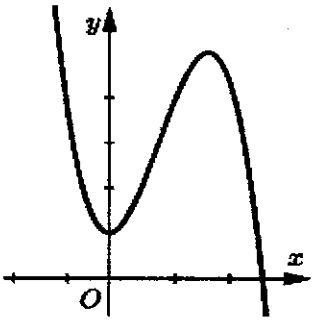
A. $b<0;cd<0$.

B. $b>0;cd<0$.

C. $b<0;cd>0$.

D. $b>0;cd>0$.

Câu 17: [539261] Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



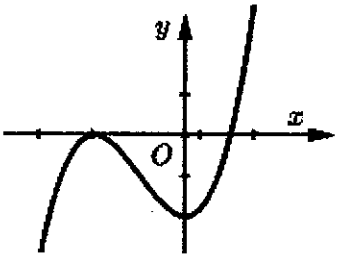
A. $a<0,b<0,c=0,d>0$.

B. $a>0,b<0,c>0,d>0$.

C. $a<0,b>0,c>0,d>0$.

D. $a>0,b<0,c=0,d>0$.

Câu 18: [539263] Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



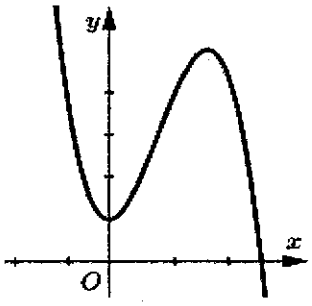
A. $a>0,b>0,c=0,d<0$.

B. $a>0,b>0,c=0,d>0$.

C. $a>0,b>0,c>0,d>0$.

D. $a>0,b<0,c=0,d<0$.

Câu 19: [539265] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



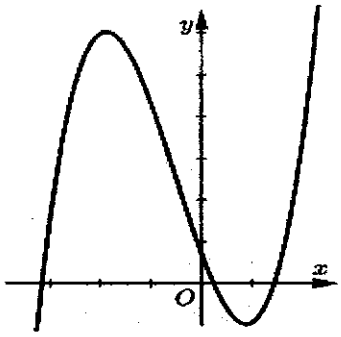
A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.

Câu 20: [539266] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx = d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



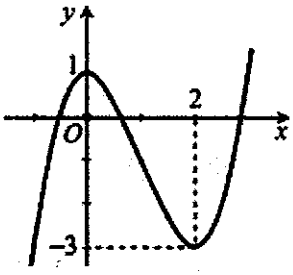
A. $a, d > 0; b, c < 0$.

B. $a, b, c < 0; d > 0$.

C. $a, c, d > 0; b < 0$.

D. $a, b, d > 0; c < 0$.

Câu 21: [539270] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. Phương trình không có nghiệm.

B. Phương trình có đúng một nghiệm.

C. Phương trình có đúng hai nghiệm.

D. Phương trình có đúng ba nghiệm.

Câu 22: [539271] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai.**

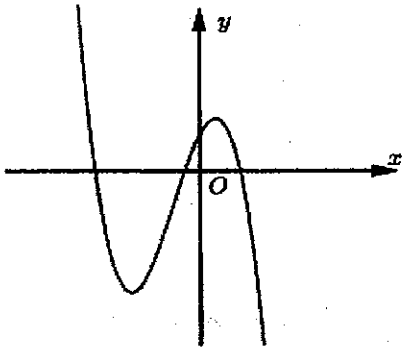
A. Hàm số có 2 điểm cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = 0$.

D. Hàm số có $a > 0; c = 0$.

Câu 23: [539272] Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng.



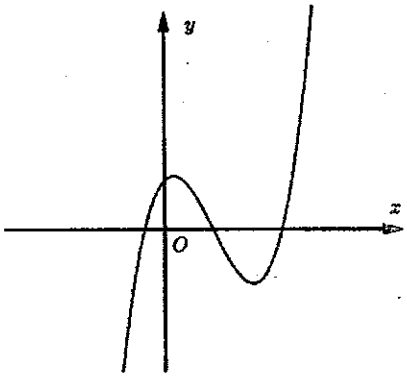
A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.

B. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$

C. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$

D. $a < 0; b < 0; c < 0; d > 0$

Câu 24: [539274] Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng.



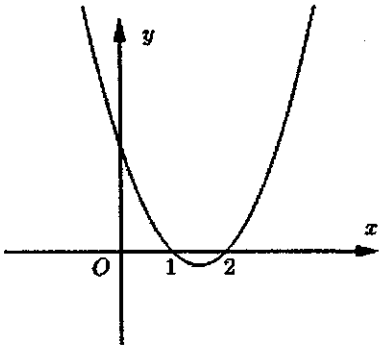
A. $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$.

B. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$

C. $a > 0; b > 0; c < 0; d > 0$

D. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$

Câu 25: [539276] Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là sai.



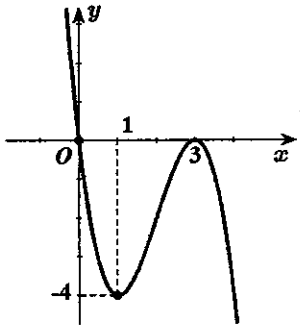
A. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$.

B. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

C. $f(0) > f(1) > f(2)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 26: [539277] Cho đồ thị hàm số $y=-x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tìm khẳng định **sai**?



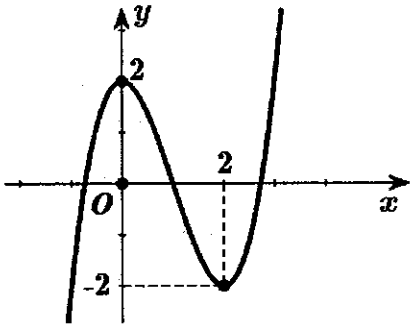
A. $a^2+b^2+c^2+2abc=117$.

B. $b^{10}+abc\neq 0$.

C. $c^2+100bc>1$.

D. $a^2+4b\geq 0$.

Câu 27:[539278] Cho đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng**?



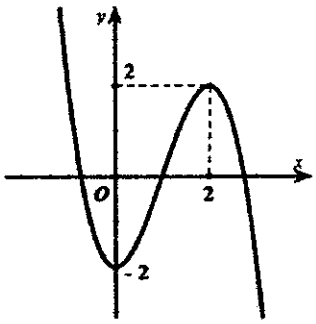
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2,\ x=-2$.

C. Với $c\in[-1;2]$ thì $f(-1)<f(c)<f(2)$.

D. $\min\limits_{x\in[0;2]} y+\max\limits_{x\in[-1;2]} y=0$.

Câu 28: [539280] Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có trục đối xứng là trục hoành.

B. Phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi $m=2$ hoặc $m=-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 29: [539281] Cho hàm số bậc ba có bảng biến như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và đạt cực đại tại $x=3$.

B. Giá trị cực đại của hàm số là -2.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là 0.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 30: [539284] Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-23	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Tính giá trị của biểu thức $T=f(2)+2.f(0)$.

A. 6. **B.** 10.
C. 12. **D.** 8.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	**02. A**	**03. D**	**04. C**	**05. B**	**06. A**	**07. D**	**08. A**	**09. A**	**10. A**
11. C	**12. D**	**13. A**	**14. D**	**15. A**	**16. D**	**17. A**	**18. A**	**19. D**	**20. D**
21. C	**22. B**	**23. B**	**24. B**	**25. C**	**26. C**	**27. D**	**28. A**	**29. D**	**30. b**

Chủ đề 6

NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

[TV6063]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$.

- **Cực trị**

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$

+ Với $ab \geq 0$ thì hàm số có một cực trị $x_0 = 0$.

+ Với $ab < 0$ thì hàm số có 3 cực trị $x_0 = 0,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

- **Giới hạn**

+ Với $a > 0$ thì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

+ Với $a < 0$ thì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$.

- **Bảng biến thiên**

$\boxed{a > 0,\ b \geq 0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

$\boxed{a < 0,\ b \leq 0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$

$\boxed{a > 0,\ b < 0}$

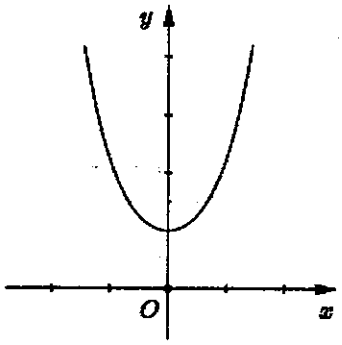
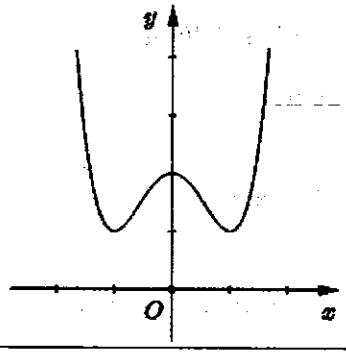
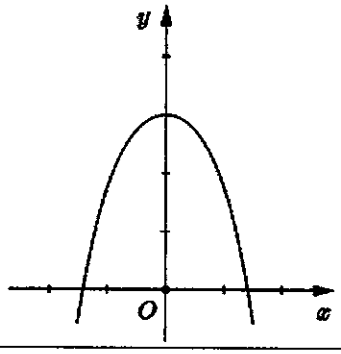
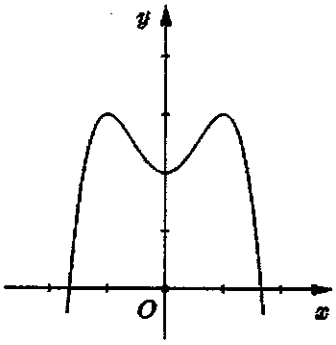
$\boxed{a < 0,\ b > 0}$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	CĐ	↘	$-\infty$

- **Đồ thị**

+ Đồ thị hàm số luôn nhận Oy là trục đối xứng.

	$ab \geq 0$	$ab < 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có thể là ?

A. $y = -x^4 - 4x^2 + 2.$ **B.** $y = x^4 - 4x^2 + 2.$

C. $y = -x^4 + 4x^2 + 2.$ **D.** $y = x^4 + 4x^2 + 2.$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ Loại A và C

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ hàm số có một cực trị.

Hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 2$ có $ab = -4 < 0 \Rightarrow y = x^4 - 4x^2 + 2$ có ba cực trị.

Hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 2$ có $ab = 4 > 0 \Rightarrow y = x^4 + 4x^2 + 2$ có một cực trị.

Chọn D

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có thể là ?

A. $y = -x^4 + 4x^2 + 4.$ **B.** $y = x^4 - 4x^2 + 4.$

C. $y = -x^4 - 4x^2 + 4.$ **D.** $y = x^4 + 4x^2 + 4.$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty \Rightarrow a<0 \Rightarrow$ Loại B và D

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ hàm số có một cực trị.

Hàm số $y=-x^4+4x^2+4$ có $ab=-4<0 \Rightarrow y=-x^4+4x^2+4$ có ba cực trị.

Hàm số $y=-x^4-4x^2+4$ có $ab=4>0 \Rightarrow y=-x^4-4x^2+4$ có một cực trị.

Chọn C

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y=x^4+2x^2+5$.

B. $y=-x^4+2x^2+5$.

C. $y=x^4-2x^2+5$.

D. $y=-x^4-2x^2+5$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0 \Rightarrow$ Loại **B** và **D**.

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ hàm số có ba cực trị.

Hàm số $y=x^4+2x^2+5$ có $ab=2>0 \Rightarrow y=x^4+2x^2+5$ có một cực trị.

Hàm số $y=x^4-2x^2+5$ có $ab=-2<0 \Rightarrow y=x^4-2x^2+5$ có ba cực trị.

Chọn C

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y=3x^4-4x^2+5.$ **B.** $y=-x^4+2x^2+5.$

C. $y=x^4-2x^2+5.$ **D.** $y=-x^4-2x^2+5.$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0 \Rightarrow$ Loại **B** và **D**

Hàm số đạt cực trị tại $x=0,\ x=\pm1.$

Từ $y=3x^4-4x^2+5 \Rightarrow y'=12x^3-8x \Rightarrow y'(1)=4\neq 0 \Rightarrow$ Loại **A**

Đến đây, ta chọn ngay được C là đáp án đúng.

Nếu dùng điều kiện $y(\pm1)=4$ để loại A thì ta sẽ "thất bại" bởi với hàm số $y=3x^4-4x^2+5$ thì ta có $y(\pm1)=4$.

Từ $y=x^4-2x^2+5 \Rightarrow y'=4x^3-4x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm1 \end{array}\right. \Rightarrow$ Đáp án đúng C.

Chọn C

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y=x^4-2x^2+4.$ **B.** $y=x^4-2x^2+5.$

C. $y=-x^4+2x^2+5.$ **D.** $y=-x^4-2x^2+5.$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0 \Rightarrow$ Loại **C** và **D**

Hơn nữa $y(0)=5 \Rightarrow$ Loại **A**

Ta cũng có thể loại A bằng cách sử dụng điều kiện $y(\pm1)=4$.

Chọn B

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 5.$

B. $y = x^4 - 2x^2 + 5.$

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 5.$

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 5.$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ Loại **C** và **D**

Hơn nữa $y(1) = 4 \Rightarrow$ Loại **A**.

Chọn B

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 5.$

B. $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 5.$

C. $y = x^4 - 4x^2 + 5.$

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 5.$

Lời giải

Ta có $y(1) = 4 \Rightarrow$ Loại **B, C, D**.

Chọn A

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	5	↗	6	↘	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 5.$

B. $y = -2x^4 + 3x^2 + 5$

C. $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 5.$

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 5.$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0 \Rightarrow$ Loại **A**

Lại có $y(\pm 1) = 6 \Rightarrow$ Loại **C**

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0,\ x = \pm 1.$

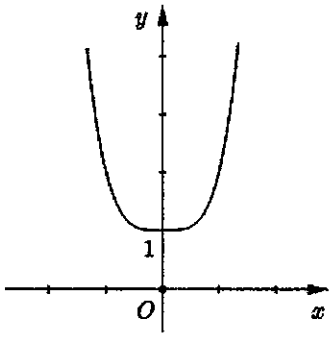
Từ $y = -2x^4 + 3x^2 + 5 \Rightarrow y' = -8x^3 + 6x \Rightarrow y'(1) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Loại **B**

Đến đây, ta chọn ngay được D là đáp án đúng.

Từ $y = -x^4 + 2x^2 + 5 \Rightarrow y' = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ Đáp án đúng D

Chọn D

Ví dụ 9. Đường cong như hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -x^4 + 1.$

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1.$

C. $y = x^4 + 1.$

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1.$

Lời giải

Đồ thị của bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D đều đã đi qua điểm $(0;1)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ Loại A và B.

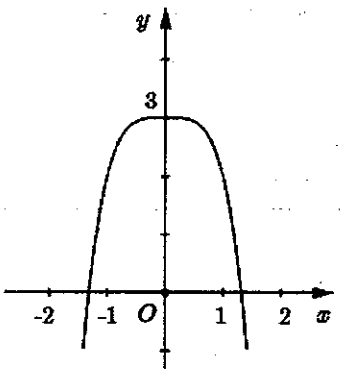
Đồ thị hàm số cần tìm không cắt trục hoành, điều này có nghĩa là phương trình hoành độ giao điểm vô nghiệm.

Đồ thị hàm số $y = x^4 + 1$ không cắt trục hoành vì $x^4 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ cắt trục hoành vì $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Chọn C

Ví dụ 10. Đường cong như hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

B. $y = -4x^4 + 3$.

C. $y = x^4 - 5x^2 + 3$.

D. $y = -x^4 + 3$.

Lời giải

Đồ thị của bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D đều đã đi qua điểm $(0;3)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0 \Rightarrow$ Loại C.

Đồ thị hàm số cần tìm cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Ta có $-x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ Loại A

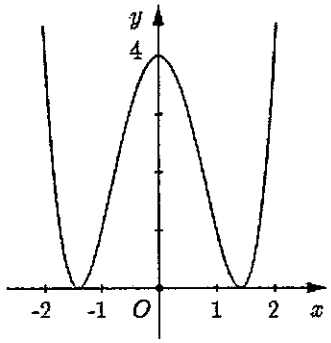
$$-4x^4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \text{ mà } \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{Loại B}$$

Đến đây, ta chọn được ngay D là đáp án đúng.

Ta có $-x^4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$ thỏa mãn.

Chọn D

Ví dụ 11. Đường cong như hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^4 - 4x^2 + 4$.

B. $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

C. $y = -x^4 + 4x^2 + 4$.

D. $y = -x^4 + 5x^2 + 4$.

Lời giải

Đồ thị của bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D đều đã đi qua điểm $(0;3)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ Loại C và D

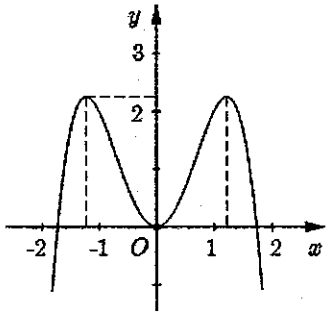
Đồ thị hàm số cần tìm cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Ta có $x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Lại có $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ Loại B.

Chọn A

Ví dụ 12. Đường cong như hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -x^4 + 4x^2$.

B. $y = x^4 - 4x^2$.

C. $y = -x^4 + 3x^2$.

D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Đồ thị của bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D đều đã đi qua điểm $(0;0)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0 \Rightarrow$ Loại B

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_1 \in (-2;-1)$, $x = x_2 \in (1;2)$ và $y(x_1) \in (2;3)$.

+ Với $y=-x^4+4x^2 \Rightarrow y'=-4x^3+8x=-4x\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{2}\in(-2;-1) \\ x=\sqrt{2}\in(1;2) \end{array}\right.$

Mà $y\left(-\sqrt{2}\right)=-4+8=4\notin(2;3) \Rightarrow$ Loại A

+ Với $y=-x^4+3x^2 \Rightarrow y'=-4x^3+6x=-2x\left(2x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{\frac{3}{2}}\in(-2;-1) \\ x=\sqrt{\frac{3}{2}}\in(1;2) \end{array}\right.$

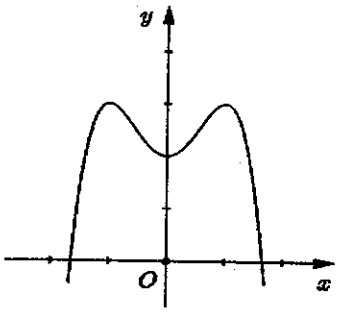
Mà $y\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{9}{4}\in(2;3) \Rightarrow$ C đúng.

Đến đây ta chọn được ngay C là đáp án đúng.

+ Với $y=-x^4+2x^2 \Rightarrow y'=-4x^3+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1\notin(-2;-1) \\ x=1\notin(1;2) \end{array}\right. \Rightarrow$ Loại D.

Chọn C

Ví dụ 13. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



A. $a<0,\ b>0,\ c<0.$

B. $a>0,\ b<0,\ c>0.$

C. $a>0,\ b<0,\ c<0.$

D. $a<0,\ b>0,\ c>0.$

Lời giải

Ta có $y(0)>0 \Rightarrow c>0.$

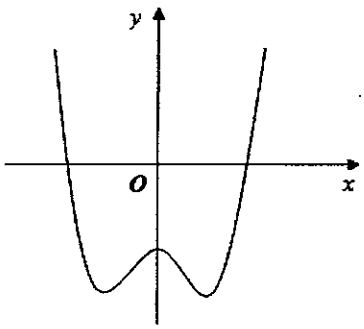
Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty \Rightarrow a<0.$

Đạo hàm $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $-\frac{b}{2a}>0.$

Mà $a<0 \Rightarrow b>0.$

Chọn D

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



A. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0.$

B. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0.$

C. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0.$

D. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0.$

Lời giải

Ta có $y(0) < 0 \Rightarrow c < 0.$

Lại có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0.$

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $-\dfrac{b}{2a} > 0.$

Mà $a > 0 \Rightarrow b < 0.$

Chọn B

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6064]

Câu 1: [539158] Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

A. $y = x^4 - 3x^2 - 3.$

B. $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3.$

C. $y = x^4 - 2x^2 - 3.$

D. $y = x^4 + 2x^2 - 3.$

Câu 2: [539159] Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào ?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

A. $y = x^4 - 3x^2 + 1.$

B. $y = -x^4 + 3x^2 + 1.$

C. $y = x^4 + 3x^2 - 1.$

D. $y = -x^4 - 3x^2 + 1.$

Câu 3: [539160] Bảng biến thiên ở bên

là của hàm số nào ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

A. $y=-x^4-3x^2-3$.

B. $y=x^4-x^2-3$.

C. $y=x^4-2x^2-3$.

D. $y=x^4+2x^2-3$.

Câu 4: [539161] Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai ?

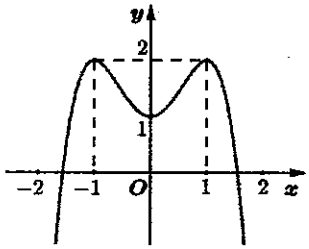
A. Hàm số có hai điểm cực tiểu, một điểm cực đại.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -4.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng -3.

Câu 5: [539162] Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?



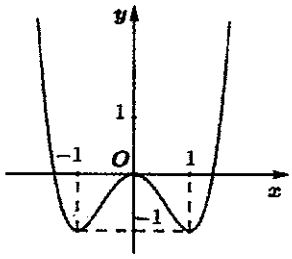
A. $y=-x^4+3x^2+1$.

B. $y=x^4-2x^2+1$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$.

D. $y=x^4+3x^2+1$.

Câu 6: [539163] Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?



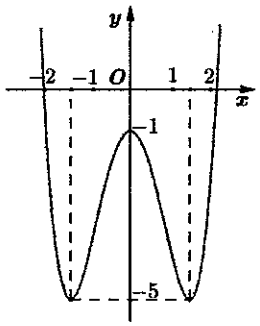
A. $y=x^4+2x^2$.

B. $y=x^4-2x^2$.

C. $y=-x^4+2x^2$.

D. $y=-x^4-2x^2$.

Câu 7: [539164] Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?



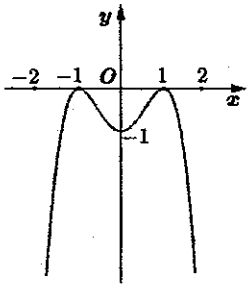
A. $y=-x^4+4x^2-1$.

B. $y=x^4-2x^2-1$.

C. $y=x^4-2x^2+1$.

D. $y=x^4-4x^2-1$.

Câu 8: [539166] Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?



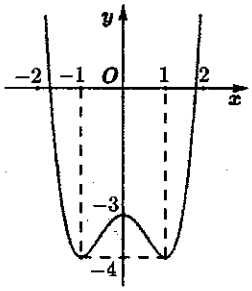
A. $y=x^4+2x^2-1$.

B. $y=-x^4-2x^2-1$.

C. $y=x^4+2x^2+1$.

D. $y=-x^4+2x^2-1$.

Câu 9: [539167] Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?



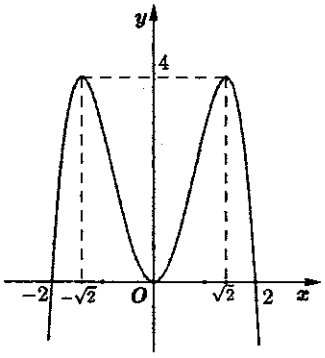
A. $y=x^4-3x^2-3$.

B. $y=-\frac{1}{4}x^4+3x^2-3$.

C. $y=x^4-2x^2-3$.

D. $y=x^4+2x^2-3$.

Câu 10: [539171] Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?



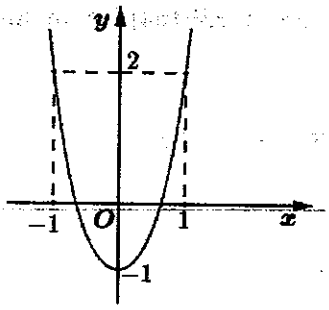
A. $y=x^4-3x^2$.

B. $y=-\frac{1}{4}x^4+3x^2$.

C. $y=-x^4-2x^2$.

D. $y=-x^4+4x^2$.

Câu 11: [539173] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



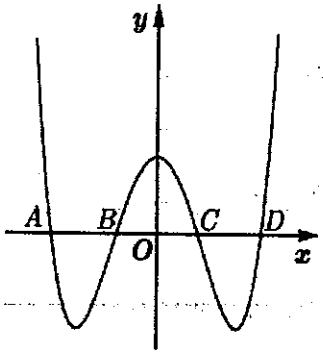
A. $y = x^4 - 3x^2 - 1.$

B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 1.$

C. $y = x^4 + 2x^2 - 1.$

D. $y = x^4 - 2x^2 - 1.$

Câu 12: [539175] Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại bốn điểm A, B, C, D phân biệt như hình vẽ bên. Biết rằng $AB = BC = CD$, mệnh đề nào sau đây đúng?



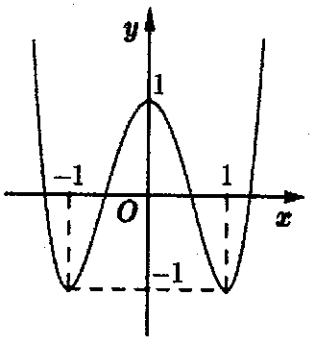
A. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ 100b^2 = 9ac.$

B. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ 9b^2 = 100ac.$

C. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ 9b^2 = 100ac.$

D. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ 100b^2 = 9ac.$

Câu 13: [539176] Biết rằng hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Tính giá trị $f(a+b+c)$.



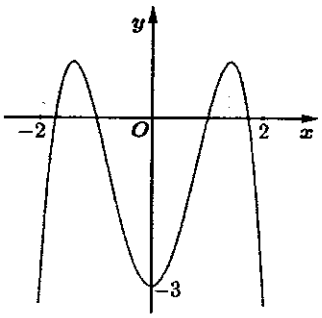
A. $f(a+b+c) = -1.$

B. $f(a+b+c) = 2.$

C. $f(a+b+c) = -2.$

D. $f(a+b+c) = 1.$

Câu 14: [539179] Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



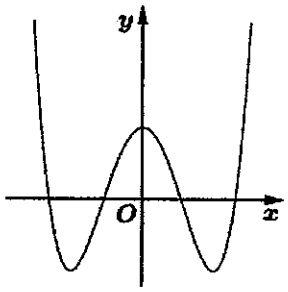
A. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0.$

B. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0.$

C. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

D. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0.$

Câu 15: [539180] Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



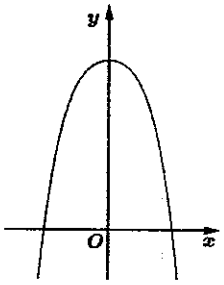
A. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0.$

B. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0.$

C. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

D. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0.$

Câu 16: [539181] Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây là đúng ?



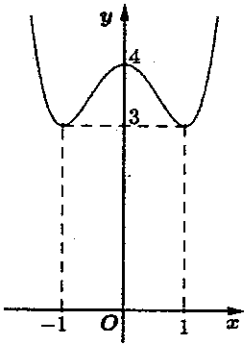
A. $a < 0,\ b \le 0,\ c > 0.$

B. $a < 0,\ b < 0,\ c < 0.$

C. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

D. $a < 0,\ b > 0,\ c \ge 0.$

Câu 17: [539182] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng ?



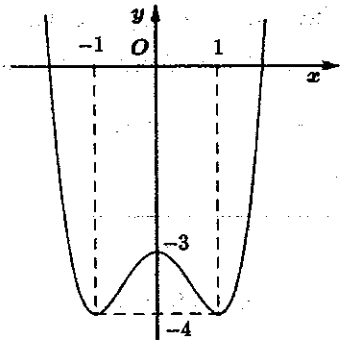
A. Đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số là 4.

C. Tổng các giá trị cực trị của hàm số bằng 7.

D. Đồ thị (C) không có điểm cực đại nhưng có hai điểm cực tiểu là $(-1;3)$ và $(1;3)$.

Câu 18: [539184] Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m+2$ có bốn nghiệm phân biệt.



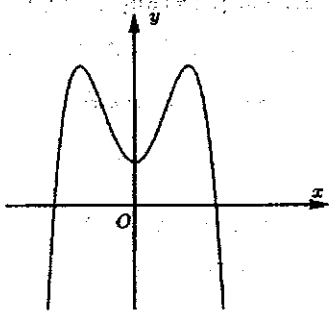
A. $-4<m<-3$.

B. $-4\le m\le -3$.

C. $-6\le m\le -5$.

D. $-6<m<-5$.

Câu 19: [539185] Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng ?



A. $a>0,\ b<0,\ c>0$.

B. $a<0,\ b<0,\ c>0$.

C. $a<0,\ b>0,\ c>0$..

D. $a<0,\ b>0,\ c<0$.

Câu 20: [539187] Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai ?

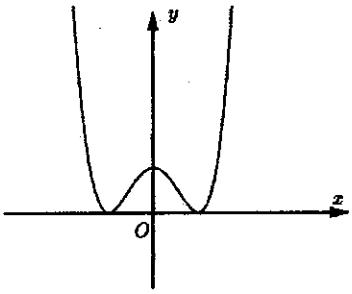
A. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ bằng 4.

B. Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

C. Đồ thị hàm số nhận trục Oy là trục đối xứng.

D. Biểu thức $ab(c+1)$ nhận giá trị dương.

Câu 21: [539190] Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng ?



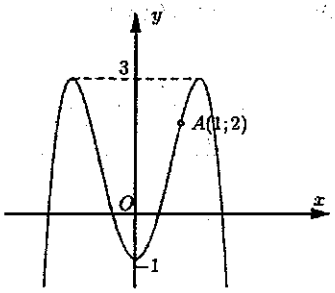
A. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ b^2=4ac$.

B. $a>0,\ b<0,\ c>0,\ b^2=4ac$.

C. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ b^2>4ac$.

D. $a>0,\ b<0,\ c>0,\ b^2<4ac$.

Câu 22: [539191] Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. Giá trị của biểu thức $A = a^2 + b^2 + c^2$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?



A. $A = 24$.

B. $A = 20$.

C. $A = 18$.

D. $A = 6$.

Câu 23: [539193] Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có bảng biến thiên như hình bên. Tính giá trị của biểu thức $P = a + 2b + 3c$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-5	↗	-3	↘	-5	↗	$+\infty$

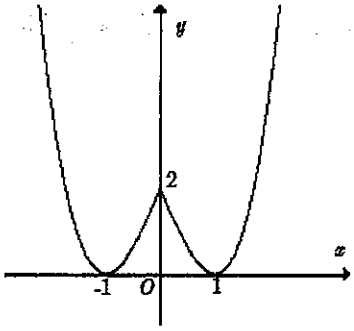
A. $P = -15$.

B. $P = 15$.

C. $P = -8$.

D. $P = 8$.

Câu 24: [539194] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Xét các mệnh đề sau:



(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là ?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 25: [539196] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-3	↗	0	↘	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x) = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < -3 \end{array}\right.$

B. $m < -3$.

C. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

D. $m < -\dfrac{3}{2}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	02. C	03. C	04. D	05. C	06. B	07. D	08. D	09. C	10. D
11. C	12. C	13. A	14. B	15. D	16. A	17. A	18. D	19. C	20. D
21. B	22. C	23. A	24. B	25. C					

Chủ đề 7

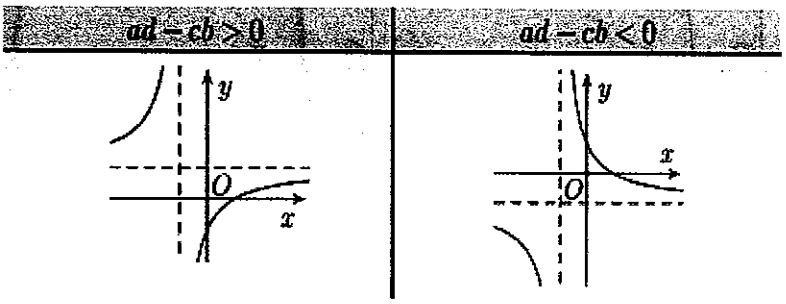
NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC 1

[TV6065]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

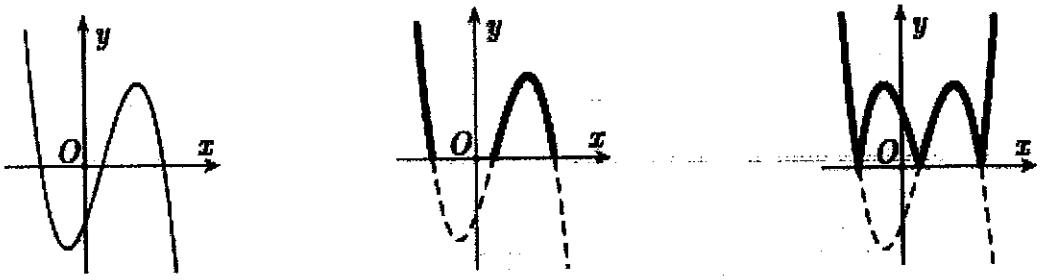
1. ***Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất*** $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c\neq 0,\ ad-bc\neq 0$.

- Miền xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{cx+d},\ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$ suy ra
  - Nếu $ad-bc>0 \longrightarrow$ hàm số đồng biến trên D.
  - Nếu $ad-bc<0 \longrightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.
- Giới hạn, tiệm cận
  - $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c} \longrightarrow y=\dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
  - $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} y=\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\infty \longrightarrow x=-\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số

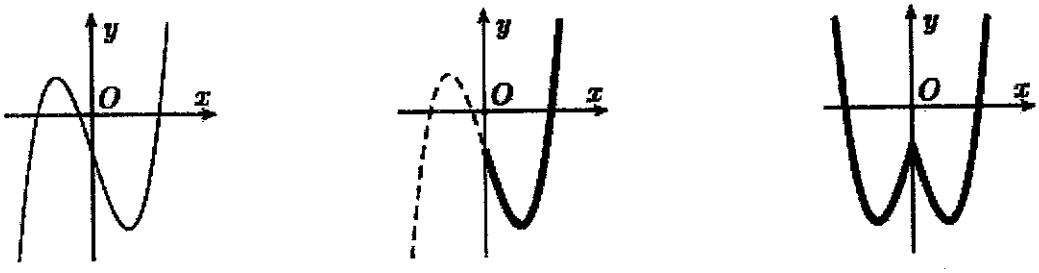


2. *Đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối* $y=|f(x)|$, đồ thị (C_1) hoặc $y=f(|x|)$, đồ thị (C_2)

- Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$. Từ đồ thị $y=f(x)$, vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$.
  - Giữ nguyên phần đồ thị nằm trên Ox của (ı được (C_1).
  - Lấy đối xứng phần đồ thị nằm dưới Ox của (C) qua Ox và bỏ phần phía dưới Ox, ta được (C_2).
  - Suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ là $(C')=(C_1)\cup(C_2)$.
  - Hình vẽ minh họa

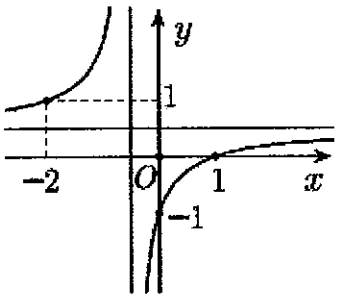


- Đồ thị hàm số $y=f(|x|)$. Từ đồ thị $y=f(x)$, vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$.
  - Giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải Oy của (C), ta được (C_1).
  - Bỏ "hẳn" phần đồ thị bên trái Oy của (C).
  - Lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua Oy, ta được (C_2).
  - Suy ra đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ là $(C')=(C_1)\cup(C_2)$.
  - Hình vẽ minh họa



II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$

C. $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Lời giải

Gọi hàm số cần tìm có dạng $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C).

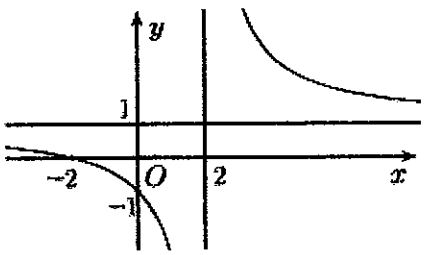
Dựa vào hình vẽ, ta thấy:

- Đồ thị (C) cắt trục Ox tại $A(1;0)$ suy ra $f(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{c+d}=0\Leftrightarrow a+b=0$.
- Đồ thị (C) cắt trục Oy tại $B(0;-1)$ suy ra $f(0)=-1\Leftrightarrow\dfrac{b}{d}=-1\Leftrightarrow b=-d$.
- Điểm $C(-2;1)\in(C)$ suy ra $f(-2)=1\Leftrightarrow\dfrac{-2a+b}{-2c+d}=1\Leftrightarrow -2a+b=-2c+d$.

Từ các điều kiện trên, suy ra hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Chọn D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Tính tổng $T=a+2b+3c$.



A. $T=0$. **B.** $T=-1$.

C. $T=3$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Từ hình vẽ, ta có nhận xét sau:

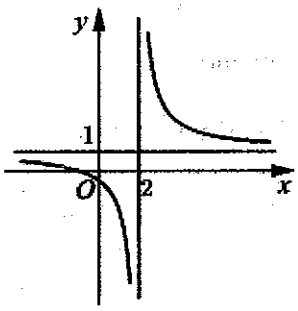
- Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị $(C)\Rightarrow x=-\dfrac{b}{c}=2\Leftrightarrow b=-2c$.

- Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $(C) \Rightarrow x=\frac{a}{c}=1 \Leftrightarrow a=c$.
- Điểm $M(0;-1) \in (C)$ suy ra $y(0)=-1 \Leftrightarrow \frac{2}{b}=-1 \Leftrightarrow b=-2$.

Suy ra $\begin{cases} b=-2 \\ b=-2c=-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow T=a+2b+3c=1+2.(-2)+3=0$.

Chọn A.

Ví dụ 3: Đường ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?



A. $y'<0, \forall x \neq 2$.

B. $y'<0, \forall x \neq 1$.

C. $y'>0, \forall x \neq 2$.

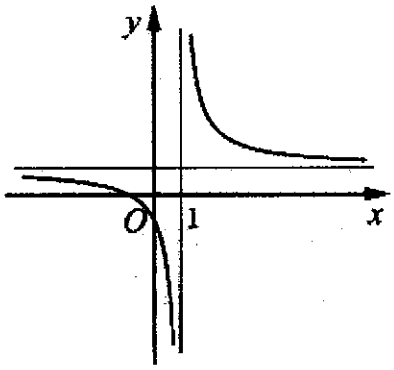
D. $y'>0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Mặt khác, $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $\Rightarrow y'<0, \forall x \neq 2$.

Ví dụ 4: Đường cong hình bên là đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c là các số thực dương. Mệnh đều nào dưới đây **đúng** ?



A. $y''>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $y''<0, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $y''>0, \forall x>1$.

D. $y''>0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng

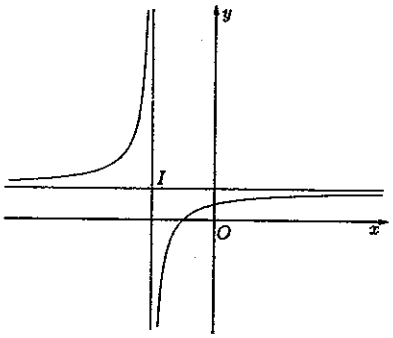
- Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. (1).
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0, \forall x \neq 1 \Rightarrow ad-bc < 0$.

Khi đó $y'' = -\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$ kết hợp với $c > 0$, ta được $y'' > 0, \forall x > 1$ và $y'' < 0, \forall x < 1$.

Chọn C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?



A. $a > b > 0$. **B.** $a > 0 > b$.

C. $a < b < 0$. **D.** $a < 0 < b$.

Lời giải

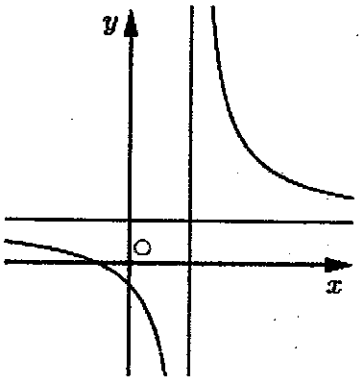
Ta có $\lim\limits_{x \to b} y = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{ax+1}{x-b} = \infty$ suy ra $x = b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Và $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax+1}{x-b} = a$ suy ra $y = a$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy **TCĐ** nằm phía bên trái trục Oy và **TCN** nằm phía trên trục Ox nên suy ra $\begin{cases} x = b < 0 \\ y = a > 0 \end{cases}$. Vậy $a > 0 > b$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (với a, b, c, d là các số thực) có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Xét các mệnh đề sau



$(\text{I}): ac > 0$, $(\text{II}): cd < 0$.

$(\text{III}): bd < 0$, $(\text{IV}): ab > 0$.

Số mệnh đề **đúng** là

A. 3. **B.** 1.

C. 4. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có nhận xét sau:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

  Từ đồ thị hàm số, ta thấy đường tiệm cận ngang $y = y_0 > 0$ suy ra $\dfrac{a}{c} > 0$ (1).

- $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} y = \lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \mp\infty \Rightarrow x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

  Từ đồ thị hàm số, ta thấy đường tiệm cận đứng $x = x_0 > 0$ suy ra $-\dfrac{d}{c} > 0$ (2).

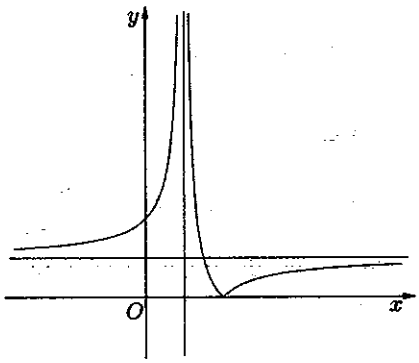
- Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$, cắt trục Oy tại điểm $B\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$.

  Dựa vào hình vẽ, ta thấy $\begin{cases} x_A < 0 \\ y_B < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a} < 0;\ \dfrac{b}{d} < 0$ (3).

Giả sử hệ số $a > 0$ nên từ (1),(2) và (3) ta được $c > 0,\ b > 0,\ d < 0$.

Chọn C.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \left|\dfrac{ax-b}{cx+d}\right|$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?



A. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax-b}{cx+d}$ với $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} y = \lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} \dfrac{ax-b}{cx+d} = \infty$ suy ra $x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Và $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax-b}{cx+d} = \dfrac{a}{c}$ suy ra $y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .

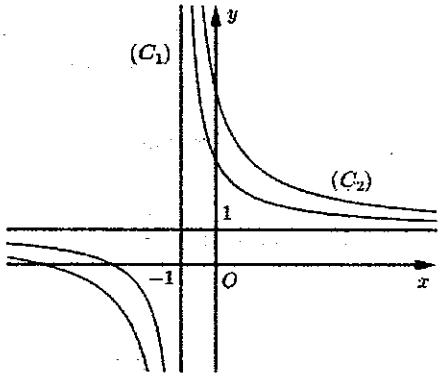
Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng **TCĐ** nằm phía bên phải trục Oy và **TCN** nằm phía trên trục Ox nên suy ra $\begin{cases} x = -\dfrac{d}{c} > 0 \\ y = \dfrac{a}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{d}{c}\right).\left(\dfrac{a}{c}\right) = -\dfrac{ad}{c^2} > 0 \Leftrightarrow ad < 0$.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow \dfrac{b}{a} > 0$.

Khi đó $\dfrac{a}{c}.\dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{c} > 0 \Leftrightarrow bc > 0$. Vậy $ad < 0$ và $bc > 0$.

Chọn B.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a < 0$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây là **đúng** ?

A. $b < 0, c < 0, d < 0, c < b.$

B. $b > 0, c > 0, d < 0, c < b.$

C. $b < 0, c < 0, d < 0, c > b.$

D. $b < 0, c < 0, d > 0, c > b.$

Lời giải

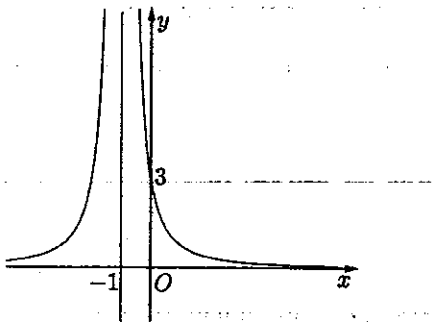
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

- Đồ thị hàm số (C_2) cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow \dfrac{b}{d} > 0$.
- Đồ thị hàm số (C_2) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ âm $\Rightarrow -\dfrac{b}{a} < 0$.
- Đường thẳng $x = x_0 < 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $(C_2) \Rightarrow -\dfrac{d}{c} < 0$.

Kết hợp với điều kiện $a < 0$, ta được $b < 0, d < 0, c < 0$. Và dựa vào đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ ta thấy được $b < c$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng đồ thị $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng ?



A. $f(1)=\dfrac{11}{2}$. **B.** $f(1)=11$.

C. $f(1)=\dfrac{3}{4}$. **D.** $f(1)=\dfrac{11}{4}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;4)$ suy ra $f(0)=\dfrac{b}{d}=4\Leftrightarrow b=4d$.

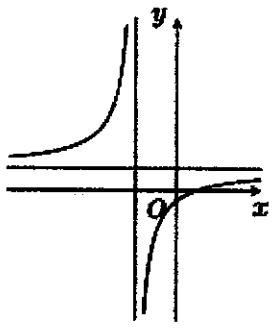
Ta có $g(x)=f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng

- $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra $x=-\dfrac{d}{c}=-1\Leftrightarrow c=d$.
- Đồ thị hàm số $y=g(x)$ đi qua điểm $(0;3)$ suy ra $g(0)=\dfrac{ad-bc}{d^2}=3\Leftrightarrow ad-bc=3d^2$.
- Kết hợp với $\begin{cases}c=d\\b=4d\end{cases}$, ta được $ad-4d^2=3d^2\Leftrightarrow a=7d$.

Vậy $f(1)=\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{7d+4d}{d+d}=\dfrac{11d}{2d}=\dfrac{11}{2}$.

Chọn A.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(2)+f(-2)=2.f(1)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ là



A. $f(-2)$. **B.** $f(3)$.

C. $f(1)$. **D.** $f(-2)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy trên $(-\infty;0) \to f'(x)<0$, trên $(0;+\infty) \to f'(x)>0$.

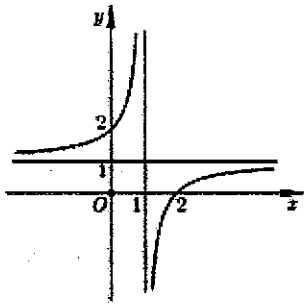
Do đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ suy ra $f(0)<f(1)<f(2)<f(3)$.

Mặt khác $f(2)+f(-2)=2.f(1) \Leftrightarrow f(1)-f(-2)=f(2)-f(1)>0 \Leftrightarrow f(1)>f(-2)$.

Vậy $f(3)>\{f(-2),f(2)\} \Rightarrow \max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(3)$.

Chọn B.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)|=m$ có hai nghiệm phân biệt là



A. $m \geq 2$ hoặc $m \leq 1$.

B. $0<m<1$ hoặc $m>1$.

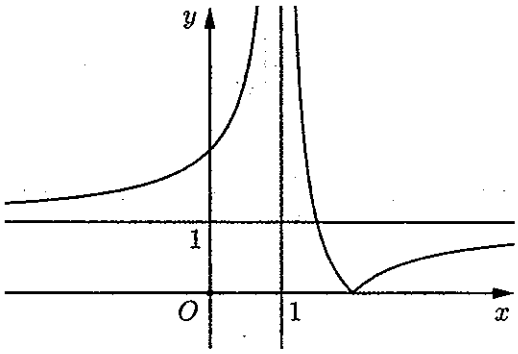
C. $m>2$ hoặc $m<1$.

D. $0<m<1$.

Lời giải

Từ hình vẽ, ta tìm được hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Dựa vào cách tìm đồ thị hàm số $y=|f(x)|$, ta được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây.

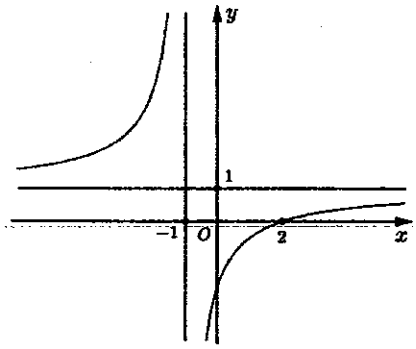


Dựa vào hình vẽ, để phương trình $|f(x)|=m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$.

Vậy $0<m<1$ hoặc $m>1$ là giá trị cần tìm.

Chọn B.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $\dfrac{||x|-2|}{|x|+1}=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.



A. $[1;2)\cup\{0\}$.

B. $[0;2)$.

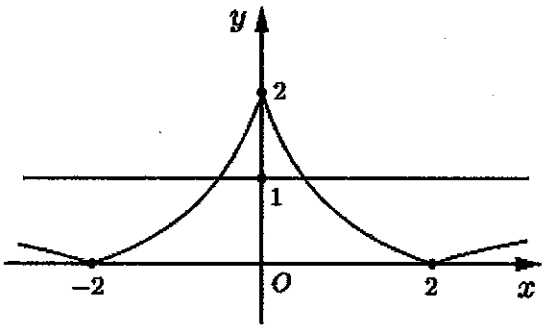
C. $[1;2]\cup\{0\}$.

D. $[1;2)$.

Lời giải

Ta xóa phần bên trái trục tung của $(C): y=\dfrac{x-2}{x+1}$ rồi lấy đối xứng phần bên phải trục tung của (C) qua trục tung ta được đồ thị (C') của hàm số $y=\dfrac{|x|-2}{|x|+1}$.

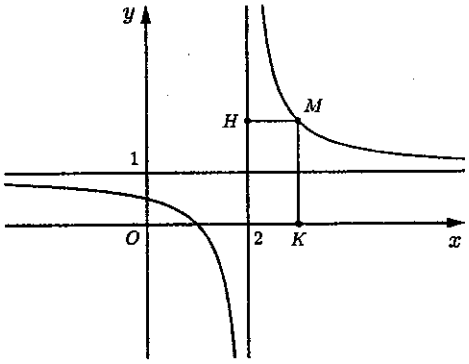
Lấy đối xứng (C') qua trục hoành rồi xóa phần phía dưới trục hoành ta được đồ thị $(C''): y=\dfrac{||x|-2|}{|x|+1}$ như hình vẽ bên dưới.



Dựa vào đồ thị hàm số, phương trình $\dfrac{||x|-2|}{|x|+1}=m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\in[1;2)\cup\{0\}$.

Chọn A.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-1}{x+c}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Điểm M thuộc (C) và H, K lần lượt là hình chiếu của M trên tiệm cận đứng của đồ thị (C) và trục hoành. Có tất cả bao nhiêu điểm M thỏa mãn $MK=2MH$?



A. 4. **B.** 2.

C. 1. **D.** 3.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có nhận xét sau:

- Đường thẳng $x=2$ là **TCĐ** của đồ thị $(C)\Rightarrow x=-c=2\Leftrightarrow c=-2$.
- Đường thẳng $y=1$ là **TCN** của đồ thị $(C)\Rightarrow y=a=1\Leftrightarrow a=1$.

Suy ra hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Điểm $M\in(C)\Rightarrow M\left(m;\dfrac{m-1}{m-2}\right)$, với $m\neq 2$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $x=2$ là $MH=d(M;TCĐ)=|m-2|$.

Khoảng cách từ M đến trục Ox là $MK=d(M;Ox)=\left|\dfrac{m-1}{m-2}\right|$.

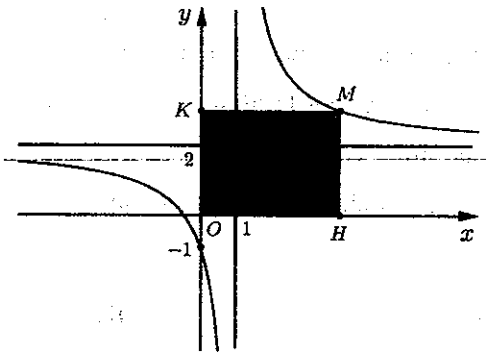
Từ giả thiết, ta có $MK=2MH\longrightarrow\left|\dfrac{m-1}{m-2}\right|=2|m-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m-1}{m-2}=2(m-2)\\ \dfrac{m-1}{m-2}=2(2-m)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=2(m-2)^2\\ m-1=-2(m-2)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m^2-9m+9=0\\ 2m^2-7m+7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\longrightarrow M(3;2)\\ m=\dfrac{3}{2}\longrightarrow M\left(\dfrac{3}{2};-1\right)\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 14: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Điểm M thuộc (C) và H, K lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy sao cho diện tích hình chữ nhật $MHOK$ bằng 2. Khi đó, tổng hoành độ của các điểm M bằng



A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$.

C. 1. **D.** -1.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có nhận xét sau:

- Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0;-1) \Rightarrow y(0)=-b=-1 \Leftrightarrow b=1$.
- Đường thẳng $x=1$ là **TCĐ** của đồ thị $(C) \Rightarrow x=\dfrac{1}{c}=1 \Leftrightarrow c=1$.
- Đường thẳng $y=2$ là **TCN** của đồ thị $(C) \Rightarrow y=\dfrac{a}{c}=2 \Leftrightarrow a=2c=2$.

Suy ra hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Điểm $M \in (C) \Rightarrow M\left(m;\dfrac{2m+1}{m-1}\right)$, với $m \neq 1$.

Khi đó $H(m;0)$ và $K\left(0;\dfrac{2m+1}{m-1}\right)$ suy ra $S_{MHOK}=OH.OK=|m|.\left|\dfrac{2m+1}{m-1}\right|=\left|\dfrac{2m^2+m}{m-1}\right|$.

Theo bài ra, ta có $S_{MHOK}=2$ suy ra $\left|\dfrac{2m^2+m}{m-1}\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{2m^2+m}{m-1}=2\\ \dfrac{2m^2+m}{m-1}=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m^2-m+2=0\\ 2m^2+3m-2=0\end{array}\right.$.

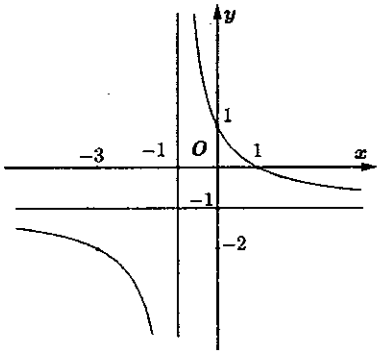
Phương trình $2m^2-m+2=0$ vô nghiệm nên $2m^2+3m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy tổng hoành độ của các điểm M bằng $-\dfrac{3}{2}$.

Chọn A.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6066]

Câu 1: [541478] Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?



A. $y=\dfrac{-2x+1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$.

Câu 2: [541479] Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào ?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 2

A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{1+x}$.

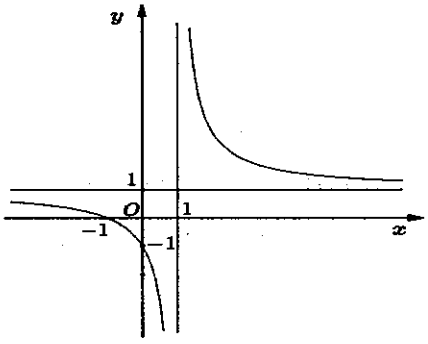
Câu 3: [541480] Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ 1

A. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

C. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x+3}{2+x}$.

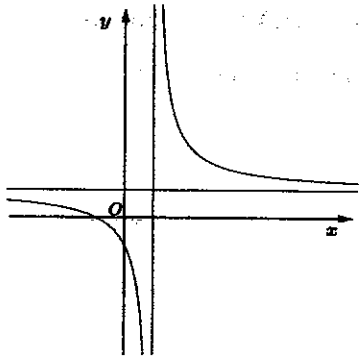
Câu 4: [541481] Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào ?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{-x}{1-x}$.

Câu 5: [541482] Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



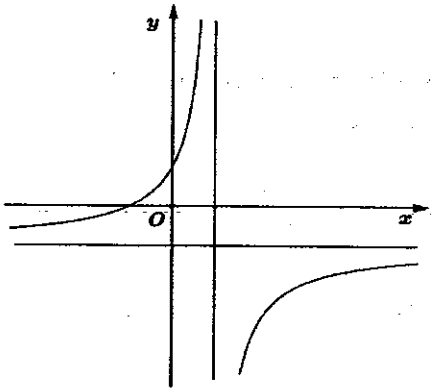
A. $bc>0, ad<0$.

B. $ac>0, bd>0$.

C. $bd<0, ad>0$.

D. $ab<0, cd<0$.

Câu 6: [541489] Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



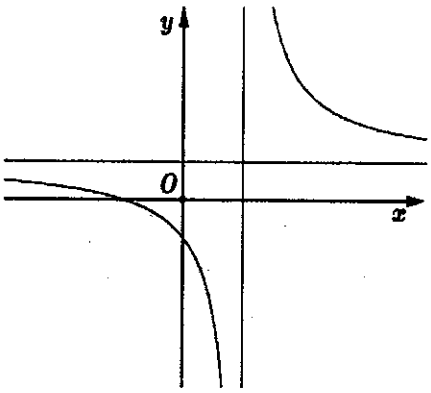
A. $a<0, b>0, c<0, d>0$.

B. $a>0, b<0, c<0, d>0$.

C. $a<0, b<0, c<0, d>0$.

D. $a<0, b<0, c>0, d<0$.

Câu 7: [541490] Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a>0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



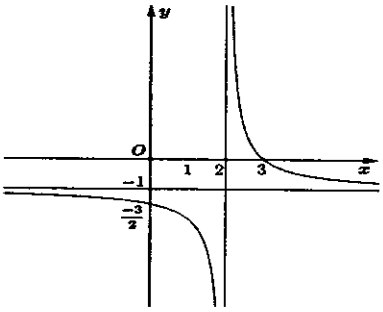
A. $b>0, c<0, d<0$.

B. $b>0,\ c>0,\ d<0$.

C. $b<0,\ c>0,\ d<0$.

D. $b<0,\ c<0,\ d<0$.

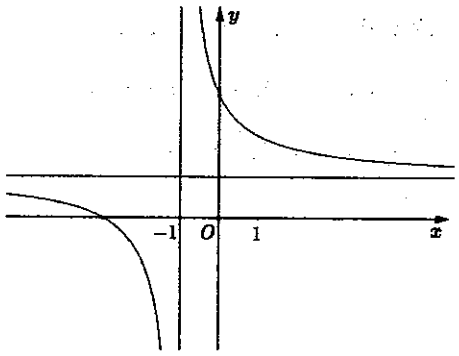
Câu 8: [541491] Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a+2b+c$.



A. -1. **B.** -2.

C. 0. **D.** 3.

Câu 9: [541492] Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.



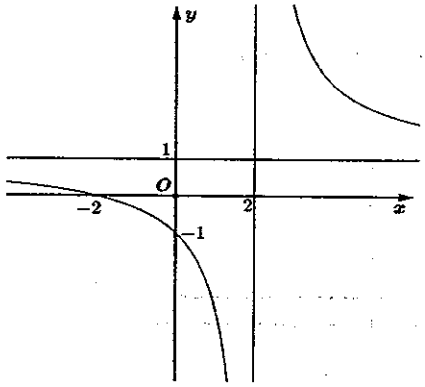
A. $a<b<0.$

B. $b<0<a.$

C. $0<b<a.$

D. $0<a<b.$

Câu 10: [541493] Tìm a,b,c để hàm số $y=\dfrac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.



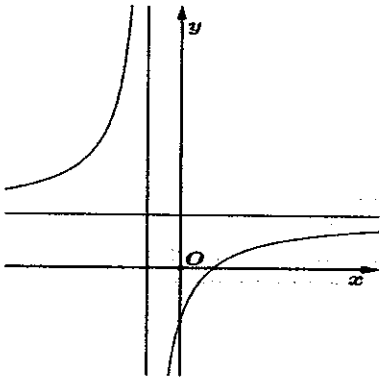
A. $a=2,b=2,c=-1.$

B. $a=1,b=1,c=-1.$

C. $a=1,b=2,c=1.$

D. $a=1,b=-2,c=1.$

Câu 11: [541494] Tìm a,b,c để hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.



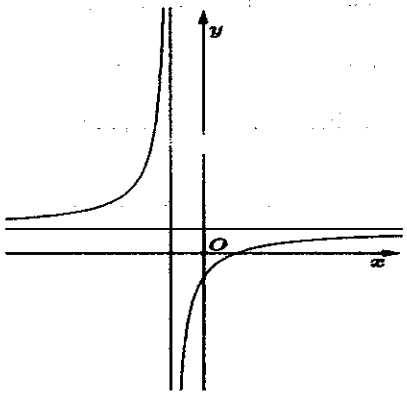
A. $bd>0,ad>0.$

B. $ad<0,ab>0.$

C. $ab<0,ad<0.$

D. $ad>0,ab<0.$

Câu 12: [541495] Tìm a,b,c để hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.



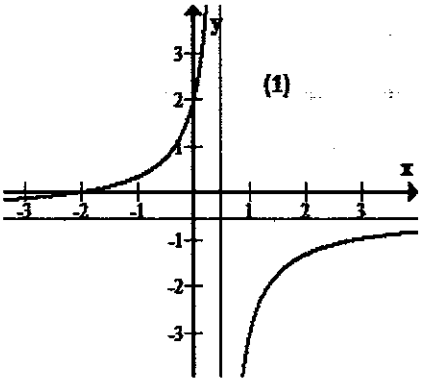
A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$.

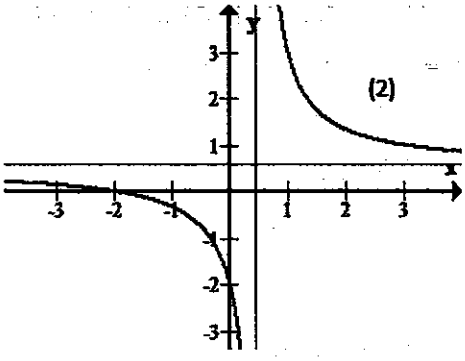
B. $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$.

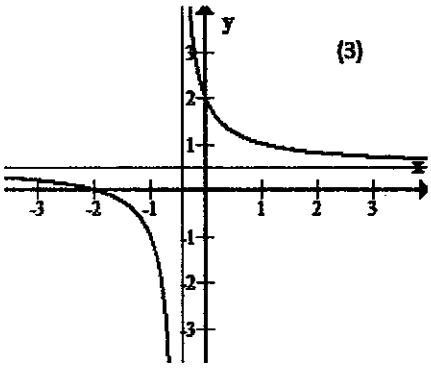
C. $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$.

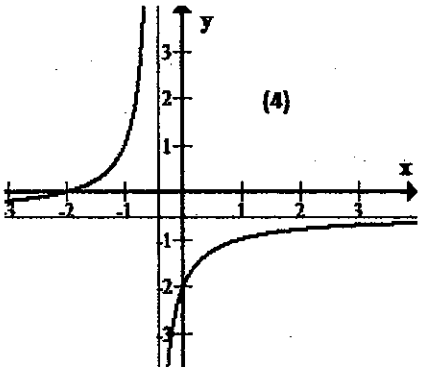
D. $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

Câu 13: [541496] Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{1-2x}$ là hình nào trong các hình sau:









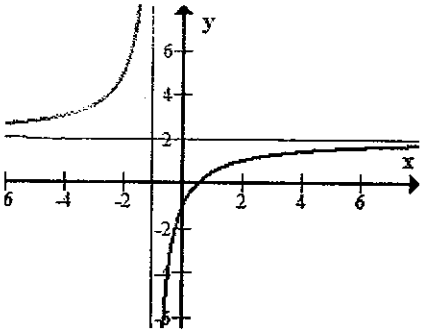
A. (1).

B. (2).

C. (3).

D. (4).

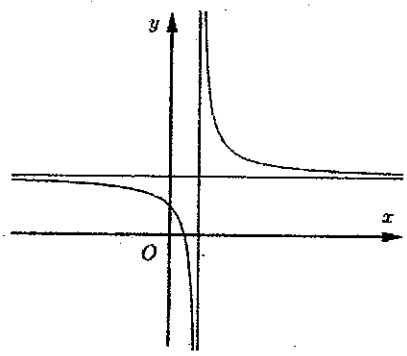
Câu 14: [541497] Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau ?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ **B.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$

C. $y=2x+1$ **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$

Câu 15: [541498] Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng.



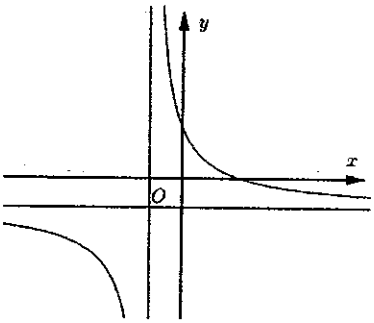
A. $a>0;b>0;c>0;d<0$

B. $a>0;b<0,c>0,d<0$

C. $a>0;b<0;c<0;d>0$.

D. $a<0;b>0;c<0;d>0$

Câu 16: [541499] Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng.



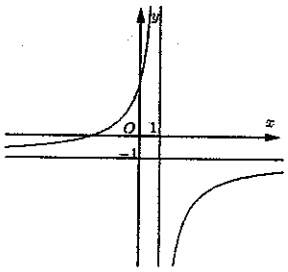
A. $ab>0;bc<0;ad>0$.

B. $ab>0;bc<0;ad<0$

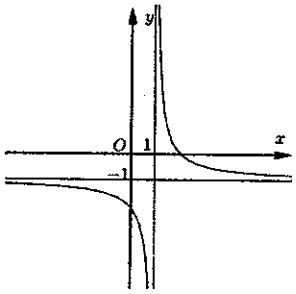
C. $ab<0;bc>0;ad<0$

D. $ab<0;bc<0;ad<0$

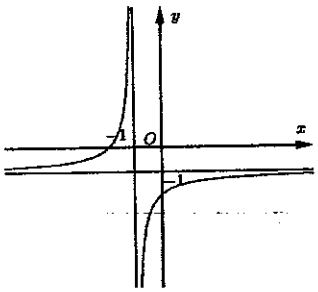
Câu 17: [541500] Đồ thị nào trong 4 đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2-x}{x-1}$



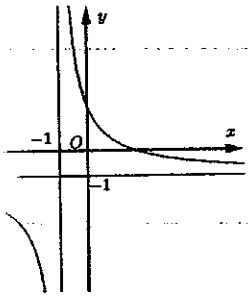
A.



B.

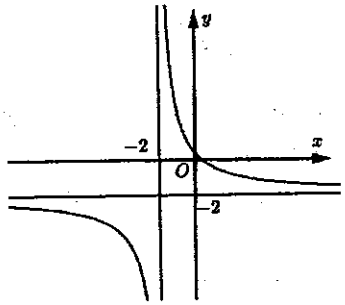


C.



D.

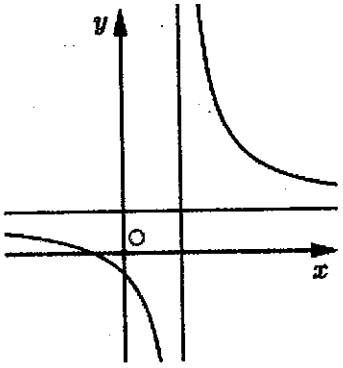
Câu 18: [541501] Đồ thì hình vẽ bên là đồ thị của một trong 4 hàm số được liệt kê ở các phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?.



A. $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$

C. $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}$ **D.** $y=\dfrac{-2x+1}{x+2}$

Câu 19: [541503] Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (hàm số bậc nhất trên bậc nhất) có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Xét các mệnh đề sau



$(\mathrm{I}): ac>0,$ $(\mathrm{II}): cd<0.$

$(\mathrm{III}): bd<0,$ $(\mathrm{IV}): ab>0.$

Số mệnh đề đúng là:

A. 3. **B.** 1.

C. 4. **D.** 2.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	02. A	03. C	04. A	05. B	06. D	07. B	08. D	09. D	10. D
11. D	12. C	13. A	14. A	15. B	16. C	17. B	18. D	19. C	

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM BẬC BA

[TV6067]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Một số kiến thức mở đầu

Xét đồ thị $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ và đường thẳng $d: y = mx + n$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + n \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + (x - m)x + d - n = 0 \qquad (1)$$

→ *Số giao điểm của d và (C) chính là số nghiệm của phương trình* (1).

- ***Trường hợp 1.*** Phương trình (1) có một nghiệm đẹp $x = x_0$.

Khi đó (1) thành $(x - x_0).g(x) = 0$, với $g(x)$ là hàm số bậc hai.

+ Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$

+ Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm kép khác x_0 hoặc $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó 1 nghiệm bằng x_0 và nghiệm còn lại khác x_0.

+ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc $g(x) = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$.

- ***Trường hợp 2.*** Phương trình (1) không có nghiệm đẹp $x = x_0$ nhưng cô lập được tham số.

Khi đó ta biến đổi (1) thành $\varphi(x) = h(m)$.

Từ đó số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \varphi(x)$ và $y = h(m)$.

Lưu ý, đường thẳng $y = h(m)$ song song hoặc trùng với trục Ox.

Ta tiến hành xét hàm số $y = \varphi(x)$ và lập bảng biến thiên $\Rightarrow$ kết luận.

2. Một số lưu ý khi giải toán

Xét đồ thị $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

+ Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành $(Ox: y = 0)$ là nghiệm của phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

+ Tung độ giao điểm của (C) và trục tung $(Oy: x = 0)$ là nghiệm của phương trình $y = d$

$\Rightarrow (C)$ cắt trục Oy tại điểm $M(0; d)$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. **B.** $y_0 = 0$.
C. $y_0 = 2$. **D.** $y_0 = -1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.

Chọn C.

Ví dụ 2. Biết rằng đường thẳng $y = -3x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. **B.** $y_0 = 0$.
C. $y_0 = -4$. **D.** $y_0 = 3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 4 = -3x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y_0 = 4$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Biết rằng đường thẳng $y = 5x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3. Tính $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 10$.
C. $S = 8$. **D.** $S = 6$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 2 = 5x + 2 \Leftrightarrow x^3 = 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow S = 0 + 4 + 4 = 8$.

Chọn C

Ví dụ 4. Biết rằng đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+2$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=2$.
B. $AB=2\sqrt{2}$.
C. $AB=4$.
D. $AB=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x^2+2=x+1$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(1;2) \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow B(-1;0) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2;-2) \Rightarrow AB=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}.$

Chọn B

Ví dụ 5. Biết rằng đường thẳng $y=2x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C. Tính diện tích S của tam giác OBC, với O là gốc tọa độ.

A. $S=4$.
B. $S=4\sqrt{5}$.
C. $S=2$.
D. $S=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta sẽ tính diện tích S của tam giác OBC theo công thức $S=\frac{1}{2}d(O;BC).BC$ (1)

Muốn vậy, ta cần viết phương trình BC và tính được cạnh BC.

Lưu ý, phương trình đường thẳng BC chính là $y=2x+4 \rightarrow$ ta đi tính cạnh BC.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3+x+4=2x+4 \Leftrightarrow x^3=x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow A(0;4) \\ x=1 \Rightarrow y=6 \Rightarrow B(1;6) \\ x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(-1;2) \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-2;-4) \Rightarrow BC=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}.$$

Hơn nữa $BC: y=2x+4 \Rightarrow BC: 2x-y+4=0 \Rightarrow d(O;BC)=\frac{|2.0-0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$

Thế vào (1) $\Rightarrow S=\frac{1}{2}.\frac{4}{\sqrt{5}}.2\sqrt{5}=4.$

Chọn A

Ví dụ 6. Biết rằng đường thẳng $y=2x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng BC.

A. $M\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

B. $M(0;2)$.

C. $M\left(0;\frac{8}{3}\right)$.

D. $M(0;4)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3+x+4=2x+4 \Leftrightarrow x^3=x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow A(0;4) \\ x=1 \Rightarrow y=6 \Rightarrow B(1;6) \\ x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(-1;2) \end{array}\right. \Rightarrow M\left(\frac{1-1}{2};\frac{6+2}{2}\right) \Rightarrow M(0;4).$$

Chọn D

Ví dụ 7. Biết rằng đường thẳng $y=2x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OBC, với O là gốc tọa độ.

A. $G(0;2)$.

B. $G\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

C. $G(0;4)$.

D. $G\left(0;\frac{8}{3}\right)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3+x+4=2x+4 \Leftrightarrow x^3=x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow A(0;4) \\ x=1 \Rightarrow y=6 \Rightarrow B(1;6) \\ x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(-1;2) \end{array}\right. \Rightarrow G\left(\frac{0+1-1}{3};\frac{0+6+2}{3}\right) \Rightarrow G\left(0;\frac{8}{3}\right).$$

Chọn D

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt tia Oy tại điểm M thỏa mãn $OM=\frac{5}{2}$, với O là gốc tọa độ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $1<m<2$.

B. $4<m<6$.

C. $2<m<3$.

D. $-3<m<1$.

Lời giải

Ta có $M=(C_m)\cap Oy \Rightarrow$ tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y=x^3-3x^2+3x+m \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow M(0;m) \Rightarrow \overrightarrow{OM}=(0;m) \Rightarrow OM=|m|.$$

Bài ra $OM=\frac{5}{2} \Rightarrow |m|=\frac{5}{2} \Leftrightarrow m=\pm\frac{5}{2}$.

Hơn nữa M thuộc tia $Oy \Rightarrow m=\frac{5}{2}$ thỏa mãn.

Chọn C

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=x^3-3x+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt trục tung tại điểm M khác O thỏa mãn $OM<10$, với O là gốc tọa độ.

A. 20. **B.** 18.
C. 19. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $M=(C_m)\cap Oy \Rightarrow$ tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y=x^3-3x+m \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow M(0;m) \Rightarrow \overrightarrow{OM}=(0;m) \Rightarrow OM=|m|.$$

Bài ra $OM<10$ nên $|m|<10 \Leftrightarrow -10<m<10$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{\pm9;\pm8;...;\pm1;0\}$ và $OM\neq0 \Rightarrow m\neq0$.

Do đó có tất cả 18 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn B

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=x^3-2mx^2+1$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt đường thẳng $d: y=x+1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1+x_2+x_3=3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $1<m<2$. **B.** $4<m<6$.
C. $2<m<3$. **D.** $-2<m<1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-2mx^2+1=x+1 \Leftrightarrow x\left(x^2-2mx-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2mx-1=0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Ta có d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+1>0 \\ 0^2-2m.0-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\mathbb{R} \quad (*)$$

Giả sử $x_3=0$ khi đó $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1), theo Viet có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$

Do đó $x_1+x_2+x_3=3 \Leftrightarrow 2m+0=3 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn (*).

Chọn A

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=x^3-2mx^2-1$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt đường thẳng $d: y=x-1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 20$.

A. 4. **B.** 6.

C. 5. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-2mx^2-1=x-1 \Leftrightarrow x\left(x^2-2mx-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2mx-1=0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Ta có d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+1>0 \\ 0^2-2m.0-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\mathbb{R} \quad (*)$$

Giả sử $x_3=0$ khi đó $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1), theo Viet có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$

Do đó $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 20 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\leq 20 \Leftrightarrow 4m^2+2\leq 20 \Leftrightarrow m^2\leq \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\leq m\leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{\pm 2;\pm 1;0\}$.

Chọn C

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 3$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn điều kiện $y_1 + y_2 + y_3 = 12$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $1 < m < 2$. **B.** $4 < m < 6$.

C. $-2 < m < 1$. **D.** $2 < m < 3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2mx^2 + 3 = x + 3 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 2mx - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2mx - 1 = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Ta có d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 1 > 0 \\ 0^2 - 2m.0 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Giả sử $x_3 = 0$ khi đó $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1), theo Viet có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$

Giả sử (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 3$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3.

Khi đó $y_1 + y_2 + y_3 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + 3) + (x_2 + 3) + (y_3 + 3) = 12$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 2m + 0 = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$ thỏa mãn (*).

Chọn D

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - (3m - 1)x + 3$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $-1 < m < 1$. **B.** $3 < m < \dfrac{7}{2}$.

C. $1 < m < 3$. **D.** $4 < m < \dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 - (3m - 1)x + 3 = 0$ (1)

Ta có $x^3 - 3x^2 - (3m - 1)x + 3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$= (x - x_1)\left[x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2x_3\right]$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3m+1 \\ x_1x_2x_3=-3 \end{cases}$$

Bài ra $x_1,\ x_2,\ x_3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $x_1+x_3=2x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2=3 \\ x_2\left(x_1+x_3\right)+x_1x_3=1-3m \\ x_1x_2x_3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=1 \\ x_1x_3=-3 \\ 1.2-3=1-3m \end{cases} \Rightarrow m=\frac{2}{3}.$$

Thử lại, ta thấy $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn A

Ví dụ 14. Cho hàm số $y=x^3-7x^2+14(3m-1)x-8$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $1<m<3$.

B. $3<m<\frac{7}{2}$.

C. $-1<m<1$.

D. $4<m<\frac{9}{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-7x^2+14(3m-1)x-8=0$

Ta có $x^3-7x^2+14(3m-1)x-8=0=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$=(x-x_1)\left[x^2-(x_2+x_3)x+x_2x_3\right]$$

$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=7 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=14(3m-1) \\ x_1x_2x_3=8 \end{cases}$$

Bài ra x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên $x_1x_3 = x_2^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_2(x_1 + x_3) + x_2^2 = 14(3m-1) \\ x_2^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ 2.5 + 4 = 14(3m-1) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Thử lại, ta thấy $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn C

Ví dụ 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, D với D là điểm có hoành độ không đổi, thỏa mãn $M(2;3)$ là trung điểm của cạnh AB.

A. $m = -2$. **B.** $m = -1$.

C. $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2mx^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 2mx - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2mx - 1 = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Ta có d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 1 > 0 \\ 0^2 - 2m.0 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow D(0;1)$.

Do $A, B \in d \Rightarrow A(x_1; x_1 + 1), B(x_2; x_2 + 1) \Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Điểm $M(2;3)$ là trung điểm của cạnh $AB \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2 \\ \dfrac{(x_1 + 1) + (x_2 + 1)}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4.$

Theo Viet có $x_1 + x_2 = 2m$ nên $m = 2$ thỏa mãn (*).

Chọn C

Ví dụ 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = x + 3$ cắt đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3(m^2 - 1)x^2 - (2m+1)x + 3$ tại ba điểm phân biệt $A(0;3)$, B, C thỏa mãn A là trung điểm của cạnh BC.

A. $m = \pm 2$.
B. $m = \pm 1$.
C. $m = 2$.
D. $m = 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3(m^2-1)x^2 - (2m+1)x + 3 = x + 3$

$$\Leftrightarrow x\left[x^2 - 3(m^2-1)x - (2m+2)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3(m^2-1)x - (2m+2) = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Ta có d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m^2-1)^2 + 4(2m+2) > 0 \\ 0^2 - 3(m^2-1).0 - (2m+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m^2-1)^2 + 4(2m+2) > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \quad (*)$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0;3)$ ứng với đề bài cho.

Do B, $C \in d \Rightarrow B(x_1; x_1 + 3)$, $C(x_2; x_2 + 3) \Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Điểm $A(0;3)$ là trung điểm của cạnh $BC \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0 \\ \dfrac{(x_1+3)+(x_2+3)}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0.$

Theo Viet có $x_1 + x_2 = 3(m^2 - 1)$ nên $3(m^2-1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Kết hợp với (*) ta được $m = 1$ thỏa mãn.

Chọn D

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng d đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc k. Tìm k sao cho đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $G(1;-1)$ là trọng tâm của tam giác OBC, với O là gốc tọa độ.

A. $k = -3$.
B. $k = 3$.
C. $k = -4$.
D. $k = 4$.

Lời giải

Ta có $d: y = k(x-2)+0 \Rightarrow d: y = k(x-2)$.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = k(x-2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-3x+1) = k(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-3x+1-k=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Ta có d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9-4(1-k) > 0 \\ 2^2 - 3.2 + 1 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k+5>0 \\ k \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{5}{4} \\ k \neq -1 \end{cases} \quad (*)$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(2;0)$ ứng với đề bài cho.

Do $B,\ C \in d \Rightarrow B(x_1; k(x_1-2)),\ C(x_2; k(x_2-2)) \Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Điểm $G(1;-1)$ là trọng tâm của tam giác OBC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2+0}{3} = 1 \\ \dfrac{k(x_1-2)+k(x_2-2)+0}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = 3 \\ k(x_1+x_2-4) = -3 \end{cases}$$

Theo Viet có $x_1 + x_2 = 3$ nên $k = 3$ thỏa mãn (*).

Chọn B

Ví dụ 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = m(x-2)+4$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C với A là điểm có hoành độ không đổi, thỏa mãn $BC = 2\sqrt{30}$.

A. $m = 4$. **B.** $m = -4$.
C. $m = 3$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x + 2 = m(x-2)+4 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = m(x-2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+1) = m(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+2x+1-m=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Ta có d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1-(1-m) > 0 \\ 2^2 + 2.2 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases} \qquad (*)$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(2;4)$.

Do $B,\ C \in d \Rightarrow B\left(x_1; m(x_1-2)+4\right),\ C\left(x_2; m(x_2-2)+4\right)$

$\Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1), theo Viet thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = 1-m \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{BC} = \left(x_2 - x_1; m(x_2 - x_1)\right) \Rightarrow BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2$

$$= (m^2+1)(x_1 - x_2)^2 = (m^2+1)\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right]$$

$$= (m^2+1)\left[4 - 4(1-m)\right] = 4m(m^2+1)$$

Bài ra $BC = 2\sqrt{30} \Rightarrow 4m(m^2+1) = 120 \Leftrightarrow m = 3$ thỏa mãn (*).

Chọn C

Ví dụ 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm $A(1;0)$, B, C thỏa mãn tam giác MBC có diện tích bằng 2, với $M(0;1)$.

A. $m = 3$. **B.** $m = \frac{17}{4}$.

C. $m = 4$. **D.** $m = \frac{19}{4}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - mx + m - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) - m(x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x + 1 - m = 0 \qquad (1) \end{array}\right.$$

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1-m) > 0 \\ 1^2 + 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m \neq 3 \end{cases} \qquad (*)$$

Do $B,\ C \in Ox \Rightarrow B(x_1;0),\ C(x_2;0) \Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1)

Theo Viet thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = 1 - m \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1; 0) \Rightarrow BC^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 - 4(1-m) = 4m - 3.$

Khi đó $S_{MBC} = \frac{1}{2}d(M;BC).BC = \frac{1}{2}.1.\sqrt{4m-3} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{19}{4}$ thỏa mãn (*).

Chọn D

Ví dụ 20. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 2x - m + 3$ tại ba điểm phân biệt ?

A. 5. **B.** 4.

C. 3. **D.** 6.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 2x - m + 3 = x + 1 \Leftrightarrow m = x^3 - 3x + 2$ (1)

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường $y = m$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại 3 điểm phân biệt.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, với $x \in \mathbb{R}$ có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

$y = m$

Từ bảng biến thiên trên ta được $0 < m < 4$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn C

Nhận xét

Từ bảng biến thiên trên ta có ngay:

+ Đường thẳng d cắt (C_m) tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$

+ Đường thẳng d cắt (C_m) tại điểm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 0 \end{array}\right.$

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP [TT6068]

Câu 1: [543217] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x+4$ (1). Đường thẳng $(\Delta): y=x+4$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C. Tính diện tích tam giác OBC, với O là gốc tọa độ.

A. 2. **B.** 1.
C. $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 2: [543219] Cho hàm số $y=x^3-5x+2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y=2-x$. Trong các điểm $A(0;2)$, $B(2;0)$, $D(-2;4)$ thì điểm nào là giao điểm của (C) và (d) ?

A. Chỉ A, B. **B.** Chỉ B, D.
C. Chỉ A, D. **D.** Cả 3 điểm.

Câu 3: [543222] Cho hàm số $y=x^3-4x+5$ (1). Đường thẳng $(d): y=3-x$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng ?

A. 3. **B.** 5.
C. $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 4: [543223] Cho hàm số $y=x^3+(2-m)x^2+4m$ (1). Số giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(-2;0)$, B, C sao cho $AB^2+AC^2=12$ là ?

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 5: [543224] Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+3(m+1)x+1$ (1). Tìm tất cả giá trị dương của m để đường thẳng $(d): y=x-2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm của cạnh AC và điểm A có hoành độ bằng -1.

A. $m=2$. **B.** $m=1$.
C. $m=\frac{3}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 6: [543225] Cho hàm số $y=x^3+(2m+1)x^2+mx-m$ (C_m). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $d: y=-2x-2$ cắt đồ thị hàm số (C_m) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 17$.

A. 1. **B.** 5.
C. 3. **D.** 4.

Câu 7: [543227] Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc m cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Tìm giá trị dương của m để hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8.

A. $m=2$. **B.** $m=1$.

C. $m=\frac{3}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 8: [543228] Cho hàm số $y=x^3+x^2+(m-3)x+1-m$ (1). Đường thẳng $(d): y=x-1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(1;0)$, B, C. Kẻ $(\Delta)\perp(d)$ tại B, điểm $E(1;-2)\in(\Delta)$. Tìm m biết $EC=\sqrt{10}$.

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=\frac{23}{8}$.

C. $m=2$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 9: [543230] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ (1). Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2)$ và hệ số góc là k. Tính tổng giá trị của k để đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt M, A, B thỏa mãn $AB=2OM$.

A. -2. **B.** -3.

C. 1. **D.** 0.

Câu 10: [543232] Cho hàm số $y=x^3-2mx^2+x-2m$ (1). Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành, tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại A cắt trục tung tại B. Tìm giá trị dương của m để diện tích tam giác OAB bằng 1, với O là gốc tọa độ.

A. $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $m=\sqrt{2}$.

C. $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 11: [543234] Biết rằng đường thẳng $y=-3x+19$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x-14$ tại điểm duy nhất có tọa độ là $(x_0;y_0)$. Tìm y_0.

A. $y_0=3$. **B.** $y_0=7$.

C. $y_0=10$. **D.** $y_0=13$.

Câu 12: [543235] Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Trên (C) lấy hai điểm A và B sao cho điểm $M(2;9)$ là trung điểm của cạnh AB. Tính giá trị của biểu thức $P = y_A^2 + y_B^2$.

A. $P = 360$. **B.** $P = 362$.
C. $P = 364$. **D.** $P = 366$.

Câu 13: [543237] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (C). Trên (C) lấy hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục tung. Tính giá trị của biểu thức $P = y_A^2 + 2y_B^2$.

A. $P = 108$. **B.** $P = 147$.
C. $P = 192$. **D.** $P = 243$.

Câu 14: [543238] Cho hàm số $y = x^3 - 2x + m$ có đồ thị (C_m). Tìm m sao cho (C_m) cắt trục tung tại M thỏa mãn điều kiện $OM = 4$.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm 2$.
C. $m = \pm 3$. **D.** $m = \pm 4$.

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m sao cho (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 2017$.

A. $m = \dfrac{2017}{2}$. **B.** $m = 1008$.
C. $m = \dfrac{2017}{3}$. **D.** $m = 1009$.

Câu 16: [543240] Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m sao cho (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $y_1 + y_2 + y_3 = 2017$.

A. $m = \dfrac{2017}{2}$. **B.** $m = 1007$.
C. $m = \dfrac{2017}{4}$. **D.** $m = 1009$.

Câu 17: [543244] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 3$ có đồ thị (C_m). Ký hiệu t_m là số giá trị của m thỏa mãn (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm t_m.

A. $t_m = 1$. **B.** $t_m = 2$.
C. $t_m = 3$. **D.** $t_m = 0$.

Câu 18: [543245] Cho hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 14mx - 8$ có đồ thị (C_m). Ký hiệu t_m là số giá trị của m thỏa mãn (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm t_m.

A. $t_m = 1$. **B.** $t_m = 2$.
C. $t_m = 0$. **D.** $t_m = 3$.

Câu 19: [543247] Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m sao cho (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, D với D là điểm có hoành độ không đổi, thỏa mãn trung điểm M của cạnh AB nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 2017 = 0$.

A. $m = 1007$. **B.** $m = \frac{2017}{2}$.
C. $m = 1008$. **D.** $m = \frac{2017}{4}$.

Câu 20: [543259] Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m sao cho (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, D với D là điểm có hoành độ không đổi, thỏa mãn $AB = 2\sqrt{34}$.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm 2$.
C. $m = \pm 3$. **D.** $m = \pm 4$.

Câu 21: [543261] Giả sử A và B là các giao điểm của đường cong $y = x^3 - 3x + 2$ và trục hoành. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB = 3$. **B.** $AB = 4\sqrt{2}$.
C. $AB = 5\sqrt{3}$. **D.** $AB = 6\sqrt{5}$.

Câu 22: [543262] Tìm số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 4x + 3$ và đường thẳng $y = -8x + 3$.

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Câu 23: [543263] Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hình vuông (V) tâm O, hai đường chéo nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 2. Xác định số giao điểm của hình vuông (V) và đồ thị của hàm số $y = x^3 - 4x + 3$.

A. 1 giao điểm. **B.** 2 giao điểm.
C. 3 giao điểm. **D.** 0 giao điểm

Câu 24: [543265] Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^3+1$ cắt đường thẳng $y=m(x+1)$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m=3$.

B. $m=\frac{3}{4}$.

C. $m\in\left\{3;\frac{3}{4}\right\}$.

D. $m\in\left\{2;3;\frac{3}{4}\right\}$.

Câu 25: [543266] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y=x^3+mx^2-x-m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m\neq\pm1$.

B. $m=\frac{3}{4}$.

C. $m\neq\pm3$.

D. $m\in\{1;5\}$.

Câu 26: [543268] Tìm giá trị của m để đường cong $y=x^3+(2-m)x^2+mx-3$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$.

A. $m\in\{-1;7\}$.

B. $m\in\{2;3\}$.

C. $m\in\{3;4\}$.

D. $m\in\{-1\}$.

Câu 27: [543269] Tìm giá trị của m để đường cong $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $m\in\{2;3\}$.

B. $-\frac{1}{4}<m<1,\ m\neq0$.

C. $m=1$.

D. $-\frac{1}{4}<m<1$.

Câu 28: [543271] Tìm giá trị của m để đường cong $(C): y=x^3+mx^2+1$ cắt đường thẳng $y=-x+1$ tại ba điểm phân biệt A (0;1), B, C sao cho các tiếp tuyến của (C) tại B và C của đường cong vuông góc với nhau.

A. $m=\pm\sqrt{5}$.

B. $m\in\{2;3\}$.

C. $m\in\{3;4\}$.

D. $m\in\{1;5\}$.

Câu 29: [543273] Tìm tất cả các giá trị của m để đường cong $y=2x^3-3mx^2+(m-1)x+1$ cắt đường thẳng $y=2x+1$ tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn điểm $C(0;1)$ nằm giữa A và B, đồng thời đoạn thẳng AB có độ dài $\sqrt{30}$.

A. $m=\pm\sqrt{5}$.

B. $m\in\{2;3\}$.

C. $m\in\left\{0;\frac{8}{9}\right\}$.

D. $m\in\{1;5\}$.

Câu 30: [543276] Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ có đồ thị là (C). Cho điểm $M(3;1)$ và đường thẳng $d: x+y-2=0$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(0;2)$, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng $2\sqrt{6}$.

A. $m=1$.
B. $m=4$.
C. $m=-1$.
D. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right.$

Câu 31: [543278] Cho hàm số $y=x^3-4x^2+6x-1$ (C) và đường thẳng $d: y=x+1$. Số giao điểm của đường thẳng d và đồ thị hàm số (C) là ?

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Câu 32: [543280] Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2x-9$ (C) và đường thẳng $d: y=2x+3$. Gọi x_1, x_2, x_3 là hoành độ các giao điểm của đường thẳng d và đồ thị hàm số (C). Tổng $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ có giá trị là ?

A. 13.
B. 8.
C. 21.
D. 17.

Câu 33: [543281] Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-6$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-2m-4$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

A. $m\geq -3$.
B. $m<-3$, $m\neq -1$.
C. $m>-3$, $m\neq 1$.
D. $m=-3$.

Câu 34: [543283] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x-4m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $-\frac{5}{8}<m<\frac{1}{2}$.
B. $m=-\frac{5}{8}$.
C. $m=-\frac{5}{8}$ hoặc $m=\frac{1}{2}$.
D. $m=\frac{1}{2}$.

Câu 35: [543284] Cho hàm số $y=x^3-(m+3)x^2+4mx-m^2$ có đồ thị là (C). Tìm m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A^2+x_B^2+x_C^2=8$.

A. $m=0$.
B. $m=1$.
C. $m=-1$.
D. $m=2$.

Câu 36: [543286] Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc là k. Tìm k để Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác OBC có trọng tâm $G(2;2)$ với O là gốc tọa độ.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $\frac{3}{4}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	02. D	03. D	04. B	05. C	06. A	07. A	08. C	09. B	10. D
11. C	12. B	13. D	14. D	15. A	16. B	17. A	18. A	19. C	20. D
21. A	22. A	23. B	24. C	25. A	26. D	27. B	28. A	29. C	30. D
31. C	32. D	33. C	34. C	35. B	36. D				

Chủ đề 9

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG

[TV6069]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$.

+ Tung độ giao điểm của (C) và trục tung $(x = 0)$ là nghiệm của $y = c$

$\Rightarrow (C)$ cắt trục Oy tại điểm $M(0;c)$.

+ Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành $(y = 0)$ là nghiệm của $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

1. Bài toán liên quan đến số giao điểm

Số giao điểm của (C) và trục hoành chính là số nghiệm của phương trình (1).

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) thành $at^2 + bt + c = 0$ (2)

- (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

- (C) cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0.

- (C) cắt trục hoành tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(2) cùng nghiệm kép dương} \\ \text{(2) có nghiệm dương và nghiệm âm} \end{cases}$

- (C) cắt trục hoành tại điểm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(2) cùng nghiệm kép bằng 0} \\ \text{(2) có nghiệm bằng 0 và nghiệm âm} \end{cases}$

- (C) không cắt trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ cùng nghiệm kép âm} \\ (2) \text{ có 2 nghiệm âm phân biệt} \end{cases}$

Một số bài toán có thể thay trục hoành thành $d: y = m$ hoặc $(P): y = mx^2 + n$, phương pháp giải hoàn toàn tương tự như trên.

2. Bài toán liên quan đến cấp số cộng

Tìm điều kiện để $(C): y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

+ **Bước 1.** Tìm điều kiện để (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(2) có 2 nghiệm dương phân biệt } t_1 \text{ và } t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giả sử $t_1 < t_2$, khi đó các nghiệm của (1) là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

+ **Bước 2.** Bài ra có $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên

$$-\sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_2}\right) = \sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1.$$

+ **Bước 3.** Kết hợp với hệ thức Viet, ta giải hệ $\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} \\ t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} \\ t_2 = 9t_1 \end{cases}$

Từ $\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10t_1 = -\dfrac{b}{a} \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\dfrac{b}{10a} \\ t_2 = -\dfrac{9b}{10a} \end{cases}$

Thế vào $t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \dfrac{9b^2}{100a^2} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow 9b^2 = 100ac \Rightarrow \dfrac{ac}{b^2} = \dfrac{9}{100}$.

Chú ý đối chiếu với (*) và chọn đáp án đúng.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Hỏi có tất cả bao nhiêu giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $y = 2$?

A. 3. **B.** 4.

C. 2. **D.** 1.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 3x^2 + 4 = 2$ (1)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn B

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt tia Oy tại điểm M thỏa mãn $OM = 5$, với O là gốc tọa độ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $-2 < m < 1$. **B.** $-6 < m < -2$.

C. $4 < m < 6$. **D.** $1 < m < 4$.

Lời giải

Ta có $M = (C_m) \cap Oy \Rightarrow$ tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;m) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (0;m) \Rightarrow OM = |m|.$$

Bài ra $OM = 5 \Rightarrow |m| = 5 \Leftrightarrow m = \pm 5$.

Hơn nữa M thuộc tia $Oy \Rightarrow m = 5$ thỏa mãn.

Chọn C

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 6 - 2m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt ?

A. 1. **B.** 2.

C. 4. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2mx^2+6-2m=0$ (1)

Đặt $t=x^2\ge 0$ thì (1) thành $t^2-2mt+6-2m=0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-(6-2m)>0\\ t_1+t_2=2m>0\\ t_1t_2=6-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2>7\\ m>0\\ m<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1>\sqrt{7}\\ m>0\\ m<3\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{7}-1<m<3.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=2$ thỏa mãn.

Chọn A

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+6-2m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt trục hoành tại đúng ba điểm phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $\frac{1}{2}<m<\frac{5}{2}$.

B. $-1<m<\frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{2}<m<\frac{9}{2}$.

D. $\frac{9}{2}<m<6$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2mx^2+6-2m=0$ (1)

Đặt $t=x^2\ge 0$ thì (1) thành $t^2-2mt+6-2m=0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0.

Do (2) có 1 nghiệm bằng 0 nên $0^2-2m.0+6-2m=0\Leftrightarrow m=3$.

Thử lại, với $m=3$ thì (1) thành $x^4-6x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{6}\end{array}\right.\Rightarrow m=3$ thỏa mãn.

Chọn C

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+12-m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 18 để (C_m) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt.

A. 5.

B. 11.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2mx^2 + 12 - m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) thành $t^2 - 2mt + 12 - m = 0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại đúng 2 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ cùng nghiệm kép dương} \\ (2) \text{ có nghiệm dương và nghiệm âm} \end{cases}$$

- TH1. (2) có nghiệm kép dương $\Rightarrow \Delta' = m^2 - (12 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -4 \end{array}\right.$

Với $m = 3$ thì (1) thành $x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow m = 3$ thỏa mãn.

Với $m = -4$ thì (1) thành $x^4 + 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \Rightarrow m = -4$ không thỏa mãn.

- TH2. (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (12 - m) > 0 \\ t_1 t_2 = 12 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 12 > 0 \\ m > 12 \end{cases} \Leftrightarrow m > 12.$$

Mà $m < 18$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{13; 14; 15; 16; 17\}$.

Tóm lại có tất cả 6 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn D

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 - 3m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

A. 1. **B.** 3.
C. 4. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 + 2mx^2 + m^2 - 3m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) thành $t^2 + 2mt + m^2 - 3m = 0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại điểm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ cùng nghiệm kép bằng 0} \\ (2) \text{ có nghiệm bằng 0 và nghiệm âm} \end{cases}$$

Trong cả hai trường hợp thì (2) đều có nghiệm bằng 0

$$\Rightarrow 0^2+2m.0+m^2-3m=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$$

Với $m=0$ thì (1) thành $x^4=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow m=0$ thỏa mãn.

Với $m=3$ thì (1) thành $x^4+6x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow m=3$ thỏa mãn.

Tóm lại có tất cả 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn D

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+3m-2$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 10 để (C_m) không cắt trục hoành.

A. 9. **B.** 7.

C. 10. **D.** 8.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4+2mx^2+3m-2=0$ (1)

Đặt $t=x^2 \geq 0$ thì (1) thành $t^2+2mt+3m-2=0$ (2)

Ta có (C_m) không cắt trục hoành $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ cùng nghiệm kép âm} \\ (2) \text{ có 2 nghiệm âm phân biệt} \end{array}\right.$

- TH1. (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-3m+2<0 \Leftrightarrow 1<m<2$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \varnothing$.
- TH2. (2) có nghiệm kép âm $\Rightarrow \Delta'=m^2-3m+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$

Với $m=1$ thì (1) thành $x^4+2x^2+1=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \Rightarrow m=1$ thỏa mãn.

Với $m=2$ thì (1) thành $x^4+4x^2+4=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \Rightarrow m=2$ thỏa mãn.

- TH3. (2) có 2 nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=m^2-3m+2>0 \\ t_1+t_2=-2m<0 \\ t_1t_2=3m-2>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ m>\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ \dfrac{2}{3}<m<1 \end{array}\right.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m<10 \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Tóm lại có tất cả 9 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn A

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = x^4 - (m+2)x^2 + m + 1$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 10 để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. 3. **B.** 2.
C. 4. **D.** 5.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - (m+2)x^2 + m + 1 = 0$ (1)

Để ý $(m+2)^2 - 4(m+1) = m^2$ nên (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{m+2-m}{2} = 1 \\ x^2 = \dfrac{m+2+m}{2} = m+1 \end{array}\right.$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ 1^2 \neq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ (*)

Từ đó (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 < 2 \\ x = \sqrt{m+1} \\ x = -\sqrt{m+1} < 2 \end{array}\right.$

Khi đó YCBT $\Leftrightarrow \sqrt{m+1} < 2 \Leftrightarrow -1 \le m < 3$.

Kết hợp với (*) và $m \in \mathbb{Z}$ ta có $m \in \{1; 2\}$ thỏa mãn.

Chọn B

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 12$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$. **B.** $1 < m < \frac{3}{2}$.
C. $\frac{5}{2} < m < \frac{9}{2}$. **D.** $\frac{9}{2} < m < 6$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2mx^2 + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \ge 0$ thì (1) thành $t^2 - 2mt + 1 = 0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1 t_2 = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \qquad (*)$$

Từ $t = x^2$ ta được $x = \pm\sqrt{t}$, khi đó (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t_2 + t_1 + t_1 + t_2 = 2(t_1 + t_2) = 2.2m = 12 \Leftrightarrow m = 3$ thỏa mãn (*).

Chọn C

Nhận xét

Nếu thay đổi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 12$ thành $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 6$ thì ta làm như sau:

Ta có $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = \left|-\sqrt{t_2}\right| + \left|-\sqrt{t_1}\right| + \left|\sqrt{t_1}\right| + \left|\sqrt{t_2}\right| = 2\left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2}\right) = 6$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 9 \Rightarrow 2m + 2 = 9 \Rightarrow m = \frac{7}{2} \text{ thỏa mãn (*)}$$

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Biết (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $-3 \le m \le -1$. **B.** $-1 < m < 1$.

C. $1 \le m \le 3$. **D.** $3 < m < 5$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2mx^2 + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \ge 0$ thì (1) thành $t^2 - 2mt + 1 = 0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1 t_2 = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \qquad (*)$$

Trong mục I phần *Bài toán liên quan đến cấp số cộng* ta có công thức giải nhanh $\frac{ac}{b^2} = \frac{9}{100}$.

Đối với ví dụ này thì $a=1,\ b=-2m,\ c=1$ nên $\frac{1}{4m^2}=\frac{9}{100}\Rightarrow m=\frac{5}{3}$ thỏa mãn (*).

Thử lại, với $m=\frac{5}{3}$ thì (1) thành $x^4-\frac{10}{3}x^2+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=3\\x^2=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{3}\\x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$

Rõ ràng $-\sqrt{3};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow m=\frac{5}{3}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn C

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP [TT6070]

Câu 1: [556959] Cho hàm số $y=x^4-3x^2-1$ (C). Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-2$ tại ?

A. 1 điểm duy nhất. **B.** 2 điểm phân biệt.
C. 3 điểm phân biệt. **D.** 4 điểm phân biệt.

Câu 2: [556960] Cho hàm số $y=-x^4+4x^2+1$ (C) và Parabol $(P): y=x^2-1$. Số giao điểm của (C) và (P) là ?

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Câu 3: [556961] Cho hàm số $y=x^4-6x^2+3$ có đồ thị là (C). Parabol $P: y=-x^2-1$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt. Tổng bình phương các hoành độ giao điểm của P và (C) bằng ?

A. 5. **B.** 4.
C. 10. **D.** 8.

Câu 4: [556962] Cho hàm số $y=x^4-(m+9)x^2+9m$ (C). Giá trị của m để (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ đều lớn hơn -4 là ?

A. $m<16,\ m\neq 9$. **B.** $m\geq 4,\ m\neq 9$.
C. $0<m\leq 16,\ m\neq 9$. **D.** $0<m<16,\ m\neq 9$.

Câu 5: [556963] Cho hàm số $y=mx^4+(m+1)x^2+1$ (C). Giá trị của m để (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là ?

A. $-1\leq m<0$. **B.** $-1<m<0$.
C. $m>1$ hoặc $m<-1$. **D.** $m=\varnothing$.

Câu 6: [556964] Cho hàm số $y = x^4 - (m-1)x^2 - m$ (C). Giá trị của m để (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thoả mãn $|x_1| + |x_2| = 4$ là ?

A. $m = -2$. **B.** $m = -4$.
C. $m = 4$. **D.** $m = 1$.

Câu 7: [556965] Trục hoành cắt đồ thị của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại bao nhiêu điểm ?

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Câu 8: [556966] Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho (C_m) cắt trục tung tại điểm M thỏa mãn $OM = 5$.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm 3$.
C. $m = \pm 2$. **D.** $m = \pm 5$.

Câu 9: [556967] Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m$ (C). Tìm m để (C) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 30$ là ?

A. $m = 6$. **B.** $m = 5$.
C. $m = 8$. **D.** $m = 3$.

Câu 10: [556968] Cho hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt theo thứ tự A, B, C, D thỏa mãn $AB = BC = CD$.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -\frac{7}{4}$.
C. $m = \frac{25}{4}$. **D.** $m = \frac{13}{2}$.

Câu 11: [556969] Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 8$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$.
C. $m = 1$. **D.** $m = 4$.

Câu 12: 556970] Đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết rằng giá trị m thỏa mãn điều kiện trên có dạng $\frac{a}{b}$ với $a, b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + 2b^2$.

A. $P = 41$. **B.** $P = 43$.
C. $P = 57$. **D.** $P = 59$.

Câu 13: [556971] Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m+1$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $m\neq 0, -\frac{1}{2}<m<1.$ **B.** $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}.$

C. $m\neq 0, -\frac{1}{3}<m<1.$ **D.** $-\frac{1}{3}<m<1.$

Câu 14: [556973] Cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+3m-9$ có đồ thị là (C_m). Tìm giá trị của m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $x_A<x_B<x_C<x_D$ và tam giác MAC có diện tích bằng 2 với $M(5;1)$.

A. $m=6.$ **B.** $m=3.$

C. $m=9.$ **D.** $m=4.$

Câu 15: [556974] Cho hàm số $y=x^4-mx^2+1$ (1). Gọi m là giá trị để đường thẳng $d: y=2x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại bốn điểm phân biệt. Biết $m\leq 5$, số các số nguyên m cần tìm là ?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 16: [556975] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-(2m+1)x^2+m^2+m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=26.$

A. $m=-2.$ **B.** $m=6.$

C. $m=3.$ **D.** $m=-3.$

Câu 17: [556976] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m\geq -1.$ **B.** $m\geq 0.$

C. $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m=-1 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m\geq 0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Câu 18: [556977] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+2x^2+3$ cắt đường thẳng $y=5x+m$ tại duy nhất một điểm.

A. $m=\frac{1}{4}.$ **B.** $m=0.$

C. $m=-\frac{3}{4}.$ **D.** $m>0,\ m\neq\frac{1}{4}.$

Câu 19: [556978] Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-m^2x^2+3$ cắt đường thẳng $y=\left(1-m^2\right)x+3$ tại ba điểm phân biệt ?

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Câu 20: [556980] Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left(x^2-1\right)^2-(m+1)^2(1-m)^2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ tương ứng lập thành một cấp số cộng.

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 21: [556981] Tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-1$ với đường thẳng $y=-3x$.

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 22: [556982] Có bao nhiêu giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2+10$ với đường thẳng $y=5x-8$ có hoành độ dương.

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 23: [556983] Có bao nhiêu giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-2$ với đường thẳng $y=x+1$ có hoành độ âm.

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 24: [556984] Tìm tất cả các giá trị của m để đường cong $y=x^4-40x^2+6m$ cắt trục hoành tại bốn điểm A, B, C, D sao cho $AB=BC=CD$.

A. $m=24$. **B.** $m\in\{2;3\}$.

C. $m\in\{1;5\}$. **D.** $m\in\left\{0;\frac{8}{9}\right\}$.

Câu 25: [556985] Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m=\pm\sqrt{5}$. **B.** $m\in\{2;3\}$.

C. $m\in\left\{-\frac{4}{9};4\right\}$. **D.** $m\in\{1;5\}$.

Câu 26: [556986] Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}$ có đồ thị là (C). Cho điểm A thuộc đồ thị (C) có hoành độ là 1. Tiếp tuyến của (C) tại A cắt đồ thị (C) tại điểm B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $\sqrt{65}$.
B. $2\sqrt{17}$.
C. $2\sqrt{65}$.
D. $4\sqrt{17}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	**02. B**	**03. C**	**04. D**	**05. D**	**06. B**	**07. D**	**08. D**	**09. B**	**10. B**
11. A	**12. B**	**13. C**	**14. A**	**15. B**	**16. B**	**17. C**	**18. A**	**19. C**	**20. D**
21. B	**22. A**	**23. A**	**24. A**	**25. C**	**26. D**				

Chủ đề 10

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM PHÂN THỨC

[TV6071]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét đồ thị $(C): y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $d: y=mx+n$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{ax+b}{cx+d}=mx+n \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{d}{c} \\ Ax^2+Bx+C=0 \quad (1) \end{cases} \quad (A\neq 0)$$

1. Bài toán liên quan đến số giao điểm

- d cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=B^2-4AC>0 \\ A.\left(-\dfrac{d}{c}\right)^2+B.\dfrac{-d}{c}+C\neq 0 \end{cases}$$

- d cắt (C) tại điểm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ có nghiệm kép khác } -\dfrac{d}{c} \\ (1) \text{ có nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng } -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

- d không cắt (C)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ vô nghiệm} \\ (1) \text{ có nghiệm kép } -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

2. Bài toán liên quan đến tính chất các giao điểm

Phần này, ta chỉ xét bài toán mà có liên quan đến d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

+ Bước 1. Tìm điều kiện để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(1) có hai nghiệm phân biệt khác } -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - 4AC > 0 \\ A.\left(-\frac{d}{c}\right)^2 + B.\frac{-d}{c} + C \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Bước 2. Gọi tọa độ hai điểm, ta giả sử đó là A và B.

Do $A,\ B \in d \Rightarrow A(x_1; mx_1 + n),\ B(x_2; mx_2 + n)$.

Lưu ý $x_1,\ x_2$ chính là hai nghiệm của (1) nên theo hệ thức Viet thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \\ x_1x_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$

+ Bước 3. Theo yêu cầu bài toán, ta tìm m, chú ý đối chiếu với (*) và chọn đáp án đúng.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Biết rằng đường thẳng $y = 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$. Tính $S = x_1 + x_2$.

A. $S = 1$. **B.** $S = -1$.
C. $S = 2$. **D.** $S = 3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x - 1 = \frac{3x-1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (2x-1)(x+1) = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow S = 0 + 1 = 1.$$

Chọn A

Ví dụ 2. Biết rằng đường thẳng $y = 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB = 2$. **B.** $AB = \sqrt{5}$.
C. $AB = \sqrt{2}$. **D.** $AB = 3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x-1=\dfrac{3x-1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ (2x-1)(x+1)=3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow A(0;-1) \\ x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow B(1;1) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$

Chọn B

Ví dụ 3. Biết rằng đường thẳng $y=2x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.

A. $M\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

B. $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

C. $M(0;-1)$.

D. $M(1;1)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x-1=\dfrac{3x-1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ (2x-1)(x+1)=3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow A(0;-1) \\ x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow B(1;1) \end{array}\right.$$

Do đó tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $\left(\dfrac{0+1}{2};\dfrac{-1+1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

Chọn B

Ví dụ 4. Biết rằng đường thẳng $y=2x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB, với O là gốc tọa độ.

A. $G\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$.

B. $G\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

C. $G\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

D. $G\left(\dfrac{1}{3};0\right)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x-1=\dfrac{3x-1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\(2x-1)(x+1)=3x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\2x^2-2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow A(0;-1)\\x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow B(1;1)\end{array}\right.$$

Do đó tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB là $\left(\dfrac{0+1+0}{3};\dfrac{0-1+1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3};0\right)$.

Chọn D

Ví dụ 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của (C).

A. $m>1$. **B.** $-1<m<1$.
C. $m\in\varnothing$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\(x-m)(x+1)=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x^2-mx-m-3=0\end{cases}\qquad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(-m-3)>0\\(-1)^2-m.(-1)-m-3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)^2+8>0\\m\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\qquad(*)$$

YCBT $\Leftrightarrow$(1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác -1 thỏa mãn

$$(x_1+1)(x_2+1)<0\Leftrightarrow x_1x_2+x_1+x_2+1<0\qquad(2)$$

Do $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1) nên theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-m-3\end{cases}$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow -m-3+m+1<0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$, kết hợp với (*) ta được $m\in\mathbb{R}$ thỏa mãn.

Chọn D

Nhận xét

Nếu thay yêu cầu thuộc hai nhánh của (C) thành thuộc cùng một nhánh của (C) thì ta chỉ cần chuyển $(x_1+1)(x_2+1)<0$ thành $(x_1+1)(x_2+1)>0$. Tương tự như trên thì $m\in\varnothing$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng có một giá trị âm của m là m_0 để đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=14$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $-\dfrac{26}{5}<m_0<-\dfrac{41}{10}$.

B. $-\dfrac{41}{10}<m_0<-\dfrac{16}{5}$.

C. $-\dfrac{16}{5}<m_0<-3$.

D. $-\dfrac{5}{2}<m_0<0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\(x-m)(x+1)=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x^2-mx-m-3=0\end{cases}\qquad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(-m-3)>0\\(-1)^2-m.(-1)-m-3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)^2+8>0\\m\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\qquad(*)$$

Do $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1) nên theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-m-3\end{cases}$

Khi đó $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2(-m-3)=14\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-4\end{array}\right.$ thỏa mãn (*)

Từ đó $m_0=-4$.

Chọn B

Nhận xét

Liên quan đến dạng bài toán này, ta cần lưu ý một số biến đổi sau:

$$(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4.$$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}.$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2).$$

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $-4<m<-2$.

B. $-2<m<-\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}<m<\frac{5}{2}$.

D. $\frac{5}{2}<m<3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\(x-m)(x+1)=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x^2-mx-m+1=0\end{cases}\quad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(-m+1)>0\\(-1)^2+m-m+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+4m-4>0\quad(*)$$

Do $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1) nên theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=1-m\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1+2x_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=1-m\\x_1=2m-1\end{cases}$

Thế vào $x_1x_2=1-m$ ta được $(2m-1)(1-m)=1-m\Leftrightarrow m=1$ thỏa mãn (*).

Chọn C

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng có tất cả hai giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn $AB=2\sqrt{6}$. Tính $S=m_1^3+m_2^3$.

A. $S=125$.

B. $S=-125$.

C. $S=64$.

D. $S=-64$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\(x-m)(x+1)=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x^2-mx-m-3=0\end{cases}\quad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(-m-3) > 0 \\ (-1)^2 - m.(-1) - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 8 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Do $A,\ B \in d \Rightarrow A(x_1; x_1 - m),\ B(x_2; x_2 - m) \Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m - 3 \end{cases}$

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) \Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$

$$\Rightarrow AB^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 = 2m^2 - 8(-m-3) = 24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -4 \end{array}\right. \Rightarrow m_1^3 + m_2^3 = -64.$$

Chọn D

Nhận xét

Liên quan đến ví dụ trên, ta còn có thể hỏi giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB, cách làm như sau:

Như trên thì $AB^2 = 2m^2 + 8m + 24 = 2(m+2)^2 + 16 \Rightarrow AB^2 \geq 16 \Rightarrow AB \geq 4.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = -2$ thỏa mãn (*)

Do đó giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB là 4.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng $M(2;0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $1 < m < \dfrac{11}{5}$.

B. $-5 < m < -2$.

C. $\dfrac{11}{5} < m < 4$.

D. $-2 < m < 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x - m = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (x-m)(x-1) = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(m-1) > 0 \\ 1^2 - (m+2).1 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Do $A,\ B \in d \Rightarrow A(x_1; x_1 - m),\ B(x_2; x_2 - m) \Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Theo hệ thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = m + 2$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2 - 2m}{2}\right) = \left(\frac{m+2}{2}; \frac{2-m}{2}\right)$.

Bài ra có $\left(\frac{m+2}{2}; \frac{2-m}{2}\right) = (2;0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+2}{2} = 2 \\ \frac{2-m}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$ thỏa mãn (*).

Chọn A

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A và B cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có trọng tâm là $G(2;-2)$.

A. $m = 5$. **B.** $m = -5$.
C. $m = 6$. **D.** $m = -6$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x - m = \frac{x+3}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x-m)(x+1) = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - mx - m - 3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(-m-3) > 0 \\ (-1)^2 - m.(-1) - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 8 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Do $A,\ B \in d \Rightarrow A(x_1; x_1 - m),\ B(x_2; x_2 - m) \Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Theo hệ thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = m$.

Tồn tại $\Delta OAB \Leftrightarrow O \notin AB \Leftrightarrow O \notin d \Leftrightarrow 0 \neq 0 - m \Leftrightarrow m \neq 0 \qquad (**)$

Tọa độ trọng tâm của tam giác OAB là $\left(\frac{x_1+x_2}{3};\frac{x_1+x_2-2m}{3}\right)=\left(\frac{m}{3};-\frac{m}{3}\right)$.

Bài ra có $\left(\frac{m}{3};-\frac{m}{3}\right)=(2;-2)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{m}{3}=2\\-\frac{m}{3}=-2\end{cases}\Leftrightarrow m=6$ thỏa mãn (*) và (**).

Chọn C

Ví dụ 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O, với O là gốc tọa độ.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$.
C. $m=3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\(x-m)(x+1)=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x^2-mx-m-3=0\end{cases}\quad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(-m-3)>0\\(-1)^2-m.(-1)-m-3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)^2+8>0\\m\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\quad(*)$$

Do $A, B\in d\Rightarrow A(x_1;x_1-m)$, $B(x_2;x_2-m)\Rightarrow x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-m-3\end{cases}$

Tồn tại $\Delta OAB\Leftrightarrow O\notin AB\Leftrightarrow O\notin d\Leftrightarrow 0\neq0-m\Leftrightarrow m\neq0$ (**)

Khi đó ΔOAB vuông tại $O\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$.

Lại có $\overrightarrow{OA}=(x_1;x_1-m)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2;x_2-m)$ nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$$\Leftrightarrow x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)=0\Leftrightarrow 2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2(-m-3)-m^2+m^2=0\Leftrightarrow m=-3$$ thỏa mãn (*) và (**).

Chọn D

Ví dụ 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn tam giác OAB cân tại O, với O là gốc tọa độ.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\neq 0$.
C. $m=3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\(x-m)(x+1)=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x^2-mx-m-3=0\end{cases}\quad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(-m-3)>0\\(-1)^2-m.(-1)-m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)^2+8>0\\m\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\quad(*)$$

Do $A, B\in d\Rightarrow A(x_1;x_1-m)$, $B(x_2;x_2-m)\Rightarrow x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-m-3\end{cases}$

Tồn tại $\Delta OAB\Leftrightarrow O\notin AB\Leftrightarrow O\notin d\Leftrightarrow 0\neq 0-m\Leftrightarrow m\neq 0$ (**)

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(x_1;x_1-m)\Rightarrow OA=\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\\\overrightarrow{OB}=(x_2;x_2-m)\Rightarrow OB=\sqrt{x_2^2+(x_2-m)^2}\end{cases}$

Khi đó ΔOAB cân tại $O\Leftrightarrow OA=OB\Leftrightarrow 2x_1^2-2mx_1=x_2^2-2mx_2$

$$\Leftrightarrow(x_1^2-x_2^2)-m(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2\\x_1+x_2=m\end{array}\right.$$

Với $x_1=x_2\Rightarrow A\equiv B\Rightarrow$ không thỏa mãn.

Hơn nữa theo hệ thức Viet, ta luôn có $x_1+x_2=m$.

Kết hợp với (*) và (**) thì ΔOAB cân tại O với $\forall m\neq 0$.

Chọn B

Nhận xét

- *Một hướng làm khác rất đặc sắc cho ví dụ trên như sau:*

Như trên thì $OA^2 = x_1^2 + (x_1 - m)^2 = 2(x_1^2 - mx_1) + m^2$.

Hơn nữa x_1 là nghiệm của (1) nên

$x_1^2 - mx_1 = m + 3 \Rightarrow OA^2 = 2(m+3) + m^2 = m^2 + 2m + 6$.

Tương tự $OB^2 = m^2 + 2m + 6 \Rightarrow OA = OB$ nên ΔOAB cân tại O với $\forall m \neq 0$.

- *Ta cũng có thể chỉ ra ΔOAB cân tại O với $\forall m \neq 0$ bằng cách khác như sau:*

Gọi M là trung điểm của cạnh AB

$$\Rightarrow M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2 - 2m}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}; -\frac{m}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{m}{2}; -\frac{m}{2}\right).$$

Từ $AB: y = x - m \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}} = (1;1) \Rightarrow \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{m}{2} - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow OM \perp AB$.

Tam giác OAB có M là trung điểm của cạnh AB và $OM \perp AB$.

Do đó ΔOAB cân tại O với $\forall m \neq 0$.

- *Phát triển bài toán hơn nữa*

+ Nếu thay ΔOAB cân tại O thành ΔOAB có một góc bằng 60^0 thì khi đó ΔOAB đều vì theo trên thì ΔOAB đã cân tại O với $\forall m \neq 0$.

Ta ép cho $OA^2 = AB^2$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) \Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$

$\Rightarrow AB^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 = 2m^2 - 8(-m-3) = 2m^2 + 8m + 24$.

Khi đó $OA^2 = AB^2 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 6 = 2m^2 + 8m + 24 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 18 = 0 \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

+ Nếu thay ΔOAB cân tại O thành ΔOAB có một góc bằng 120^0 thì khi đó $AOB = 120^0$.

Tam giác ΔOAB cân tại $O \Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{\frac{AB}{2}}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB^2 = 3OA^2$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m + 24 = 3(m^2 + 2m + 6) \Leftrightarrow m^2 - 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Kết hợp với (*) và (**) ta được $m = 1 \pm \sqrt{7}$ thỏa mãn.

- *Với việc chỉ ra $OA^2 = OB^2 = m^2 + 2m + 6$ ở trên, ta có ngay bài toán hay và khó sau:*

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA-\frac{3}{OB}=2$, với O là gốc tọa độ.

Ví dụ 13. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn $OA^2+OB^2=10$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $-4\le m<-2$.
B. $2\le m\le 5$.
C. $-2\le m\le 0$.
D. $0<m<2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\(x-m)(x+1)=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x^2-mx-m-3=0\end{cases}\qquad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(-m-3)>0\\(-1)^2-m.(-1)-m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)^2+8>0\\m\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\qquad(*)$$

Do $A, B\in d\Rightarrow A(x_1;x_1-m),\ B(x_2;x_2-m)\Rightarrow x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-m-3\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(x_1;x_1-m)\Rightarrow OA^2=x_1^2+(x_1-m)^2\\\overrightarrow{OB}=(x_2;x_2-m)\Rightarrow OB^2=x_2^2+(x_2-m)^2\end{cases}$

$$\Rightarrow OA^2+OB^2=2(x_1^2+x_2^2)-2m(x_1+x_2)+2m^2=2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-2m(x_1+x_2)+2m^2$$

$$=2m^2+4(m+3)-2m^2+2m^2=2m^2+4m+12=10\Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn C

Ví dụ 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn góc AOB nhọn, với O là gốc tọa độ.

A. $m\geq -3$. **B.** $m>-3$.
C. $m\leq -3$. **D.** $m<-3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{x+3}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\(x-m)(x+1)=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x^2-mx-m-3=0\end{cases}\quad(1)$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(-m-3)>0\\(-1)^2-m.(-1)-m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)^2+8>0\\m\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\quad(*)$$

Do $A,\ B\in d\Rightarrow A(x_1;x_1-m),\ B(x_2;x_2-m)\Rightarrow x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (1).

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=-m-3\end{cases}$

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(x_1;x_1-m)\\\overrightarrow{OB}=(x_2;x_2-m)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)$

$=2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2=-2(m+3)-m^2+m^2=-2(m+3)$.

Bài ra góc AOB nhọn nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}>0\Leftrightarrow -2(m+3)>0\Leftrightarrow m<-3$.

Chọn D

Nhận xét

Nếu thay AOB nhọn thành góc AOB tù thì ta chỉ cần chuyển $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}>0$ thành $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}<0$

$\Leftrightarrow -2(m+3)<0\Leftrightarrow m>-3$.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP [TT 6072]

Câu 1: [556996] Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ (C). Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=2x-1$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. Tổng y_1+y_2 bằng ?

A. 4. **B.** 8.
C. 2. **D.** 6.

Câu 2: [556997] Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y=-x+m$. Giá trị của m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=22$ là ?

A. $m=\pm 6$. **B.** $m=-4$.
C. $m=6$. **D.** Cả B và C.

Câu 3: [556999] Cho hàm số $y=\frac{mx-1}{x+1}$ (C). Tất cả các giá trị của m để (C) cắt trục Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B thoả mãn $S_{OAB}=1$ là ?

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$.
C. $m=\pm 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$

Câu 4: [557000] Cho hàm số $y=\frac{1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d: y=mx$. Giá trị của m để d cắt (C) tại một điểm duy nhất là ?

A. $m=0$, $m=-4$. **B.** $m=-4$.
C. $m=-4$, $m=1$. **D.** Đáp án khác.

Câu 5: [557001] Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ (C). Tìm m sao cho đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của đồ thị.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in\varnothing$.
C. $m>-1$. **D.** $-1<m<1$.

Câu 6: [557002] Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ (C). Biết rằng có hai giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=21$. Tích m_1m_2 bằng ?

A. -10. **B.** $-\frac{10}{3}$.
C. -15. **D.** $-\frac{15}{4}$.

Câu 7: [557004] Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ (C). Biết rằng có hai giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn $AB=\sqrt{34}$. Tổng m_1+m_2 bằng ?

A. -2. **B.** -4.
C. -6. **D.** -8.

Câu 8: [557005] Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ (C). Tìm m sao cho đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn AB nhỏ nhất.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$.
C. $m=4$. **D.** $m=-4$.

Câu 9: [557006] Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ (C). Tìm m sao cho đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB.

A. $m=2$. **B.** $m=5$.
C. $m=6$. **D.** $m=3$.

Câu 10: [557007] Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (1). Đường thẳng $d: y=2x+9$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính tổng khoảng cách T từ hai điểm A, B đến trục hoành.

A. $T=9$. **B.** $T=8$.
C. $T=7$. **D.** $T=6$.

Câu 11: [557008] Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (1). Đường thẳng $d: y=-x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích S của tam giác ABC, với $C(-4;-1)$.

A. $S=2\sqrt{3}$. **B.** $S=\sqrt{3}$.
C. $S=3\sqrt{3}$. **D.** $S=6\sqrt{3}$.

Câu 12: [557009] Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+2}$ (1). Tính tổng tất cả giá trị của m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B và cắt tiệm cận đứng tại M sao cho $MA^2+MB^2=25$.

A. -2. **B.** 9.
C. 10. **D.** -6.

Câu 13: [557010] Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+2}$ (1). Gọi m là giá trị để đường thẳng $d: y=2x+3m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{15}{2}$, với O là gốc tọa độ. Giá trị của m bằng ?

A. $\frac{5}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 14: [557012] Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (1). Đường thẳng d đi qua điểm $I(-2;1)$ và có hệ số góc là k cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho I là trung điểm của cạnh AB. Giá trị của k bằng ?

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{1}{7}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 15: [557013] Giả sử A và B là các giao điểm của đường cong $y=\frac{x-2}{x-1}$ với hai trục tọa độ. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=\sqrt{2}$.

B. $AB=2\sqrt{2}$.

C. $AB=2\sqrt{3}$.

D. $AB=2\sqrt{5}$.

Câu 16: [557014] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=\frac{x+2}{x}$ cắt đường thẳng $y=x+m$ tại hai điểm có hoành độ đối nhau.

A. $m=1$.

B. $m=\frac{3}{4}$.

C. $m=3$.

D. $m\in\left\{2;3;\frac{3}{4}\right\}$.

Câu 17: [557017] Giá trị của m để đường thẳng $\Delta: y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=\frac{2x-1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AB=4\sqrt{2}$ là ?

A. ± 2.

B. 2.

C. -2.

D. $9\pm\sqrt{77}$.

Câu 18: [557018] Cho hàm số $(C): y=\dfrac{|x|-2}{|x|-1}$ và đường thẳng $d: y=m^2+1$. Giá trị của m để đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung là ?

A. $m\in(-\infty;-1]\cup(2;+\infty)$.

B. $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

D. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Câu 19: [557019] Cho hàm số $(C): y=\left|\dfrac{2x-3}{1-x}\right|$ và đường thẳng $d: y=m^2+1$. Giá trị của m để đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung là:

A. $m\in(-\infty;+\infty)\setminus\{2\}$.

B. $m\in(0;+\infty)\setminus\{2\}$.

C. $m\in(-\infty;+\infty)\setminus\{1\}$.

D. $m\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	02. D	03. B	04. B	05. B	06. C	07. B	08. D	09. C	10. A
11. D	12. C	13. A	14. B	15. B	16. A	17. A	18. D	19. D	

Chủ đề 11

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

[TT6073-TT6074]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M

Định lý 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $(d): y=y'(x_0).(x-x_0)+y_0$.

2. Điều kiện tiếp xúc

Định lý 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y=kx+m$.

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm $\begin{cases} f(x)=kx+m \\ f'(x)=k \end{cases}$.

Khi đó nghiệm x của hệ chính là hoành độ tiếp điểm.

3. Phương pháp giải

a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị hàm số.

Bài toán: Với đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $(d): y=y'(x_0).(x-x_0)+y_0$, có hệ số góc $k=y'(x_0)$.

Chú ý:

- Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)\in(C)$, tức là tiếp tuyến duy nhất nhận M làm tiếp điểm.
- Phương trình tiếp tuyến qua $M\in(C)$, tức là mọi tiếp tuyến đi qua M.

b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm cho trước.

Bài toán: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$. Để lập phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đường thẳng (d) đi qua $A(x_A;y_A)$ có phương trình $(d): y=k(x-x_A)+y_A$.

Bước 2: (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=f'(x).(x-x_A)+y_A \quad (*) \\ f'(x)=k \end{cases} \longrightarrow x=...\Rightarrow k=...$$

Chú ý: Số nghiệm phân biệt x của phương trình $(*)$ bằng số tiếp tuyến kẻ được từ A đến đồ thị hàm số.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng

$$(d): y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

Bước 2: Điểm $A(x_A;y_A)$ thuộc (d), ta được $y_A=y'(x_0)(x_A-x_0)+y_0 \Rightarrow x_0=...$

c) Phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc.

Bài toán: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$. Để lập phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k của đồ thị (C) ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến d là nghiệm phương trình $y'=k \Rightarrow x_0=...$

Bước 2: Khi đó ta được phương trình tiếp tuyến:

$$(d): y=y'(x_0).(x-x_0)+y(x_0)$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đường thẳng (d) với hệ số góc k có dạng

$$(d): y=k.x+m$$

Bước 2: (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x)=kx+m \\ f'(x)=k \end{cases} \Rightarrow m=...$$

Chú ý: Hệ số góc được chọn thường thông qua:

- Phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = ax + b \Rightarrow a = k$.
- Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d): y = ax + b \Rightarrow a.k = -1$.
- Phương trình tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d): y = ax + b$ một góc α

$\Rightarrow \tan\alpha = \left|\dfrac{k-a}{1+ak}\right|$. Trường hợp đặc biệt là trục $Ox \Rightarrow |k| = \tan\alpha$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

A. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN TẠI ĐIỂM

Ví dụ 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $M(1;0)$ cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B. Tính diện tích tam giác OAB, với O là gốc tọa độ.

A. 1. **B.** 6.

C. $\dfrac{3}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(1) = -3$.

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;0) \Rightarrow d: y = y'(1)(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = -3x + 3$.

Suy ra $\begin{cases} A(1;0) \equiv M = d \cap Ox \\ B(0;3) = d \cap Oy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = 1 \\ OB = 3 \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{3}{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của d với (C). Tính diện tích tam giác OAB?

A. 12. **B.** 6.

C. 18. **D.** 24.

Lời giải

Ta có $y = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'(1) = 9$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại $A(1;5) \Rightarrow \Delta: y = y'(1)(x-1) + 5 \Leftrightarrow y = 9x - 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $x^3+3x^2+1=9x-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Suy ra $B(-5;-49) \Rightarrow \begin{cases} AB=6\sqrt{82} \\ d_{(0,d)}=\dfrac{4}{\sqrt{82}} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}AB.d_{(0;d)}=\dfrac{1}{2}6\sqrt{82}.\dfrac{4}{\sqrt{82}}=12.$

Chọn A.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua điểm $M(0;a)$ thì giá trị của a là ?

A. $a=10$. **B.** $a=9$.
C. $a=3$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{x+2}{x-1} \Rightarrow y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1 \Rightarrow y'(2)=-3.$

Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(2;4) \Rightarrow \Delta: y=y'(2)(x-2)+4$

$\Leftrightarrow y=-3(x-2)+4 \Leftrightarrow y=-3x+10.$

Suy ra đường thẳng Δ đi qua điểm $M(0;10) \Rightarrow a=10.$

Chọn A.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$ có đồ thị (C). Gọi (d) là tiếp tuyến có hệ số góc dương của (C) tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn $y''(x_0)=44$. Khi đó, (d) đi qua điểm có tọa độ nào dưới đây ?

A. $M(1;13)$. **B.** $N(2;11)$.
C. $P(3;-7)$. **D.** $Q(4;-1)$.

Lời giải

Ta có $y=x^4-2x^2+3 \Rightarrow y'=4x^3-4x \Rightarrow y''=12x^2-4 \Rightarrow y''(x_0)=12x_0^2-4.$

Suy ra $y''(x_0)=44 \Leftrightarrow 12x_0^2-4=44 \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y'(2)=24 \\ y'(-2)=-24 \end{cases}.$

Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) thỏa mãn đề bài, suy ra $(d): y=y'(2)(x-2)+y(2)$

$\Leftrightarrow y=24(x-2)+11=24x-37$ và đi qua điểm $N(2;11)$.

Chọn B.

Ví dụ 5: Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M có hệ số góc nhỏ nhất. Tính giá trị $T=a+b$?

A. -3. **B.** 2.

C. 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y'=3x^2-6x \Rightarrow y'(a)=3a^2-6a.$

Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(a;b) \Rightarrow \Delta: y=y'(a)(x-a)+b$

$\Leftrightarrow \Delta: y=(3a^2-6a)(x-a)+a^3-3a^2+2 \Rightarrow k_\Delta=3a^2-6a$ là hệ số góc của Δ.

Ta có $k_\Delta=3a^2-6a=3(a-1)^2-3\geq -3 \Rightarrow \min k_\Delta=-3 \Leftrightarrow a-1=0 \Leftrightarrow a=1.$

Khi đó $b=a^3-3a^2+2=0 \Rightarrow T=a+b=1.$

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$, có đồ thị (C). Gọi d_1 là tiếp tuyến tại giao điểm của (C) và Ox, d_2 là tiếp tuyến tại giao điểm của (C) và Oy. Giao điểm của d_1 và d_2 là

A. $M(-1;-1)$. **B.** $M(1;1)$.

C. $M(-1;1)$. **D.** $M(1;-1)$.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ suy ra $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0, \forall x\neq -1.$

+) Gọi $A=(C)\cap Ox$ suy ra $A(2;0) \Rightarrow y'(2)=\dfrac{1}{3}$ và $y(2)=0$.

$\longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến d_1 là $d_1: y=\dfrac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow x-3y-2=0$.

+) Gọi $B=(C)\cap Oy$ suy ra $B(0;-2) \Rightarrow y'(0)=3$ và $y(0)=-2$.

$\longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến d_2 là $d_2: y=3x-2 \Leftrightarrow 3x-y-2=0$.

Vậy $d_1\cap d_2=M(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ 3x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$.

Chọn A.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-(m+1)x^2+m-2$, có đồ thị (C). Tìm giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=-2$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

A. $m=\frac{12}{5}$.

B. $m=\frac{22}{5}$.

C. $m=\frac{16}{5}$.

D. $m=\frac{32}{5}$.

Lời giải

Ta có $y'=x^3-2(m+1)x \Rightarrow \begin{cases} y'(-2)=4m-12 \\ y(-2)=8-4(m+1)+m-2=2-3m \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến đồ thị (C) tại $x=-2$ là $y=(4m-12)(x+2)+2-3m \quad (d)$.

Theo bài ra, ta có $O(0;0)\in(d)$ suy ra $0=2(4m-12)+2-3m \Leftrightarrow m=\frac{22}{5}$.

Chọn B.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-m}$, có đồ thị (C). Tìm giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị và trục Oy đi qua điểm $A(-1;2)$.

A. $m=\pm 1$.

B. $m=\pm 2$.

C. $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $m=\pm\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $y=\frac{x+1}{x-m}$ suy ra $y'=-\frac{m+1}{(x-m)^2}$, $\forall x\neq m$.

Điểm $M=(C)\cap Oy$ suy ra $M\left(0;-\frac{1}{m}\right) \longrightarrow y'(0)=-\frac{m+1}{m^2}$, $\forall m\neq 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến đồ thị (C) tại M là $y=-\frac{m+1}{m^2}x-\frac{1}{m} \quad (d)$.

Theo bài ra, ta có $A(-1;2)\in(d)$ suy ra $2=\frac{m+1}{m^2}-\frac{1}{m} \Leftrightarrow 2m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + x - 2m$ (1). Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành, tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại A cắt trục tung tại B. Tìm giá trị của tham số m để diện tích tam giác OAB bằng 1, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm\frac{1}{2}$.

C. $m = 2$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2mx^2 + x - 2m = 0 \Leftrightarrow (x-2m)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2m \Rightarrow A(2m;0)$$

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx + 1 \Rightarrow y'(2m) = 3.(2m)^2 - 4m.2m + 1 = 4m^2 + 1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm A là $y = (4m^2+1)(x-2m)$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ y = (4m^2+1)(x-2m) \end{cases} \Rightarrow B(0; -8m^3 - 2m)$.

Do tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 1 = |8m^4 + 2m^2| \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 10: Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích nhỏ nhất của đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

A. $S_{\min} = \pi$. **B.** $S_{\min} = 2\pi$.

C. $S_{\min} = 4\pi$. **D.** $S_{\min} = 8\pi$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ suy ra $y_0 = \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}$ và $y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-2)^2}, \forall x_0 \neq 2$.

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại $M: y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}.(x - x_0) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}$.

(d) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt $A\left(2; \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2}\right)$, $B(2x_0 - 2; 2)$.

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi.IM^2=\pi.\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi.\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Vậy diện tích nhỏ nhất cần tìm là $S_{\min}=2\pi$.

Chọn B.

B. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN BIẾT HỆ SỐ GÓC

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Gọi đường thẳng $(d): y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số và vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 3x-5y-4=0$. Khi $b>0$, tổng $a+18b$ bằng

A. 39. **B.** 27.
C. 61. **D.** -8.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị hàm số. Đường thẳng (Δ) có hệ số góc $k_{(\Delta)}=\frac{3}{5}$.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) là nghiệm của hệ phương trình

$$y'(x_0).k_{(\Delta)}=-1\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow 9x_0^2-18x_0+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\frac{1}{3}\\ x_0=\frac{5}{3}\end{array}\right.$$

Với $x_0=\frac{1}{3}$ suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là $y-y(x_0)=-\frac{5}{3}(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y=-\frac{5}{3}x+\frac{61}{27}=ax+b\Rightarrow\left\{a=-\frac{5}{3};b=\frac{61}{27}\right\}\Rightarrow a+18b=39$ (thỏa mãn điều kiện $b>0$).

Với $x_0=\frac{5}{3}$ suy ra hệ số $b<0$ (không thỏa mãn điều kiện).

Chọn A.

Ví dụ 2: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^5 - x^3 + 1$ song song với đường thẳng $8x - y - 1 = 0$ là

A. 3. **B.** 4.

C. 2. **D.** 1.

Lời giải

Gọi phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số là $(d): y = kx + m$.

Theo bài ra, (d) song song với đường thẳng $y = 8x - 1$ suy ra $k = 8,\ m \neq -1$.

Vì (d) tiếp xúc với (C) suy ra $\begin{cases} x^5 - x^3 + 1 = 8x + m \\ \left(x^5 - x^3 + 1\right)' = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^4 - 3x^2 - 8 = 0 \\ m = x^5 - x^3 - 8x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(5x^2 - 8\right)\left(x^2 + 1\right) = 0 \\ m = x^5 - x^3 - 8x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{8}{5}}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} m = ... \\ m = ... \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq -1$).

Vậy có tất cả hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C_m). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại giao điểm của (C_m) và đường thẳng $d: x = 1$ song song với đường thẳng $y = -12x + 4$ là ?

A. $m = 0$. **B.** $m = 1$.

C. $m = \pm 2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

Gọi A là giao điểm của (C_m) và đường thẳng $d: x = 1 \Rightarrow A\left(1; -2m^2 + 2m + 2\right)$.

Ta có $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4m^2x \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m^2$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại $A \Rightarrow \Delta: y = y'(1)(x - 1) - 2m^2 + 2m + 2$.

$\Leftrightarrow y = \left(4 - 4m^2\right)(x - 1) - 2m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow y = \left(4 - 4m^2\right)x + 2m^2 + 2m - 2.$

Theo bài ta, ta có Δ song song với đường thẳng $y = -12x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} k_\Delta = -12 \\ 2m^2 + 2m - 2 \neq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4m^2 = -12 \\ m^2 + m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m^2 + m - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \pm 2.$

Chọn C.

Ví dụ 4: Gọi (d) là tiếp tuyến có hệ số góc nguyên của đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{x-2}$ đi qua điểm $M(-6;5)$. Đường thẳng (d) đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $A(1;2)$. **B.** $B(5;6)$.

C. $C(-3;-2)$. **D.** $D(0;-1)$.

Lời giải

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng $(d) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $(d): y=k(x+6)+5$.

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-2}=k(x+6)+5 \\ -\frac{4}{(x-2)^2}=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{4}{x-2}=k(x-2)+8k+5 \\ k=-\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{4}{x-2}=-\frac{4}{x-2}+8k+5 \\ k=-\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-2}=2k+1 \\ -(2k+1)^2=k \end{cases} \Leftrightarrow 4k^2+5k+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-\frac{1}{4} \end{array}\right. \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=-1.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y=-x-1$ và đi qua điểm $D(0;-1)$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Tiếp tuyến (d) của đồ thị hàm số $y=x+\frac{a}{x}+2$ tại điểm có hoành độ $x=1$ vuông góc với đường thẳng $(\Delta): x-3y-2=0$. Gọi A, B là tọa độ hai điểm cực trị của hàm số đã cho. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $4\sqrt{5}$ **B.** $5\sqrt{2}$

C. 4 **D.** $\sqrt{10}$

Lời giải

Ta có $y=x+\frac{a}{x}+2 \longrightarrow y'=1-\frac{a}{x^2}$ suy ra $y'(1)=1-a$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm hoành độ $x=1$ có hệ số góc $k=y'(1)=1-a$.

Mặt khác, tiếp tuyến (d) vuông góc với $(\Delta) \Rightarrow k_{(\Delta)}.k_{(d)}=-1 \Leftrightarrow \frac{1-a}{3}=-1 \Leftrightarrow a=4$.

Khi đó, hàm số $y = x + \frac{4}{x} + 2$, có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \longrightarrow y(2) = 6 \\ x = -2 \longrightarrow y(-2) = -2 \end{array}\right.$.

Vậy điểm $A(2;6)$, $B(-2;-2)$ suy ra $AB = 4\sqrt{5}$

Chọn A.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Khi đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt và tiếp tuyến với (C) tại hai điểm này song song thì giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(0;2)$.

C. $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{x+1}{x-2} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x + 1 = (x+m)(x-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x + 1 = x^2 - 2x + mx - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \underbrace{x^2 + (m-3)x - 2m - 1 = 0}_{f(x)} \end{cases} \quad (*).$$

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \neq 0 \\ \Delta_{(*)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)^2 + 4(2m+1) > 0, \forall m$.

Khi đó, gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là tọa độ giao điểm của (C) và (d).

Ta có $k_A = y'(x_1) = -\frac{3}{(x_1-2)^2}$, $k_B = y'(x_2) = -\frac{3}{(x_2-2)^2}$.

Suy ra $k_A = k_B \Leftrightarrow |x_1 - 2| = |x_2 - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - 2 = x_2 - 2 \\ x_1 - 2 = -x_2 + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$.

Theo hệ thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = 3 - m$ suy ra $3 - m = 4 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn C.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m - 2$ (1), m là tham số thực. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm $M(1;-1)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham

số m để đường thẳng d song song với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

A. 3. **B.** 2.

C. 1. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 3mx^2 + 3m - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6mx;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Hàm số (1) có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;3m-2)$, $B(2m;-4m^3+3m-2)$.

Phương trình tiếp tuyến d tại điểm $M(1;-1)$ là $d: y = y'(1).(x-1) + y(1)$

$\Leftrightarrow y = (3-6m)(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = (3-6m)x + 6m - 4$.

Ta có $AB // d$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_d} = 0 \Leftrightarrow 2m(3-6m) + (-4m^3).(-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2m(2m^2 - 6m + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \quad \text{(loại)} \\ m = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 8: Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4 + mx - 3x^2}{4x + m}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ và vuông góc với đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số ?

A. $m = \pm 3$. **B.** $m = \pm 1$.

C. $m = \pm 2$. **D.** $m = \pm 4$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \dfrac{4 + mx - 3x^2}{4x + m}$, có $y' = \dfrac{-12x^2 - 6mx + m^2 - 16}{(4x+m)^2}$, $\forall x \neq -\dfrac{m}{4}$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = 0$ là $k = y'(x_0) = \dfrac{m^2 - 16}{m^2}$.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $4x+m=0$ vì $\lim\limits_{x\to -\frac{m}{4}} y=\infty$.

Mặt khác, tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận đứng $\Rightarrow k=0 \Leftrightarrow \dfrac{m^2-16}{m^2}=0 \Leftrightarrow m=\pm 4$.

Chọn D.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2-bx}{x-2}$ có đồ thị (C). Để (C) đi qua điểm $A\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ có hệ số góc $k=-3$ thì mối liên hệ giữa a và b là ?

A. $4a-b=1$. **B.** $a-4b=1$.
C. $4a-b=0$. **D.** $a-4b=0$.

Lời giải

Đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(-1;\dfrac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}=\dfrac{a.(-1)^2-b.(-1)}{(-1)-2} \Leftrightarrow a+b=-\dfrac{15}{2}$ (1).

Ta có $y=\dfrac{ax^2-bx}{x-2} \Rightarrow y'=\dfrac{ax^2-4ax+2b}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(0)=\dfrac{b}{2}$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ $\Rightarrow k_\Delta=\dfrac{b}{2}$ là hệ số góc của Δ.

Ta có $k_\Delta=-3 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2}=-3 \Leftrightarrow b=-6 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}=\dfrac{a-6}{-3} \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow 4a-b=0$.

Chọn C.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=\dfrac{x+b}{ax-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;-2)$ song song với $d:3x+y-4=0$. Khi đó $T=a+b$ bằng ?

A. 2. **B.** 1.
C. -1. **D.** 0.

Lời giải

Đồ thị (C) đi qua điểm $M(1;-2) \Leftrightarrow -2=\dfrac{1+b}{a-2}$ (1).

Ta có $y=\dfrac{x+b}{ax-2} \Rightarrow y'=\dfrac{-2-ab}{(ax-2)^2} \Rightarrow y'(1)=\dfrac{-2-ab}{(a-2)^2}$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại $M(1;-2) \Rightarrow \Delta: y = y'(1).(x-1)-2$.

Ta có Δ song song với $d: 3x+y-4=0$, suy ra $\begin{cases} k_\Delta = -3 \\ \dfrac{2+ab}{(a-2)^2} - 2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3 \\ \dfrac{2+ab}{(a-2)^2} - 2 \neq 4 \end{cases}$

Kết hợp (1), ta được $\begin{cases} \dfrac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3 \\ -2 = \dfrac{1+b}{a-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+2 = 3(a-2)^2 \\ 2(2-a) = b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow T = a+b = 2.$

Chọn A.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6075]

PHẦN 1

Câu 1: [558704] Cho hàm số: $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

B. $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

C. $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

D. $y = \dfrac{1}{2}x$.

Câu 2: [558704] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 5

A. $y = 24x - 79$.

B. $y = 174x - 79$.

C. $y = 45x - 79$.

D. $y = 45x - 174$.

Câu 3: [558706] PT tiếp tuyến tại điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$

A. $y = 4x + 23$.

B. $y = -4x - 2$.

C. $y = 1$.

D. $y = -4x + 2$.

Câu 4: [558707] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ tại điểm A(0; 1) là

A. $y = 0$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = 1$.

D. $y = -7x + 1$.

Câu 5: [558708] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ tại giao điểm của đồ thị và trục hoành là

A. $y=0$. **B.** $y=1$.

C. $y=-2x+1$. **D.** $y=-7x+1$.

Câu 6: [558709] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -3.

A. $y=45x+82$. **B.** $y=-45x+826$.

C. $y=45x+2$ **D.** $y=-45x+82$.

Câu 7: [558710] Cho hàm số $y=x^4-4x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 0

A. $y=-4x-2$. **B.** $y=4x+23$.

C. $y=-4x+2$. **D.** $y=1$.

Câu 8: [558711] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+4}{2x-3}$ tại điểm A(1; -7) là

A. $y=-7x+1$. **B.** $y=-2x+4$.

C. $y=3x-3$ **D.** $y=-17x+10$.

Câu 9: [558712] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $y=-9x+6$. **B.** $y=-9x+66$.

C. $y=9x+6$. **D.** $y=9x-6$.

Câu 10: [558713] Cho hàm số: $y=\dfrac{x-1}{x+1}(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -4.

A. $y=\dfrac{2}{9}x+\dfrac{23}{9}$. **B.** $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{23}{9}$.

C. $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{7}{9}$. **D.** $y=\dfrac{2}{9}x+\dfrac{25}{9}$.

Câu 11: [558714] Cho hàm số: $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 4.

A. $y=\dfrac{2}{25}x-\dfrac{7}{25}$. **B.** $y=\dfrac{2}{25}x+\dfrac{7}{25}$.

C. $y=-\dfrac{2}{25}x+\dfrac{7}{25}$. **D.** $y=-\dfrac{2}{25}x+\dfrac{71}{25}$.

Câu 12: [558715] Cho hàm số $y=x^4-4x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $y=-4x-2$. **B.** $y=4x+2$.
C. $y=4x+23$. **D.** $y=-4x+2$.

Câu 13: [558716] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3.

A. $y=9x-2$. **B.** $y=9x-26$.
C. $y=-9x-3$. **D.** $y=-9x-26$.

Câu 14: [558717] Cho hàm số: $y=\frac{x-1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$. **B.** $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.
C. $y=\frac{-1}{2}x-\frac{15}{2}$. **D.** $y=\frac{-1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Câu 15: [558718] Cho hàm số $y=x^4-4x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3

A. $y=84x-206$. **B.** $y=-84x-2016$.
C. $y=-84x-206$. **D.** $y=84x-26$.

Câu 16: [558719] Cho hàm số $y=x^4-4x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị và trục tung

A. $y=-4x+2$. **B.** $y=1$.
C. $y=4x+23$. **D.** $y=-4x-2$.

Câu 17: [558720] Cho hàm số: $y=\frac{x-1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$.

A. $y=8x+1$. **B.** $y=8x+11$.
C. $y=-8x+1$. **D.** $y=-8x+31$.

Câu 18: [558721] Cho hàm số $y=x^4-4x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1

A. $y=4x+2016$. **B.** $y=4x+2$.
C. $y=-4x+2$. **D.** $y=-4x+2016$.

Câu 19: [558722] Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -2.

A. $y=24x-9$. **B.** $y=-24x-79$.
C. $y=-24x-9$. **D.** $y=24x+29$.

Câu 20: [558723] Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = -9x + 5$. **B.** $y = 9x + 5$.
C. $y = 9x - 5$. **D.** $y = -9x - 5$.

Câu 21: [558724] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 4.

A. $y = -24x - 79$. **B.** $y = 24x - 19$.
C. $y = 24x - 79$. **D.** $y = 24x + 4$.

Câu 22: [558725] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = -3x - 1$. **B.** $y = -x - 1$.
C. $y = x - 3$. **D.** $y = -3x + 1$.

Câu 23: [558726] Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2

A. $y = -16x - 31$. **B.** $y = -16x - 311$.
C. $y = 16x - 3$. **D.** $y = 16x - 31$.

Câu 24: [558727] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

A. $y = 4x - 3$. **B.** $y = 2x - 2$.
C. $y = 6x - 2$. **D.** $y = 6x + 2$.

Câu 25: [558728] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ tại điểm $A(1;2)$ là:

A. $y = -6x + 8$. **B.** $y = 6x - 4$.

C. $y = -3x + 5$. **D.** $y = 3x - 1$.

Câu 26: [558729] Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$ tại điểm có tung độ bằng 1 là:

A. $k = -\frac{32}{25}$. **B.** $k = \frac{4}{5}$.
C. $k = -\frac{5}{4}$. **D.** $k = \frac{5}{4}$.

Câu 27: [558730] Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x+1\,(C)$ tại giao điểm của (C) với trục Oy đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A. $A(5;10)$. **B.** $A(4;2)$.
C. $A(2;10)$. **D.** $A(4;13)$.

Câu 28: [558731] Đồ thị hàm số $y=x^4-x^2+1$ có bao nhiêu tiếp tuyến đi qua điểm có tung độ bằng 13.

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Câu 29: [558732] Cho hàm số $y=\ln\left(2+x+x^2\right)$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x=-2$ có hệ số góc là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{2}$.
C. $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 30: [558733] Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=x^3-2x$ khi M có hoành độ bằng 1.

A. $y=x-2$. **B.** $y=x-3$.
C. $2y=x-3$. **D.** $3y=3x-1$.

Câu 31: [558734] Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x-1\ (C)$ tại điểm có hoành độ bằng x_0 thỏa mãn $y''(x_0)=6$.

A. $y=6x+1$. **B.** $y=6x-3$.
C. $y=15x-17$. **D.** $y=15x+15$.

Câu 32: [558735] Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x-4\ (C)$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $\Delta: y=x-1$.

A. $y=6x-6$. **B.** $y=3x-3$.
C. $y=6x-8$. **D.** $y=3x-4$.

Câu 33: [558737] Tiếp tuyến của thuộc đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+1\ (C)$ tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8. Tổng hoành độ và tung độ của điểm M bằng ?

A. -5. **B.** 1.
C. -29. **D.** 7.

Câu 34: [558738] Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 3$ (C) tại giao điểm của (C) với trục tung đồng thời (C) đi qua điểm $A(1;0)$.

A. $y = -4x + 4$.
B. $y = 2$.
C. $y = 4x + 4$.
D. $y = 3$.

Câu 35: [558739] Ký hiệu d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 2m^2 + 1$ (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành đồng thời (C) đi qua điểm $A(1;0)$. Hỏi có có bao nhiêu đường thẳng d thỏa mãn bài toán ?

A. 3.
B. 2.
C. 8.
D. 4.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	02. D	03. C	04. D	05. A	06. A	07. D	08. D	09. C	10. A
11. B	12. B	13. B	14. B	15. A	16. B	17. A	18. C	19. D	20. B
21. C	22. D	23. D	24. C	25. C	26. B	27. D	28. B	29. D	30. A
31. B	32. A	33. A	34. D	35. D					

PHẦN 2 [TT6076]

Câu 1: [559256] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 10$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 10

A. $y = 10,\ y = 9x - 17.$ **B.** $y = 19,\ y = 9x - 8.$

C. $y = 1,\ y = 9x - 1.$ **D.** $y = 10,\ y = 9x - 7.$

Câu 2: [559257] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 8$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 8

A. $y = 0, y = 9x - 1.$ **B.** $y = 8, y = 9x - 20.$

C. $y = 8, y = 9x - 19.$ **D.** $y = 19, y = 9x - 8.$

Câu 3: [559258] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 9

A. $y = 1,\ y = 9x - 1.$ **B.** $y = 0,\ y = 9x - 1.$

C. $y = 19,\ y = 9x - 8.$ **D.** $y = 9,\ y = 9x - 18.$

Câu 4: [559259] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 1

A. $y = 19,\ y = 9x - 8.$ **B.** $y = 1,\ y = 9x - 26.$

C. $y = 1,\ y = 9x - 18.$ **D.** $y = 0,\ y = 9x - 1.$

Câu 5: [559260] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 7$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 7

A. $y = 19,\ y = 9x - 8.$ **B.** $y = 0,\ y = 9x - 1.$

C. $y = 7,\ y = 9x - 18.$ **D.** $y = 7,\ y = 9x - 20,$

Câu 6: [559262] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$,biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -x + 2$

A. $y = -x + \frac{11}{3}$ **B.** $y = x + \frac{11}{3}.$

C. $y = -x + \frac{1}{3},\ y = -x + \frac{1}{33}.$ **D.** $y = -x + \frac{22}{3},\ y = -x + \frac{13}{33}.$

Câu 7: [559263] Số tiếp tuyến của (C): $y = -x^4 + x^2$ song song với $d: y = 2x - 1$?

A. 0. **B.** 3.

C. 2. **D.** 1.

Câu 8: [559265] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4-x^2+6$, biết tiếp tuyến **song song** với đường thẳng $d: y=-6x-1$

A. $y=-6x+1$.
B. $y=-6x+6$.
C. $y=6x+10$.
D. $y=-6x+10$.

Câu 9: [559266] Cho (H): $y=\frac{x+2}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (H) có tiếp tuyến song song với trục tung.
B. (H) có tiếp tuyến song song với trục hoành.
C. Không tồn tại tiếp tuyến của (H) có hệ số góc âm.
D. Không tồn tại tiếp tuyến của (H) có hệ số góc dương.

Câu 10: [559267] Số tiếp tuyến của (C): $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ song song với $d: y=8x+2$?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 0.

Câu 11: [559268] Số tiếp tuyến của (C): $y=\frac{x+1}{x-1}$ **song song** với $d: y=-2x-1$?

A. 1.
B. 0.
C. 3.
D. 2.

Câu 12: [559269] Số tiếp tuyến của (C): $y=-x^4-x^2+6$ **song song** với $d: y=-6x-1$?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 0.

Câu 13: [559270] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4+x^2$, biết tiếp tuyến **song song** với đường thẳng $d: y=2x-1$

A. $\left[\begin{array}{l} y=2x+21 \\ y=2x+32 \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} y=-2x \\ y=-2x+3 \end{array}\right.$.
C. $y=2x+2$.
D. $\left[\begin{array}{l} y=2x+2 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$.

Câu 14: [559271] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-2}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-\frac{3}{4}x+2$.

A. $y=\frac{-3}{4}x+2,\ y=\frac{-3}{4}x+13$.
B. $y = 2x - 1$.
C. $y=\frac{-3}{4}x+\frac{1}{2},\ y=\frac{-3}{4}x+\frac{13}{2}$.
D. $y=x-2$.

Câu 15: [559272] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-2}$ với hệ số góc $k=-3$ là

A. $y=-3x-2.$
B. $y=-3x+2.$
C. $y=-3x+2,\ y=-3x+14.$
D. $y=2x-1.$

Câu 16: [559273] Số tiếp tuyến của (C): $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ song song với $d: y=3x+2$?

A. 2.
B. 3.
C. 0.
D. 1.

Câu 17: [559274] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$,biết tiếp tuyến **song song** với đường thẳng $d: y=-2x-1$

A. $y=-2x+73.$
B. $\left[\begin{array}{l} y=-2x \\ y=-2x+3 \end{array}\right.$.
C. $y=-2x+7.$
D. $\left[\begin{array}{l} y=-7x+2 \\ y=-7x+3 \end{array}\right.$.

Câu 18: [559276] Số tiếp tuyến của (C): $y=-x^4-x^2+6$ **song song** với $d: y=6x-1$?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 0.

Câu 19: [559277] Số tiếp tuyến của (C): $y=\frac{2x+1}{x-1}$ **song song** với $d: y=-3x-1$?

A. 3.
B. 1.
C. 2.
D. 0.

Câu 20: [559278] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4-x^2+6$, biết tiếp tuyến **song song** với đường thẳng $d: y=6x-1$?

A. $y=-6x+1.$
B. $y=6x+10$
C. $y=-6x+10.$
D. $y=6x+6.$

Câu 21: [559279] Số tiếp tuyến của (C): $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ song song với $d: y=-x+2$?

A. 3.
B. 2.
C. 0.
D. 1.

Câu 22: [559280] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=3x+2$

A. $y=3x+101,\ y=3x-11.$

B. $y=3x+1,\ y=3x-\frac{29}{3}.$

C. $y=3x+2.$

D. $y=3x+10,\ y=3x-1.$

Câu 23: [559282] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$,biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=8x+2$

A. $y=8x+\frac{1}{3}, y=8x-\frac{7}{3}.$

B. $y=8x+\frac{2}{3}, y=8x.$

C. $y=\frac{-1}{8}x+\frac{11}{3}, y=\frac{-1}{8}x-\frac{97}{3}.$

D. $y=8x+\frac{11}{3}, y=8x-\frac{97}{3}.$

Câu 24: [559284] Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{4x-1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-2x+2016$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=2x+2 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=2x+3 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=-2x \\ y=-2x+2 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=-2x+2 \\ y=-2x+3 \end{array}\right.$.

Câu 25: [559285] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2$, biết tiếp tuyến **song song** với đường thẳng $d: y=6x-1$

A. $y=6x+6.$

B. $y=6x-4.$

C. $y=-6x+1.$

D. $y=-6x+10.$

Câu 26: [559286] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+5$ với hệ số góc k = 12 là

A. $y=12x+12,\ y=12x-15.$

B. $y=2x,\ y=2x+5.$

C. $y=12x,\ y=12x+5.$

D. $y=-2x,\ y=-2x+5.$

Câu 27: [559287] Số tiếp tuyến của (C): $y=x^4+x^2$ **song song** với $d: y=6x-111$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Câu 28: [559288] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$,biết tiếp tuyến **song song** với đường thẳng $d: y=-3x-1$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-3x+11 \\ y=-3x-1 \end{array}\right.$.

B. $y=-3x+11$.

C. $y=-3x+1$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=-3x+101 \\ y=-3x-1001 \end{array}\right.$.

Câu 29: [559289] Tìm M trên (H): $y=\frac{x+1}{x-3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với (d): y = x + 2007?

A. (1; –1) hoặc (2; –3).

B. (1; –1) hoặc (4;5) .

C. (5; 3) hoặc (1; –1) .

D. (5;3) hoặc (2; –3).

Câu 30: [559291] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$,biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=\frac{-x}{8}+2$

A. $y=\frac{-x}{8}+2$.

B. $y=8x+\frac{11}{3}, y=8x-\frac{97}{3}$.

C. $y=3x+10,\ y=3x-1$.

D. $y=3x+101,\ y=3x-11$.

Câu 31: [559292] Số tiếp tuyến của (C): $y=x^3-3x^2+1$ vuông góc với $d: y=\frac{-1}{9}x+2$

A. 1.

B. 0.

C. 2 .

D. 3.

Câu 32: [559294] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$,biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=x+2$

A. $y=x+\frac{1}{3},\ y=x+\frac{17}{3}$.

B. $y=-x+\frac{1}{3},\ y=x+\frac{17}{3}$.

C. $y=-x+\frac{11}{3}$.

D. $y=-x+\frac{1}{3},\ y=-x+\frac{17}{3}$.

Câu 33: [559295] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$,biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=\frac{-1}{9}x+2$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-9x+26 \\ y=-9x-236 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=9x+6 \\ y=9x-26 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=9x+16 \\ y=9x-216 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=-9x+6 \\ y=-9x-26 \end{array}\right.$.

Câu 34: [559296] Tìm điểm M có **hoành độ âm** trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

A. $M(-2;0)$.

B. $M\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$.

C. $M\left(-3;\frac{-16}{3}\right)$.

D. $M\left(-1;\frac{4}{3}\right)$.

Câu 35: [559297] Số tiếp tuyến của (C): $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ vuông góc với $d: y=x+2$

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Câu 36: [559299] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{2x+1}$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=3$ là:

A. $y=3x\pm1$.

B. $y=3x-1$ và $y=3x+5$.

C. $y=3x+1$ và $y=3x-5$.

D. $y=3x$ và $y=3x-1$.

Câu 37: [559300] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-4x-1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=8x-12$ là:

A. $y=8x+15$ hoặc $y=8x-17$.

B. $y=8x+10$.

C. $y=8x-12$.

D. Cả **B** và **C** đều đúng.

Câu 38: [559301] Có bao nhiêu phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2-3$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y+3=0$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 39: [559302] Cho hàm số $y=\sqrt{3x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x-2y+1=0$ là:

A. $3x-2y-2=0$.

B. $3x-2y+2=0$.

C. $3x-2y-1=0$.

D. $3x-2y-3=0$.

Câu 40: [559303] Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2+x\,(C)$ tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $y=mx+1$. Biết $k_1+k_2=4$, giá trị của thàm số m là:

A. $m=0$.
B. $m=2$.
C. $m=1$.
D. $m=4$.

Câu 41: [559304] Cho hàm số $y=x^3-2x+1\,(C)$. Đâu là một phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(2;1)$ là:

A. $y=x-1$.
B. $y=10x-19$.
C. $y=3x-5$.
D. Cả **A** và **B** đều đúng.

Câu 42: [559305] Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}\,(C)$. Đâu là một tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(5;2)$ là:

A. $y=x-3$.
B. $y=-x+7$.
C. $y=2x-8$.
D. $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

Câu 43: [559306] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{3x-2}$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-2;-1)$ là:

A. $y=\dfrac{1}{2}x-1$.
B. $y=\dfrac{3}{8}x-\dfrac{1}{4}$.
C. $y=\dfrac{1}{2}x+1$.
D. $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	02. C	03. D	04. B	05. D	06. A	07. D	08. D	09. D	10. B
11. A	12. A	13. C	14. C	15. C	16. A	17. C	18. A	19. B	20. B
21. D	22. B	23. D	24. C	25. B	26. A	27. C	28. B	29. C	30. B
31. C	32. C	33. B	34. A	35. A	36. B	37. A	38. D	39. C	40. B
41. A	42. B	43. D							

Chương II. MŨ VÀ LOGARIT

Chủ đề 1

LUỸ THỪA

[TV6077]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

➢ Luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Cho $a \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $a^n = \underbrace{a.a.a.....a}_{n \text{ thua so}}$.

➢ Luỹ thừa với số mũ nguyên âm, luỹ thừa với số mũ 0

Cho $a \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^0 = 1$.

➢ Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

➢ *Chú ý:* 0^0 và 0^{-n} $(n \in \mathbb{N}^*)$ không có nghĩa.

2. Căn bậc n.

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

Sô a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

Khi n lẻ ; $b \in \mathbb{R}$: Tồn tại duy nhất một căn bậc n của số b là $\sqrt[n]{b}$.

Khi n chẵn và $b < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của số b.

Khi n chẵn và $b = 0$ chi có duy nhất một căn bậc n của số b là $\sqrt[n]{0} = 0$

Khi n chẵn và $b > 0$ có 2 căn bậc n của số thực b là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỷ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỷ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4. Luỹ thừa với số mũ vô tỷ

Giả sử a là một số dương và α là một số vô tỷ và (r_n) là một dãy số hữu tỷ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \alpha$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^{\alpha}$.

5. Các tính chất

Cho hai số dương $a;b$ và $m;n \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có các công thức sau.

Nhóm công thức 1	**Nhóm công thức 2**
1. $a^m.a^n = a^{m+n}$	**1.** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\left(m=0 \Rightarrow \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}\right)$	**2.** $a^n.b^n = (ab)^n$, $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
3. $(a^m)^n = a^{m.n}$	**3.** $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

+) Tính chất 1: $\begin{cases} a^0 = a \\ a^1 = a \end{cases} \forall a \in \mathbb{R}$

+) Tính chất 2 (tính đồng biến, nghịch biến): $\left[\begin{array}{l} a>1: a^m > a^n \Leftrightarrow m > n \\ 0<a<1: a^m > a^n \Leftrightarrow m < n \end{array}\right.$

+) Tính chất 3 (so sánh lũy thừa khác cơ số): Với $a > b > 0$ thì $\left[\begin{array}{l} a^m > b^m \Leftrightarrow m > 0 \\ a^m < b^m \Leftrightarrow m < 0 \end{array}\right.$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Đơn giản biểu thức $A = \left(\sqrt{a}\right)^3.\left(\sqrt[3]{a}\right)^4.\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$ $(a>0)$ ta được :

A. $A = a^{\frac{49}{12}}$.

B. $A = a^{\frac{133}{60}}$.

C. $A = a^{\frac{23}{12}}$.

D. $A = a^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải:

Ta có: $A = \sqrt{a^3}.\sqrt[3]{a^4}.\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}} = a^{\frac{49}{12}}$.

Chọn A.

Cách 2 : Các em có thể cho $a=2$ và bấm $\log_2\left(\sqrt{2^3}.\sqrt[3]{2^4}.\sqrt[4]{2^5}\right)=\frac{49}{12}\Rightarrow A=a^{\frac{49}{12}}$ (tại sao lại làm được như vậy các em học phần Logarit rồi quay lại bài này nhé)

Ví dụ 2 :Đơn giản biểu thức $A=b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}$ $(b>0)$ ta được:

A. $A=b^2$.

B. $A=\sqrt{b^3}$.

C. $A=b$.

D. $A=\sqrt[3]{b^2}$.

Lời giải:

Ta có: $A=b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=b$

(Các em có thể cho $b=2$ và bấm máy $\log_2 2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{2}=1\Rightarrow A=b$).

Chọn C.

Ví dụ 3 : Đơn giản biểu thức $A=\frac{\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}$ $(a>0)$ ta được:

A. $A=a^2$.

B. $A=a^{\frac{5}{6}}$.

C. $A=a^{\frac{2}{3}}$.

D. $A=a$.

Lời giải:

Ta có: $A=\frac{\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=a$.

Chọn D.

Ví dụ 4 : Đơn giản biểu thức $A=\sqrt[3]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[12]{a^5}$ $(a>0)$ ta được :

A. $A=a^2$.

B. $A=a^{\frac{5}{6}}$.

C. $A=a^{\frac{2}{3}}$.

D. $A=a$.

Lời giải:

Ta có : $A=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}}=a$.

Chọn D.

Ví dụ 5 : Đơn giản biểu thức $A=\sqrt{a^{1+\sqrt{3}}}.\sqrt[3]{a^{2+\sqrt{3}}}.\sqrt[6]{a^{5+\sqrt{3}}}$ $(a>0)$ ta được:

A. $A=a^{2+2\sqrt{3}}$. **B.** $A=a^{2+\sqrt{3}}$.

C. $A=a^{3+\sqrt{3}}$. **D.** $A=a^{1+\sqrt{3}}$.

Lời giải:

Ta có : $A=a^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}.a^{\frac{2+\sqrt{3}}{3}}.a^{\frac{5+\sqrt{3}}{6}}=a^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{3}+\frac{5+\sqrt{3}}{6}}=a^{2+\sqrt{3}}$.

Chọn B.

Ví dụ 6 : Đơn giản biểu thức $A=a^{\pi}.\sqrt[3]{a^{\pi}\sqrt{a^{6}}}$ $(a>0)$ ta được:

A. $A=a^{\frac{2\pi+3}{2}}$. **B.** $A=a^{\frac{2\pi+3}{3}}$.

C. $A=a^{\frac{5\pi+3}{3}}$. **D.** $A=a^{\frac{4\pi+3}{3}}$.

Lời giải:

Ta có : $A=a^{\pi}.\sqrt[3]{a^{\pi}\sqrt{a^{6}}}=a^{\pi}.\sqrt[3]{a^{\pi}.a^{\frac{6}{2}}}=a^{\pi}.\sqrt[3]{a^{\pi+3}}=a^{\pi}.a^{\frac{\pi+3}{3}}=a^{\frac{4\pi+3}{3}}$.

Chọn D.

(Cách ra đề này nhằm hạn chế việc sử dụng CASIO)

Ví dụ 7 : Đơn giản biểu thức $A=\left(a^{2}\right)^{3+2\sqrt{2}}.a^{1-\sqrt{2}}.a^{-4-\sqrt{2}}$ $(a>0)$ ta được:

A. $A=a^{3-\sqrt{2}}$. **B.** $A=a^{3-2\sqrt{2}}$.

C. $A=a^{3+2\sqrt{2}}$. **D.** $A=a^{2-2\sqrt{2}}$.

Lời giải:

Ta có : $A=a^{6+4\sqrt{2}}.a^{1-\sqrt{2}}.a^{-4-\sqrt{2}}=a^{6+4\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}}=a^{3-2\sqrt{2}}$.

Chọn B.

Ví dụ 8 : Đơn giản biểu thức $A=\left(\sqrt{a^{4+4\sqrt{2}}}-a^{2\sqrt{2}}\right).a^{-1-2\sqrt{2}}$.

A. $A=a-\frac{1}{a}$. **B.** $A=a^{2}-\frac{1}{a}$.

C. $A=\sqrt{a}-\frac{1}{a}$. **D.** $A=a^{2}-a$.

Lời giải:

Ta có : $A=\left(\sqrt{a^{4+4\sqrt{2}}}-a^{2\sqrt{2}}\right).a^{-1-2\sqrt{2}}=\left(a^{\frac{4+4\sqrt{2}}{2}}-a^{2\sqrt{2}}\right).a^{-1-2\sqrt{2}}=a^{2+2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}}-a^{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}}$

$=a-a^{-1}=a-\frac{1}{a}$.

Chọn A.

Ví dụ 9: Đơn giản biểu thức $A=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\sqrt{a^3}}}$ ta được:

A. $A=a^{\frac{5}{6}}$.

B. $A=a^{\frac{5}{18}}$.

C. $A=a^{\frac{5}{9}}$.

D. $A=a^{\frac{5}{16}}$.

Lời giải:

$$A=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\sqrt{a^3}}}=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^{-2}.a^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{a^{\frac{-1}{2}}}}=\sqrt[3]{a.a^{\frac{-1}{6}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{5}{6}}}=a^{\frac{5}{18}}$$

Đương nhiên bài toán này ta có thể cho $a=2$ và bấm

$$\log_2\left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}\sqrt{2^3}}}\right)=\frac{5}{18}\Rightarrow A=a^{\frac{5}{18}}.$$

Chọn B.

Ví dụ 10: Đơn gian biểu thức $A=\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ $(a;b>0)$ ta được:

A. $A=a-b$.

B. $A=a$.

C. $A=\frac{1}{a}$.

D. $A=a+b$.

Lời giải:

Ta có: $A=\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2:\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}^2\right)=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2:\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\frac{1}{a}$.

Chọn C.

Với bài toán này các em vẫn có thể sử dụng CASIO bằng cách cho $a=4;b=9$ và thử 4 đáp án.

Thay $a=4;b=9$ ta được $A=\frac{1}{4}$.

Chọn C.

Ví dụ 11: Đơn giản biểu thức $A=\frac{ab^{-2}.\left(\sqrt{ab^2}\right)^3}{\sqrt[3]{ab^2}}$ $(a;b>0)$ ta được:

A. $A=a^{\frac{11}{6}}.b^{\frac{-1}{3}}$.

B. $A=a^{\frac{11}{6}}.b^{\frac{1}{3}}$.

C. $A=a^{\frac{5}{6}}.b^{\frac{-1}{3}}$.

D. $A=a^{\frac{5}{6}}.b^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải:

Ta có : $A=\dfrac{ab^{-2}.\left(ab^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(ab^2\right)^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{ab^{-2}.a^{\frac{3}{2}}.b^3}{a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{2}}.b}{a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{4}{3}}}=a^{\frac{11}{6}}.b^{\frac{-1}{3}}$.

Chọn A.

Ví dụ 12 : Đơn giản biểu thức $A=\left(\dfrac{a^{\sqrt{5}}}{b^{\sqrt{5}-2}}\right)^{\sqrt{5}+2}.\dfrac{a^{-2-\sqrt{5}}}{b^{-1}}$ $(a;b>0)$ ta được:

A. $A=a^{3+2\sqrt{5}}$.
B. $A=a^{3+2\sqrt{5}}b^2$.
C. $A=a^{3+\sqrt{5}}b^2$.
D. $a^{3+\sqrt{5}}$.

Lời giải:

Ta có : $A=\dfrac{\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}+2}}{\left(b^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}}.\dfrac{b}{a^{2+\sqrt{5}}}=\dfrac{a^{5+2\sqrt{5}}.b}{b.a^{2+\sqrt{5}}}=a^{3+\sqrt{5}}$.

Chọn D.

Ví dụ13 : Đơn giản biểu thức : $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ $(a;b>0)$ ta được

A. $A=\sqrt{ab}$.
B. $A=\sqrt[3]{ab}$.
C. $A=\sqrt[6]{ab}$.
D. $A=\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}$.

Lời giải:

Ta có : $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\sqrt[3]{ab}$.

Chọn B.

Ví dụ 14 : Đơn giản biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{b^{\frac{-1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{-1}{2}}}$ $(a;b>0)$ ta được:

A. $A=a+b$.
B. $A=a-b$.
C. $A=a+b+2$.
C. $A=a-b+2$.

Lời giải:

Ta có : $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{1}{3}}\left(1-a\right)}-\dfrac{b^{\frac{-1}{2}}\left(1-b^2\right)}{b^{\frac{-1}{2}}\left(b+1\right)}=1+a-\left(1-b\right)=a+b$.

Chọn A.

Ví dụ 15 : Đơn giản biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{-1}{2}}+a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{-1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{9}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$ ta được:

A. $A=a^2+b$. **B.** $A=a^2+a-b$.

C. $A=a^2-a-b$. **C.** $A=-\left(a+b\right)$.

Lời giải:

Ta có : $A=\dfrac{a^{\frac{-1}{2}}\left(1+a^3\right)}{a^{\frac{-1}{2}}\left(1+a\right)}+\dfrac{b^{\frac{1}{4}}\left(1-b^2\right)}{b^{\frac{1}{4}}\left(b-1\right)}=\dfrac{a^3+1}{a+1}-\dfrac{b^2-1}{b-1}=a^2-a+1-\left(b+1\right)=a^2-a-b$.

Chọn C.

Ví dụ 16 : Đơn giản biểu thức $A=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}\right)}$ $\left(a;b>0;a\neq b\right)$ ta được:

A. $A=\dfrac{a+b}{a-b}$. **B.** $A=\dfrac{a-b}{a+b}$.

C. $A=1$. **D.** $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a-b}$.

Lời giải:

Ta có: $A=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\dfrac{a+b}{a-b}$.

họn A.

dụ 17 : Cho $2^x=3$. Tính giá trị của biểu thức $A=4^x+3.2^{-x}-1$

A. $A=8$. **B.** $A=9$.

C. $A=11$. **D.** $A=17$.

Lời giải:

Ta có: $A=\left(2^x\right)^2+\frac{3}{2^x}-1=9+1-1=9$.

Chọn B.

Ví dụ 18 : Cho $3^x=2$. Tính giá trị của biểu thức $A=3^{x+1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}+9^{x+1}$

A. $A=39$. **B.** $A=25$.

C. $A=\frac{81}{2}$. **D.** $A=\frac{45}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $A=3^{x+1}.\frac{1}{3^{2x-1}}+9^x.9=3^{-x+2}+9.\left(3^x\right)^2=\frac{9}{3^x}+9.\left(3^x\right)^2=\frac{81}{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 19 : Biết rằng $2^x=5$. Tính giá trị của biểu thức $A=\left(\frac{3}{2}\right)^x.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x}+4^{-x+2}$

A. $A=\frac{28}{5}$. **B.** $A=\frac{31}{3}$.

C. $A=6$. **D.** $A=\frac{141}{25}$.

Lời giải:

Ta có: $A=\left(\frac{3}{2}\right)^x.\left(\frac{4}{3}\right)^x+\frac{16}{4^x}=\left(\frac{3}{2}.\frac{4}{3}\right)^x+\frac{16}{\left(2^x\right)^2}=2^x+\frac{16}{25}=\frac{141}{25}$.

Chọn D.

Ví dụ 20 : Cho $2^x=a;3^x=b$. Hãy biểu diễn $A=24^x+6^x+9^x$ theo a và b.

A. $A=a^3b+ab+b^2$. **B.** $A=a^2b^2+ab+b^2$.

C. $A=ab^3+ab+a^2$. **D.** $A=a^3+ab+b^2$.

Lời giải:

Ta có : $A=\left(2^3.3\right)^x+\left(2.3\right)^x+\left(3^2\right)^x=2^{3x}.3^x+2^x.3^x+3^{2x}=a^3b+ab+b^2$.

Chọn A.

Ví dụ 21 : Cho $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=3$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2x}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x$

A. $A=18$. **B.** $A=0$.

C. $A=\frac{82}{9}$. **D.** $A=\frac{28}{9}$.

Lời giải:

Ta có : $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1;\left(3+2\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

Do đó $A=\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}\right]^{2x}+\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]^x=\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}=3^{-2}+3^2=\frac{82}{9}$.

Chọn C.

Ví dụ 22: Cho $5^x=4$ hãy tính giá trị của biểu thức $T=25^x-5^{2-x}+5^{\frac{x}{2}}$.

A. $T=14$.

B. $T=\frac{47}{4}$.

C. $T=118$.

D. $T=6$.

Lời giải:

Ta có: $T=\left(5^x\right)^2-\frac{25}{5^x}+\sqrt{5^x}=16-\frac{25}{4}+2=\frac{47}{4}$.

Chọn B.

Ví dụ 23 : Cho $a=2^x;b=5^x$. Hãy biểu diễn $T=20^x+50^x$ theo a và b.

A. $T=ab\left(a+b\right)$.

B. $T=\frac{ab}{a+b}$.

C. $T=a^2+ab^2$.

D. $T=ab+a^2b$.

Lời giải:

Ta có $T=\left(2^2.5\right)^x+\left(5^2.2\right)^x=2^{2x}.5^x+5^{2x}.2^x=a^2b+ab^2=ab\left(a+b\right)$.

Chọn A.

Ví dụ 24 : Cho $a^{-\sqrt{3}}>a^{-\sqrt{2}}$ và $a^{\pi}>b^{\pi}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $1>a>b>0$.

B. $1>b>a>0$.

C. $a>b>1$.

D. $b>a>1$.

Lời giải:

Ta có : $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$ nên $a^{-\sqrt{3}}>a^{-\sqrt{2}}\Leftrightarrow 0<a<1$

Mặt khác $a^{\pi}>b^{\pi}\Leftrightarrow a>b$. Do vậy $1>a>b>0$.

Chọn A.

Ví dụ 25: Cho $\left(a-1\right)^{\frac{-3}{4}}>\left(a-1\right)^{\frac{-4}{5}}$ và $\sqrt{b^3}>\sqrt[3]{b^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $a;b>1$.

B. $0<a<2;b>1$.

C. $0<a<2;b<1$.

D. $a>2;b>1$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{-3}{4} > \frac{-4}{5}$ nên $(a-1)^{\frac{-3}{4}} > (a-1)^{\frac{-4}{5}} \Leftrightarrow a-1>1 \Leftrightarrow a>2$

Mặt khác $\sqrt{b^3} > \sqrt[3]{b^2} \Leftrightarrow b^{\frac{3}{2}} > b^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow b>1$

Do đó $a>2; b>1$.

Chọn D.

Ví dụ 26: Khẳng định nào dưới đây là **đúng.**

A. $(x^2+1)^{2017} > (x^2+1)^{2016}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. **B.** $(\sqrt{2}-1)^5 > (\sqrt{2}-1)^4$.

C. $(\sqrt{2}+1)^{x^2+1} > (\sqrt{2}-1)^{1-x^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. **D.** Cả **A** và **C** đều đúng.

Lời giải:

A sai vì khi $x=0$ không thoã mãn.

C đúng vì $(\sqrt{2}-1)^{1-x^2} = \left[(\sqrt{2}+1)^{-1}\right]^{1-x^2} = (\sqrt{2}+1)^{x^2-1}$ nên $(\sqrt{2}+1)^{x^2+1} > (\sqrt{2}-1)^{1-x^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Chọn C.

Ví dụ 27: Cho $(a-2)^{\sqrt{2}} > \sqrt{(a-2)^3}$ và $(a-1)^{-\sqrt{2}} > (b-1)^{-\sqrt{2}}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. $2<a<b<3$. **B.** $2<b<a<3$.

C. $b>a>3$. **D.** $a>b>3$.

Lời giải:

Ta có: $(a-2)^{\sqrt{2}} > \sqrt{(a-2)^3} \Leftrightarrow (a-2)^{\sqrt{2}} > (a-2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 0<a-2<1$ (do $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$)

Suy ra $2<a<3$. Mặt khác $(a-1)^{-\sqrt{2}} > (b-1)^{-\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a-1)^{\sqrt{2}} < (b-1)^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a-1<b-1 \Leftrightarrow a<b$

Do đó $2<a<b<3$.

Chọn A.

Ví dụ 28: Đơn giản biểu thức $T = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ ta được :

A. $T=\sqrt[4]{a}$. **B.** $\sqrt[4]{b}$.

C. $T=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$. **D.** $T=0$.

Lời giải:

Ta có: $T = \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}$.

Chọn B.

Chủ đề 2

HÀM SỐ LŨY THỪA

[TV 6078]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Định nghĩa hàm số lũy thừa

+ Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

+ Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α nguyên dương, xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ xác định với $\forall x \neq 0$.

+ Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α không nguyên, có tập xác định là tập các số thực dương.

Lưu ý. Hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của nó.

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$.

Do đó, hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Chẳng hạn, hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc ba, xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ còn hàm số lũy thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ xác định với $\forall x > 0$.

3. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

+ Hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha . x^{\alpha - 1}$.

+ Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J thì $y = u^{\alpha}(x)$ cũng có đạo hàm trên J và $\left(u^{\alpha}(x)\right)' = \alpha . u^{\alpha - 1}(x) u'(x)$.

Chú ý. Ta cần lưu ý hai kết quả sau:

+ Với $\forall x > 0$ nếu n chẵn, với $\forall x \neq 0$ nếu n lẻ thì $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

+ Nếu $u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J và $u(x) > 0$ với $\forall x \in J$ khi n chẵn, $u(x) \neq 0$ với $\forall x \in J$ khi n lẻ thì $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$ (với $\forall x \in J$).

4. Vài nét về sự biến thiên và đồ thị của hàm số lũy thừa

Trong mục này, ta chỉ xét các hàm số lũy thừa dạng $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \neq 0$ và với tập xác định là $(0;+\infty)$.

+ Hàm số $y = x^{\alpha}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nếu $\alpha > 0$.

+ Hàm số $y = x^{\alpha}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nếu $\alpha < 0$.

+ Đồ thị hàm số $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $(1;1)$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{100}$.

A. $D = [1;2]$.

B. $D = [2;+\infty) \cup (-\infty;1]$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = (1;2)$.

Lời giải

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α nguyên dương, xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{100}$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn C

Ví dụ 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^3 - 8)^{-100}$.

A. $D = (2;+\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

C. $D = (-\infty;2)$.

D. $D = (-2;+\infty) \cup (-\infty;2)$.

Lời giải

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α nguyên âm xác định với $\forall x \neq 0$.

Hàm số $y = (x^3 - 8)^{-100}$ xác định $\Leftrightarrow x^3 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq 8 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Chọn B

Ví dụ 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^3 - 8)^{0}$.

A. $D = (2;+\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

C. $D = (-\infty;2)$.

D. $D = (-2;+\infty) \cup (-\infty;2)$.

Lời giải

Hàm số $y=x^{\alpha}$, với $\alpha=0$ xác định với $\forall x\neq 0$.

Hàm số $y=\left(x^3-8\right)^0$ xác định $\Leftrightarrow x^3-8\neq 0\Leftrightarrow x^3\neq 8\Leftrightarrow x\neq 2$.

Chọn B

Ví dụ 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-6x+8\right)^{\frac{1}{100}}$.

A. $D=\mathbb{R}$.

B. $D=[4;+\infty)\cup(-\infty;2]$.

C. $D=(4;+\infty)\cup(-\infty;2)$.

D. $D=[2;4]$.

Lời giải

Hàm số $y=x^{\alpha}$, với α không nguyên, có tập xác định là tập các số thực dương.

Hàm số $y=\left(x^2-6x+8\right)^{\frac{1}{100}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-6x+8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<2\end{array}\right.\Rightarrow$ Đáp án đúng là C.

Chọn C.

Ví dụ 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-6x+8\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $D=\mathbb{R}$.

B. $D=[4;+\infty)\cup(-\infty;2]$.

C. $D=(4;+\infty)\cup(-\infty;2)$.

D. $D=[2;4]$.

Lời giải

Hàm số $y=x^{\alpha}$, với α không nguyên, có tập xác định là tập các số thực dương.

Hàm số $y=\left(x^2-6x+8\right)^{\sqrt{2}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-6x+8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<2\end{array}\right.\Rightarrow$ Đáp án đúng là C.

Chọn C.

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^4+1\right)^{10}$.

A. $y'=40x^3\left(x^4+1\right)^9$.

B. $y'=10\left(x^4+1\right)^9$.

C. $y'=\dfrac{\left(x^4+1\right)^{11}}{11}$.

D. $y'=\dfrac{\left(x^4+1\right)^{11}}{44x^3}$.

Lời giải

Ta có $y'=10\left(x^4+1\right)^{10-1}.4x^3=40x^3\left(x^4+1\right)^9$.

Chọn A.

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2-4x+10\right)^{\frac{1}{4}}$.

A. $y'=\left(x^2-4x+10\right)^{\frac{1}{4}}$.

B. $y=(2x-4)\left(x^2-4x+10\right)^{\frac{1}{4}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{4\left(x^2-4x+10\right)^{\frac{3}{4}}}$.

D. $y'=\dfrac{x-2}{2\left(x^2-4x+10\right)^{\frac{3}{4}}}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{1}{4}\left(x^2-4x+10\right)^{\frac{1}{4}-1}.(2x-4)=\dfrac{1}{2}(x-2)\left(x^2-4x+10\right)^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{x-2}{2\left(x^2-4x+10\right)^{\frac{3}{4}}}$.

Chọn D.

Ví dụ 8. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{3x^2-2x+1}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

B. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

C. $y'=\dfrac{6x-2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

D. $y'=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

Lời giải

Ta có $3x^2-2x+1=\left(x\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\dfrac{2}{3}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=\left(3x^2-2x+1\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\dfrac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x+1}}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

Chọn D

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của hàm số $y'=\left(x^4+1\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $y'=\sqrt{2}\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$.

B. $y'=\dfrac{\left(x^4+1\right)^{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}$.

C. $y'=4\sqrt{2}x^3\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$.

D. $y'=\dfrac{1}{4x^3}.\dfrac{\left(x^4+1\right)^{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ta có $y'=\sqrt{2}.\left(x^4+1\right)^{\sqrt{2}-1}.4x^3=4\sqrt{2}x^3\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$.

Chọn C

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y'=\dfrac{1}{y^3\left(x^2+2\right)^2}$.

B. $y'=\dfrac{x}{2y^3\left(x^2+2\right)^2}$.

C. $y'=-\dfrac{1}{y^3\left(x^2+2\right)^2}$.

D. $y'=-\dfrac{x}{2y^3\left(x^2+2\right)^2}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{x^2+1}{x^2+2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow y=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(1-\dfrac{1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{4}-1}.\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}.2x=\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{-\frac{3}{4}}.\frac{x}{2\left(x^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{3}{4}}}.\frac{x}{2\left(x^2+2\right)^2}=\frac{1}{y^3}.\frac{x}{2\left(x^2+2\right)^2}=\frac{x}{2y^3\left(x^2+2\right)^2}.$$

Chọn B.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=\sqrt[3]{\ln^2\left(x^2+1\right)+2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y'=\dfrac{4\ln\left(x^2+1\right)}{3y^2\left(x^2+1\right)}$.

B. $y'=\dfrac{2x\ln\left(x^2+1\right)}{3y^2\left(x^2+1\right)}$.

C. $y'=\dfrac{4x\ln\left(x^2+1\right)}{3y^2\left(x^2+1\right)}$.

D. $y'=\dfrac{2\ln\left(x^2+1\right)}{3y^2\left(x^2+1\right)}$.

Lời giải

Ta có $\ln^2\left(x^2+1\right)+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow y=\left(\ln^2\left(x^2+1\right)+2\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{3}\left(\ln^2\left(x^2+1\right)+2\right)^{\frac{1}{3}-1}.2\ln\left(x^2+1\right).\frac{2x}{x^2+1}=\frac{4}{3}.\left(\ln^2\left(x^2+1\right)+2\right)^{-\frac{2}{3}}.\frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$$

$$=\frac{4}{3}.\frac{1}{\left(\ln^2\left(x^2+1\right)+2\right)^{\frac{2}{3}}}.\frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{4}{3}.\frac{1}{y^2}.\frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{4x\ln\left(x^2+1\right)}{3y^2\left(x^2+1\right)}.$$

Chọn C.

Chủ đề 3

LOGARIT

[TV 6079]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Định nghĩa

Cho 2 số dương a,b với $a \neq 1$. Số α thoã mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là logarit cơ số a của b kí hiệu là $\log_a b$. Như vậy $a^{\alpha} = b \Leftrightarrow \alpha = \log_a b$.

Ví dụ: Tính các biểu thức sau: $\log_2 4$, $\log_2 32; \log_{\sqrt{2}}\left(4\sqrt{2}\right); \log_3 27; \log_{\sqrt{3}} 9$

Để tính biểu thức $\log_a b = ?$ ta đi trả lời câu hỏi a mũ bao nhiêu thì bằng b. ($a^{?} = b$)

Do vậy $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$; $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$... Các bạn tính các giá trị còn lại nhé !

Chú ý: +) Khi $a = 10$ là cơ số thập phân ta ký hiệu: $\log x$ ($\log x$ được hiểu là $\log_{10} x$). Đọc là Lốc x.

+) Khi $a = e \approx 2,712818$ là cơ số tự nhiên ta ký hiệu: $\ln x$. Đọc là len x hoặc log nepe của x ($\ln x$ được hiểu là $\ln_e x$).

2. Các công thức Logarit cần nhớ.

Công thức 1: $\log_a a^x = x, \left(\forall x \in R; 1 \neq a > 0\right)$.

Công thức 2: $a^{\log_a x} = x\left(x > 0; 1 \neq a > 0\right)$.

Chứng minh: Ta có: $\log_a x = \log_a x \Leftrightarrow x = a^{\log_a x}$.

Công thức 3: +) $\log_a x + \log_a y = \log_a\left(xy\right)$

+) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y} \quad \left(x; y > 0; 1 \neq a > 0\right)$

Chứng minh : Ta có :

$x = a^{\log_a x}; y = a^{\log_a y} \Rightarrow xy = a^{\log_a x + \log_a y} \Leftrightarrow \log_a\left(xy\right) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y}$

$\Leftrightarrow \log_a\left(xy\right) = \log_a x + \log_a y$.

Công thức 4: $\log_a b^n = n.\log_a b$;

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b \ \left(a,b>0; a\neq 1\right)$$

Chứng minh : 1. Ta có : $\log_a b^n = \log_a\left(b.b.b...b\right) = \log_a b + \log_a b + ... + \log_a b = n\log_a b$

Chứng minh : 2. Đặt $\log_{a^n} b = y \Rightarrow b = \left(a^n\right)^y = a^{ny} \Leftrightarrow \log_a b = \log_a a^{ny}$

$\Leftrightarrow \log_a b = ny = n.\log_{a^n} b \Leftrightarrow \log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$.

Công thức 5: $\log_a b.\log_b c = \log_a c \ \left(a;b;c>0; a;b\neq 1\right)$ (**Nhớ:** giống vecto $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$)

Chứng minh : Ta có : $\log_a b.\log_b c = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$ (vì $b^{\log_b c} = c$ theo công thức 2)

Hệ quả: Khi cho $a = c$ ta có: $\log_c b.\log_b c = \log_c c = 1 \Leftrightarrow \log_c b = \frac{1}{\log_b c}$.

3. Các tính chất cần nhớ.

Biểu thức logarit tồn tại khi cơ số $a>0$ và $a\neq 1$, biểu thức dưới dấu logarit là $x>0$

$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1 \ \left(1\neq a>0\right)$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. CÔNG THỨC VỀ LOGARIT

Ví dụ 1: Trong các số a thoả mãn điều kiện dưới đây. Số nào lớn hơn 1.

A. $\log_2 a = -2$.

B. $\log_3 a = \pi$.

C. $\log_4 a^2 = -1$.

D. $\log_3 a = -0,3$.

Lời giải:

Ta có $\log_3 a = \pi \Rightarrow a = 3^\pi > 1$.

Chọn B.

Ví dụ 2 : Trong các số a thoả mãn điều kiện dưới đây. Số nào nhỏ hơn 1.

A. $\log_{\frac{1}{3}} a = -2$.

B. $\log_a 5 = 2$.

C. $\log_3 5 = a$.

D. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a = 2$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a = 2 \Leftrightarrow a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Giá trị của biểu thức $A=\log_a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^3}}}$ $(1\neq a>0)$ là:

A. $A=\frac{4}{3}$. **B.** $A=\frac{3}{4}$.

C. $A=\frac{8}{9}$. **D.** $A=\frac{9}{8}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^3}}}=\log_a\sqrt{a\sqrt{a.a^{\frac{3}{2}}}}=\log_a\sqrt{a.\sqrt{a^{\frac{5}{2}}}}=\log_a\sqrt{a.a^{\frac{5}{4}}}=\log_a.\sqrt{a^{\frac{9}{4}}}=\log_a a^{\frac{9}{8}}=\frac{9}{8}$.

Cách 2 : Cho $a=2$. Nhập vào máy tính $\log_2\left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2^3}}}\right)=$ ta được kết quả bằng $\frac{9}{8}$.

Chọn D.

Ví dụ 4 : Giá trị của biểu thức $A=\log_a\frac{\sqrt{a^3}}{a\sqrt[4]{a}}$ $(1\neq a>0)$ là:

A. $A=\frac{1}{4}$. **B.** $A=\frac{1}{3}$.

C. $A=\frac{1}{2}$. **D.** $A=\frac{3}{4}$.

Lời giải:

Ta có : $\log_a\frac{\sqrt{a^3}}{a\sqrt[4]{a}}=\log_a\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a.a^{\frac{1}{4}}}=\log_a a^{\frac{3}{2}-\left(1+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4}$.

Cách 2 : Cho $a=2$ nhập vào máy tính $\log_2\left(\frac{\sqrt{2^3}}{2\sqrt[4]{2}}\right)=$ ta được $A=\frac{1}{4}$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Giá trị của biểu thức $A=\log_a\left(a^3.\sqrt{a}.\sqrt[5]{a}\right)$ $(1\neq a>0)$ là:

A. $A=\frac{17}{5}$. **B.** $A=\frac{37}{10}$.

C. $A=\frac{21}{5}$. **D.** $A=\frac{39}{10}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_a\left(a^3.\sqrt{a}.\sqrt[5]{a}\right)=\log_a\left(a^3.a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{5}}\right)=\log_a a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}=\log_a a^{\frac{37}{10}}=\frac{37}{10}$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Cho $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x^{a}$ và $\log_y\sqrt{y\sqrt{y^3}}=b$ (với $x;y>0;y\neq 1$). Vậy $A=a+b$ bằng.

A. $A=\frac{9}{4}$.

B. $A=\frac{3}{2}$.

C. $A=\frac{15}{8}$.

D. $A=\frac{17}{8}$.

Lời giải:

Ta có : $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}=x^{\frac{7}{8}}\Rightarrow a=\frac{7}{8}$.

(Các em có thể bấm $\log_2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=$).

Lại có: $\log_y\sqrt{y\sqrt{y^3}}=\log_y\sqrt{y.y^{\frac{3}{2}}}=\log_y\sqrt{y^{\frac{5}{2}}}=\log_y y^{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}=b\Rightarrow A=\frac{17}{8}$.

Chọn D.

Ví dụ 7: Cho $\sqrt{x.\sqrt{x.\sqrt[3]{x^4}}}=x^{m}$ và $\log_y\sqrt[3]{y^2\sqrt{y}}=n$ (với $x;y>0;y\neq 1$). Vậy $A=m+n$ bằng:

A. $A=\frac{23}{12}$.

B. $A=\frac{7}{4}$.

C. $A=3$.

D. $A=\frac{7}{3}$.

Lời giải:

Ta có $\sqrt{x.\sqrt{x.\sqrt[3]{x^4}}}=\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{4}{3}}}}=\sqrt{x.\sqrt{x^{\frac{7}{3}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{7}{6}}}=\sqrt{x^{\frac{13}{6}}}=x^{\frac{13}{12}}\Rightarrow m=\frac{13}{12}$

Lại có $\log_y\sqrt[3]{y^2\sqrt{y}}=\log_y\sqrt[3]{y^2.y^{\frac{1}{2}}}=\log_y\sqrt[3]{y^{\frac{5}{2}}}=\log_y y^{\frac{5}{6}}=\frac{5}{6}=n$

Do đó $A=m+n=\frac{23}{12}$.

Chọn A.

Ví dụ 8: Thu gọn biểu thức $A=\left(a^3\sqrt{a}\right)^{\log_a b}+\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^{\log_b a}$ $(1\neq a;b>0)$ ta được :

A. $A=\sqrt{a^7}+\sqrt[3]{b^2}$.

B. $A=\sqrt{a^3}+\sqrt[7]{b^2}$.

C. $A=\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{b^7}$.

D. $A=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{b^7}$.

Lời giải:

Ta có $A=\left(a^3.a^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_a b}+\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\log_b a}=\left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\log_a b}+\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\log_b a}=b^{\log_a a^{\frac{7}{2}}}+a^{\log_b b^{\frac{2}{3}}}=b^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{2}{3}}$.

Chọn D.

Ví dụ 9 : Thu gọn biểu thức $A=\left(a\sqrt{a^3}\right)^{\log_a b^2}+\left(b\sqrt{b}\right)^{\log_b a^2}$ $(1\neq a;b>0)$ ta được:

A. $A=a^5+b^3$. **B.** $A=a^3+b^5$.

C. $A=a^3+b^3$. **D.** $A=a^5+b^5$.

Lời giải:

Ta có : $A=\left(a.a^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_a b^2}+\left(b.b^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_b a^2}=\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\log_a b^2}+\left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_b a^2}=\left(b^2\right)^{\log_a a^{\frac{5}{2}}}+\left(a^2\right)^{\log_b b^{\frac{3}{2}}}$

$=\left(b^2\right)^{\frac{5}{2}}+\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}=b^5+a^3$.

Chọn B.

Ví dụ 10 : Thu gọn biểu thức $A=\left(a.\sqrt[4]{a}\right)^{\log_a\sqrt{b}}+\left(b.\sqrt[3]{b}\right)^{\log_b a}$ $(1\neq a;b>0)$ ta được:

A. $A=a^{\frac{5}{8}}+b^{\frac{4}{3}}$. **B.** $A=a^{\frac{5}{4}}+b^{\frac{4}{3}}$.

C. $A=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{8}}$. **D.** $A=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải:

Ta có : $A=\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\log_a\sqrt{b}}+\left(b^{\frac{4}{3}}\right)^{\log_b a}=\left(\sqrt{b}\right)^{\log_a a^{\frac{5}{4}}}+a^{\log_b b^{\frac{4}{3}}}=\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{4}}+a^{\frac{4}{3}}=b^{\frac{5}{8}}+a^{\frac{4}{3}}$.

Chọn C.

Ví dụ 11:[Trích đề thi THPT QG năm 2017]

Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right)$

A. $P=108$. **B.** $P=13$.

C. $P=31$. **D.** $P=30$.

Lời giải:

Ta có $P=\log_a\left(b^2c^3\right)=2\log_a b+3\log_a c=13$.

Chọn B.

Ví dụ 12: Cho $\log_3 x = 4\log_3 a + 2\log_3 b$ $(a;b>0)$. Khi đó

A. $x = 8ab$.

B. $x = a^4 + b^2$.

C. $x = \sqrt{a^2 b}$.

D. $x = a^4 b^2$.

Lời giải:

$\log_3 x = 4\log_3 a + 2\log_3 b = \log_3 a^4 + \log_3 b^2 = \log_3 a^4 b^2$

Do vậy $x = a^4 b^2$.

Chọn D.

Ví dụ 13: Cho $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{a\sqrt{a}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{b}{\sqrt{b\sqrt{b}}}$ $(a;b>0)$. Khi đó:

A. $x = \sqrt[4]{a^3 b}$.

B. $x = \sqrt[4]{ab^3}$.

C. $x = \sqrt[4]{a^3 b^3}$.

D. $x = \sqrt[4]{ab}$.

Lời giải:

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{a\sqrt{a}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{b}{\sqrt{b\sqrt{b}}} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{b}{\sqrt{b^{\frac{3}{2}}}} = \log_{\frac{1}{3}} a^{\frac{3}{4}} + \log_{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$$

Do đó $x = a^{\frac{3}{4}}.b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a^3 b}$.

Chọn A.

Ví dụ 14: Cho $\log_4 x = 2\log_2 \sqrt[3]{a^2} + 3\log_2 \frac{1}{b^2\sqrt{b}}$ $(a;b>0)$. Khi đó :

A. $x = 6.a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{-5}{2}}$.

B. $x = a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{-15}{2}}$.

C. $x = a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{15}{2}}$.

D. $x = -10ab$.

Lời giải:

Ta có: $\log_4 x = 2\log_2 \sqrt[3]{a^2} + 3\log_2 \frac{1}{b^2\sqrt{b}} = 2\log_2 a^{\frac{2}{3}} + 3\log_2 b^{\frac{-5}{2}} = \log_2 a^{\frac{4}{3}} + \log_2 b^{\frac{-15}{2}}$

Do đó $x = a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{-15}{2}}$.

Chọn B.

Ví dụ 15: Rút gọn biểu thức $A=\log_2\sqrt{a}+\log_4\frac{1}{a^2}-\log_{\sqrt{2}}a^8\ (a>0)$ ta được

A. $A=\frac{33}{2}\log_2 a$.

B. $A=-\frac{33}{2}\log_2 a$.

C. $A=33\log_2 a$.

D. $A=\frac{-1}{2}\log_2 a$.

Lời giải:

Ta có: $A=\log_2\sqrt{a}+\log_4\frac{1}{a^2}-\log_{\sqrt{2}}a^8=\log_2 a^{\frac{1}{2}}+\log_{2^2}a^{-2}-\log_{2^{\frac{1}{2}}}a^8$

$A=\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2 a-16\log_2 a=\frac{-33}{2}\log_2 a$.

Chọn B.

Ví dụ 16: Rút gọn biểu thức $A=\log_4 a-\log_8 a+\log_{16}a^2\ (a>0)$ ta được:

A. $A=\log_2 a$.

B. $A=\frac{13}{6}\log_2 a$.

C. $A=\frac{3}{2}\log_2 a$.

D. $A=\frac{2}{3}\log_2 a$.

Lời giải:

Ta có: $A=\log_{2^2}a-\log_{2^3}a+\log_{2^4}a^2=\frac{1}{2}\log_2 a-\frac{1}{3}\log_2 a+\frac{2}{4}\log_2 a=\frac{2}{3}\log_2 a$.

Chọn D.

Ví dụ 17 [ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2016]:

Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}x^3+\log_4 x$.

A. $A=-\sqrt{2}$.

B. $A=-2\sqrt{2}$.

C. $A=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

D. $A=\frac{-\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải:

Ta có $A=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}x^3+\log_4 x=2\log_2 x-3\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x=-\frac{1}{2}\log_2 x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 18: Cho $\log_x 2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_4 x - 2\log_2 \sqrt{x}$.

A. $A = 6$.

B. $A = \frac{1}{6}$.

C. $A = \frac{-1}{6}$.

D. $A = -6$.

Lời giải:

Ta có: $\log_x 2 = 3 \Rightarrow \frac{1}{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{3}$.

Mặt khác $A = \log_4 x - 2\log_2 \sqrt{x} = \log_{2^2} x - 2\log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x = \frac{-1}{2}\log_2 x = \frac{-1}{6}$.

Chọn C.

Ví dụ 19: Rút gọn biểu thức $A = \log_8 x\sqrt{x} - \log_{\frac{1}{4}} x^2$ $(x > 0)$ ta được:

A. $A = \frac{3}{2}\log_2 x$.

B. $A = -\frac{1}{2}\log_2 x$.

C. $A = 2\log_2 x$.

D. $A = \frac{2}{3}\log_2 x$.

Lời giải:

$A = \log_{2^3} x^{\frac{3}{2}} - \log_{2^{-2}} x^2 = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}\log_2 x + \log_2 x = \frac{3}{2}\log_2 x$.

Chọn A.

Ví dụ 20: Rút gọn biểu thức $A = \log_3 x.\log_2 3 + \log_5 x.\log_4 5$ $(x > 0)$ ta được:

A. $A = \frac{3}{2}\log_2 x$.

B. $A = -\frac{1}{2}\log_2 x$.

C. $A = 2\log_2 x$.

D. $A = \frac{2}{3}\log_2 x$.

Lời giải:

Ta có: $A = \log_2 3.\log_3 x + \log_4 5.\log_5 x = \log_2 x + \log_4 x = \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{3}{2}\log_2 x$.

Chọn A.

Ví dụ 21: Cho $\log_2 x = \sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $B = \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{8}} x + \log_{\frac{1}{16}} x$

A. $B = \sqrt{3}$.

B. $B = \frac{-13\sqrt{3}}{12}$.

C. $9\sqrt{3}$.

D. $-9\sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có:

$$B=\log_{2^{-2}}x+\log_{2^{-3}}x+\log_{2^{-4}}x=-\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{3}\log_2 x-\frac{1}{4}\log_2 x=\frac{-13}{12}\log_2 x=\frac{-13\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn B.

Ví dụ 22: Cho $\log_3 x=1+\sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức: $A=\log_3 x^3+\log_{\frac{1}{3}}x+\log_9 x^2$.

A. $A=2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

B. $A=1+\sqrt{2}$.

C. $A=-2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

D. $A=3\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải:

Ta có: $A=3\log_3 x-\log_3 x+\log_3 x=3\log_3 x=3\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Chọn D.

Ví dụ 23 : Tính giá trị của biểu thức $P=\log_a\frac{1}{b^3}.\log_{\sqrt{b}}a^3\ \left(1\neq a;b>0\right)$.

A. -18.

B. $\frac{-1}{2}$.

C. 18.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $P=\log_a b^{-3}.\log_{b^{\frac{1}{2}}}a^3=-3\log_a b.6\log_b a=-18$.

Chọn A.

Ví dụ 24 : Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}b^3.\log_{\sqrt{b}}a\ \left(1\neq a,b>0\right)$

A. 3.

B. 12.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải:

Ta có: $P=\log_{a^{\frac{1}{2}}}b^3.\log_{b^{\frac{1}{2}}}a=6\log_a b.2\log_b a=12$.

Chọn B.

Ví dụ 25: Cho $\ln x=2$. Tính giá trị của biểu thức $T=2\ln\sqrt{ex}-\ln\frac{e^2}{\sqrt{x}}+\ln 3.\log_3 ex^2$

A. $T=21$.

B. $T=12$.

C. $T=13$.

D. $T=7$.

Lời giải:

Ta có: $T=\ln(ex)-\left(2-\ln\sqrt{x}\right)+\ln\left(ex^2\right)=(1+\ln x)-2+\frac{1}{2}\ln x+1+2\ln x=\frac{7}{2}\ln x=7$.

Chọn D.

Ví dụ 26 : Cho $\ln x=3$. Tính giá trị của biểu thức $T=2\ln\frac{x^2}{\sqrt{e}}+\ln 2.\log_2\left(x^3.e^2\right)$.

A. $T=16$. **B.** $T=15$.

C. $T=\frac{27}{2}$. **D.** $T=22$.

Lời giải:

Ta có : $T=2\left(\ln x^2-\ln\sqrt{e}\right)+\ln\left(x^3e^2\right)=4\ln x-1+3\ln x+2=7\ln x+1=22$.

Chọn D.

Ví dụ 27 : Cho $\log_a b=3;\log_a c=-2$. Tính giá trị của $\log_a x$, biết rằng $x=\frac{a^2b^3}{\sqrt{c^5}}$.

A. $\log_a x=16$. **B.** $\log_a x=6$.

C. $\log_a x=13$. **D.** $\log_a x=\frac{5}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_a x=\log_a\frac{a^2b^3}{\sqrt{c^5}}=\log_a a^2+\log_a b^3-\log_a c^{\frac{5}{2}}=2+3\log_a b-\frac{5}{2}\log_a c=16$.

Chọn A.

Ví dụ 28 : Cho $\log_a b=2;\log_a c=3$. Tính giá trị của biểu thức $\log_a x$, biết rằng $x=\frac{a.\sqrt{b^3}}{c^2}$.

A. $\log_a x=-6$. **B.** $\log_a x=-4$.

C. $\log_a x=-2$. **D.** $\log_a x=-1$.

Lời giải:

Ta có : $\log_a x=\log_a\frac{a\sqrt{b^3}}{c^2}=\log_a a+\log_a b^{\frac{3}{2}}-\log_a c^2=1+\frac{3}{2}\log_a b-2\log_a c$

$=1+\frac{3}{2}.2-2.3=-2$.

Chọn C.

2. BIỂU DIỄN LOGARIT

Ví dụ 1: Cho các số dương $a;b$ $(a\neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai.**

A. $\log_a\left(a^3b^4\right)=3+4\log_a b$.

B. $\log_3 b=\dfrac{\log_a b}{\log_a 3}$.

C. $2+2\log_a b=\log_a\left(a^2+b^2\right)$.

D. $\log_a b.\log_b 9=2\log_a 3$.

Lời giải:

Ta có: $2+2\log_a b=2\log_a a+2\log_a b=2\log_a ab=2\log_a(ab)^2$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a,b,c với $a,b,ab\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. $\log_a c+\log_b c=\log_{ab} c$

B. $2\log_a b+3\log_a c=\log_a\left(b^2c^3\right)$.

C. $\log_b c.\log_a b=\log_a c$.

D. $\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Lời giải:

Ta chỉ có $\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$ $(c\neq 1)$.

Chọn A.

Ví dụ 3 : Cho các số dương $a>b>0$ $(a\neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai.**

A. $\log_a\left(a^2-b^2\right)=\log_a(a-b)+\log_a(a+b)$.

B. $\log_a\left(a^2b^2\right)=2+2\log_a b$.

C. $\log_a(a+b)^2=2(1+\log_a b)$.

D. $\log_{a^2}\sqrt{ab}=\dfrac{1}{4}(1+\log_a b)$.

Lời giải:

$\log_a(a+b)^2=2\log_a(a+b)\neq 2(1+\log_a b)$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho các số dương $a;b>0$ $(a\neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai.**

A. $\log_{a^2}\left(a\sqrt{b}\right)=\dfrac{1}{4}(2+\log_a b)$.

B. $\log_{a^2}\left(\sqrt{ab}\right)=\dfrac{1}{4}(1+2\log_a b)$.

C. $\log_{\sqrt{a}}(ab)=2(1+\log_a b)$.

D. $\log_{\sqrt{a}}\left(a\sqrt{b}\right)=2+4\log_a b$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{\sqrt{a}}\left(a\sqrt{b}\right)=\log_{\sqrt{a}} a+\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}=2+\log_a b$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho các số dương $a;b>0$ $(a\neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai.**

A. $3^{\log_a b}=b^{\log_a 3}$.

B. $a^{\log_a ab}=ab$.

C. $a^{\log_{\sqrt{a}} b}=b^2$.

D. $a^{\log_{a^2} b}=b^2$.

Lời giải:

Ta có: $a^{\log_{a^2} b}=(b)^{\log_{a^2} a}=b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}$.

Chọn D.

Ví dụ 6 : Cho các số dương $a;b,c>0$ $(a\neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai.**

A. $\log_{a^c} b^c=\log_a b$.

B. $\log_{\frac{1}{a^c}} b^c=-\log_a b$.

C. $2\log_a b-3\log_a c=\frac{2}{3}\log_a \frac{b}{c}$.

D. $\log_a b+\log_a c-1=\log_a \frac{bc}{a}$.

Lời giải:

Ta có: $2\log_a b-3\log_a c=\log_a b^2-\log_a c^3=\log_a \frac{b^2}{c^3}$.

Chọn C.

Ví dụ 7: Cho các số thực $a,b,x,y>0$ với $a,b\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. $\log_a b.\log_b a=1$.

B. $\ln\frac{x}{\sqrt{y}}=\ln x-\frac{1}{2}\ln y$.

C. $\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} y=\log_a\left(xy^3\right)$.

D. $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$.

Lời giải:

Ta có $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$.

Chọn D.

Ví dụ 8 : Đặt $a=\log_2 3$. Hãy tính $\log_2 48$ theo a.

A. $\log_2 48=3+2a$.

B. $\log_2 48=4+2a$.

C. $\log_2 48=4+a$.

D. $\log_2 48=5-a$.

Lời giải:

Ta có: $\log_2 48=\log_2\left(2^4.3\right)=4+\log_2 3=4+a$.

Chọn C.

Ví dụ 9 : Đặt $a=\log_2 5$. Hãy tính $\log_4 10$ theo a.

A. $\log_4 10=2(1+a)$.

B. $\log_4 10=\frac{a+1}{2}$.

C. $\log_4 10=-2(1+a)$.

D. $\log_4 10=\frac{-a-1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_4 10=\log_{2^2} 10=\frac{1}{2}\log_2 10=\frac{1}{2}(1+\log_2 5)=\frac{a+1}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 10: Đặt $a=\log_2 3$. Hãy tính $\log_{12} 18$ theo a.

A. $\log_{12} 18=\frac{a+2}{2a+1}$.

B. $\log_{12} 18=\frac{2a-1}{2-a}$.

B. $\log_{12} 18=\frac{2a+1}{2-a}$.

D. $\log_{12} 18=\frac{2a+1}{2+a}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{12} 18=\frac{\log_2 18}{\log_2 12}=\frac{\log_2(2.3^2)}{\log_2(2^2.3)}=\frac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3}=\frac{1+2a}{2+a}$.

Chọn D.

Ví dụ 11: Cho $\log_2 5=a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a.

A. $\log_4 1250=\frac{4+a}{2}$.

B. $\log_4 1250=\frac{1+4a}{2}$.

C. $\log_4 1250=\frac{4a+3}{2}$.

D. $\log_4 1250=\frac{4a-1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_4 1250=\log_{2^2}(2.5^4)=\frac{1}{2}\log_2(2.5^4)=\frac{1}{2}(1+\log_2 5^4)=\frac{1+4\log_2 5}{2}=\frac{1+4a}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 12: Cho $a=\log_{15} 3$ thì:

A. $\log_{25} 15=\frac{3}{5(1-a)}$.

B. $\log_{25} 15=\frac{5}{3(1-a)}$.

C. $\log_{25} 15=\frac{1}{2(1-a)}$.

D. $\log_{25} 15=\frac{1}{5(1-a)}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{25}15=\dfrac{\log_3 15}{\log_3 25}=\dfrac{\log_3 15}{2\log_3 5}=\dfrac{\log_3 15}{2(\log_3 15-\log_3 3)}=\dfrac{\log_3 15}{2(\log_3 15-1)}=\dfrac{\frac{1}{a}}{2\left(\frac{1}{a}-1\right)}=\dfrac{1}{2(1-a)}$

Chọn C.

Ví dụ 13: Cho $a=\log_2 7$. Hãy tính $\log_{14}49$ theo a.

A. $\log_{14}49=\dfrac{2a}{1+a}$.

B. $\log_{14}49=\dfrac{2a}{2+a}$.

C. $\log_{14}49=\dfrac{2a}{2-a}$.

D. $\log_{14}49=\dfrac{2}{1+a}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{14}49=\dfrac{\log_2 49}{\log_2 14}=\dfrac{2\log_2 7}{\log_2(2.7)}=\dfrac{2a}{1+a}$.

Chọn A.

Ví dụ 14 : Cho $\log_{\sqrt{10}}20=a$. Hãy biểu diễn $\log_2 5$ theo a.

A. $\log_2 5=\dfrac{a+4}{a+2}$.

B. $\log_2 5=\dfrac{a-4}{2-a}$.

C. $\log_2 5=\dfrac{a-4}{2a-1}$.

D. $\log_2 5=\dfrac{2a-1}{a-4}$.

Lời giải:

Ta có : $a=\log_{\sqrt{10}}20=2\log_{10}20=2\dfrac{\log_2 20}{\log_2 10}=2\dfrac{\log_2(2^2.5)}{\log_2(2.5)}=2.\dfrac{2+\log_2 5}{1+\log_2 5}$

Suy ra $a+a\log_2 5=4+2\log_2 5\Rightarrow\log_2 5=\dfrac{a-4}{2-a}$.

Chọn B.

Ví dụ 15 : Đặt $\log_3 4=a$. Hãy tính $\log_3\dfrac{27}{16}$ theo a.

A. $\log_3\dfrac{27}{16}=3-4a$.

B. $\log_3\dfrac{27}{16}=3(1-a)$.

C. $\log_3\dfrac{27}{16}=3-2a$.

D. $\log_3\dfrac{27}{16}=\dfrac{3-2a}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_3 \frac{27}{16} = \log_3 27 - \log_3 16 = 3 - \log_3 4^2 = 3 - 2\log_3 4 = 3 - 2a$.

Chọn C.

Ví dụ 16 : Cho $\log_{18} 12 = a$. Hãy biểu diễn $\log_2 3$ theo a.

A. $\log_2 3 = \frac{a-2}{1-2a}$.

B. $\log_2 3 = \frac{a-2}{2a-1}$.

C. $\log_2 3 = \frac{a+2}{2a-1}$.

D. $\log_2 3 = \frac{a-1}{1-2a}$.

Lời giải:

Ta có: $a = \log_{18} 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 18} = \frac{\log_2 (2^2.3)}{\log_2 (2.3^2)} = \frac{2+\log_2 3}{1+2\log_2 3} \Leftrightarrow a + 2a\log_2 3 = 2 + \log_2 3$

Do đó $\log_2 3 = \frac{a-2}{1-2a}$.

Chọn A.

Ví dụ 17: Cho $a = \log_{20} 50$. Hãy biểu diễn $\log_2 5$ theo a.

A. $\log_2 5 = \frac{2a+1}{a-2}$.

B. $\log_2 5 = \frac{2a+1}{2-a}$.

C. $\log_2 5 = \frac{2a-1}{2-a}$.

D. $\log_2 5 = \frac{2a-1}{a+2}$.

Lời giải:

Ta có: $a = \log_{20} 50 = \frac{\log_2 50}{\log_2 20} = \frac{\log_2 (2.5^2)}{\log_2 (2^2.5)} = \frac{1+2\log_2 5}{2+\log_2 5} \Rightarrow 2a + a\log_2 5 = 1 + 2\log_2 5$.

Do đó $\log_2 5 = \frac{2a-1}{2-a}$.

Chọn C.

Ví dụ 18: Đặt $\log_2 3 = a, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_2 45$ theo a và b.

A. $\log_2 45 = 2a + 2ab$.

B. $\log_2 45 = a + ab$.

C. $\log_2 45 = 3a + ab$.

D. $\log_2 45 = 2a + ab$.

Lời giải:

$\log_2 45 = \log_2 (3^2.5) = 2\log_2 3 + \log_2 5 = 2a + \log_2 3.\log_3 5 = 2a + ab$.

Chọn D.

Ví dụ 19: Đặt $\log_2 3 = a, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 15$ theo a và b.

A. $\log_{12} 15 = \dfrac{a+ab}{b+2}$.

B. $\log_{12} 15 = \dfrac{a+ab}{a+2}$.

C. $\log_{12} 15 = \dfrac{a+b}{ab+2a}$.

D. $\log_{12} 15 = \dfrac{a+b}{ab+2b}$.

Lời giải:

Ta có : $\log_{12} 15 = \dfrac{\log_2 15}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 (3.5)}{\log_2 (2^2.3)} = \dfrac{\log_2 3 + \log_2 5}{2+\log_2 3} = \dfrac{a+\log_2 3.\log_3 5}{2+a} = \dfrac{a+ab}{a+2}$.

Chọn B.

Ví dụ 20 : [ĐMH THPT QUỐC GIA 2017] : Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

A. $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab}$.

B. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$.

D. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_6 45 = \dfrac{\log_2 45}{\log_2 6} = \dfrac{\log_2 (5.9)}{\log_2 (2.3)} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 9}{1+\log_2 3} = \dfrac{\log_2 3.\log_3 5 + 2\log_2 3}{1+a}$

$$= \dfrac{\dfrac{a}{b}+2a}{1+a} = \dfrac{a+2ab}{(a+1)b}.$$

Chọn C.

Ví dụ 21: Đặt $a = \log_5 2; b = \log_5 3$. Hãy tính $\log_5 72$ theo a và b.

A. $\log_5 72 = 3a+2b$.

B. $\log_5 72 = 2a+3b$.

C. $\log_5 72 = 3a+3b$.

D. $\log_5 72 = 2a+2b$.

Lời giải:

Ta có: $\log_5 72 = \log_5 (2^3.3^2) = 3\log_5 2 + 2\log_5 3 = 3a+2b$.

Chọn A.

Ví dụ 22: Đặt $\log 3 = p; \log 5 = q$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 30$ theo $p; q$.

A. $\log_{15} 30 = \dfrac{1+q}{p+q}$.

B. $\log_{15} 30 = \dfrac{1+p}{p+q}$.

C. $\log_{15} 30 = \dfrac{p+q}{p+1}$.

D. $\log_{15} 30 = \dfrac{p+q}{q+1}$.

Lời giải:

Ta có : $\log_{15} 30 = \dfrac{\log 30}{\log 15} = \dfrac{1+\log 3}{\log(3.5)} = \dfrac{1+\log 3}{\log 3 + \log 5} = \dfrac{1+p}{p+q}$.

Chọn B.

Ví dụ 23 : Cho $a = \log_3 15; b = \log_3 10$. Hãy tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b.

A. $\log_{\sqrt{3}} 50 = \dfrac{a+b+1}{2}$.

B. $\log_{\sqrt{3}} 50 = \dfrac{a+b-1}{2}$.

C. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2a + 2b + 2$.

D. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2a + 2b - 2$.

Lời giải:

Ta có $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2\log_3 50 = 2\left[\log_3(5.10)\right] = 2(\log_3 5 + \log_3 10) = 2(\log_3 15 - \log_3 3 + \log_3 10)$

$= 2(a+b-1)$.

Chọn D.

Ví dụ 24 Cho $a = \log_2 3,\ b = \log_7 2$. Hãy tính $\log_{\sqrt{6}} 28$ theo a và b.

A. $A = \dfrac{b+1}{2a+2}$.

B. $A = \dfrac{4b+2}{ab+b}$.

B. $A = \dfrac{4b+2}{a+2}$.

D. $A = \dfrac{2b+1}{2ab+2b}$.

Lời giải:

Ta có : $\log_{\sqrt{6}} 28 = 2\log_6 28 = 2\dfrac{\log_2 28}{\log_2 6} = 2.\dfrac{\log_2(2^2.7)}{\log_2(2.3)} = 2.\dfrac{2+\log_2 7}{1+\log_2 3} = 2.\dfrac{2+\frac{1}{b}}{1+a} = \dfrac{4b+2}{ab+b}$.

Chọn B.

Ví dụ 25: Cho $a=\log_2 5,\ b=\log_7 5$. Hãy tính $\log_{14}100$ theo a,b.

A. $\log_{14}100=\dfrac{2a+b}{a+b}$.

B. $\log_{14}100=\dfrac{2ab+b}{a+b}$.

C. $\log_{14}100=\dfrac{2a+ab}{a+ab}$.

D. $\log_{14}100=\dfrac{2ab+b}{a+b}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{14}100=\dfrac{\log_2 100}{\log_2 14}=\dfrac{\log_2\left(2^2.5^2\right)}{\log_2(2.7)}=\dfrac{2+2\log_2 5}{1+\log_2 7}=\dfrac{2+2a}{1+\log_2 5.\log_5 7}=\dfrac{2+2a}{1+\dfrac{a}{b}}=\dfrac{2ab+2b}{a+b}$.

Chọn D.

Ví dụ 26 : Cho $\log_5 2=a;\ b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_{15}36$ theo a,b.

A. $\log_{15}36=\dfrac{2a+b}{b+1}$.

B. $\log_{15}36=\dfrac{a+2b}{b+1}$.

C. $\log_{15}36=\dfrac{2a+2b}{b+1}$.

D. $\log_{15}36=\dfrac{2a+2b}{a+1}$.

Lời giải:

Ta có : $\log_{15}36=\dfrac{\log_5 36}{\log_5 15}=\dfrac{\log_5\left(2^2.3^2\right)}{\log_5(5.3)}=\dfrac{2\log_5 2+2\log_5 3}{1+\log_5 3}=\dfrac{2a+2b}{1+b}$.

Chọn C.

Ví dụ 27 : Đặt $a=\log_2 5,\ b=\log_2 3$. Hãy biểu diễn $\log_{40}45$ theo a,b

A. $\log_{40}45=\dfrac{2a+b}{b+3}$.

B. $\log_{40}45=\dfrac{a+2b}{b+3}$.

C. $\log_{40}45=\dfrac{2a+2b}{b+3}$.

D. $\log_{40}45=\dfrac{a+2b}{a+3}$.

Lời giải:

Ta có : $\log_{40}45=\dfrac{\log_2 45}{\log_2 40}=\dfrac{\log_2\left(3^2.5\right)}{\log_2\left(2^3.5\right)}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 5}{3+\log_2 5}=\dfrac{a+2b}{a+3}$.

Chọn D.

Ví dụ 28: Cho $\log_2 6 = a$ và $\log_3 5 = b$. Hãy tính $\log_{12}\sqrt{20}$ theo a,b.

A. $\log_{12}\sqrt{20} = \dfrac{ab-b+2}{2(a+1)}$.

B. $\log_{12}\sqrt{20} = \dfrac{ab+b-2}{2(a+1)}$.

C. $\log_{12}\sqrt{20} = \dfrac{ab+b-2}{2(a-1)}$.

D. $\log_{12}\sqrt{20} = \dfrac{ab-b+2}{2(a-1)}$.

Lời giải:

Ta có: $a = \log_2 6 = 1 + \log_2 3$. Mặt khác

$$\log_{12}\sqrt{20} = \frac{1}{2}\log_{12} 20 = \frac{1}{2}\frac{\log_2 20}{\log_2 12} = \frac{\log_2\left(2^2.5\right)}{2.\log_2\left(2^2.3\right)}$$

$$= \frac{2+\log_2 5}{2(2+\log_2 3)} = \frac{2+\log_2 3.\log_3 5}{2(2+a-1)} = \frac{2+(a-1)b}{2(a+1)} = \frac{ab-b+2}{2(a+1)}.$$

Chọn A.

Ví dụ 29: Đặt $\log_2 7 = a; \log_3 7 = b$. Hãy tính $\log_{14} 12$ theo a,b.

A. $\log_{14} 12 = \dfrac{a+2b}{ab+a}$.

B. $\log_{14} 12 = \dfrac{a+2b}{ab+b}$.

C. $\log_{14} 12 = \dfrac{2a+b}{ab+a}$.

D. $\log_{14} 12 = \dfrac{2a+b}{ab+b}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{14} 12 = \dfrac{\log_2 12}{\log_2 14} = \dfrac{\log_2\left(2^2.3\right)}{\log_2(2.7)} = \dfrac{2+\log_2 3}{1+\log_2 7} = \dfrac{2+\log_2 7.\log_7 3}{1+a} = \dfrac{2+\dfrac{a}{b}}{a+1} = \dfrac{a+2b}{ab+b}$.

Chọn B.

Ví dụ 30: Đặt $a = \log_2 5$ và $b = \log_2 6$. Hãy biểu diễn $\log_3 90$ theo a và b.

A. $\log_3 90 = \dfrac{a+2b-1}{b-1}$.

B. $\log_3 90 = \dfrac{a+2b-1}{a-1}$.

C. $\log_3 90 = \dfrac{a-2b+1}{b+1}$.

D. $\log_3 90 = \dfrac{a-2b-1}{a+1}$.

Lời giải:

Ta có: $b = \log_2 6 = 1 + \log_2 3$

Khi đó: $\log_3 90 = \dfrac{\log_2 90}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2\left(3^2.2.5\right)}{\log_2 3} = \dfrac{2\log_2 3 + 1 + \log_2 5}{\log_2 3} = \dfrac{2(b-1)+a+1}{b-1} = \dfrac{a+2b-1}{b-1}$.

Chọn A.

Ví dụ 31 : Đặt $\log_2 5 = a$, $\log_4 15 = b$. Hãy tính $\log_3 10$ theo a, b

A. $\log_3 10 = \dfrac{1-a}{a+2b}$.

B. $\log_3 10 = \dfrac{ab-a}{a+2b}$.

C. $\log_3 10 = \dfrac{ab+a}{a+2b}$.

D. $\log_3 10 = \dfrac{1+a}{2b-a}$.

Lời giải:

$\log_4 15 = b \Rightarrow \dfrac{1}{2}(\log_2 5 + \log_2 3) = b \Rightarrow \log_2 3 = 2b - a$.

Khi đó $\log_3 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 3} = \dfrac{1+\log_2 5}{2b-a} = \dfrac{1+a}{2b-a}$.

Chọn D.

Ví dụ 32: Đặt $a = \log_2 3; b = \log_5 2; c = \log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{42} 15$ theo a, b, c.

A. $\log_{42} 15 = \dfrac{ab+1}{b(a+c+1)}$.

B. $\log_{42} 15 = \dfrac{ac+1}{c(a+c+1)}$.

C. $\log_{42} 15 = \dfrac{ab+1}{ab+b+c}$.

D. $\log_{42} 15 = \dfrac{a+c}{a+b+bc}$.

Lời giải:

$$\log_{42} 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 42} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{a + \frac{1}{b}}{1+a+c} = \frac{ab+1}{b(a+c+1)}.$$

Chọn A.

Ví dụ 33: Cho các số thực $a, b > 0; a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\log_a(a^4 + b) = 4 + \log_a b$.

B. $\log_a(a^2 + a^2b^2) = 2 + \log_a(b^2+1)$.

C. $\log_a(a+b) = 1 + \log_a b$.

C. $\log_a(a^3b+1) = 4 + \log_a b$.

Lời giải:

Ta có: $\log_a(a^2 + a^2b^2) = \log_a\left[a^2(b^2+1)\right] = \log_a a^2 + \log_a(b^2+1) = 2 + \log_a(b^2+1)$.

Chọn B.

Ví dụ 34: [ĐMH THPT QUỐC GIA 2017] Cho các số thực $a, b > 0; a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b$.

B. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4}\log_a b$.

D. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{a^2} ab = \frac{1}{2}\log_a ab = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1+\log_a b)$.

Chọn D.

Ví dụ 35: Cho các số thực $a,b>0; a;b;ab\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\log_{ab}\frac{a}{b} = \frac{1+\log_a b}{1-\log_a b}$.

B. $\log_{ab}\frac{a}{b} = \frac{1-\log_a b}{1+\log_a b}$.

C. $\log_{ab}\frac{a}{b} = \frac{1+\log_b a}{1-\log_a b}$.

D. $\log_{ab}\frac{a}{b} = \frac{1+\log_a b}{1-\log_b a}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{ab}\frac{a}{b} = \frac{\log_a \frac{a}{b}}{\log_a ab} = \frac{1-\log_a b}{1+\log_a b}$.

Chọn B.

Ví dụ 36 : Cho các số thực $a,b>0; a;a\sqrt{b}\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \frac{1+\log_a b}{2+\log_a b}$.

B. $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \frac{2+\log_a b}{1+\log_a b}$.

C. $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \frac{2+2\log_a b}{2+\log_a b}$.

D. $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \frac{2+\log_a b}{2+2\log_a b}$.

Lời giải:

$$\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \frac{\log_a(ab)}{\log_a(a\sqrt{b})} = \frac{1+\log_a b}{1+\log_a \sqrt{b}} = \frac{1+\log_a b}{1+\frac{1}{2}\log_a b} = \frac{2+2\log_a b}{2+\log_a b}.$$

Chọn C.

Ví dụ 37: Cho các số thực dương $x;y>0$ thoã mãn $x^2+y^2=8xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\log(x+y) = \frac{1+\log x+\log y}{2}$.

B. $\log(x+y) = \log x+\log y+1$.

C. $\log(x+y) = \log x+\log y-1$.

D. $\log(x+y) = 10.(\log x+\log y)$.

Lời giải:

Ta có $x^2+y^2=8xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = 10xy \Rightarrow \log(x+y)^2 = \log(10xy)$

$$\Leftrightarrow 2\log(x+y) = 1+\log x+\log y.$$

Chọn A.

Ví dụ 38: Cho các số thực dương $x; y > 0$ thoã mãn $x^2 + y^2 = 14xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\log_2 \frac{x+y}{14} = \log_2 x + \log_2 y$.

B. $\log_2 \frac{x+y}{16} = \log_2 x + \log_2 y$.

C. $\log_2 (x+y) = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{2}$.

D. $\log_2 (x+y) = 2 + \frac{\log_2 xy}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $x^2 + y^2 = 14xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = 16xy \Leftrightarrow \log_2 (x+y)^2 = \log_2 (16xy)$

$\Leftrightarrow 2\log_2 (x+y) = 4 + \log_2 x + \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 (x+y) = 2 + \frac{\log_2 xy}{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 39 : Cho các số $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2 + y^2 = 3xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\log_5 (x+y) = \frac{1 + \log_5 xy}{2}$.

B. $\log_5 (x+y)^2 = 1 + \log_5 x + \log_5 y$

C. $\log_5 (x+y)^2 = 1 + \log_5 (xy)$.

D. Tất cả đều đúng.

Lời giải:

Ta có: $x^2 + y^2 = 3xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = 5xy \Leftrightarrow \log_5 (x+y)^2 = \log_5 (5xy) \Leftrightarrow 2\log_5 |x+y| = 1 + \log_5 xy$

Chú ý: **A** sai vì chưa thể khẳng định $x + y > 0$, tương tự **B** sai vì chưa thể khẳng định $x, y > 0$.

Chọn C.

Ví dụ 40: Cho $\log_a x = p; \log_b x = q; \log_c x = r$ $(1 \neq a; b; c; x > 0)$. Hãy tính $\log_{abc} x$.

A. $\log_{abc} x = \frac{pqr}{pq + qr + rp}$.

B. $\log_{abc} x = pqr$.

C. $\log_{abc} x = \frac{pqr}{p + q + r}$.

D. $\log_{abc} x = \frac{pq + qr + rp}{p + q + r}$.

Lời giải:

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}} = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}$$

$$= \frac{pqr}{pq + qr + rp}.$$

Chọn A.

Ví dụ 41: Cho $\log_a x = m$ và $\log_{ab} x = n$ $(1 \neq x; a; ab > 0)$. Khi đó $\log_b x$ bằng:

A. $\log_b x = \dfrac{mn}{n-m}$.

B. $\log_b x = \dfrac{mn}{m-n}$.

C. $\log_b x = \dfrac{mn}{m+n}$.

D. $\log_b x = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$.

Lời giải:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b} = \frac{1}{\log_x \frac{ab}{a}} = \frac{1}{\log_x ab - \log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} = \frac{mn}{m-n}.$$

Chọn B.

Ví dụ 42: Thu gọn biểu thức $A = \dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^3} b} + ... + \dfrac{1}{\log_{a^n} b}$ ta được:

A. $A = \dfrac{n(n+1)}{\log_a b}$.

B. $A = \dfrac{n+1}{2\log_a b}$.

C. $A = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a b}$.

D. $A = \dfrac{n(n-1)}{\log_a b}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b \Rightarrow \dfrac{1}{\log_{a^n} b} = \dfrac{n}{\log_a b}$. Do đó $A = \dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{2}{\log_a b} + ... + \dfrac{n}{\log_a b}$

$$= \frac{1+2+3+....+n}{\log_a b} = \frac{n(n+1)}{2\log_a b}.$$

Chọn C.

Ví dụ 43:[ĐMH THPT QUỐC GIA 2017] Cho 2 số thực dương a và b thoã mãn $1 < a < b$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$.

B. $1 < \log_a b < \log_b a$.

C. $\log_a b < \log_b a < 1$.

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải:

Cách 1: Cho $a = 4; b = 2$ ta thấy $\log_2 4 > 1 > \log_4 2$.

Chọn D.

Cách 2: Ta có $1 < a < b$ nên $\begin{cases} \log_a b > \log_a a = 1 \\ \log_b a < \log_b b = 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$.

Ví dụ 44: Cho 2 số thực dương a,b thoả mãn $1>a>b>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\log_a b<1<\log_b a$.

B. $1<\log_a b<\log_b a$.

C. $\log_a b<\log_b a<1$.

D. $\log_b a<1<\log_a b$.

Lời giải:

Chọn $a=\frac{1}{2};b=\frac{1}{4}$ ta có: $\log_a b=2;\log_b a=\frac{1}{2}$. Do vậy $\log_a b>1>\log_b a$.

Chọn D.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

PHẦN 1 [TT6080]

Câu 1: [558479] Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{2^2+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,25)^0}$, ta được

A. 10.

B. -10.

C. 12.

D. 15.

Câu 2: [558480] Cho $f(x)=\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x}$. Khi đó $f(0,09)$ bằng:

A. 0,1.

B. 0,2.

C. 0,3.

D. 0,4.

Câu 3: [558481] Biểu thức $A=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$ viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{12}}$.

B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

C. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$.

D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Câu 4: [558482] Tính giá trị biểu thức $P=(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}$, ta được kết quả là

A. 90.

B. 121.

C. 120.

D. 125.

Câu 5: [558484] $64^{\frac{1}{2}\log_2 10}$ bằng:

A. 200.

B. 400.

C. 1000.

D. 1200.

Câu 6: [558491] $\log_4 \sqrt[4]{8}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. 2.

Câu 7: [558492] Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\log_a x$ có nghĩa với $\forall x$.

B. $\log_a 1 = a$ và $\log_a a = 0$.

C. $\log_a xy = \log_a x.\log_a y$.

D. $\log_a x^n = n\log_a x$ $(x > 0, n \neq 0)$.

Câu 8: [558494] $3\log_2(\log_4 16) + \log_{\frac{1}{2}} 2$ bằng:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 9: [558496] Cho các số thực $a, b > 0; a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\log_a(a^4 + b) = 4 + \log_a b$.

B. $\log_a(a^2 + a^2b^2) = 2 + \log_a(b^2 + 1)$.

C. $\log_a(a + b) = 1 + \log_a b$.

D. $\log_a(a^3b + 1) = 4 + \log_a b$.

Câu 10: [558498] Cho $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^a$ và $\log_y \sqrt{y\sqrt{y^3}} = b$ (với $x; y > 0; y \neq 1$). Vậy $A = a + b$ bằng.

A. $A = \frac{9}{4}$.

B. $A = \frac{3}{2}$.

C. $A = \frac{15}{8}$.

D. $A = \frac{17}{8}$.

Câu 11: [558499] Cho $(a-1)^{\sqrt{3}} > (a-1)^{\pi-1}$ và $\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}} > b^{-2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng :

A. $0 < a < 1$ và $b > 1$.

B. $1 < a < 2$ và $b > 1$.

C. $a > 2$ và $0 < b < 1$.

D. $1 < a < 2$ và $0 < b < 1$.

Câu 12: [558500] Cho $2^x = \sqrt{2} - 1$. Giá trị của biểu thức $A = 4^x + 2.2^{-x}$ là:

A. $A = 3\sqrt{2} - 1$.

B. $A = 4$.

C. $A = 3 - \sqrt{2}$.

D. $A = 5$.

Câu 13: [558502] Cho các khẳng định sau:

1) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}+1\right)^{-2016}$.

2) $\left(x^2+1\right)^{\pi} > \left(x^2+1\right)^{e}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

3) Đồ thị hàm số $y = x^a$ xét với $x \in (0;+\infty)$ luôn đi qua điểm có toạ độ $(1;1)$.

4) Với $ab > 0$ ta luôn có $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$.

Số khẳng định đúng là:

A. 4. **B.** 3.
C. 2. **D.** 1.

Câu 14: [558504] Cho các phát biểu sau :

1) Giá trị của $a^{\log_a 6 + \log_a 4}$ bằng 64.

2) Cho $0 < a < 1$ và $x_1 < x_2$ suy ra $a^{x_1} < a^{x_2}$.

3) Nếu $a = \lg 2$, $b = \ln 2$ thì $10^a = e^b$.

4) Biểu thức $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3}.\sqrt[4]{x^8}}{\sqrt{x^2}} = x^2$ với mọi $x \neq 0$.

Số các phát biểu **đúng** là :

A. 2. **B.** 3.
C. 4. **D.** 1.

Câu 15: [558506] Cho a và b là hai số thực dương. Kết quả thu gọn của biểu thức $A = \dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}a^6}}}$ là

A. 1. **B.** b.
C. a. **D.** ab.

Câu 16: [558508] (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Cho các số thực dương a, b, với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4}\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

Câu 17: [558510] Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}^2\left(a^4\right)$:

A. $P=2$.
B. $P=4$.
C. $P=6$.
D. $P=16$.

Câu 18: [558511] Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\sqrt{a}\right)^{2\log_{\sqrt{a}}2}$:

A. $P=2$.
B. $P=4$.
C. $P=6$.
D. $P=16$.

Câu 19: [558512] Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\right)$:

A. $P=\frac{15}{8}$.
B. $P=\frac{15}{16}$.
C. $P=\frac{15}{32}$.
D. $P=\frac{15}{4}$.

Câu 20: [558514] Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}^3 a^4$:

A. $P=6$.
B. $P=8$.
C. $P=4$.
D. $P=6$.

Câu 21: [558515] Cho $a,b>0, a,b\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_a b+\log_a\frac{a^3}{b}$:

A. $P=2$.
B. $P=3$.
C. $P=9$.
D. $P=6$.

Câu 22: [558516] Cho $a,b>0, a,b\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_a b^2+\log_{\sqrt{a}}\frac{a^2}{b}$:

A. $P=4$.
B. $P=3$.
C. $P=6$.
D. $P=8$.

Câu 23: [558518] Cho $a,b>0, a,b\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4$:

A. $P=6$.
B. $P=24$.
C. $P=12$.
D. $P=18$.

Câu 24: [558519] Cho $a,b>0, a,b\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2} b+\log_a\sqrt{\frac{a}{b}}$:

A. $P=\frac{3}{2}$.
B. $P=\frac{3}{4}$.
C. $P=\frac{1}{2}$.
D. $P=\frac{5}{2}$.

PHẦN 2 [TT6081]

Câu 1: [558952] Giá trị của $2^{3-\sqrt{2}}.4^{\sqrt{2}}$ bằng:

A. 8. **B.** 32

C. $2^{3+\sqrt{2}}$. **D.** $4^{6\sqrt{2}-4}$.

Câu 2: [558954] Giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}}3}\left(0<a\neq 1\right)$ bằng:

A. 3. **B.** 6.

C. 12. **D.** 9.

Câu 3: [558956] Tìm giá trị của biểu thức sau $A=\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right).49^{\log_7 2}$

A. 20. **B.** Đáp án khác.

C. 18 **D.** 19.

Câu 4: [558957] Giá trị của biểu thức $A=2\log_{\frac{1}{3}}6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}400+3\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{45}$ là:

A. 5. **B.** -4.

C. -3. **D.** 4.

Câu 5: [558958] Điều nào sau đây là đúng ?

A. Nếu $a<b$ thì $a^m<b^m\Leftrightarrow m>0$. **B.** $a^m<a^n\Leftrightarrow m<n$.

C. $0<a<1: a^m>a^n\Leftrightarrow m<n$. **D.** $a^m>a^n\Leftrightarrow m>n$.

Câu 6: [558960] Nếu $\log_{12}6=a, \log_{12}7=b$ thì $\log_2 7$ bằng:

A. $\frac{a}{b+1}$. **B.** $-\frac{b}{a-1}$.

C. $\frac{a}{1-b}$. **D.** $\frac{a}{a-1}$.

Câu 7: [558961] Cho $a>0; b>0$ và $a^2+b^2=7ab$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\log_7\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}\left(\log_7 a+\log_7 b\right)$. **B.** $\log_3\frac{a+b}{2}=\frac{1}{7}\left(\log_3 a+\log_3 b\right)$

C. $\log_3\frac{a+b}{7}=\frac{1}{2}\left(\log_3 a+\log_3 b\right)$. **D.** $\log_7\frac{a+b}{2}=\frac{1}{3}\left(\log_7 a+\log_7 b\right)$

Câu 8: [558962] Cho $(a-1)^{-\frac{2}{3}}<(a-1)^{-\frac{1}{3}}$. Khi đó có thể kết luận về a là:

A. $a>2$. **B.** $1<a<2$.

C. $a>1$. **D.** $0<a<1$.

Câu 9: [558964] Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}$ là:

A. 9. **B.** -10.

C. 10 **D.** -9.

Câu 10: [558965] Cho $a,b>0$ thỏa mãn: $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}},b^{\frac{2}{3}}>b^{\frac{3}{4}}$ khi đó:

A. $0<a<1,b>1$. **B.** $a>1,0<b<1$.

C. $0<a<1,0<b<1$. **D.** $a>1,b>1$.

Câu 11: [558967] Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{25^{\log_5 6}+49^{\log_7 8}-3}{3^{1+\log_9 4}+4^{2-\log_2 3}+5^{\log_{125} 27}}$ là:

A. 8. **B.** 10.

C. 9. **D.** 12.

Câu 12: [558968] Đặt $a=\log_3 2;b=\log_3 5$, biểu diễn **đúng** của $\log_3 90$ theo a và b là:

A. $\log_3 90=a+2b$. **B.** $\log_3 90=2a+b$.

C. $\log_3 90=a+b$. **D.** $\log_3 90=2+a+b$.

Câu 13: [558970] Đặt $a=\log_2 5;b=\log_2 3$, biểu diễn **đúng** của $\log_{45} 40$ theo a và b là:

A. $\log_{45} 40=\dfrac{1+a}{2b+a}$. **B.** $\log_{45} 40=\dfrac{3+a}{2b+a}$.

C. $\log_{45} 40=\dfrac{2+a}{2b+a}$. **D.** $\log_{45} 40=\dfrac{2+b}{2b+a}$.

Câu 14: [558972] Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$, tính $K=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2+\log_4 x$:

A. $K=-\sqrt{2}$. **B.** $K=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $K=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$. **D.** $K=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$.

Câu 15: [558973] Cho các số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=2ab$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. $\log_3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=2(\log_3 a+\log_3 b)$. **B.** $\log_3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\log_3 a+\log_3 b$

C. $2\log_3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\log_3 a+\log_3 b$. **D.** $\log_3(a+b)=\log_3 a+\log_3 b$.

Câu 16: [558974] Cho $\log_{25} 7 = a$ và $\log_2 5 = b$. Tính $\log_5 \frac{49}{8}$ theo a và b.

A. $2a - \frac{2}{b}$.
B. $4a - \frac{3}{b}$.
C. $2a - \frac{3}{b}$.
D. $3a - \frac{2}{b}$.

Câu 17: [558976] Biết rằng a, b, c là các số thực thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

A. $\frac{1}{2}$.
B. $\sqrt{10}$.
C. 2.
D. $\frac{1}{10}$.

Câu 18: [558977] Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) + a$ với $a \in \mathbb{R}$ thì giá trị của $\log_2 x$ bằng bao nhiêu ?

A. 4^{a+1}.
B. a^2.
C. 2^a.
D. 2^{a+1}.

Câu 19: [558979] Gọi x là giá trị thỏa mãn $\log_2 x$, 1, $\log_2(x+2)$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và giá trị x được biểu diễn dưới dạng $a + b\sqrt{5}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tổng $a + b$ bằng

A. -3.
B. 2.
C. 0.
D. 5.

Câu 20: [558981] Cho $a = \ln 2$, $b = \ln 3$, $c = \ln 7$. Giá trị biểu thức $P = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + ... + \ln\frac{2015}{2016}$ theo a, b, c.

A. $5a - 2b - c$.
B. $5a + 2b - c$.
C. $-5a + 2b - c$.
D. $-5a - 2b - c$.

Câu 21: [558983] Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^{\log_7 11} = 49$, $y^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^{(\log_7 11)^2} + y^{(\log_{11} 25)^2} - 1$.

A. $P = 121$.
B. $P = 125$.
C. $P = 7 + \sqrt{11}$.
D. $P = 36$.

Câu 22: [558985] Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $3\log_2 a + 2\log_{\sqrt[3]{4}} c = \log_{\sqrt{2}} b^3$. Khẳng định nào dưới đây là đúng về đẳng thức liên hệ giữa a, b, c ?

A. $a^2 + b^2 = c^2$.
B. $ac = b^2$.
C. $ab = c^2$.
D. $2a + 4b = 3c$.

Câu 23: [558986] Gọi a,b,c là ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $\begin{cases} a \neq 1 \\ c \pm b \neq 1 \end{cases}$ và $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$.Tam giác chứa ba cạnh a,b,c là tam giác mang tính chất gì ?

A. Tam giác vuông.
B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều.
D. Tam giác tù.

Câu 24: [558987] Cho $\log_2 x = 3\log_2 a + 2\log_2 b - 1$ $(x;a;b > 0)$. Khi đó

A. $x = \dfrac{a^3b^2}{2}$.
B. $x = \dfrac{3a + 2b - 1}{2}$.
C. $x = 3ab$.
D. $x = 3a + 2b - 1$.

Câu 25: [558989] Cho $\log_{\sqrt{2}} x = 2 + \sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $A = \log_2 x + \log_{x^2} 2$ là:

A. $A = 2$.
B. $A = \dfrac{3 + \sqrt{2}}{2}$.
C. $A = 6 + 3\sqrt{2}$.
D. $A = \dfrac{6 + \sqrt{2}}{3}$.

Câu 26: [559005] Cho $a = \log_2 3; b = \log_3 7$. Biểu diễn $\log_{18} 21$ ta được:

A. $\log_{18} 21 = \dfrac{a + 2ab}{2a + 1}$.
B. $\log_{18} 21 = \dfrac{a + 2ab}{2a - 1}$.
C. $\log_{18} 21 = \dfrac{2a + ab}{a + 1}$.
D. $\log_{18} 21 = \dfrac{a + ab}{2a + 1}$.

Câu 27: [559008] Cho $x = \log_3 2$. Biểu diễn $\log_{12} 54$ ta được:

A. $\log_{12} 54 = \dfrac{x + 3}{2x + 1}$
B. $\log_{12} 54 = \dfrac{3x + 1}{x + 2}$
C. $\log_{12} 54 = \dfrac{3x + 1}{2x + 1}$
D. $\log_{12} 54 = \dfrac{x + 3}{x + 2}$

Câu 28: [559009] Cho $\log_a b=\sqrt{2}$ $(a;b>0;a\neq 1)$ giá trị của biểu thức $A=\log_{a^2}\frac{a}{b}+\log_{b^2}\frac{b}{a}$ là:

A. 0.

B. $A=1-\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

C. $A=1-\frac{5}{2\sqrt{2}}$.

D. $A=4-3\sqrt{2}$.

Câu 29: [559011] Giá trị của biểu thức $a^{3\log_{\sqrt{a}}2}+b^{2\log_{b^2}3}$ gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau:

A. 43.

B. 30.

C. 65.

D. 19.

Câu 30: [559014] Cho các số thực $a>b>1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}<1<\log_{\frac{1}{b}}\frac{1}{a}$.

B. $\log_{\frac{a}{b}}\frac{b}{a}<1<\log_{\frac{b}{a}}\frac{a}{b}$.

C. $\log_a b<1<\log_b a$.

D. Cả **A** và **C** đều đúng.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM.

PHẦN 1

01. B	02. C	03. B	04. B	05. C	06. B	07. D	08. A	09. B	10. D
11. B	12. D	13. D	14. A	15. D	16. D	17. B	18. B	19. A	20. B
21. B	22. A	23. B	24. C						

PHẦN 2

01. C	02. D	03. D	04. B	05. C	06. B	07. A	08. A	09. B	10. B
11. C	12. B	13. D	14. B	15. C	16. B	17. C	18. A	19. C	20. D
21. B	22. B	23. A	24. A	25. A	26. D	27. A	28. B	29. C	30. D

Chủ đề 4

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

[TV6082]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. Hàm số mũ

1. Định nghĩa

Cho số thực $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

2. Tính chất

* Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

* $y = a^x > 0, \forall x \in R$ (Do vậy tập giá trị của hàm số mũ là $(0;+\infty)$)

* Với $a > 1$ khi đó $y' = a^x \ln a > 0$. Hàm số luôn đồng biến

Trong trường hợp $a > 1$ ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ do đó đồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cận ngang

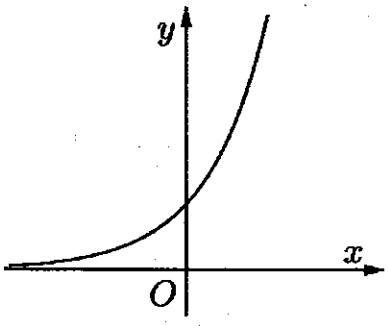
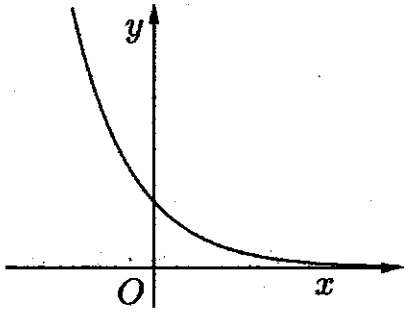
* Với $0 < a < 1$ khi đó $y' = a^x \ln a < 0$. Hàm số luôn nghịch biến

Trong trường hợp $a < 1$ ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ do đó đồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cận ngang

* Đồ thị hàm số $y = a^x$ nhận trục Ox là tiệm cận ngang và luôn đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$

Đồ thị hàm số $y = a^x$ nằm phía trên trục hoành (Do có tập giá trị là $(0;+\infty)$).

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ

Hàm số: $y=3^x$	**Hàm số:** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$
1.TXĐ: $D=\mathbb{R}$	**1.TXĐ:** $D=\mathbb{R}$
2. Sự biến thiên +) Giới hạn: Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Do đó đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $y=0$ (trục Ox) là tiệm cận ngang +) Đạo hàm $y'=3^x\ln 3>0\ (\forall x\in\mathbb{R})$ do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$	**2. Sự biến thiên** +) Giới hạn: Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$. Do đó đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $y=0$ (trục Ox) là tiệm cận ngang +) Đạo hàm $y'=\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}<0\ (\forall x\in\mathbb{R})$ do đó hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$
3. Đồ thị  *Nhận xét:* Đồ thị hàm số luôn nằm phía trên trục Ox vì có tập giá trị là $T=(0;+\infty)$	**3. Đồ thị**  *Nhận xét:* Đồ thị hàm số luôn nằm phía trên trục Ox vì có tập giá trị là $T=(0;+\infty)$

Như chúng ta đã biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f(-x)$ nhận trục tung là trục đối xứng

Do đó ta có: Đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ đối xứng nhau qua trục tung (trục Oy)

Ví dụ1: Đồ thị hàm số $y=3^x$ và $y=3^{-x}$ (hay $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$) đối xứng nhau qua trục tung.

II. Hàm số lôgarít

1. Định nghĩa

Cho số thực $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarít cơ số a.

Chú ý: $\log_a x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

2. Tính chất

* Tập xác định : $D = (0;+\infty)$

* Với $a > 1$ khi đó $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} > 0$. Hàm số luôn đồng biến

Trong trường hợp này ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty$ do đó đồ thị hàm số nhận trục tung là tiệm cận đứng.

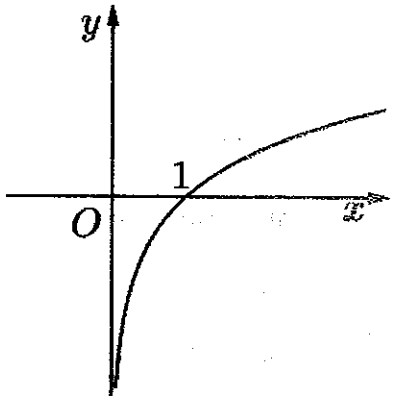
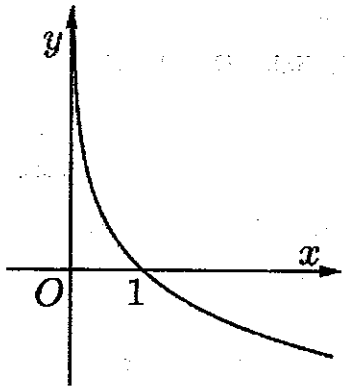
* Với $0 < a < 1$ khi đó $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} < 0$. Hàm số luôn nghịch biến

Trong trường hợp này ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$ do đó đồ thị hàm số nhận trục tung là tiệm cận đứng.

* Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1;0)$ và $(a;1)$ và nằm phía bên phải trục tung (vì có tập xác định là $D = (0;+\infty)$)

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ

Hàm số: $y = \log_3 x$	**Hàm số:** $y = \log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$
1.TXĐ: $D = (0;+\infty)$	**1.TXĐ:** $D = (0;+\infty)$
2. Sự biến thiên. +) Giới hạn: Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} (\log_3 x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} (\log_3 x) = +\infty$. Do đó đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x = 0$ (trục Oy) là tiệm cận đứng. +) Đạo hàm	**2. Sự biến thiên.** +) Giới hạn: Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\log_{\frac{1}{3}} x \right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\log_{\frac{1}{3}} x \right) = -\infty$. Do đó đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x = 0$ (trục Oy) là tiệm cận đứng.

$y'=\dfrac{1}{x\ln 3}>0\ \left(\forall x\in(0;+\infty)\right)$ do đó hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$	+) Đạo hàm $y'=\dfrac{1}{x\ln\frac{1}{3}}<0\ \left(\forall x\in(0;+\infty)\right)$ do đó hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;+\infty)$
3. Đồ thị  *Nhận xét:* Đồ thị hàm số luôn nằm bên phải trục Ox vì có tập xác định là $D=(0;+\infty)$	**3. Đồ thị**  *Nhận xét:* Đồ thị hàm số luôn nằm bên phải trục Ox vì có tập xác định là $D=(0;+\infty)$

Như chúng ta đã biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ nhận trục hoành là trục đối xứng. Do đó ta có: Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$ đối xứng nhau qua trục hoành (trục Ox)

Ví dụ 2: Đồ thị hàm số $y=\log_3 x$ và $y=-\log_3 x$ (hay $y=\log_{\frac{1}{3}} x$) đối xứng nhau qua trục hoành.

III. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarít.

Hàm sơ cấp	Hàm số hợp
$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=u'.e^u$
$(a^x)'=a^x\ln a.$	$(a^u)'=u'.a^u.\ln a$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ (x>0)$ $(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u},\ u>0$ $(\ln\lvert u\rvert)'=\dfrac{u'}{u}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}, x(x>0)$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$, $u>0$
$(\log_a \lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	$(\log_a \lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^2 - \ln(3-4x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 4x + \dfrac{4}{3-4x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{3}{4} \\ -4x^2+3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1}{4} \end{array}\right.$.

Xét $f(x)$ trên khoảng từ $[-2;0]$ ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{4}$. Hàm số liên tục và khả vi trên đoạn $[-2;0]$.

Ta có : $f(-2) = 8-\ln 11; f(0) = -\ln 3; f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{8} - \ln 4$.

Do vậy GTLN là $8-\ln 11$ khi $x=-2$ và GTNN là $\dfrac{1}{8}-\ln 4$ khi $x=\dfrac{-1}{4}$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tập xác định của hàm số $y=\ln(2x-1)$ là:

A. $D=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $D=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $D=\left[-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$. Do đó tập xác định là $D=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Tập xác định của hàm số $y=\ln(x-1)^2$ là:

A. $D=(1;+\infty)$. **B.** $D=[1;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow (x-1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Chọn D.

Ví dụ 3. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị của hàm số $y=2^x$ và $y=2^{-x}$ đối xứng qua trục tung.

B. Đồ thị hàm số $y=2^x$ nằm bên phải trục tung S.

C. Đồ thị hàm số $y=2^x$ đi qua điểm (1; 0).

D. Đồ thị của hàm số $y=3^x$ và $y=\log_3 x$ đối xứng qua trục hoành S.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=2^x$ nằm bên phải trục tung **sai** (đồ thị hàm số $y=2^x$ nằm phía trên trục hoành)

Đồ thị của hàm số $y=3^x$ và $y=\log_3 x$ đối xứng qua trục hoành là khẳng định **sai.**

Chọn A.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\pi}\right)^x$. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. Đồ thị hàm số đã cho nằm phía trên trục *Ox*.

B. Đồ thị hàm số đã cho nhận trục tung là đường tiệm cận.

C. Đạo hàm của hàm số đã cho là: $y=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\pi}\right)^x.\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\pi}\right)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta có hàm số đã cho có $a=\frac{2+\sqrt{3}}{\pi}>1$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $y=0$ (trục hoành) là tiệm cận ngang.

Chọn B.

Ví dụ 5: Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=\log_3 x$.

B. $y=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi}\right)^x$.

C. $y=\left(\frac{e}{\pi}\right)^x$.

D. Cả **A** và **B** đều đúng.

Lời giải:

Chú ý tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là $(0;+\infty)$.

Do đó A sai. Hàm số $y=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi}\right)^x$ có $a=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi}>1$ nên nó đồng biến trên miền xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Hàm số nào trong các hàm số sau không có đường tiệm cận

A. $y=\log_3(2x-1)$.

B. $y=\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^x$.

C. $y=\left(x^2-2x-3\right)^{-\pi+1}$.

D. $y=\left(x^2-1\right)^{\pi-e}$

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{\pi-e}$ không có đường tiệm cận vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty; \lim\limits_{x\to\pm1} y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\log_3(2x-1)$ có đường tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{2}$.

Đồ thị hàm số $y=\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^x$ có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\left(x^2-2x-3\right)^{-\pi+1}$ có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Chọn D.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\log_{\frac{\pi}{e}}(3x-2)$. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. Đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x=\frac{2}{3}$ là tiệm cận đứng.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

C. Tập giá trị của hàm số đã cho là $(0;+\infty)$.

D. Đạo hàm của hàm số đã cho là: $y'=\frac{3}{x(\ln\pi-1)}$.

Lời giải:

Tập giá trị của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$ vì ta có $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^+} y=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Chọn C.

Ví dụ 8: Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.

B. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{\pi}$.

C. $y=4^x-2^x$.

D. $y=\left(3-2\sqrt{2}\right)^x$.

Lời giải:

Hàm số $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ và $y=\left(3-2\sqrt{2}\right)^x$ có $0<a<1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\frac{e^x-e^{-x}}{\pi}$ có $y'=\frac{e^x+e^{-x}}{\pi}>0$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=4^x-2^x$ có $y'=4^x\ln 4-2^x\ln 2=2^x\ln 2\left(2.2^x-1\right)=0\Leftrightarrow x=-1$. Tại điểm $x=-1$ ta thấy y' đổi dấu nên hàm số $y=4^x-2^x$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn B.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=3^x-2^x$. Khẳng định nào sau đây là **đúng.**

A. Đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Đồ thị hàm số đã cho luôn nằm phía trên trục hoành Ox.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=3^x\ln 3-2^x\ln 2=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{\ln 3}{\ln 2}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Dễ thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{\ln 3}{\ln 2}$ do đó hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Nhận thấy $y\left(-1\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{6}<0$ nên đồ thị hàm số đã cho không luôn nằm phía trên trục hoành $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3^x-2^x\right)=0$. Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang.

Chọn A.

Ví dụ 10: Khẳng định nào trong các khẳng định sau là **sai.**

A. Đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ và $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ đều nhận đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

B. Đồ thị hàm hàm số $y=\log_2 x$ và $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ đối xứng qua trục hoành.

C. Hàm số $y=\log_2 x$ và $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ đều có tập xác định là $D=(0;+\infty)$.

D. Hàm số $y=\log_2 x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Lời giải:

Ta có: $y=\log_2 x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln 2}>0\ \left(\forall x\in(0;+\infty)\right)$ do đó hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn D.

Ví dụ 11: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=5^x$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $y=\log_5 x$.

B. $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

C. $y=5^{-x}$.

D. $y=-5^x$.

Lời giải:

Khi lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua trục hoành ta sẽ được đồ thị hàm số $y=-f(x)$.

Chọn D.

Ví dụ 12: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=\log_5 x$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

B. $y=5^x$.

C. $y=5^{-x}$

D. $y=\log_5(-x)$.

Lời giải:

Khi lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua trục hoành ta sẽ được đồ thị hàm số $y=-f(x)$.
Như vậy lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=\log_5 x$ ta được đồ thị hàm số $y=-\log_5 x=\log_{\frac{1}{5}} x$.

Chọn A.

Ví dụ 13: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=5^x$ qua trục tung ta được đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $y=\log_5 x$.

B. $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

C. $y=5^{-x}$.

D. $y=-5^x$.

Lời giải:

Khi lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua trục tung ta sẽ được đồ thị hàm số $y=f(-x)$

Như vậy khi lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=5^x$ qua trục tung ta được đồ thị hàm số $y=5^{-x}$.

Chọn C.

Ví dụ 14: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=\log_5 x$ qua trục tung ta được đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

B. $y=5^x$.

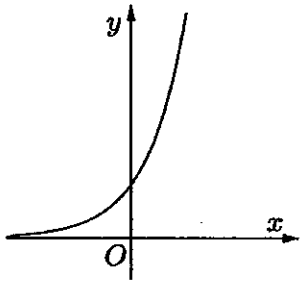
C. $y=5^{-x}$.

D. $y=\log_5(-x)$.

Lời giải:

Chọn D.

Ví dụ 15: Đồ thị hàm số trong hình bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây.



A. $y=\log_4 x$.

B. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

C. $y=4^x$.

D. $y=x^3+3x$.

Lời giải:

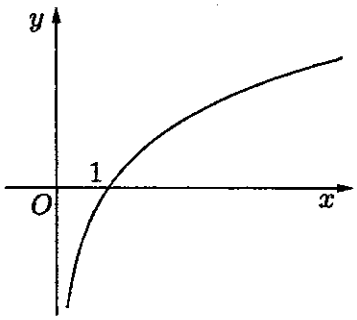
Dựa vào đồ thị hình vẽ ta thấy:

Hàm số đã cho phải là hàm số đồng biến trên tập xác định của nó là $\mathbb{R}$. (loại A và B)

Hàm số đã cho nhận trục Ox là đường tiệm cận ngang (loại D).

Chọn C.

Ví dụ 16: Đồ thị hàm số trong hình bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây.



A. $y=2^x$.

B. $y=\log_2 x$.

C. $y=2^{-x}$.

D. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Lời giải:

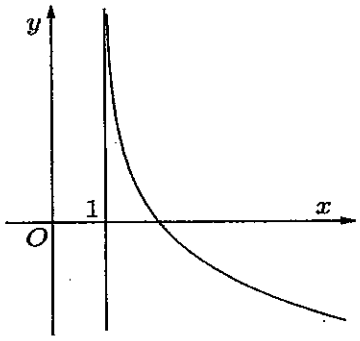
Dựa vào đồ thị hình vẽ ta thấy:

Hàm số đã cho phải là hàm số đồng biến trên tập xác định của nó là $(0;+\infty)$. (loại A, C và D)

Hàm số đã cho nhận trục Oy là đường tiệm cận ngang.

Chọn B.

Ví dụ 17: Đồ thị hàm số trong hình bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây.



A. $y=\ln(x-1)$. **B.** $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

C. $y=2^{x-1}$. **D.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

Lời giải:

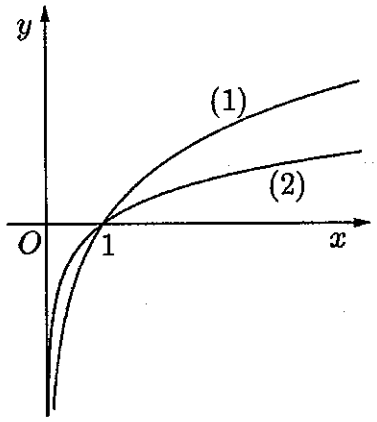
Nhận xét hàm số đã cho là hàm nghịch biến (loại A và D).

Mặt khác đồ thị hàm số đã cho nhận $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

Chọn B.

Ví dụ 18: Trong hình vẽ bên đồ thị (1) là của hàm số $y=\log_a x$ và đồ thị (2) là của hàm số $y=\log_b x$

Khẳng định nào sau đây là đúng.



A. $a>b>1$. **B.** $b>a>1$.

C. $1>a>b>0$. **D.** $1>b>a>0$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy 2 hàm số đã cho phải là 2 hàm đồng biến như vậy $a;b>1$

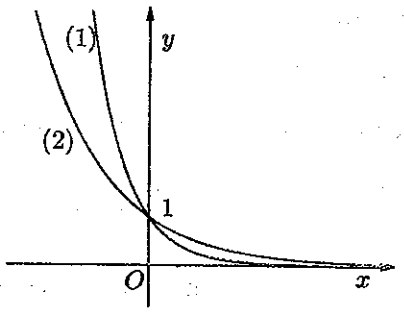
Mặt khác chọn $x=2$ ta có: $\log_a 2>\log_b 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 a}>\frac{1}{\log_2 b} \Leftrightarrow b>a$.

Do đó $b>a>1$.

Chọn B.

Ví dụ 19: Trong hình vẽ bên đồ thị (1) là của hàm số $y=a^x$ và đồ thị (2) là của hàm số $y=b^x$

Khẳng định nào sau đây là đúng.



A. $a>b>1$. **B.** $b>a>1$.

C. $1>a>b>0$. **D.** $1>b>a>0$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy 2 hàm số đã cho phải là 2 hàm số nghịch biến như vậy $0<a;b<1$

Mặt khác chọn $x=-1$ ta có: $a^{-1}>b^{-1}\Leftrightarrow a<b$.

Do đó $b>a>1$.

Chọn B.

Ví dụ 20: Tập xác định của hàm số $y=3^{\sqrt{2x-1}}+\sqrt{4-x^2}$ là:

A. $D=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $D=\left(\frac{1}{2};2\right]$.

C. $D=\left[\frac{1}{2};2\right]$. **D.** $D=\left[\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải:

ĐK xác định là $\begin{cases}2x-1\ge 0\\4-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 2$.

Chọn C.

Ví dụ 21: [Đề MH THPT QUỐC GIA 2017]. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$

A. $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. **B.** $D=[-1;3]$.

C. $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $D=(-1;3)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-1\end{array}\right.$. Do đó tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Chọn C.

Ví dụ 22: Nhận xét nào sau đây là **sai.**

A. Đồ thị hàm số $y=(0,3)^x$ nhận đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y=\log_{0,3}x$ nhận đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng.

C. Hàm số $y=(0,3)^x$ và $y=\log_{0,3}x$ có cùng tập giá trị.

D. Đồ thị hàm số $y=(0,3)^x$ nằm trên trục hoành.

Lời giải:

Hàm số $y=(0,3)^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$ và hàm số $y=\log_{0,3}x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Chọn C.

Ví dụ 23: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2^x}+\log_3\left(x^2-2x\right)$ là:

A. $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $D=(2;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $x^2-2x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ 24: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{3^x-1}+\log_{0,3}\left(4-x^2\right)$ là:

A. $D=(-2;2)$. **B.** $D=(0;2)$.

C. $D=[-2;2]$. **D.** $D=[0;2)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}3^x-1\ge 0\\4-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x\ge 3^0\\-2<x<2\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x<2$.

Chọn D.

Ví dụ 25: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{2^x+1}+\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{4-x}$ là

A. $D=(-\infty;4)$. **B.** $D=(-\infty;4)\setminus\{0\}$.

C. $D=(-\infty;4)\setminus\{-1\}$. **D.** $D=(4;+\infty)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 2^x \neq -1 \\ \dfrac{1}{4-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 4$.

Chọn A.

Ví dụ 26: Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left(x^2 - 16\right) + \log_3\left(3^{x-1} - 9\right)$ là:

A. $D = (-4;4)$.

B. $D = (-\infty;4) \cup \left(4;+\sqrt{2}\right)$.

C. $D = (3;4)$.

D. $D = (4;+\infty)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} x^2 - 16 > 0 \\ 3^{x-1} - 3^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -4 \end{array}\right. \\ x - 1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$.

Chọn D.

Ví dụ 27: Tập xác định của hàm số $y = \log_\pi\left(2^x - 2\right) + \log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{3 - x^2}$ là:

A. $D = \left[1;\sqrt{3}\right]$.

B. $D = \left(1;\sqrt{3}\right)$.

C. $D = \left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

D. $D = \left(-\sqrt{3};1\right)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 2^x > 2 \\ \dfrac{1}{3 - x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{3}$

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left(1;\sqrt{3}\right)$.

Chọn B.

Ví dụ 28: Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{3}{\log_3 x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$ là:

A. $D = (0;+\infty) \setminus \{9\}$.

B. $D = (0;+\infty) \setminus \{1\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1;9\}$.

D. $D = (0;+\infty) \setminus \{1;9\}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} x>0 \\ \log_3 x \neq 2 \\ \sqrt{2^{x-1}} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Chọn D.

Ví dụ 29: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{-2x^2+5x-2}+\ln\dfrac{1}{x^2-1}$ là:

A. $D=(1;2)$. **B.** $D=[1;2]$.

C. $D=[1;2)$. **D.** $D=(1;2]$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} -2x^2+5x-2 \geq 0 \\ \dfrac{1}{x^2-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\leq 2$.

Chọn D.

Ví dụ 30: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1-\log(2x-1)}$ là:

A. $D=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right)$. **B.** $D=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right)$.

C. $D=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 2x-1>0 \\ \log(2x-1)\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 2x-1\leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x\leq\dfrac{11}{2}$. Do đó $D=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right]$.

Chọn D.

Ví dụ 31: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\ln(ex^2)-2}$ là:

A. $D=\left(\sqrt{e};+\infty\right)$. **B.** $D=(0;+\infty)$.

C. $D=\left(\dfrac{e}{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(-\infty;\sqrt{e}\right)\cup\left(\sqrt{e};+\infty\right)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} ex^2 > 0 \\ \ln\left(ex^2\right) - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ 1 + \ln x^2 - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ \ln x^2 \ge 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2 \ge e \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \sqrt{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}; +\infty\right).$$

Do đó $D = \left(-\infty; \sqrt{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}; +\infty\right)$.

Chọn D.

Chú ý: $\ln x^2 = 2\ln|x|$ không được phép biến đổi $\ln x^2 = 2\ln x$.

Ví dụ 32: Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left(\log_3 x - 1\right)$ là:

A. $D = (0; +\infty)$.

B. $D = (3; +\infty)$.

C. $D = (1; +\infty)$.

D. $D = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

Chọn B.

Ví dụ 33:[Trích đề thi THPT QG năm 2017]. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$

A. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $D = (-2; 3)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải:

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -2 \end{array}\right. \Rightarrow D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ 34: Đạo hàm của hàm số $y = 3^x.x^3$ là:

A. $y' = \left(\ln 3^x + 3\right).x^2.3^x$.

B. $y' = (\ln 3 + 3).x^2.3^x$

C. $y' = (x\ln 3 + 3).x^3.3^x$.

D. $y' = \left(\ln 3^x + 1\right).x^3.3^x$.

Lời giải:

$y' = 3^x \ln 3.x^3 + 3^x.3x^2 = x^2.3^x\left(x\ln 3 + 3\right) = x^2.3^x.\left(\ln 3^x + 3\right)$.

Chọn A.

Ví dụ 35: [Đề MH THPQ QUỐC GIA 2017]. Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$

A. $y'=x.13^{x-1}$.

B. $y'=13^x\ln 13$.

C. $y'=13^x$.

D. $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=13^x\ln 13$.

Chọn B.

Ví dụ 36 :[Đề MH THPT QUỐC GIA 2017]. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

B. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

D. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải:

Ta có:

$$y'=\frac{4^x-(4^x)'.(x+1)}{(4^x)^2}=\frac{4^x-4^x\ln 4.(x+1)}{4^{2x}}=\frac{4^x\left[1-2(x+1)\ln 2\right]}{4^{2x}}=\frac{1-2(x+1)\ln 2}{4^x}$$

Hay $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Chọn A.

Ví dụ 37: [Trích đề thi THPT QG năm 2017]. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$

A. $y'=\dfrac{2}{2x+1}$.

B. $y'=\dfrac{1}{2x+1}$.

C. $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

D. $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$.

Lời giải:

Ta có: $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$.

Chọn C.

Ví dụ 38 : Đạo hàm của hàm số $y=3^{x^2+3x+2}$ là:

A. $y'=(2x+3).3^{x^2+3x+1}$.

B. $y'=(2x+3).(x^2+3x+2).3^{x^2+3x+2}$.

C. $y'=(2x+3).3^{x^2+3x+1}.\ln 3$.

D. $y'=(2x+3).3^{x^2+3x+2}.\ln 3$.

Lời giải:

Ta có: $y'=3^{x^2+3x+2}.\ln 3.(x^2+3x+2)'=(2x+3).3^{x^2+3x+2}.\ln 3$.

Chọn D.

Ví dụ 39 : Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)e^x$ là:

A. $y'=(x+1)^2.e^x$.

B. $y'=(x-1)^2.e^x$.

C. $y'=(x^2+x+1).e^x$.

D. $y'=(x^2+x+1).e^x$.

Lời giải:

Ta có : $y'=2x.e^x+(x^2+1).e^x=(x+1)^2.e^x$.

Chọn A.

Ví dụ 40 : Đạo hàm của hàm số $y=e^{x^2}.\sin x$ là:

A. $y'=e^{x^2}(2x\sin x-\cos x)$.

B. $y'=e^{x^2}(2x\sin x+\cos x)$.

C. $y'=e^{x^2}(\sin x-\cos x)$.

D. $y'=e^{x^2}(\sin x+\cos x)$.

Lời giải:

Ta có : $y'=e^{x^2}.2x.\sin x+e^{x^2}.\cos x=e^{x^2}(2x\sin x+\cos x)$.

Chọn B.

Ví dụ 41: Đạo hàm của hàm số $y=2^x.3^x$ là:

A. $y'=6^x\ln 6$.

B. $y'=3^x\ln 3+2^x\ln 2$.

C. $y'=3^x\ln 2+2^x\ln 3$.

D. $y'=6^x\ln\frac{3}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y=2^x.3^x=(2.3)^x=6^x\Rightarrow y'=6^x\ln 6$.

Chọn A.

Ví dụ 42: Đạo hàm của hàm số $y = e^x.\tan x$ là:

A. $y' = (\tan x + 1)^2.e^x$.

B. $y' = (\tan^2 x + \tan x + 1).e^x$.

C. $y' = (\tan x + \cos^2 x)e^x$.

D. $y' = e^x\left(\tan x - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$.

Lời giải:

Ta có : $y' = e^x.\tan x + e^x.\dfrac{1}{\cos^2 x} = e^x(\tan x + 1 + \tan^2 x)$.

Chọn B.

Ví dụ 43: Đạo hàm của hàm số $y = e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}$ là:

A. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

C. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

D. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = e^{\sqrt{x}}.(\sqrt{x})' - e^{-\sqrt{x}}.(-\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Chọn A.

Ví dụ 44: Đạo hàm của hàm số $y = \ln^3 x$ là:

A. $y' = 3\ln^2 x$.

B. $y' = \dfrac{\ln^2 x}{3x}$.

C. $y' = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$.

D. $y' = \dfrac{3\ln x}{x}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3\ln^2 x.(\ln x)' = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$.

Chọn C.

Ví dụ 45: Đạo hàm của hàm số $y = \log_4(x^2 + x + 2)$ là:

A. $y' = \dfrac{2\ln 2}{x^2 + x + 2}$.

B. $y' = \dfrac{2(2x+1)\ln 2}{x^2 + x + 2}$.

C. $y' = \dfrac{2x+1}{2(x^2 + x + 2)\ln 2}$.

D. $y' = \dfrac{2x+1}{(x^2 + x + 2)\ln 2}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{\left(x^2+x+2\right)'}{\left(x^2+x+2\right)\ln 4}=\dfrac{2x+1}{2\left(x^2+x+2\right)\ln 2}$.

Chọn C.

Ví dụ 46: Đạo hàm của hàm số $y=\log_{\frac{3}{2}}|x|$ là:

A. $y'=\dfrac{-1}{x(\ln 3-\ln 2)}$.

B. $y'=\dfrac{1}{|x|(\ln 3-\ln 2)}$.

C. $y'=\dfrac{1}{x(\ln 3-\ln 2)}$.

D. $y'=\dfrac{3}{2x(\ln 3-\ln 2)}$.

Lời giải:

Ta có: $y=\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2}=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}x^2\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2x}{x^2\ln\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{x(\ln 3-\ln 2)}$.

Chọn C.

Chú ý : Ta có: $y=\ln|f(x)|\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Ví dụ 47: Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(xe^x+1\right)$ là:

A. $y'=\dfrac{(x+1)e^x}{xe^x+1}$.

B. $y'=\dfrac{1+e^x}{xe^x+1}$.

C. $y'=\dfrac{1}{xe^x+1}$.

D. $y'=\dfrac{(x+e)e^x}{xe^x+1}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{\left(xe^x+1\right)'}{xe^x+1}=\dfrac{e^x+xe^x}{xe^x+1}$.

Chọn A.

Ví dụ 48: Đạo hàm của hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}|2x-1|$ là:

A. $y'=\dfrac{1}{(2x-1)\ln 2}$.

B. $y'=\dfrac{4}{(2x-1)\ln 2}$.

C. $y'=\dfrac{2}{(2x-1)\ln 2}$.

D. $y'=\dfrac{1}{|2x-1|\ln 2}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{2}{(2x-1)\ln\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}(2x-1)\ln 2}=\dfrac{4}{(2x-1)\ln 2}$.

Chọn B.

Ví dụ 49: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin\left(x^2+1\right)}{2^x}$ là:

A. $\dfrac{\cos\left(x^2+1\right)-\ln 2.\sin\left(x^2+1\right)}{2^x}$.

B. $\dfrac{\cos\left(x^2+1\right)-\ln 2.\sin\left(x^2+1\right)}{4^x}$.

C. $\dfrac{2x\cos\left(x^2+1\right)-\ln 2.\sin\left(x^2+1\right)}{2^x}$.

D. $\dfrac{-2x\cos\left(x^2+1\right)-\ln 2.\sin\left(x^2+1\right)}{2^x}$.

Lời giải:

Ta có : $y'=\dfrac{\cos\left(x^2+1\right).2x.2^x-2^x\ln 2.\sin\left(x^2+1\right)}{4^x}=\dfrac{2x.\cos\left(x^2+1\right)-\ln 2.\sin\left(x^2+1\right)}{2^x}$

Chọn C.

Ví dụ 50: Đạo hàm của hàm số $y=\ln|x-2|+2^x$ là:

A. $y'=\dfrac{1}{|x-2|}+2^x\ln 2$.

B. $y'=\dfrac{1}{|x-2|}+2^x$.

C. $y'=\dfrac{1}{x-2}+2^x\ln 2$.

D. $y'=\dfrac{1}{x-2}+2^x$.

Lời giải:

Ta có $y=\ln\sqrt{(x-2)^2}+2^x=\dfrac{1}{2}\ln(x-2)^2+2^x$

Do đó $y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left[(x-2)^2\right]'}{(x-2)^2}+2^x\ln 2=\dfrac{1}{x-2}+2^x\ln 2$.

Chọn C.

Ví dụ 51: Đạo hàm của hàm số $y=(x+1)\ln^2 x$ là:

A. $y'=\ln^2 x+\dfrac{2\ln x}{x}(x+1)$.

B. $y'=\ln^2 x+2(x+1).\ln x$.

C. $y'=\ln^2 x+2\ln x$.

D. $y'=(x+1)^2.\ln x$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \ln^2 x + \left(\ln^2 x\right)'.(x+1) = \ln^2 x + \dfrac{2\ln x}{x}(x+1)$.

Chọn A.

Ví dụ 52: Đạo hàm của hàm số $y = e^x.\cos x$ là:

A. $y' = e^x(\cos x - \sin x)$.

B. $y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

C. $y' = e^x(\cos x + 1)$.

D. $y' = e^x \cos x(1 + \sin x)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = e^x.\cos x + e^x.(\cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x$.

Chọn A.

Ví dụ 53: Đạo hàm của hàm số $y = \ln\sqrt{x^2+2x+3}$ là:

A. $y' = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x+3}}$.

B. $y' = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

C. $y' = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

D. $y' = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$.

Lời giải:

Ta có: $y = \ln\sqrt{x^2+2x+3} = \ln\left(x^2+2x+3\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)$

Do đó $y' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3} = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$.

Chọn D.

Ví dụ 54: Đạo hàm của hàm số $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ là:

A. $y' = \dfrac{-1}{x^2-1}$.

B. $y' = \dfrac{1}{x^2-1}$.

C. $y' = \dfrac{1}{2\left(x^2-1\right)}$.

D. $y' = \dfrac{-1}{2\left(x^2-1\right)}$.

Lời giải:

Ta có: $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{1}{2}\left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right]$

Do đó $y' = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{-1}{x^2-1}$.

Chọn A.

Ví dụ 55: Đạo hàm của hàm số $y = x\log_3 x$ là:

A. $y' = \log_3 x + 1$.

B. $y' = \log_3 (xe)$.

C. $y' = \log_3 x + e$.

D. $y' = \log_3 x - \ln 3$.

Lời giải:

Ta có

$$y' = \log_3 x + x.(\log_3 x)' = \log_3 x + x\frac{1}{x\ln 3} = \log_3 x + \frac{1}{\ln 3} = \log_3 x + \log_3 e = \log_3 (xe).$$

Chọn B.

Ví dụ 56: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\ln x + 1}{x}$ là:

A. $y' = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

B. $y' = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

C. $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

D. $y' = \dfrac{2 - \ln x}{x^2}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \dfrac{\frac{1}{x}.x - (\ln x + 1)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

Chọn A.

Ví dụ 57: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ là:

A. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

B. $f'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

C. $f'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)$.

D. $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = \dfrac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Chọn A.

Ví dụ 58: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3.3^x$ là:

A. $f'(x) = (3 + \ln 3).x^2.3^x$.

B. $f'(x) = x^3.3^x(3 + x\ln 3)$.

C. $f'(x) = (3 + \ln 3^x)x^2.3^x$.

D. $f'(x) = x^3.3^x(3 + \ln 3)$.

Lời giải:

Ta có : $f'(x)=3x^2.3^x+x^3.3^x\ln 3=x^2.3^x(3+x\ln 3)$.

Chọn C.

Ví dụ 59: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\log_3(3^x+1)$ là:

A. $f'(x)=\dfrac{3^x\ln 3}{3^x+1}$.

B. $f'(x)=\dfrac{3^x}{3^x+1}$.

C. $f'(x)=\dfrac{3^x\ln^2 3}{3^x+1}$.

D. $f'(x)=\dfrac{3^x\ln 9}{3^x+1}$.

Lời giải:

Ta có : $f'(x)=\dfrac{(3^x+1)'}{(3^x+1)\ln 3}=\dfrac{3^x\ln 3}{(3^x+1)\ln 3}=\dfrac{3^x}{3^x+1}$.

Chọn B.

Ví dụ 60: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3^3 x$ là:

A. $y'=3\log_3^2 x$.

B. $y'=\dfrac{3\log_3^2 x}{x}$.

C. $y'=\dfrac{3\log_3^2 x}{x\ln 3}$.

D. $y'=\dfrac{3}{x\ln 3}$.

Lời giải:

Ta có : $y'=3\log_3^2 x.(\log_3 x)'=\dfrac{3\log_3^2 x}{x\ln 3}$.

Chọn C.

Ví dụ 61: Đạo hàm của hàm số $f(x)=3^x.\log_3 x$ là:

A. $f'(x)=3^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x\ln 3}\right)$.

B. $f'(x)=3^x\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln 3}\right)$.

C. $f'(x)=3^x\left(\ln x+\dfrac{\ln 3}{x}\right)$.

D. $f'(x)=3^x\left(\log_3 x+\dfrac{1}{x\ln 3}\right)$.

Lời giải:

Ta có : $f'(x)=3^x\ln 3.\log_3 x+\dfrac{3^x}{x\ln 3}=3^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x\ln 3}\right)$.

Chọn A.

Ví dụ 62: Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + e^{-x}$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $T = e + \frac{1}{e}$.

B. $T = e$.

C. $T = 2 + \frac{1}{e}$.

D. $T = 2 - e$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$

Ta có: $y(-1) = -1 + e; y(0) = 1; y(1) = 1 + \frac{1}{e}$. Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = 1; \max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = e - 1$

Vậy $T = e$.

Chọn B.

Ví dụ 63: Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = xe^x - 2e^x$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $T = e^2 - 1$.

B. $T = e^3 - e^2$.

C. $T = e^3 - e$.

D. $T = e^3 - 2$.

Lời giải:

Ta có: $y' = xe^x + e^x - 2e^x = xe^x - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;3]$

Ta lại có $y(0) = -2; y(1) = -e; y(3) = e^3$. Do đó $\min\limits_{[0;3]} y = -e; \max\limits_{[0;3]} y = e^3$

Vậy $T = e^3 - e$.

Chọn C.

Ví dụ 64. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{e^x}{x}$ trên đoạn $[1;2]$ là:

A. $P = \frac{e^2}{2}$.

B. $P = \frac{e^3}{2}$.

C. $P = \frac{e^3 + e}{2}$.

D. $P = \frac{e^3 - e}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[1;2]$

Ta có: $y(1) = e; y(2) = \frac{e^2}{2}$. Do đó $P = \frac{e^3}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 65: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{x^2-2x+3}$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. e^3-e.

B. e^3+e^2.

C. e^3 .

D. e^3+e.

Lời giải:

Ta có: $y'=e^{x^2-2x+3}.(2x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$. Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;2]$

Mặt khác $y(0)=e^3; y(1)=e^2; y(2)=e^3$. Do đó $\min\limits_{[0;3]} y=e^2; \max\limits_{[0;3]} y=e^3 \Rightarrow T=e^3+e^2$.

Chọn B.

Ví dụ 66: Cho hàm số $y=3^x+3^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0 và hàm số không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2 và giá trị lớn nhất của hàm số là 3.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2 và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Ta có: $y=3^x+\frac{1}{3^x} \geq 2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}}=2$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2 và hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Chọn D.

Ví dụ 67: Cho hàm số $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|2x-1|}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0 và hàm số không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số là 0.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1 và hàm số không có giá trị lớn nhất.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số là 1.

Lời giải:

Ta có: $|2x-1| \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{|2x-1|} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0=1$. Do đó giá trị lớn nhất của hàm số là 1 và hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn D.

Ví dụ 68: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}$ là:

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=2\sqrt{2};\max\limits_{\mathbb{R}} y=3$.

B. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=2;\max\limits_{\mathbb{R}} y=3$.

C. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3;\max\limits_{\mathbb{R}} y=3\sqrt{2}$.

D. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=2;\max\limits_{\mathbb{R}} y=3\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y=2^{1-\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}=\dfrac{2}{2^{\cos^2 x}}+2^{\cos^2 x}$. Đặt $t=2^{\cos^2 x}$, do $0\le\cos^2 x\le 1$ nên ta có $t\in[1;2]$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{t}+t$ có $f'(t)=\dfrac{-2}{t^2}+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\sqrt{2}\ (loai)\\ t=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Hàm số $f(t)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;2]$.

Lại có $f(1)=f(2)=3;f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$. Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=2\sqrt{2};\max\limits_{\mathbb{R}} y=3$.

Chọn A.

Ví dụ 69: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=4^x-2^{x+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $\min\limits_{[-1;1]} y=-\dfrac{3}{4};\max\limits_{[-1;1]} y=2$.

B. $\min\limits_{[-1;1]} y=-\dfrac{3}{4};\max\limits_{[-1;1]} y=0$.

C. $\min\limits_{[-1;1]} y=-1;\max\limits_{[-1;1]} y=1$.

D. $\min\limits_{[-1;1]} y=-1;\max\limits_{[-1;1]} y=0$.

Lời giải:

Ta có: $y=2^{2x}-2.2^x$. Đặt $t=2^x\Rightarrow t\in\left[2^{-1};2^1\right]=\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ ta có: $f'(t)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1$

Hàm số $f(t)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lại có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{4};f(1)=-1;f(2)=0$. Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y=-1;\max\limits_{[-1;1]} y=0$.

Chọn D.

Ví dụ 70: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=5^{\sqrt{x}}+5^{1-\sqrt{x}}$ trên đoạn $[0;1]$ là:

A. $\min\limits_{[0;1]} y=2\sqrt{5};\max\limits_{[0;1]} y=6$.

B. $\min\limits_{[0;1]} y=2\sqrt{5};\max\limits_{[0;1]} y=5$.

C. $\min\limits_{[0;1]} y=2;\max\limits_{[0;1]} y=6$.

D. $\min\limits_{[0;1]} y=2;\max\limits_{[0;1]} y=5$.

Lời giải:

Ta có: $y=5^{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{5^{\sqrt{x}}}$. Đặt $t=5^{\sqrt{x}}\Rightarrow t\in[1;5]$

Khi đó $f(t)=t+\dfrac{5}{t}\Rightarrow f'(t)=1-\dfrac{5}{t^2}=0\Rightarrow t=\sqrt{5}$.

Hàm số $f(t)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;5]$.

Ta có: $f(1)=6;f(\sqrt{5})=2\sqrt{5};f(5)=6$. Do đó $\min\limits_{[0;1]} y=2\sqrt{5};\max\limits_{[0;1]} y=6$.

Chọn A.

Ví dụ 71: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{e^2};e\right]$ là:

A. $T=e$.

B. $T=e-\dfrac{2}{e^2}$.

C. $T=\dfrac{-1}{e}-\dfrac{2}{e^2}$.

D. $T=e-\dfrac{1}{e}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\ln x+1=0\Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$. Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[\dfrac{1}{e^2};e\right]$

Mặt khác $y\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{-2}{e^2};y\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{-1}{e};y(e)=e$. Do đó $\min\limits_{\left[\frac{1}{e^2};e\right]} y=-\dfrac{1}{e};\max\limits_{\left[\frac{1}{e^2};e\right]} y=e$

Do đó $T=e-\dfrac{1}{e}$.

Chọn D.

Ví dụ 72: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{e};e^2\right]$ là:

A. $T=\dfrac{1}{e}$.

B. $T=\dfrac{1}{e}-e$.

C. $T=\dfrac{-1}{e}+\dfrac{2}{e^2}$.

D. $T=e-\dfrac{1}{e}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow x=e$. Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e^2\right]$.

Lại có $y\left(\frac{1}{e}\right)=-e; y(e)=\frac{1}{e}; y\left(e^2\right)=\frac{2}{e^2}$. Do đó $\min\limits_{\left[\frac{1}{e};e^2\right]} y=-e; \max\limits_{\left[\frac{1}{e};e^2\right]} y=\frac{1}{e}$

Do đó $T=\frac{1}{e}-e$.

Chọn B.

Ví dụ 73: Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x^2+3}-x\ln x$ trên đoạn $[1;2]$ là:

A. $\sqrt{7}-4\ln 2$.
B. $4\ln 2-2\sqrt{7}$.
C. $4\ln 2-4\sqrt{7}$.
D. $2\sqrt{7}-4\ln 2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1-\ln x=\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x<0\ \left(\forall x\in[1;2]\right)$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y=y(2)=\sqrt{7}-2\ln 2; \max\limits_{[1;2]} y=y(1)=2$

Do đó $P=2\sqrt{7}-4\ln 2$.

Chọn D.

Ví dụ 74: Cho hàm số $y=\ln(3-x)+\ln(x+1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $2\ln 2$.

C. Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $2\ln 2$.

D. Giá trị lớn nhất của hàm số là $2\ln 2$ và giá trị nhỏ nhất là 0.

Lời giải:

Ta có: $D=(-1;3)$ khi đó $y'=\frac{-1}{3-x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x-2}{(x-3)(x+1)}=0\Leftrightarrow x=1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=-\infty; y(1)=2\ln 2$. Do đó hàm số có giá trị lớn nhất là $2\ln 2$ và không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn B.

Ví dụ 75: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln\sqrt{2x^3-3x^2+2}$ trên đoạn $[1;3]$

A. $\min\limits_{[1;3]} y=1$.

B. $\min\limits_{[1;3]} y=0$.

C. $\min\limits_{[1;3]} y=-1$.

D. $\min\limits_{[1;3]} y=\ln\sqrt{6}$.

Lời giải:

Ta có: $y=\frac{1}{2}\ln\left(2x^3-3x^2+2\right)$ có $y'=\frac{1}{2}.\frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+2}\geq 0\ \left(\forall x\in[1;3]\right)$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $[1;3]$. Do đó $\min\limits_{[1;3]} y=y(1)=0$.

Chọn B.

Ví dụ 76: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^2\ln x$ trên đoạn $[0;2]$

A. $\min\limits_{[0;2]} y=\frac{-1}{2e};\max\limits_{[0;2]} y=4\ln 2$.

B. $\min\limits_{[0;2]} y=\frac{e}{2};\max\limits_{[0;2]} y=4\ln 2$.

C. $\min\limits_{[0;2]} y=0;\max\limits_{[0;2]} y=4\ln 2$.

D. $\min\limits_{[0;2]} y=0;\max\limits_{[0;2]} y=\frac{e}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=2x\ln x+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}\end{array}\right.$

Hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$

Mặt khác $y(0)=0;y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{-1}{2e};y(2)=4\ln 2$. Do vậy $\min\limits_{[0;2]} y=\frac{-1}{2e};\max\limits_{[0;2]} y=4\ln 2$.

Chọn A.

Ví dụ 77: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left(x^2+1\right)\ln x$ trên đoạn $[1;e]$

A. $\max\limits_{[1;e]} y=e^2+1$.

B. $\max\limits_{[1;e]} y=4e^2-1$.

C. $\max\limits_{[1;e]} y=0$.

D. Không tồn tại.

Lời giải:

Ta có: $y'=2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}>0\ \left(\forall x\in[1;e]\right)$ do đó hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[1;e]$

Do vậy $\max\limits_{[1;e]} y=y(e)=e^2+1$.

Chọn A.

Ví dụ 78: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln\left(x^2+x\right)$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $\ln 14$. **B.** $3\ln 2$.

C. $\ln 24$. **D.** $2\ln 3$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+1}>0\ \left(\forall x\in[1;3]\right)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[1;3]$.

Do đó $\min\limits_{[1;3]} y=y(1)=\ln 2;\max\limits_{[1;3]} y=y(3)=\ln 12\Rightarrow S=\ln 2+\ln 12=\ln 24$.

Chọn C.

Ví dụ 78: Cho hàm số $y=xe^x$. Đẳng thức nào sau đây là đúng.

A. $y''=2y'-y$. **B.** $y''=y'-2y$.

C. $y''=2xy'-y$. **D.** $y''=2y'-xy$.

Lời giải:

Ta có: $y'=e^x+xe^x\Rightarrow y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$.

Do đó $y''=2y'-y$.

Chọn A.

Ví dụ 80: Cho hàm số $y=x\sin x+\cos x$. Đẳng thức nào sau đây là đúng.

A. $y''=-y+2y'\cos x$ **B.** $y''=-y+2\cos x$

C. $y''=-xy+2y'\cos x$ **D.** $y''=-y^2+2xy'\cos x$

Lời giải:

Ta có: $y'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

Suy ra $y''=\cos x-x\sin x$. Do đó $y''=-y+2\cos x$.

Chọn B.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT 6083]

Câu 1 [282564]: Hàm số $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

B. Hàm số có đạo hàm $y'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

C. Hàm số tăng trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số giảm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 2 [282565]: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=\log_a x$ với $0<a<1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=\log_a x$ với $a>1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ $(0<a<1)$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

D. Hàm số $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

Câu 3 [282566]: Tìm tập xác định của hàm số $\sqrt{-2x^2+5x-2}+\ln\frac{1}{x^2-1}$ là:

A. $(1;2)$.

B. $[1;2)$.

C. $(1;2]$.

D. $[1;2]$.

Câu 4 [282567]: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x^x$ là:

A. $f'(x)=x\ln x$.

B. $f'(x)=x^x(\ln x+1)$.

C. $f'(x)=x^{x-1}(x+\ln x)$.

D. $f'(x)=x^x$.

Câu 5 [282568]: Tập xác định của hàm số $y=\log_3\frac{10-x}{x^2-3x+2}$ là:

A. $(1;+\infty)$.

B. $(-\infty;1)\cup(2;10)$.

C. $(-\infty;10)$.

D. $(2;10)$.

Câu 6 [282569]: Tìm tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{3-2x-x^2}{x+1}}$:

A. $D=\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$.

B. $D=\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right)$.

C. $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

D. $D=\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2};-3\right)\cup\left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2};1\right)$.

Câu 7 [282570]: Hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ khi:

A. $-2<m<2$.
B. $m<2$.
C. $m=2$.
D. $m<-2$.

Câu 8 [282571]: Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau :

A. Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ $(0<a<1)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung

B. Đồ thị hàm số $y=a^x$ $(0<a<1)$ luôn đi qua điểm $(a;1)$.

C. Hàm số $y=a^x$ với $(0<a<1)$ là một hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số $y=a^x$ với $a>1$ là một hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9 [282572]: Tập xác định của hàm số $\log_{\sqrt{3x+2}}\left(1-\sqrt{1-4x^2}\right)$ là:

A. $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$.
B. $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)\backslash\left\{-\frac{1}{3};0\right\}$.
C. $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)\backslash\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.
D. $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\backslash\left\{-\frac{1}{3};0\right\}$.

Câu 10 [282573]: Với $0<x<1$, ta có $(1-x)\sqrt[4]{\frac{1}{1-x^2}}$ bằng:

A. $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}$.
B. $-\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}$.
C. $\sqrt[4]{\frac{(1-x)^3}{1+x}}$.
D. $-\sqrt[4]{\frac{(1-x)^3}{1+x}}$.

Câu 11 [282575]: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x.\ln^2(1-x)$ là:

A. $f'(x)=2\cos 2x.\ln^2(1-x)-2\sin 2x.\ln(1-x)$.

B. $f'(x)=2\cos 2x.\ln^2(1-x)-\frac{2\sin 2x.\ln(1-x)}{1-x}$.

C. $f'(x)=2\cos 2x+2\ln^2(1-x)$.

D. $f'(x)=2\cos 2x.\ln^2(1-x)-\frac{2\sin 2x}{1-x}$.

Câu 12 [282577]: Tập xác định của hàm số $y=\left(-x^2-3x-2\right)^{-e}$ là:

A. $[-2;-1]$.

B. $(-1;-\infty)$.

C. $(-2;-1)$.

D. $(-\infty;-2)$.

Câu 13 [282578]: Cho $f(x)=\ln|\sin 2x|$. Thì $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ bằng:

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 14 [282580]: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{2^x-1}{5^x}$ là:

A. $x.\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}-x\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$.

B. $\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln 5$.

C. $x.\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}+x\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$.

D. $\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}+5^{-x}\ln 5$.

Câu 15 [282582]: Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=a^x$ với $a>1$ là một hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ là một hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

C. Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ $(0<a<1)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung.

D. Đồ thị hàm số $y=a^x$ $(0<a<1)$ luôn đi qua điểm $(a;1)$.

Câu 16 [282583]: Tìm khẳng định đúng:

A. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$.

B. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$

C. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

D. $-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2016}>-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

Câu 17 [282584]: Hàm số $y=x^2.e^x$ nghịch biến trên khoảng:

A. $(-\infty;-2)$.

B. $(1;+\infty)$.

C. $(-2;0)$.

D. $(-\infty;1)$.

Câu 18 [282585]: Cho hàm số $y=\frac{e^x}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $(0;1)$.

B. Hàm số tăng trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

C. Đạo hàm $y'=\frac{e^x}{(x+1)^2}$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $(0;1)$.

Câu 19 [282586]: Hàm số $y=x\ln x$ đồng biến trên khoảng:

A. $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$.

B. $(0;+\infty)$.

C. $\left(0;\frac{1}{e}\right)$.

D. $(0;1)$.

Câu 20 [282587]: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-3}$ là:

A. $x=1, x=\frac{2}{7}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

C. $x=-1, x=-\frac{2}{7}$.

D. $x=1, x=-\frac{2}{7}$.

Câu 21 [282588]: Hàm số $y=\log_2\frac{x+3}{2-x}$ có nghĩa khi:

A. $x\neq 2$.

B. $x<-3 \vee x>2$.

C. $-3\leq x<2$.

D. $-3<x<2$.

Câu 22 [282590]: Hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$:

A. Có một cực tiểu.

B. Có một cực đại.

C. Không có cực trị.

D. Có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 23 [282591]: Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$:

A. $f'(x)=\frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$.

B. $f'(x)=\frac{-5}{(e^x-e^{-x})^2}$.

C. $f'(x)=\frac{e^x}{(e^x-e^{-x})^2}$.

D. $f'(x)=e^x+e^{-x}$.

Câu 24 [282592]: Tìm giá trị nhỏ nhất cả hàm số $f(x)=2^{x-1}+2^{3-x}$

A. 4.

B. 6.

C. Đáp án khác.

D. -4.

Câu 25 [282593]: Tập xác định của hàm số
$f(x)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_8(x-1)^3$ là:

A. $1<x<3$

B. $x<3$.

C. $x>1$.

D. $-1<x<1$.

Câu 26 [282594]: Cho $\log_2 14=m$, tính $P=\log_{49}32$ theo m.

A. $P=3m-2$.

B. $P=\dfrac{5}{2m-2}$.

C. $P=3m+1$.

D. $P=\dfrac{1}{m-1}$.

Câu 27 [282595]: Cho hàm số $y=x^{\frac{\pi}{4}}$, các kết luận sau, kết luận nào **sai**?

A. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $M(1;1)$.

B. Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc tập xác định.

C. Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận.

Câu 28 [282597]: Chọn câu **sai:**

A. Hàm số $y=e^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ không chẵn không lẻ.

C. Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số lẻ.

D. Hàm số $y=e^x$ không chẵn cũng không lẻ.

Câu 29 [282598]: Cho hàm số $y=\left(\sqrt{17}-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x$. Khẳng định nào sau đây **sai:**

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

B. Giá trị gần đúng (với 3 chữ số thập phân) của hàm số tại $x=\sqrt{10}$ là 0,928.

C. Giá trị gần đúng (với 3 chữ số thập phân) của hàm số tại $x=3$ là 0,932.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 30 [282652]: Cho hàm số $y = ex + e^{-x}$. Nghiệm của phương trình $y' = 0$ là:

A. $x = 0$.
B. $x = \ln 2$.
C. $x = -1$.
D. $x = \ln 3$.

Câu 31 [282653]: Đối với hàm số $y = \ln\frac{1}{x+1}$, ta có:

A. $xy' - 1 = e^y$.
B. $xy' + 1 = e^y$.
C. $xy' + 1 = -e^y$.
D. $xy' - 1 = -e^y$.

Câu 32 [282657]: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|\log_{x^2+1}\left(4-x^2\right) + \log_{4-x^2}\left(x^2+1\right)\right|$ bằng:

A. 6.
B. 8.
C. 4.
D. 2.

Câu 33 [282658]: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$

A. π.
B. 2.
C. 2π.
D. 4.

Câu 34 [282660]: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2;0]$

A. 0.
B. 1.
C. $1 - 4\ln 2$.
D. $4 - 8\ln 2$.

Câu 35 [282661]: Cho hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$. Tìm khẳng định **đúng**:

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 36 [282662]: Cho $a > 0; a \neq 1$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là tập $\mathbb{R}$.

B. Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là tập $\mathbb{R}$.

C. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là khoảng $(0;+\infty)$.

D. Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là tập $\mathbb{R}$.

Câu 37 [282663]: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x(x-2)^2$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. e^2.

B. e^3.

C. 0.

D. e.

Câu 38 [282664]: Tính đạo hàm cấp hai y'' của hàm số $y=\ln(3x+2)$ là:

A. $y''=3\ln^2(3x+2)$.

B. $y''=\dfrac{-9}{3x+2}$.

C. $y''=\dfrac{-9}{(3x+2)^2}$.

D. $y''=\dfrac{3}{(3x+2)^2}$.

Câu 39 [282665]: Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\log_3(\sin 2x)$ là:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{2\tan 2x}{\ln 3}$.

B. $\dfrac{2x}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{2\cot 2x}{\ln 3}$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{2\cot 2x}{\ln 3}$.

D. $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{2\cot 2x}{\ln 3}$.

Câu 40 [282666]: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[5]{\ln 7x}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{5x\sqrt[5]{\ln^4 7x}}$.

B. $\dfrac{1}{35x\sqrt[5]{\ln^4 7x}}$.

C. $\dfrac{7}{5x\sqrt[5]{\ln^4 7x}}$.

D. $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\ln^4 7x}}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	02. D	03. C	04. B	05. B	06. B	07. A	08. A	09. D	10. C
11. B	12. C	13. A	14. D	15. C	16. B	17. C	18. D	19. A	20. B
21. D	22. B	23. A	24. A	25. A	26. B	27. D	28. B	29. B	30. C
31. B	32. D	33. D	34. C	35. C	36. D	37. C	38. C	39. C	40. A

Chủ đề 5

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

[TV6084-TV6085]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ta có các dạng bài thường gặp như sau:

+ Đưa về cùng cơ số hoặc lấy log hai vế.

+ Tư tưởng ẩn phụ.

+ Phương pháp hàm số và đánh giá.

Cụ thể vấn đề hơn, ta cùng đến với mục tiếp theo.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Dạng bài đưa về cùng cơ số hoặc lấy log hai vế

- Loại thứ nhất có dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, với hằng số $a > 0,\ a \neq 1$.

  Ta biến đổi $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

  Giải phương trình và đối chiếu với điều kiện.

- Loại thứ hai có dạng $a^{f(x)} = b$, với hằng số $a,\ b > 0,\ a \neq 1$.

  Ta biến đổi $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

  Trường hợp $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm luôn.

  Giải phương trình và đối chiếu với điều kiện.

Ví dụ 1. Giải phương trình $2^{x^2-3x+6} = 2^{x+3}$.

A. $x = 1,\ x = 2$. **B.** $x = -1,\ x = 2$.

C. $x = 1,\ x = 3$. **D.** $x = -1,\ x = 3$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ thỏa mãn (*).

Chọn C

Ví dụ 2. Biết rằng phương trình $2^{x^2-4x+2}=2^{x-4}$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $S=x_1^4+x_2^4$.

A. $S=17$. **B.** $S=97$.
C. $S=82$. **D.** $S=257$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-4x+2=x-4\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$ thỏa mãn (*)

Do đó $S=97$.

Chọn B

Ví dụ 3. Biết rằng phương trình $2^{x^2-x+4}=4^{x+1}$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 $(x_1>x_2)$. Tính giá trị của biểu thức $S=x_1^4+2x_2^4$.

A. $S=18$. **B.** $S=83$.
C. $S=258$. **D.** $S=33$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Ta có $2^{x^2-x+4}=4^{x+1}=\left(2^2\right)^{x+1}=2^{2(x+1)}$

$$\Leftrightarrow x^2-x+4=2(x+1)\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.\text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $\begin{cases}x_1=2\\x_2=1\end{cases}\Rightarrow S=18$.

Chọn A

Ví dụ 4. Giải phương trình $2^{x^2-x+9}=16^{x+1}$.

A. $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
C. $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$. **D.** $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Ta có $2^{x^2-x+9}=16^{x+1}=\left(2^4\right)^{x+1}=2^{4(x+1)}\Leftrightarrow x^2-x+9=4(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2-5x+5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn (*).

Chọn D

Ví dụ 5. Giải phương trình $2^{x^2-1}=\sqrt[4]{2^{10}}$.

A. $x=\pm\dfrac{\sqrt{35}}{5}$. **B.** $x=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

C. $x=\pm\dfrac{\sqrt{35}}{10}$. **D.** $x=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Ta có $2^{x^2-1}=\sqrt[4]{2^{10}}=2^{\frac{10}{4}}\Leftrightarrow x^2-1=\dfrac{10}{4}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ thỏa mãn (*).

Chọn B

Ví dụ 6. Giải phương trình $2^{x^2-10x+\frac{5}{2}}=8\sqrt{2}$.

A. $x=5\pm2\sqrt{6}$. **B.** $x=5\pm\sqrt{26}$.

C. $x=-5\pm2\sqrt{6}$. **D.** $x=-5\pm\sqrt{26}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Ta có $2^{x^2-10x+\frac{5}{2}}=8\sqrt{2}=2^3.2^{\frac{1}{2}}=2^{3+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{2}}$

$\Leftrightarrow x^2-10x+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{26}$ thỏa mãn (*).

Chọn B

Ví dụ 7. Giải phương trình $\left(27\sqrt{3}\right)^{x^2-x+1}=9^{x+1}$.

A. $x=\dfrac{10\pm\sqrt{35}}{12}$. **B.** $x=\dfrac{10\pm\sqrt{37}}{14}$.

C. $x=\dfrac{11\pm\sqrt{35}}{12}$. **D.** $x=\dfrac{11\pm\sqrt{37}}{14}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(3^3.3^{\frac{1}{2}}\right)^{x^2-x+1} = \left(3^2\right)^{x+1} \Leftrightarrow \left(3^{3+\frac{1}{2}}\right)^{x^2-x+1} = 3^{2(x+1)} \Leftrightarrow 3^{\frac{7}{2}\left(x^2-x+1\right)} = 3^{2(x+1)}$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}\left(x^2-x+1\right) = 2(x+1) \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{37}}{14} \text{ thỏa mãn (*).}$$

Chọn D

Ví dụ 8. Giải phương trình $2^{10x-1} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$.

A. $x = -\frac{7}{12}$. **B.** $x = -\frac{7}{11}$.

C. $x = -\frac{1}{2}$. **D.** $x = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 2^{10x-1} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{x+2} = \left(2^{-4}\right)^{x+2} = 2^{-4(x+2)}$

$$\Leftrightarrow 10x-1 = -4(x+2) \Leftrightarrow x = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} \text{ thỏa mãn (*).}$$

Chọn C

Ví dụ 9. Giải phương trình $(0,75)^{4x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2-x}$.

A. $x = -\frac{1}{3}$. **B.** $x = \frac{3}{5}$.

C. $x = \frac{1}{3}$. **D.** $x = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{4x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2-x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x-1 = x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ thỏa mãn (*).

Chọn A

Ví dụ 10. Biết rằng phương trình $4^{x-3}=10$ có nghiệm duy nhất dạng $a+b\log_2\sqrt{10}$, với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a^2+ab$.

A. $S=12$. **B.** $S=15$.
C. $S=9$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $x-3=\log_4 10\Leftrightarrow x=3+\log_4 10=3+\log_2\sqrt{10}$ thỏa mãn (*)

Do đó $\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow S=a^2+2b^2=11.$

Chọn A

Ví dụ 11. Biết rằng phương trình $2^{x^2-2x-1}=3$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1,\ x_2$. Tổng $x_1^2+x_2^2$ có dạng $a+b\log_2 3$, với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a^2+5ab$.

A. $S=45$. **B.** $S=96$.
C. $S=39$. **D.** $S=126$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-2x-1=\log_2 3\Leftrightarrow (x-1)^2=2+\log_2 3\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2+\log_2 3}$ thỏa mãn (*)

Do đó $x_1^2+x_2^2=\left(1+\sqrt{2+\log_2 3}\right)^2+\left(1-\sqrt{2+\log_2 3}\right)^2=2+2\left(2+\log_2 3\right)=6+2\log_2 3.$

Từ đó $\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}\Rightarrow S=96.$

Chọn B

Nhận xét

Ta cũng có thể tính $x_1^2+x_2^2$ theo cách khác như sau:

Ta có $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=2^2-2\left(-1-\log_2 3\right)=6+2\log_2 3.$

Ví dụ 12. Biết phương trình $2^{x+1}.5^x=15$ có nghiệm duy nhất dạng $a\log 5+b\log 3+c\log 2$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+2b+3c$.

A. $S=2$. **B.** $S=6$.
C. $S=4$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 2^x.5^x = \frac{15}{2} \Leftrightarrow (2.5)^x = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = \log_{10}\frac{15}{2}$.

Ta có $\log_{10}\frac{15}{2} = \log\frac{15}{2} = \log 15 - \log 2 = \log 5 + \log 3 - \log 2$.

Do đó $\begin{cases} a = b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow S = 0$.

Chọn D

Ví dụ 13. Giải phương trình $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 16$.

A. $x = 4 + \log_2 7$. **B.** $x = 2 + \log_2 7$.

C. $x = 4 - \log_2 7$. **D.** $x = 2 - \log_2 7$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 2^x + 2.2^x + 2^2.2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = \frac{16}{7} \Leftrightarrow x = \log_2\frac{16}{7}$ thỏa mãn (*)

Ta có $\log_2\frac{16}{7} = \log_2 16 - \log_2 7 = 4 - \log_2 7$.

Chọn C

Ví dụ 14. Giải phương trình $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 4.5^x$.

A. $x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{9}{20}$. **B.** $x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{20}{9}$.

C. $x = \log_{\frac{5}{2}}\frac{9}{20}$. **D.** $x = \log_{\frac{5}{2}}\frac{20}{9}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 2^4.2^x + 2^2.2^x = 5.5^x + 4.5^x \Leftrightarrow 20.2^x = 9.5^x$

$$\Leftrightarrow \frac{5^x}{2^x} = \frac{20}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{20}{9} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{2}}\frac{20}{9} \text{ thỏa mãn (*).}$$

Chọn D

Ví dụ 15. Biết rằng phương trình $\left(2+\sqrt{5}\right)^{x+1}=8\left(\sqrt{5}-2\right)^{2x-1}$ có nghiệm duy nhất dạng $\log_{2+\sqrt{5}}a$, với a là số thực dương. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $0<a<\frac{4}{5}$.

B. $5<a<9$.

C. $\frac{4}{5}<a<\frac{12}{5}$.

D. $3<a<\frac{7}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Ta có $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=1$ nên phương trình $\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{5}\right)^{x+1}=8\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^{2x-1}$

$$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{5}\right)^{x+1}.\left(2+\sqrt{5}\right)^{2x-1}=8\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{5}\right)^{x+1+2x-1}=8$$

$$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{5}\right)^{3x}=8\Leftrightarrow 3x=\log_{2+\sqrt{5}}8\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\log_{2+\sqrt{5}}8=\log_{2+\sqrt{5}}2 \text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $a=2$.

Chọn C

Ví dụ 16. Giải phương trình $3\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1}=\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2x}$.

A. $x=\frac{1-\log_{2+\sqrt{5}}3}{3}$.

B. $x=\frac{-1+\log_{2+\sqrt{5}}3}{3}$.

C. $x=\frac{1-\log_{2+\sqrt{5}}3}{5}$.

D. $x=\frac{-1+\log_{2+\sqrt{5}}3}{5}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Ta có $9+4\sqrt{5}=\left(2+\sqrt{5}\right)^2$ và $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=1$.

Phương trình $\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^{x+1}=\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^2\right]^{2x}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{4x}$

$$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{5}\right)^{4x}.\left(2+\sqrt{5}\right)^{x+1}=3\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{5}\right)^{4x+x+1}=3$$

$$\Leftrightarrow 5x+1=\log_{2+\sqrt{5}}3\Leftrightarrow x=\frac{-1+\log_{2+\sqrt{5}}3}{5} \text{ thỏa mãn (*).}$$

Chọn D

Ví dụ 17. Biết rằng phương trình $2^{2x}=5\sqrt{3^{x+1}}$ có nghiệm duy nhất dạng $a\log_{\frac{16}{3}}5+b\log_{\frac{16}{3}}3$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+2b$.

A. $S=4$. $S=3$.
C. $S=7$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow\left(2^{2x}\right)^2=25.3^{x+1}\Leftrightarrow 2^{4x}=25.3.3^x$

$$\Leftrightarrow\left(2^4\right)^x=75.3^x\Leftrightarrow 16^x=75.3^x\Leftrightarrow\left(\frac{16}{3}\right)^x=75\Leftrightarrow x=\log_{\frac{16}{3}}75 \text{ thỏa mãn (*)}$$

Ta có $\log_{\frac{16}{3}}75=\log_{\frac{16}{3}}25+\log_{\frac{16}{3}}3=2\log_{\frac{16}{3}}5+\log_{\frac{16}{3}}3$.

Do đó $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\Rightarrow S=4$.

Chọn A

Ví dụ 18. Biết rằng phương trình $9^{x^2-2x}.7^x=\frac{7}{9}$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1,\ x_2$. Tổng x_1+x_2 có dạng $\log_9\frac{a}{b}$, với $a,\ b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+2b$.

A. $S=95$. **B.** $S=169$.
C. $S=32$. **D.** $S=43$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 9^{x^2-2x+1}.7^{x-1}=1\Leftrightarrow\log_9\left(9^{x^2-2x+1}.7^{x-1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\log_9 9^{x^2-2x+1}+\log_9 7^{x-1}=0\Leftrightarrow x^2-2x+1+(x-1)\log_9 7=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x-1+\log_9 7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1-\log_9 7\end{array}\right.\text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $x_1+x_2=2-\log_9 7=\log_9 81-\log_9 7=\log_9\frac{81}{7}\Rightarrow\begin{cases}a=81\\b=7\end{cases}\Rightarrow S=95$.

Chọn A

Ví dụ 19. Biết rằng phương trình $2^x.3^{\frac{2x+1}{x+2}}=6$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $S=x_1+x_2$.

A. $S=\log_2\frac{3}{2}$. **B.** $S=\log_2\frac{2}{3}$.

C. $S=\log_3\frac{3}{2}$. **D.** $S=\log_3\frac{2}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq -2$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 2^{x-1}.3^{\frac{2x+1}{x+2}-1}=1\Leftrightarrow 2^{x-1}.3^{\frac{x-1}{x+2}}=1$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(2^{x-1}.3^{\frac{x-1}{x+2}}\right)=0\Leftrightarrow \log_3 2^{x-1}+\log_3 3^{\frac{x-1}{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\log_3 2+\frac{x-1}{x+2}=0\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{x+2}+\log_3 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x+2=-\dfrac{1}{\log_3 2}=\log_2 3 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2+\log_2 3 \end{array}\right. \text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $S=x_1+x_2=-1+\log_2 3=\log_2 3-\log_2 2=\log_2\frac{3}{2}$.

Chọn A.

Liên quan đến dạng 1, ta còn kiểu bài khác như sau:

Ví dụ 20. Phương trình $(x+2)^{x^2-5x+6}=1$ có số nghiệm là ?

A. 4. **B.** 2.

C. 3. **D.** 1.

Lời giải

+ TH1. $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

+ TH2. $x+2=1\Leftrightarrow x=-1$, thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

+ TH3. $x+2=-1\Leftrightarrow x=-3$, thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm là $x=-1$, $x=2$, $x=\pm 3$.

Chọn A

Ví dụ 21. Phương trình $\left(x^2+x-3\right)^{x^2-2x+3}=\left(x^2+x-3\right)^{x+1}$ có số nghiệm là ?

A. 6. **B.** 5.

C. 4. **D.** 7.

Lời giải

+ TH1. $x^2-2x+3=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

+ TH2. $x^2+x-3=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

+ TH3. $x^2+x-3=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

+ TH4. $x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Lưu ý, hàm số $y=x^\alpha$, với α không nguyên, có tập xác định là tập các số thực dương.

Do đó $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm là $x=1,\ x=\pm 2,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Chọn B

2. Dạng bài với tư tưởng ẩn phụ

- *Phương trình dạng* $Aa^{2x+m}+Ba^{x+n}+C=0$.

+ Ta biến đổi $Aa^m.\left(a^x\right)^2+Ba^na^x+C=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn $t=a^x>0$, ta bấm máy tính tìm nghiệm và đối chiếu với điều kiện.

+ Lưu ý biến dạng $a^{2x}=\left(a^2\right)^x$ và ta có thể biến x thành một hàm $f(x)$.

- *Phương trình dạng* $Aa^{3x+m}+Ba^{2x+n}+Ca^{x+p}+D=0$.

+ Ta biến đổi $Aa^m.\left(a^x\right)^3+Ba^n.\left(a^x\right)^2+Ca^p a^x+D=0.$

Coi đây là phương trình bậc ba ẩn $t=a^x>0,$ ta bấm máy tính tìm nghiệm và đối chiếu với điều kiện.

+ Lưu ý biến dạng $a^{2x}=\left(a^2\right)^x$, $a^{3x}=\left(a^3\right)^x$ và ta có thể biến x thành một hàm $f\left(x\right)$.

Tương tự như vậy đối với phương trình quy về phương bậc bốn.

• *Một số phương trình khác thì ta ẩn phụ với phản xạ quan sát, đặt ẩn phụ đưa về phương trình tích. Đôi khi ta cũng cần chia và biến đổi, đưa phương trình về dạng bậc hai, bậc ba.*

Ví dụ 1. Giải phương trình $2^{2x}-8.2^x+15=0.$

A. $x=\log_2 3,\ x=\log_2 15.$ **B.** $x=\log_2 3,\ x=-\log_2 15.$

C. $x=\log_2 3,\ x=\log_2 5.$ **D.** $x=\log_2 3,\ x=-\log_2 5.$

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-8.2^x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=3\\2^x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_2 3\\x=\log_2 5\end{array}\right.$ thỏa mãn (*).

Chọn C

Ví dụ 2. Biết rằng phương trình $4^x-8.2^x+15=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 $\left(x_1>x_2\right)$. Tính $S=x_1+2x_2$.

A. $S=\log_2 15.$ **B.** $S=\log_2 45.$

C. $S=\log_2 75.$ **D.** $S=\log_2 135.$

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow\left(2^2\right)^x-8.2^x+15=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-8.2^x+15=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=3\\2^x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_2 3\\x=\log_2 5\end{array}\right.\text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $\begin{cases}x_1=\log_2 5\\x_2=\log_2 3\end{cases}\Rightarrow S=\log_2 5+2\log_2 3=\log_2 5+\log_2 3^2=\log_2\left(5.9\right)=\log_2 45.$

Chọn B

Nhận xét

Phương trình trong ví dụ này đã biến dạng một chút so với phương trình trong ví dụ 1.

Ví dụ 3. Biết phương trình $3^{2x+1}-7.3^x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 $(x_1>x_2)$. Nghiệm x_1 có dạng $a+b\log_3 2$, với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a^4+2ab$.

A. $S=3$. **B.** $S=-1$.
C. $S=8$. **D.** $S=-3$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 3.3^{2x}-7.3^x+4=0 \Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2-7.3^x+4=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=\dfrac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_3\dfrac{4}{3}\end{array}\right. \text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $x=\log_3\dfrac{4}{3}=\log_3 4-\log_3 3=-1+2\log_3 2 \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases} \Rightarrow S=-3.$

Chọn D

Ví dụ 4. Biết rằng phương trình $3^x-5.3^{\frac{x}{2}}+4=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1,\ x_2$. Tính giá trị của biểu thức $S=|x_1-x_2|$.

A. $S=4\log_3 2$. **B.** $S=2\log_3\dfrac{4}{3}$.

C. $S=6\log_3 2$. **D.** $S=4\log_3\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2-5.3^{\frac{x}{2}}+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{\frac{x}{2}}=1\\3^{\frac{x}{2}}=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=0\\\dfrac{x}{2}=\log_3 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\log_3 4\end{array}\right.$ thỏa mãn (*)

Do đó $S=2\log_3 4=4\log_3 2$.

Chọn A

Ví dụ 5. Giải phương trình $3.9^x + 7.6^x - 6.4^x = 0$.

A. $x = 1 - \log_2 3$.

B. $x = -1 + \log_2 3$

C. $x = \log_3 2$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 3\left(\frac{9}{4}\right)^x + 7\left(\frac{6}{4}\right)^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{9}{4}\right)^x + 7\left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0.$

Lưu ý $\left(\frac{9}{4}\right)^x = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^x = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2$ nên $3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 + 7\left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -1 \text{ thỏa mãn (*).}$$

Chọn D

Ví dụ 6. Giải phương trình $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x - 4\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + 4 = 0$.

A. $x = -\log_{2+\sqrt{3}} 2$.

B. $x = \log_{2+\sqrt{3}} 2$.

C. $x = -\log_{2+\sqrt{3}} 4$.

D. $x = \log_{2+\sqrt{3}} 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2\right]^x - 4\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right]^2 - 4\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{2+\sqrt{3}} 2 \text{ thỏa mãn (*).}$$

Chọn D

Ví dụ 7. Biết rằng phương trình $2^{3x} - 3.2^{2x+1} + 11.2^x - 6 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Tính $S = x_1 + x_2 + x_3$.

A. $S = \log_2 24$.

B. $S = \log_2 12$.

C. $S = \log_2 18$.

D. $S = \log_2 6$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^3 - 3.2.\left(2^x\right)^2 + 11.2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \\ 2^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right.$ thỏa mãn (*)

Do đó $S = 1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$.

Chọn D

Nhận xét

Phương trình trong ví dụ 7 có thể biến dạng như sau: $8^x - 6.4^x + 11.2^x - 6 = 0$.

Ví dụ 8. Biết rằng phương trình $8^x - 6.12^x + 11.18^x - 6.27^x = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Tính $S = \dfrac{2}{x_1 + x_2 + x_3} + 3x_1x_2x_3$.

A. $S = 2 - 4\log_6 2$. **B.** $S = 2 - 4\log_6 3$.

C. $S = -2 + 4\log_6 2$. **D.** $S = -2 + 4\log_6 3$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\dfrac{8}{27}\right)^x - 6\left(\dfrac{12}{27}\right)^x + 11\left(\dfrac{18}{27}\right)^x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^x - 6\left(\frac{4}{9}\right)^x + 11\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^3 - 6\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x + 11\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^3 - 6\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 + 11\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_{\frac{2}{3}} 2 \\ x = \log_{\frac{2}{3}} 3 \end{array}\right. \text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $S = \dfrac{2}{\log_{\frac{2}{3}} 2 + \log_{\frac{2}{3}} 3} = \dfrac{2}{\log_{\frac{2}{3}} 6} = 2\log_6 \dfrac{2}{3} = 2\log_6 \dfrac{6}{3^2}$

$$= 2\left(\log_6 6 - \log_6 3^2\right) = 2\left(1 - 2\log_6 3\right) = 2 - 4\log_6 3.$$

Chọn B

Ví dụ 9. Giải phương trình $4^x + 5^x = 1 + 20^x$.

A. $x = \log_2 5$. **B.** $x = \log_4 5$.

C. $x = 0$. **D.** $x = \log_5 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Đặt $u = 4^x > 0,\ v = 5^x > 0 \Rightarrow 20^x = uv \Rightarrow u + v = 1 + uv$

$$\Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \Rightarrow 4^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ v = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{array}\right. \text{ thỏa mãn (*).}$$

Chọn C

Nhận xét

Đối với dạng phương trình này, ta cần lưu các kết quả sau

$$\left|\begin{array}{l} u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0 \\ u + 1 = uv + v \Leftrightarrow (u-1)(v+1) = 0 \\ uv + 4 = 2(u+v) \Leftrightarrow (u-2)(v-2) = 0 \\ 2(uv+1) = 4u + v \Leftrightarrow (2u-1)(v-2) = 0 \end{array}\right.$$

Ví dụ 10. Phương trình $1 + 2^{8-5x} = 2^{x^2-5x+5} + 2^{3-x^2}$ có số nghiệm là ?

A. 4. **B.** 2.

C. 3. **D.** 1.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Để ý $(x^2 - 5x + 5) + (3 - x^2) = 8 - 5x$.

Đặt $x^2 - 5x + 5 = a,\ 3 - x^2 = b$, ta được $1 + 2^{a+b} = 2^a + 2^b$

$$\Leftrightarrow 2^a(2^b - 1) - (2^b - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^a - 1)(2^b - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 5 = 0 \\ 3 - x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$ thỏa mãn (*).

Chọn A

Ví dụ 11. Biết rằng phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+3\left(3-\sqrt{5}\right)^x=2^{x+2}$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 $\left(x_1>x_2\right)$. Nghiệm x_1 có dạng $\log_{\frac{a+b\sqrt{5}}{2}}9$, với a, $b\in\mathbb{N}^*$. Tính $S=a^4+10ab$.

A. $S=2611$. **B.** $S=2681$.
C. $S=2422$. **D.** $S=2429$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Đặt $a=\left(3+\sqrt{5}\right)^x>0$, $b=\left(3-\sqrt{5}\right)^x>0\Rightarrow ab=\left[\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)\right]^x=4^x$.

Ta có $2^{x+2}=2^2.2^x=4.2^x\Rightarrow 2^{x+2}=4\sqrt{ab}$.

Phương trình đã cho thành $a+3b=4\sqrt{ab}$.

Thực tế đây là phương trình đẳng cấp, ta có thể chia cả hai vế cho $b>0$ như sau:

$$\frac{a}{b}+3=4\sqrt{\frac{a}{b}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{a}{b}}=1\\ \sqrt{\frac{a}{b}}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=9b\end{array}\right.$$

+ TH1. $a=b\Rightarrow\left(3+\sqrt{5}\right)^x=\left(3-\sqrt{5}\right)^x\Leftrightarrow\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$ thỏa mãn (*)

+ TH2. $a=9b\Rightarrow\left(3+\sqrt{5}\right)^x=9\left(3-\sqrt{5}\right)^x$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)^x=9\Leftrightarrow\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x=9\Leftrightarrow x=\log_{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}9 \text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $x_1=\log_{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}9\Rightarrow\begin{cases}a=7\\ b=3\end{cases}\Rightarrow S=2611$.

Chọn A

Ví dụ 12. Biết rằng phương trình $5^{3x}+9.5^x+\frac{27}{125^x}+\frac{27}{5^x}=64$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 $\left(x_1<x_2\right)$. Tính $S=x_1+2x_2$.

A. $S=\log_5 18$. **B.** $S=\log_5 9$.
C. $S=\log_5 3$. **D.** $S=\log_5 15$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(5^x\right)^3 + 9.5^x + \dfrac{27}{\left(5^3\right)^x} + \dfrac{27}{5^x} = 64 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^3 + 9.5^x + \dfrac{27}{\left(5^x\right)^3} + \dfrac{27}{5^x} = 64.$

Đặt $t = 5^x > 0 \Rightarrow t^3 + 9t + \dfrac{27}{t^3} + \dfrac{27}{t} = 64 \Leftrightarrow t^3 + \left(\dfrac{3}{t}\right)^3 + 9\left(t + \dfrac{3}{t}\right) = 64.$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{3}{t}\right)^3 - 3t.\frac{3}{t}\left(t + \frac{3}{t}\right) + 9\left(t + \frac{3}{t}\right) = 64 \Leftrightarrow \left(t + \frac{3}{t}\right)^3 = 64$$

$$\Leftrightarrow t + \frac{3}{t} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ t = 3 \Rightarrow 5^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_5 3 \end{array}\right. \text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \log_5 3 \end{cases} \Rightarrow S = 2\log_5 3 = \log_5 9.$

Chọn B

3. Phương pháp hàm số và đánh giá

Ví dụ 1. Phương trình $2^x = 3 - x$ có số nghiệm là ?

A. 2. **B.** 3.
C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 2^x + x - 3 = 0$ (1)

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x - 3$, với $x \in \mathbb{R}$ có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó trên $\mathbb{R}$ phương trình $f(x) = 0$ nếu có nghiệm thì sẽ có nghiệm duy nhất.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Chọn C

Nhận xét

Ta có thể giải phương trình (1) bằng cách khác như sau:

+ Với $x > 1 \Rightarrow$ VT (1) $> 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow$ Loại

+ Với $x < 1 \Rightarrow$ VT (1) $< 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow$ Loại

+ Với $x = 1$, ta thấy đã thỏa mãn (1) nên (1) $\Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ 2. Phương trình $4^x+2^x(x-7)-4x+12=0$ có số nghiệm là ?

A. 2. **B.** 1.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Đặt $t=2^x>0$, phương trình đã cho thành $t^2+(x-7)t-4x+12$ (1)

Coi ( ) là phương trình bậc hai ẩn t, ta có

$$\Delta=(x-7)^2-4(-4x+12)=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0.$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{7-x+(x+1)}{2}=4 \\ t=\dfrac{7-x-(x+1)}{2}=3-x \end{array}\right.$

+ TH1. $t=4\Rightarrow 2^x=4\Leftrightarrow x=2.$

+ TH2. $t=3-x\Rightarrow 2^x=3-x$, theo ví dụ trên ta được $x=1$.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$, $x=2$.

Chọn A

Ví dụ 3. Biết rằng phương trình $2^{2x^2-4x+3}-2^{x^2+x-2}+3(x^2-5x+5)=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 $(x_1>x_2)$. Nghiệm x_1 có dạng $\dfrac{a+b\sqrt{5}}{2}$, với a, $b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a^4+10ab$.

A. $S=11$. **B.** $S=-9$.

C. $S=575$. **D.** $S=675$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Để ý $(2x^2-4x+3)-(x^2+x-2)=x^2-5x+5$.

Ta biến đổi phương trình $\Leftrightarrow 2^{2x^2-4x+3}+3(2x^2-4x+3)=2^{x^2+x-2}+3(x^2+x-2)$

$$\Leftrightarrow f(2x^2-4x+3)=f(x^2+x-2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+3t$, với $t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=2^t\ln 2+3>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) $\Leftrightarrow 2x^2-4x+3=x^2+x-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow S=675.$

Chọn D

Ví dụ 4. Phương trình $2^{x^2+1}+3^{x^2+2}=5(\sin x+\cos x)$ có số nghiệm là ?

A. 2. **B.** 1.

C. 0. **D.** 3.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Ta có $2^{x^2+1}+3^{x^2+2}\ge 2^{0+1}+3^{0+2}=11,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Mà $5(\sin x+\cos x)\le 5(1+1)=10,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 2^{x^2+1}+3^{x^2+2}>5(\sin x+\cos x) \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Chọn C

Ví dụ 5. Phương trình $2^x+3^x=\dfrac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}+1}$ có số nghiệm là ?

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Điều kiện: $0\le x\le 4$ (*)

Khi đó $2^x+3^x\ge 2^0+3^0=2.$

Ta có

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)^2=4+2\sqrt{x(4-x)}\ge 4 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{4-x}\ge 2 \Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}+1}\le\dfrac{5}{3}<2$

$\Rightarrow 2^x+3^x>\dfrac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}+1} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Chọn A

Ví dụ 6. Phương trình $2^x+2^{-x}=\dfrac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+1}$ có số nghiệm là ?

A. 2. **B.** 1.

C. 0. **D.** 3.

Lời giải

Điều kiện: $0 \le x \le 1$ (*)

Ta có $2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} \ge 2\sqrt{2^x.\frac{1}{2^x}} = 2.$

Lại có $\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2 = 1+2\sqrt{x(1-x)} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{1-x} \ge 1 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+1} \le 2$

$\Rightarrow 2^x + 2^{-x} \ge \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+1}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0.$

Thử lại, ta thấy $x = 0$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Chọn B

Ví dụ 7. Phương trình $2^{x+\frac{1}{x}} + 2^{4x+\frac{1}{x}} = 18$ có số nghiệm là ?

A. 3. **B.** 2.
C. 1. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $x \ne 0$ (*)

+ TH1. $x < 0$, ta có $x + \frac{1}{x} < 0,\ 4x + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} + 2^{4x+\frac{1}{x}} < 2^0 + 2^0 < 18$

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

+ TH2. $x > 0$, ta có $2^{x+\frac{1}{x}} + 2^{4x+\frac{1}{x}} \ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{x}}} + 2^{2\sqrt{4x.\frac{1}{x}}} = 2^2 + 2^4 = 20 > 18$

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Chọn D

Ví dụ 8. Phương trình $2^{x+\frac{1}{x}} + 2^{x^3+\frac{3}{x}} = 18$ có số nghiệm là ?

A. 1. **B.** 3.
C. 2. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $x \ne 0$ (*)

+ TH1. $x < 0$, ta có $x + \frac{1}{x} < 0,\ x^3 + \frac{3}{x} < 0 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} + 2^{x^3+\frac{3}{x}} < 2^0 + 2^0 < 18$

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

+ TH2. $x>0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$2^{x^3+\frac{3}{x}}+2^{x+\frac{1}{x}}=18 \text{ và } x^3+\frac{3}{x}=x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq 4\sqrt[4]{x^3.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}}=4$$

$\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}+2^{x^3+\frac{3}{x}}\geq 2^2+2^4>18\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Chọn D

4. Bài toán có chứa tham số

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực.

A. $m\geq 1$. **B.** $m\geq 0$.
C. $m>0$. **D.** $m\neq 0$.

(Trích đề thi THPT Quốc gia năm 2017)

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow m>0$.

Chọn C

Ví dụ 2. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3^x+m^2=10m-9$ có nghiệm thực ?

A. 7. **B.** 9.
C. 6. **D.** 10.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow 3^x=-m^2+10m-9$ (1)

Phương trình (1) có nghiệm thực $\Leftrightarrow -m^2+10m-9>0\Leftrightarrow m^2-10m+9<0\Leftrightarrow 1<m<9$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Chọn A

Ví dụ 3. Cho phương trình $\frac{1}{2^{|x-1|}}=m-1$ (m là tham số thực) có nghiệm duy nhất.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $1<m<2$. **B.** $2\leq m<4$.
C. $m>2$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Trước hết ta cần có $m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.

Khi đó $\frac{1}{2^{|x-1|}}=m-1 \Leftrightarrow 2^{|x-1|}=\frac{1}{m-1} \Leftrightarrow |x-1|=\log_2\frac{1}{m-1}$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \log_2\frac{1}{m-1}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{m-1}=1 \Leftrightarrow m=2$.

Chọn B

Nhận xét

Nếu đề bài cho phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\log_2\frac{1}{m-1}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{m-1}>1$.

Kết hợp với $m>1$ ta được $m-1<1 \Leftrightarrow m<2$ nên $1<m<2$.

Ví dụ 4. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $m\left(2^x+3^x\right)=3^{x+1}-2^{x+2}$ có nghiệm thực ?

A. 8. **B.** 5.

C. 7. **D.** 6.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow (m+4).2^x=(3-m).3^x \Leftrightarrow (m+4).\left(\frac{2}{3}\right)^x=3-m$ (1)

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thực $\Leftrightarrow (m+4)(3-m)>0 \Leftrightarrow -4<m<3$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

Chọn D

Ví dụ 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (0;+\infty)$. **B.** $m \in (0;1]$.

C. $m(-\infty;1)$. **D.** $m \in (0;1)$.

(Trích đề thi THPT Quốc gia năm 2017)

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2.2^x + m = 0.$

Đặt $t = 2^x > 0$, ta được $t^2 - 2t + m = 0$ (1)

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm thực dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ t_1 + t_2 = 2 > 0 \\ t_1 t_2 = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Chọn C

Ví dụ 6. Cho phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $4 < m \le 6$. **B.** $m > 6$.
C. $2 < m \le 4$. **D.** $0 < m \le 2$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2m.2^x + 2m = 0.$

Đặt $t = 2^x > 0$, ta được $t^2 - 2mt + 2m = 0$ (1)

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm thực dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1 t_2 = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-2) > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \qquad (*)$$

Ta có $x_1 + x_2 = \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2\left(t_1 t_2\right) = \log_2\left(2m\right) = 4 \Leftrightarrow m = 8$ thỏa mãn (*).

Chọn B

Ví dụ 7. Cho phương trình $4^x - (m+3).2^x + m + 2 = 0$ (m là tham số thực dương) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 9$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $1 < m \le 3$. **B.** $3 \le m < 5$.
C. $0 < m \le 1$. **D.** $m > 5$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - (m+3).2^x + m + 2 = 0.$

Ta thấy $1-(m+3)+m+2=0$ nên $\left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = m+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2^x = m+2 \end{array}\right.$

Từ đó $2^x = m+2$ cần phải có nghiệm thực khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ m+2 \neq 2^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m \neq -1 \end{cases}$ (*)

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2(m+2) \end{array}\right. \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \left[\log_2(m+2)\right]^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(m+2) = 3 \\ \log_2(m+2) = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2 = 2^3 \\ m+2 = 2^{-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -\dfrac{15}{8} \end{array}\right. \text{ thỏa mãn (*)}$$

Kết hợp với $m>0$ đề bài cho thì ta được $m=6$ thỏa mãn.

Chọn D

Ví dụ 8. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0;10]$ để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 4(m-1) = 0$ có hai nghiệm thực dương phân biệt.

A. 9. **B.** 8.

C. 10. **D.** 11.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2m.2^x + 4(m-1) = 0.$

Đặt $t = 2^x > 0$, ta được $t^2 - 2mt + 4(m-1) = 0$ (1)

Để ý $\Delta' = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = m-(m-2) = 2 \\ t = m+(m-2) = 2m-2 \end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = 2m-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2^x = 2m-2 \end{array}\right.$

Khi đó $2^x = 2m-2$ cần phải có nghiệm thực dương khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2>2^0 \\ 2m-2 \neq 2^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{3}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [0;10] \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Chọn B

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP [TT6086]

Câu 1: [562612] Phương trình $3^{x^2-5x+4}=81^x$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{9\pm\sqrt{65}}{2}$.
B. $x=9\pm\sqrt{65}$.
C. $x=3\pm\sqrt{65}$.
D. $x=-3\pm\sqrt{65}$.

Câu 2: [562614] Phương trình $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$ có tích hai nghiệm là:

A. $x=-2\sqrt{3}$.
B. $x=2\sqrt{3}$.
C. $x=3$.
D. $x=-3$.

Câu 3: [562615] Tổng các nghiệm của phương trình $16^{\frac{x+10}{x-10}}=0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$ là:

A. 0.
B. 10.
C. 20.
D. 25.

Câu 4: [562616] Phương trình $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$ có nghiệm là:

A. $x=9$.
B. $x=6$.
C. $x=4$.
D. $x=3$.

Câu 5: [562617] Phương trình $x^2.2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2.2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$ có nghiệm là:

A. $x=\pm\frac{1}{2}$, $x\geq 3$.
B. $x=\pm\frac{1}{4}$, $x<3$.
C. $x=\pm 1$, $x<3$.
D. Đáp án khác.

Câu 6: [562619] Phương trình $2^{x^2-4}=8^{2x+m}$ có nghiệm duy nhất khi:

A. $m=-\frac{13}{3}$.
B. $m\geq-\frac{13}{3}$.
C. $m=-\frac{25}{12}$.
D. $m<\frac{5}{3}$.

Câu 7: [562621] Phương trình $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}=\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ có hai nghiệm là x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Giá trị của biểu thức $S=x_1^2+2x_2^3$ là:

A. $-5+10\sqrt{5}$.
B. $5+10\sqrt{5}$.
C. $5-10\sqrt{5}$.
D. 15.

Câu 8: [562623] Phương trình $2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+m}=0$ có nghiệm nguyên khi:

A. $m=0$. **B.** $m=1$.
C. $m=2$. **D.** $m=5$.

Câu 9: [562626] Phương trình $\left(x^2-2x+2\right)^{\sqrt{9-x^2}}=\sqrt[3]{x^2-2x+2}$ có số nghiệm dương là ?

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 10: [562627] Phương trình $\left(2^{|\cos x|}+x^2\right)^{\frac{x+1}{x}}=\sqrt{2^{|\cos x|}+x^2}$ có nghiệm là:

A. $x=-2$. **B.** $x=0$.
C. $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$ **D.** Đáp án khác.

Câu 11: [562628] Nghiệm của phương trình $2^{x+1}.4^{x-1}.\frac{1}{8^{1-x}}=16^x$ là:

A. $x=4$. **B.** $x=6$.
C. $x=8$. **D.** $x=2$.

Câu 12: [562629] Giả sử a là nghiệm dương của phương trình $2^{x^2-x+8}=4^{4+x}$. Giá trị của biểu thức $M=a^2+2^a+1$ là:

A. 18. **B.** 3.
C. 16. **D.** 13.

Câu 13: [562630] Tập nghiệm của phương trình $5.5^{-2\sin^2 x}+4.5^{\cos 2x}=25^{\frac{1}{2}\sin 2x}$ là:

A. $\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\left\{k\pi;-\frac{\pi}{4}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 14: [562631] Số nghiệm của phương trình $2.5^{x+1}-5^x=2^{x+1}+2^{x+3}$ là:

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 15: [562633] Phương trình $2^{x^2-3x+2}+2^{2x^2+6x+5}=2^{x^2-3x+2}.2^{2x^2+6x+5}+1$ có tổng bình phương các nghiệm là:

A. 5. **B.** 9.
C. 12. **D.** 27.

Câu 16: [562634] Số nghiệm không âm của phương trình $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{3x+1}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{5x+8}$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 0. **D.** 3.

Câu 17: [562636] Số nghiệm dương của phương trình $2^{x^2+x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4=0$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 0. **D.** 3.

Câu 18: [562637] Gọi a là nghiệm của phương trình $3^x=3.\sqrt{3^{3x+1}}$. Giá trị của biểu thức $a+2^a$ bằng ?

A. $-\frac{22}{3}$. **B.** $-\frac{12}{3}$.

C. 3. **D.** $-\frac{23}{8}$.

Câu 19: [562638] Bạn Hoa giải phương trình $(x-3)^{3x^2-5x+2}=\left(x^2-6x+9\right)^{x^2+x-4}$ theo các bước dưới đây.

Bước 1: Phương trình được biến đổi về dạng $(x-3)^{3x^2-5x+2}=\left[(x-3)^2\right]^{x^2+x-4}$.

Bước 2: $\Leftrightarrow (x-3)^{3x^2-5x+2}=(x-3)^{2\left(x^2+x-4\right)}$.

Bước 3: $\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=2\left(x^2+x-4\right)\Leftrightarrow x^2-7x+10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=5\end{array}\right.$

Bước 4: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=4$ và $x=5$.

Bạn Hoa đã giải sai từ bước nào ?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 20: [562639] Một bạn giải phương trình $\left(2+x-x^2\right)^{\sin x}=\left(2+x-x^2\right)^{2-\sqrt{3}\cos x}$ theo các bước sau:

Bước 1: Phương trình $\Leftrightarrow \left(2+x-x^2-1\right)\left(\sin x-2+\sqrt{3}\cos x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2-x-1=0 & (1)\\ \sin x+\sqrt{3}\cos x=2 & (2)\end{array}\right.$

Bước 2: Giải (1) ta được $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bước 3: Giải (2) ta được

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi.$$

Bước 4: Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{\pi}{6}+k2\pi\right\}$.

Hỏi bạn đó đã giải sai từ bước nào ?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 21: [562640] Tổng các nghiệm của phương trình $3^x+9\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-4=0$ là:

A. 2. **B.** 1.

C. -1. **D.** 0.

Câu 22: [562641] Phương trình $3^{2x+1}-4.3^x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $x_1+x_2=-2$. **B.** $x_1x_2=-1$.

C. $2x_1+x_2=0$. **D.** $x_1+2x_2=-1$.

Câu 23: [562642] Tổng giá trị các nghiệm của phương trình $(x-1)^{x^2+x-1}=(x-1)^{3x+2}$ là:

A. 3. **B.** 4.

C. 5. **D.** 2.

Câu 24: [562643] Nghiệm của phương trình $5^{x+1}-5^x=2.2^x+8.2^x$ là:

A. $x=1$. **B.** $x=\log_{\frac{5}{2}}\frac{8}{3}$.

C. $x=\log_{\frac{5}{2}}4$. **D.** $x=\log_{\frac{5}{2}}\frac{5}{3}$.

Câu 25: [562644] Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là:

A. 2. **B.** 1.

C. 3. **D.** 0.

Câu 26: [562645] Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$ là:

A. $\{4\}$. **B.** $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$.

C. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. **D.** $\{1\}$.

Câu 27: [562646] Phương trình $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3.5^{\lg x-1}-13.7^{\lg x-1}$ có nghiệm là:

A. $x=100$.

B. $x=\frac{1}{10}$.

C. $x=10$.

D. $x=1$.

Câu 28: [562647] Số nghiệm của phương trình: $2^{2+x}-2^{2-x}=15$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 29: [562648] Nghiệm của phương trình $3^{x-1}.5^{\frac{2x-2}{x}}=45$ là:

A. $x=1$.

B. $x=1$. $x=-\log_2 5$.

C. $x=3$, $x=\log_3 5$.

D. $x=4$.

Câu 30: [562649] Phương trình $2^x+2^{x+1}=4$ có nghiệm là:

A. $x=\log_2 3-2$.

B. $x=\log_2 3-1$.

C. $x=1-\log_2 3$.

D. $x=2-\log_2 3$.

Câu 31: [562650] Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Giá trị của biểu thức $A=2x_1+3x_2$ là:

A. 0.

B. 2.

C. $4\log_2 3$.

D. $3\log_3 2$.

Câu 32: [562651] Gọi a là nghiệm của phương trình $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2x}.3^{3x+1}=\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $a+2^a$ bằng ?

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Câu 33: [562653] Phương trình $64.9^x-84.12^x+27.16^x=0$ có nghiệm là:

A. $x=-1$, $x=-2$.

B. Vô nghiệm.

C. $x=1$, $x=2$.

D. $x=\frac{9}{16}$, $x=\frac{3}{4}$.

Câu 34: [562654] Số nghiệm của phương trình $9^x+2.3^x-3=0$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Câu 35: [562655] Tổng giá trị các nghiệm của phương trình $8^{\frac{x+1}{2x-1}} = 4.\sqrt{2^x}$ là:

A. 2.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 10.

D. -10.

Câu 36: [562657] Nghiệm của phương trình $e^{6x} - 3e^{3x} + 2 = 0$ là:

A. $x = -1,\ x = \frac{1}{3}\ln 2$.

B. Đáp án khác.

C. $x = 0,\ x = -1$.

D. $x = 0,\ x = \frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 37: [562659] Tập nghiệm của phương trình $9^{x^2+1} - 3^{x^2+1} - 6 = 0$ là:

A. $\{-2;0;2\}$.

B. $\{0\}$.

C. $\{-1;1\}$.

D. $\{-1;0;1\}$.

Câu 38: [562660] Phương trình $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Câu 39: [562662] Tập nghiệm của phương trình $2.2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} = 3$ là:

A. $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 40: [562663] Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $7^{x^2-5x+9} = 343$. Tổng $x_1 + x_2$ là:

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Câu 41: [562664] Phương trình $9^{x+1} - 6^{x+1} = 3.4^x$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 1.

B. 2.

C. Vô nghiệm.

D. 3.

Câu 42: [562665] Phương trình $4^x - 3.2^x - 4 = 0$ có nghiệm là:

A. Vô nghiệm.
B. $x = 1,\ x = 4$.
C. $x = -1,\ x = 4$.
D. $x = 2$.

Câu 43: [562666] Tìm nghiệm của phương trình $3.2^{x+1} + 5.2^x - 2^{x+2} = 21$.

A. $x = 16$.
B. $x = 8$.
C. $x = \log_2 3$.
D. $x = 3$.

Câu 44: [562667] Nghiệm của phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}$ là:

A. $x = 1,\ x = -\frac{2}{7}$.
B. $x = 1,\ x = \frac{2}{7}$.
C. $x = -1,\ x = -\frac{2}{7}$.
D. $x = -1,\ x = \frac{2}{7}$.

Câu 45: [562668] Phương trình $3^x.5^{\frac{2x-2}{x}} = 45$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a và b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Tổng $a + 2b$ bằng ?

A. 8.
B. 5.
C. 13.
D. 3.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	02. D	03. C	04. A	05. D	06. A	07. B	08. C	09. C	10. A
11. D	12. A	13. D	14. B	15. A	16. C	17. A	18. D	19. C	20. A
21. B	22. D	23. C	24. A	25. A	26. C	27. A	28. D	29. B	30. D
31. D	32. C	33. C	34. C	35. B	36. D	37. B	38. A	39. C	40. A
41. A	42. D	43. C	44. B	45. C					

Chủ đề 6

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

[TV8087]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Về cơ bản thì các dạng bài về bất phương trình mũ như các dạng bài về phương trình mũ. Chủ đề này ta cần lưu ý thêm một số vấn đề sau:

- *Bất phương trình dạng* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $(a>0,\ a\neq 1)$

  + Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

  + Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

- *Bất phương trình dạng* $a^x > b$ $(a>0,\ a\neq 1)$

  + Nếu $b\leq 0$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

  + Nếu $a>1,\ b>0$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

  + Nếu $0<a<1,\ b>0$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

- *Bất phương trình dạng* $a^x < b$ $(a>0,\ a\neq 1)$

  + Nếu $b\leq 0$ thì $a^x < b \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

  + Nếu $a>1,\ b>0$ thì $a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

  + Nếu $0<a<1,\ b>0$ thì $a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $2^{x^2-9x+6} > 2^{x-3}$.

A. $1<x<9$. **B.** $x>1$.

C. $x<9$. **D.** $x>9$ hoặc $x<1$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2-9x+6>x-3 \Leftrightarrow x^2-10x+9<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>9 \\ x<1 \end{array}\right. \Rightarrow$ Đáp án đúng là D

Chọn D

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-6x+4} > \left(\frac{2}{3}\right)^{4x-5}$

A. $1<x<9$.
B. $x>1$.
C. $x<9$.
D. $x>9$ hoặc $x<1$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2-6x+4<4x-5 \Leftrightarrow x^2-10x+9<0 \Leftrightarrow 1<x<9$.

Chọn A

Ví dụ 3. Bất phương trình $3^{x^2-6x-16} < 9^{x+2}$ có số nghiệm nguyên là ?

A. 11.
B. 9.
C. 10.
D. 12.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Ta có $9^{x+2} = \left(3^2\right)^{x+2} = 3^{2(x+2)}$, bất phương trình $\Leftrightarrow 3^{x^2-6x-16} < 3^{2(x+2)}$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-16<2(x+2) \Leftrightarrow x^2-8x-20<0 \Leftrightarrow -2<x<10.$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Chọn A

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $2^{3x-1} > 5$.

A. $x > \frac{1+\log_5 2}{3}$.
B. $x > \frac{1+\log_2 5}{3}$.
C. $x > \frac{1+\log_5 2}{3}$.
D. $x > \frac{1+\log_2 5}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x-1>\log_2 5 \Leftrightarrow x > \frac{1+\log_2 5}{3}$.

Chọn B

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $(e-2)^{2x-1} > 2$.

A. $x > \dfrac{1+\log_{e-2} 2}{2}$.

B. $x < \dfrac{1+\log_{e-2} 2}{2}$.

C. $x > \dfrac{1-\log_{e-2} 2}{2}$.

D. $x < \dfrac{1-\log_{e-2} 2}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2x-1 < \log_{e-2} 2 \Leftrightarrow x < \dfrac{1+\log_{e-2} 2}{2}$.

Chọn B

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $2^x + 2^{x+1} > 3^{x+1} + 3^{x+2}$.

A. $x < \log_{\frac{3}{2}} \dfrac{1}{4}$.

B. $x > \log_{\frac{3}{2}} 4$.

C. $x < \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{1}{4}$.

D. $x > \log_{\frac{2}{3}} 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^x + 2.2^x > 3.3^x + 9.3^x$

$$\Leftrightarrow 3.2^x > 12.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{4}.$$

Chọn A

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $2^x.3^{x+1} > 5$.

A. $x > \log_5 \dfrac{5}{3}$.

B. $x > \log_5 \dfrac{3}{5}$.

C. $x > \log_6 \dfrac{5}{3}$.

D. $x > \log_6 \dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^x.3^x > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow (2.3)^x > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x > \log_6 \dfrac{5}{3}$.

Chọn C

Ví dụ 8. Bất phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^{4x} > \left(1+\sqrt{2}\right)^{x^2+3}$ có số nghiệm nguyên là ?

A. 1. **B.** 3.

C. 2. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{4x}} > \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+3}.\left(\sqrt{2}+1\right)^{4x} < 1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+4x+3} < 1 \Leftrightarrow x^2+4x+3<0 \Leftrightarrow -3<x<-1.$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=-2.$

Chọn A

Ví dụ 9. Bất phương trình $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x} > \left(1+\sqrt{2}\right)^{x^2+2x+3}$ có số nghiệm nguyên là ?

A. 1. **B.** 3.

C. 2. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]^x > \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+2x+3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^{2x} > \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+2x+3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}} > \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+2x+3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+2x+3}.\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} < 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+2x+3+2x} < 1 \Leftrightarrow x^2+4x+3<0 \Leftrightarrow -3<x<-1.$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=-2.$

Chọn A

Ví dụ 10. Bất phương trình $4^x - 5.2^{x+1} + 9 < 0$ có số nghiệm nguyên là ?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 10.2^x + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 9 \Leftrightarrow 0 < x < \log_2 9.$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$

Chọn C

Nhật xét

Biến dạng của bất phương trình trên như sau $2^{2x}-5.2^{x+1}+9<0$.

Ví dụ 11. Bất phương trình $2^x-5.2^{\frac{x+2}{2}}+9<0$ có số nghiệm nguyên là ?

A. 3. **B.** 6.

C. 4. **D.** 5.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^x-5.2^{1+\frac{x}{2}}+9<0\Leftrightarrow 2^x-10.2^{\frac{x}{2}}+9<0$

$$\Leftrightarrow\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2-10.2^{\frac{x}{2}}+9<0\Leftrightarrow 1<2^{\frac{x}{2}}<9\Leftrightarrow 0<\frac{x}{2}<\log_2 9\Leftrightarrow 0<x<2\log_2 9.$$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Chọn B

Ví dụ 12. Giải bất phương trình $4^x+3^{2x}>2.6^x$.

A. $x>0$. **B.** $x\neq 0$.

C. $-1<x<0$. **D.** $0<x<1$.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+\left(3^x\right)^2>2.2^x.3^x\Leftrightarrow\left(2^x-3^x\right)^2>0\Leftrightarrow 2^x-3^x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$.

Chọn B

Ví dụ 13. Bất phương trình $1+2^{7-2x}>2^{5-x^2}+2^{x^2-2x+2}$ có số nghiệm nguyên là ?

A. 7. **B.** 4.

C. 6. **D.** 5.

Lời giải

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ (*)

Để ý $\left(5-x^2\right)+\left(x^2-2x+2\right)=7-2x$.

Đặt $5-x^2=a$, $x^2-2x+2=b$, ta được $1+2^{a+b}>2^a+2^b$

$$\Leftrightarrow 2^a\left(2^b-1\right)-\left(2^b-1\right)>0\Leftrightarrow\left(2^a-1\right)\left(2^b-1\right)>0.$$

Lưu ý $b=x^2-2x+2=\left(x-1\right)^2+1\geq 1\Rightarrow 2^b\geq 2>1$ nên $2^a\geq 1\Leftrightarrow a\geq 0$.

Do đó $5-x^2\geq 0\Leftrightarrow -\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}$ mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{\pm 2;\pm 1;0\}$.

Chọn D

Ví dụ 14. [Trích đề tham khảo lần 1 năm 2017 của BGD & ĐT]

Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai ?

A. $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0.$ **B.** $f(x)<1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0.$

C. $f(x)<1 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0.$ **D.** $f(x)<1 \Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0.$

Lời giải

Xét đáp án A thì $f(x)<1 \Leftrightarrow 2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<\log_2 1$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0 \Rightarrow \text{Loại A}$$

Lưu ý $x\ln 2+x^2\ln 7<0 \Leftrightarrow x+x^2.\dfrac{\ln 7}{\ln 2}<0 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0 \Rightarrow$ Loại B

$$x\log_7 2+x^2<0 \Leftrightarrow x+x^2.\frac{1}{\log_7 2}<0 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0 \Rightarrow \text{Loại C}$$

Đến đây, ta đã chọn được ngay D là đáp án đúng.

Khi xét đáp án A ở trên thì $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0.$

Trên $\mathbb{R}$ thì $x+x^2\log_2 7<0$ không tương đương với $1+x\log_2 7<0.$

Chọn D

Ví dụ 15. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{6^{x^2}}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai ?

A. $f(x)>1 \Leftrightarrow x\log_6 9>x^2.$ **B.** $f(x)>1 \Leftrightarrow x\ln 9>x^2\ln 6.$

C. $f(x)>1 \Leftrightarrow x>x^2\log_9 6.$ **D.** $f(x)>1 \Leftrightarrow x<\log_6 9.$

Lời giải

Ta có $f(x)>1 \Leftrightarrow \dfrac{9^x}{6^{x^2}}>1 \Leftrightarrow 9^x>6^{x^2}.$

Xét đáp án A thì $f(x)>1 \Leftrightarrow \log_6 9^x>\log_6 6^{x^2} \Leftrightarrow x\log_6 9>x^2 \Rightarrow$ Loại A

Lưu ý $f(x)>1 \Leftrightarrow x\ln 9>x^2\ln 6 \Leftrightarrow x.\dfrac{\ln 9}{\ln 6}>x^2 \Leftrightarrow x\log_6 9>x^2 \Rightarrow$ Loại B

$$x>x^2\log_9 6 \Leftrightarrow x.\frac{1}{\log_9 6}>x^2 \Leftrightarrow x\log_6 9>x^2 \Rightarrow \text{Loại C}$$

Đến đây, ta đã chọn được ngay D là đáp án đúng.

Khi xét đáp án A ở trên thì $f(x)>1 \Leftrightarrow x\log_6 9>x^2.$

Trên $\mathbb{R}$ thì $x\log_6 9>x^2$ không tương đương với $x<\log_6 9.$

Chọn D

Ví dụ 16. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $2^x - m^2 + 10m - 9 > 0$ nghiệm đúng với mọi x.

A. 9. B. 7.

C. 10. D. 8.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^x > m^2 - 10m + 9$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 10m + 9 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 9$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Chọn A

Ví dụ 17. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $m.4^x + 4(m-1).2^x + m - 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi x.

A. $0 < m < 4$. **B.** $0 < m \le 1$.

C. $1 < m < 4$. **D.** $m \ge 1$.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Đặt $t = 2^x > 0$, ta được $mt^2 + 4(m-1)t + m - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow m(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1 \Leftrightarrow m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1} \Leftrightarrow m > 1 - \frac{t^2}{t^2+4t+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = 1 - \dfrac{t^2}{t^2+4t+1}$, với $t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = -\dfrac{2t(t^2+4t+1) - t^2(2t+4)}{(t^2+4t+1)^2}$.

Ta có $\begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ 4t^2 + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \varnothing$.

Bảng biến thiên:

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$		$1 \searrow$	0

Do đó ta được $m \ge f(0) = 1$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT8088]

Câu 1: [564647] Nghiệm của bất phương trình $3^{x-1} \le 9^{\sqrt{2x-5}}$ là $x \in [a;b]$. Tổng $a+b$ bằng?

A. $\frac{21}{2}$.
B. 8.
C. 10.
D. $\frac{19}{2}$.

Câu 2: [564648] Nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x > \left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2-1}$ là:

A. $0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
B. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$.
C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
D. $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 3: [564649] Nghiệm của bất phương trình $2^x - 2\sqrt{2^x+1} > 2$ là:

A. $x < 3$.
B. $x < 0$.
C. $x > 3$ hoặc $x < 0$.
D. $x > 3$.

Câu 4: [564650] Nghiệm của bất phương trình $9^x - 2.6^x + 4^x > 0$ là:

A. $x \in \mathbb{R}$.
B. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
C. $x > 0$.
D. $x \ge 0$.

Câu 5: [564651] Nghiệm của bất phương trình $(x-1)^x \ge (x-1)^{x^2-2}$ là:

A. $x < -1$.
B. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C. $x = 2$.
D. $x \in \varnothing$

Câu 6: [564652] Nghiệm của bất phương trình $4^{x-1} \ge 2^{x-2} + 3$ là:

A. $x > 3$.
B. $x \ge 1$.
C. $x \ge 2$.
D. $x \ge 3$.

Câu 7: [564653] Nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 5^x + 5^{x-1}$ là:

A. $x < \log_{\frac{2}{5}} \frac{26}{35}$.
B. $x > \log_{\frac{2}{5}} \frac{26}{35}$.
C. $x < \log_{\frac{2}{5}} \frac{6}{35}$.
D. $x > \log_{\frac{2}{5}} \frac{6}{35}$.

Câu 8: [564654] Nghiệm của bất phương trình $\frac{2^x - 1}{x-2} > 0$ là:

A. $x > 2$ hoặc $x < 0$.
B. $x > 2$.
C. $x > 0$.
D. $x > 1$ $x < 0$.

Câu 9: [564655] Bất phương trình $\left(x^2-x+1\right)^x>1$ có tập nghiệm là:

A. $x\in\mathbb{R}$.
B. $x\geq 2$.
C. $x\geq 1$.
D. $x>1$.

Câu 10: [564656] Bất phương trình nào trong các bất phương trình sau vô nghiệm ?

A. $4^x-2^{x+1}+1\leq 0$.
B. $4^x-3.2^x+2<0$.
C. $4^x+2^{x-3}+2<0$.
D. $4^x+3.2^x-2<0$.

Câu 11: [564657] Giải bất phương trình $5^{x+2}-2^{x+4}>5^{x+1}-2^{x+2}+2^{x+3}$.

A. $x>0$.
B. $x<0$.
C. $x>1$.
D. $x<1$.

Câu 12: [564658] Giải bất phương trình $9^x-\log_2 8<2.3^x$.

A. $x>0$.
B. $x<0$.
C. $x>1$.
D. $x<1$.

Câu 13: [564659] Giải bất phương trình $2^{25-8x}>1$.

A. $x>\frac{1}{2}$.
B. $x<\frac{1}{2}$.
C. $x>\frac{25}{8}$.
D. $x<\frac{25}{8}$.

Câu 14: [564660] Giải bất phương trình $8^{25x}>0,125$.

A. $x>-\frac{1}{25}$.
B. $x<-\frac{1}{25}$.
C. $x>\frac{25}{8}$.
D. $x<\frac{25}{8}$.

Câu 15: [564661] Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-25x+134}>25$.

A. $x>\frac{1}{25}$.
B. $x<\frac{1}{25}$.
C. $8<x<17$.
D. $x<8$ hoặc $x>17$.

Câu 16: [564662] Giải bất phương trình $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}<\log_2 2048+3^{\sqrt{x}-2}$.

A. $x<0$ hoặc $x\geq 4$.
B. $0\leq x<4$.
C. $0<x<4$.
D. $x<0$ hoặc $x>4$.

Câu 17: [564663] Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+9\left(\frac{1}{3}\right)^{2+\frac{1}{x}}>12.$

A. $x<-1$ hoặc $x\geq 0.$
B. $-1\leq x<0.$
C. $-1<x<0.$
D. $x<-1$ hoặc $x>0.$

Câu 18: [564664] Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}\geq 128.$

A. $x<-\frac{4}{3}.$
B. $x\leq -\frac{4}{3}.$
C. $x<\frac{1}{8}.$
D. $x\leq \frac{1}{8}.$

Câu 19: [564665] Giải bất phương trình $25.2^x-10^x+5^x>5^2.$

A. $x<0$ hoặc $x\geq 2.$
B. $0\leq x<2.$
C. $0<x<2.$
D. $x<0$ hoặc $x>2.$

Câu 20: [564666] Giải bất phương trình $e^{25-8x}<1.$

A. $x>\frac{8}{25e}.$
B. $x<\frac{8}{25e}.$
C. $x>\frac{25}{8}.$
D. $x<\frac{25}{8}.$

Câu 21: [564667] Giải bất phương trình $9^x-2.3^x+1>0.$

A. $x\neq 0.$
B. $x>0.$
C. $x\in\mathbb{R}.$
D. $2\leq x\leq 3.$

Câu 22: [564668] Giải bất phương trình $2.4^x-2^x+3^x-\left(\sqrt{3}\right)^x+2<0.$

A. $x\neq 0.$
B. $x\in\varnothing.$
C. $x>0.$
D. $x\in\mathbb{R}.$

Câu 23: [564669] Tìm nghiệm x nhỏ nhất thỏa mãn $27^x+12^x>2.8^x.$

A. $x=3.$
B. $x=-4.$
C. $x=0,23.$
D. $x=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$

Câu 24: [564670] Tìm độ dài tập nghiệm $[a;b]$ của bất phương trình $3^{\sqrt{x+1}}\geq 81\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{5-\frac{x}{4}}}.$

A. 25 đơn vị.
B. 20 đơn vị.
C. 32 đơn vị.
D. 17 đơn vị.

Câu 25: [564671] Giả sử $x > \alpha$ là nghiệm của bất phương trình $2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 > 0$.

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\alpha \le -4$.

B. $\alpha \in (-1;0)$.

C. $\alpha \in (2;4)$.

D. $\alpha > \sqrt{2}$.

Câu 26: [564672] Xét các tập hợp $A = [-12;5]$, B là tập hợp nghiệm của bất phương trình $4.3^{2x} - 9.2^{2x} \ge 5.6^x$. Tìm độ dài tập hợp $C = A \cap B$.

A. 3 đơn vị.

B. 2 đơn vị.

C. 1 đơn vị.

D. 6 đơn vị.

Câu 27: [564673] Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. $\log_2 5 > \log_2 3$.

B. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} > \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$.

C. $3\sqrt[3]{2} < 2\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{25}$.

D. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$.

Câu 28: [564674] Giả sử $x > \beta$ là nghiệm của bất phương trình $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{x+\frac{1}{3}} < \sqrt{8}$.

Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. β là một số hữu tỷ âm.

B. β là một số thập phân vô hạn tuần hoàn.

C. $6\beta \in \mathbb{Z}$.

D. $-\frac{1}{7} \le \beta \le 7$.

Câu 29: [564675] Giải bất phương trình $2^{x^2-3x+2} > 2^{2x-3}$.

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{5-2\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+2\sqrt{5}}{2}$.

C. $x > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

D. $x > \frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{5-2\sqrt{5}}{2}$.

Câu 30: [564676] Giải bất phương trình $0,6^{2x^2-4x+1} > 0,6^{x^2+x-4}$.

A. $\frac{5-2\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+2\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

C. $x > \frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{5-2\sqrt{5}}{2}$.

D. $x > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 31: [564677] Giải bất phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+2} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}$.

A. $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

B. $x > \frac{3+2\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{3-2\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{3-2\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+2\sqrt{5}}{2}$.

Câu 32: [564678] Giải bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+2} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{x+1}$.

A. $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

B. $x > \frac{3+2\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{3-2\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{3-2\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+2\sqrt{5}}{2}$.

Câu 33: [564679] Giải bất phương trình $2^{x^2-x+1} > 4^{x+1}$.

A. $x < 0$.

B. $x > 2$ hoặc $x < 0$.

C. $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

D. $x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ hoặc $x < \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Câu 34: [564680] Cho hàm số $f(x) = 2^x.7^{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai ?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + (x+1)\log_2 7 < 0$.

B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + 1 + x\log_7 2 < 0$.

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\ln 2 + (x+1)\ln 7 < 0$.

D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln 2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln 7 < 0$.

Câu 35: [564681] Cho hàm số $f(x) = \left(\sqrt{3}-1\right)^{x^3} - \left(\sqrt{3}-1\right)^{x^2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng ?

A. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > x^2$.

B. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

C. $f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

D. $f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 1 \end{cases}$

Câu 36: [564682] Cho hàm số $f(x) = 2^x.5^{x^2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai ?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\ln 2 + x^2\ln 5 < 0$.

B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2\log_2 5 < 0$.

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln 2 + x\ln 5 < 0$.

D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x^2 + x\log_5 2 < 0$.

Câu 37: [564683] Giải bất phương trình $2^{x^2}+3^{x^2}>\sin^4 x+\cos^4 x$.

A. $x\in\mathbb{R}$.

B. $x\in\varnothing$.

C. $0<x<\frac{\pi}{2}$.

D. $0<x<\pi$.

Câu 38: [564684] Giải bất phương trình $(\sin x+\cos x)^2\geq 2^{x^2}+3^{x^2}$.

A. $x\in\mathbb{R}$.

B. $x\in\varnothing$.

C. $0<x<\frac{\pi}{2}$.

D. $0<x<\pi$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	02. C	03. D	04. B	05. C	06. C	07. C	08. A	09. D	10. C
11. A	12. D	13. D	14. A	15. C	16. B	17. C	18. B	19. C	20. C
21. A	22. B	23. C	24. A	25. B	26. A	27. B	28. D	29. C	30. B
31. A	32. C	33. D	34. D	35. D	36. C	37. A	38. B		

Chủ đề 7

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

[TV8089-TV8090]

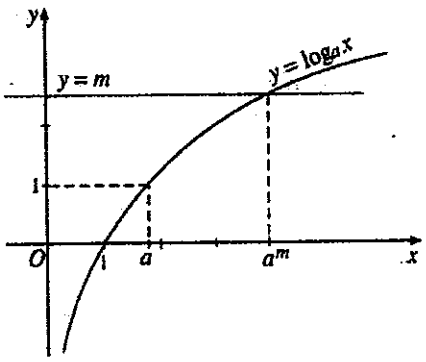
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. *Phương trình lôgarit cơ bản*

+ Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = m$, trong đó m là số đã cho.

Điều kiện xác định của phương trình này là $x > 0$.

Dễ thấy đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \log_a x$ tại đúng một điểm (hình vẽ).



Do đó, với mỗi giá trị tùy ý của m, phương trình $\log_a x = m$ luôn có một nghiệm duy nhất $x = a^m$.

Nói cách khác,

$$\forall m \in (-\infty; +\infty),\ \log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m.$$

2. *Giải phương trình lôgarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số*

Thường áp dụng các phép tính lôgarit để biến đổi, để hóa đồng cơ số hoặc để khử biểu thức lôgarit chứa ẩn số ta thường lấy mũ các vế. Ta áp dụng các công thức

Với $a > 0,\ a \neq 1$.

- $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N > 0$ hoặc $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0\ (g(x) \geq 0) \end{cases}$.
- $\log_a N = M \Leftrightarrow N = a^M$ hoặc $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

Ngoài ra, cần chú ý đến một số tính chất

- $\log_a b$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a > 0,\ a \neq 1 \end{cases}$.
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (công thức đổi cơ số).

- $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}.\log_a b \ \left(b \ge 0,\ a > 0,\ a \ne 1\right)$.
- $\log_a b^{2k} = 2k.\log_a |b|,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. *Giải phương trình lôgarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ*

Nếu một phương trình lôgarit sau khi rút gọn có dạng $f\left(\log_a \varphi(x)\right) = 0$ trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số theo x, ta sẽ đặt $t = \log_a \varphi(x)$ ta được một phương trình $f(t) = 0$, giải phương trình này nếu có nghiệm t, khi đó giải phương trình $\varphi(x) = a^t$ để tìm nghiệm x.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

A. Phương trình lôgarit giải bằng phương pháp đưa về cùng cơ số

Ví dụ 1: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

A. $S = \{4\}$. **B.** $S = \{3\}$.

C. $S = \{-2\}$. **D.** $S = \{1\}$.

Lời giải

Phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3 \dfrac{2x+1}{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{2x+1}{x-1} = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x+1 = 3(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$. Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 4$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Gọi n là số nghiệm của phương trình $\log_2 x^2 = 2\log_2(3x+4)$. Tìm n.

A. $n = 0$. **B.** $n = -1$.

C. $n = 2$. **D.** $n = 1$.

Lời giải

Sai lầm thường gặp của học sinh ở bài này là biến đổi $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$ nhưng với điều kiện của bài toán thì ta có $\log_2 x^2 = 2\log_2 |x|$.

Với điều kiện $x > -\frac{4}{3}$, phương trình $\log_2 x^2 = 2\log_2(3x+4) \Leftrightarrow 2\log_2|x| = 2\log_2(3x+4)$

$$\Leftrightarrow \log_2|x| = \log_2(3x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4>0 \\ |x| = 3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow n=1.$$

Chọn D.

Ví dụ 3: Phương trình $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$ có nghiệm duy nhất x_0 được biểu diễn dưới dạng $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{m}}$, với m, n là các số nguyên. Tính tỉ số $\frac{m}{n}$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$.

C. 2. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$. Phương trình $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} \Leftrightarrow \log_2 x + \log_{2^2} x = \log_{2^{-1}} \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = -\log_2 \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x + \log_2 \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \log_2\left(x^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}}\sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[n]{m}}$ suy ra tỉ số $\frac{m}{n} = \frac{3}{3} = 1$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Nghiệm của phương trình $\log_{x-2} 2x = 3$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình dưới đây ?

A. $2^{x^2-3x} = 32$. **B.** $x^2+4x-5=0$.

C. $x^3-4x^2+3=0$. **D.** $\log_2(x^2-8)=3$.

Lời giải

Phương trình $\log_{x-2} 2x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>0,\ x-2>0 \\ x-2 \neq 1 \\ 2x = (x-2)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2,\ x\neq 3 \\ (x-4)(x^2-2x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$.

Với $x=4$, thay lần lượt vào các đáp án, ta được $\log_2(x^2-8)=3$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Phương trình $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$ có tất cả bao nhiêu nghiệm trên tập số thực.

A. 2. **B.** 3.

C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$.

Áp dụng công thức $\lg a+\lg b=\lg(ab)$ và $\lg c-\lg d=\lg\frac{c}{d}$.

Ta được, phương trình $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5 \Leftrightarrow \lg(x-3)(x-2)=\lg 10-\lg 5=\lg 2$

$$\Leftrightarrow \lg\left(x^2-5x+6\right)=\lg 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ (x-4)(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=4$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1$

A. có hai nghiệm phân biệt. **B.** có nghiệm thuộc khoảng $(2;5)$.

C. có hai nghiệm trái dấu. **D.** có tổng hai nghiệm lớn hơn 7.

Lời giải

Trước khi mũ hóa, ta cần rút gọn vế trái của phương trình. Muốn vậy phải đưa các biểu thức chứa logarit về cùng một cơ số bằng các công thức đã biết, cụ thể là cơ số $\frac{1}{2}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ 7-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<7$. Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)-2\log_{\frac{1}{2}}(7-x)=1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)-\log_{\frac{1}{2}}(7-x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1}{(7-x)^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(7-x)^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+14x-51=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-17 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Chọn B.

Chú ý: Nếu chúng ta quên đặt điều kiện thì có thể sẽ lấy thêm nghiệm $x=-17$. Phải luôn nhớ rằng $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$ chỉ đúng khi $b>0,\ c>0$.

Ví dụ 7: Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $\dfrac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. x_0 là số chính phương. **B.** $x_0>50$.

C. x_0 là số một số lẻ. **D.** $x_0\in(41;50)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x+1\ge 0;\ \sqrt[3]{x-40}>0\\ \lg\sqrt[3]{x-40}\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1;\ x>40\\ x\ne 41\end{cases}\Leftrightarrow x\in(40;+\infty)$.

Khi đó, phương trình $\dfrac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3\Leftrightarrow\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\lg(x-40)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+1=x-40$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-41\Leftrightarrow\begin{cases}x>41\\ x+1=(x-41)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>41\\ x^2-83x+1680=0\end{cases}\Leftrightarrow x=48$$

Chọn D.

Ví dụ 8: Kí hiệu $x=-\overline{ab}$ là một nghiệm của phương trình $1+\log_6\dfrac{x-1}{x+7}=\dfrac{1}{2}\log_6(x-1)^2$, với $\overline{ab}$ là số tự nhiên có hai chữ số. Tính tổng $a+2b$.

A. 4. **B.** 5.

C. 7. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện: $\dfrac{x-1}{x+7}>0$.

Phương trình $1+\log_6\dfrac{x-1}{x+7}=\dfrac{1}{2}\log_6(x-1)^2\Leftrightarrow 1+\log_6\dfrac{x-1}{x+7}=\log_6|x-1|$.

$$\Leftrightarrow\log_6\frac{x-1}{x+7}-\log_6|x-1|=-1\Leftrightarrow\log_6\frac{x-1}{(x+7)|x-1|}=-1\Leftrightarrow\frac{x-1}{(x+7)|x-1|}=\frac{1}{6}\qquad(*)$$

Giải phương trình $(*)$, ta được $x=-13=-\overline{ab}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow a+2b=7$.

Chọn B.

Sai lầm thường gặp là $\log_6 \frac{x-1}{x+7} = \log_6(x-1) - \log_6(x+7)$; $\log_6(x-1)^2 = 2\log_6(x-1)$. Cả hai bước biến đổi trên đều làm co hẹp miền xác định của phương trình, dẫn đến hiện tượng làm thiếu nghiệm. Chú ý: $\lg a - \lg b = \lg\left(\frac{a}{b}\right)$ là một trong những phép biến đổi làm cho miền xác định mở rộng nên phải cẩn thận khi sử dụng nó.

Ví dụ 9: Phương trình $1+2\log_x 2.\log_4(10-x) = \frac{2}{\log_4 x}$ có tổng hai nghiệm bằng

A. 12. **B.** 8.

C. 10. **D.** 6.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ 0 < x < 10 \end{cases}$. Phương trình $1+2\log_x 2.\log_4(10-x) = \frac{2}{\log_4 x}$

$\Leftrightarrow \log_4 x + 2\log_x 2.\log_4 x.\log_4(10-x) = 2 \Leftrightarrow \log_4 x + \log_x 2.\log_2 x.\log_4(10-x) = 2$.

$\Leftrightarrow \log_4 x + \log_4(10-x) = 2 \Leftrightarrow \log_4[x(10-x)] = 2 \Leftrightarrow x(10-x) = 16$.

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=8 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình là 10.

Chọn C.

Ví dụ 10: Phương trình $\log_3 x + \log_9 3x + \log_{27} x = \frac{5}{3}$ có nghiệm duy nhất x_0 được biểu diễn dưới dạng $m^{\frac{n}{11}}$, với m, n là các số nguyên. Tổng $m+n$ bằng

A. 11. **B.** 7.

C. 10. **D.** 6.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$. Phương trình đã cho trở thành $\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(3x) + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2}(1+\log_3 x) + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{11}{6}\log_3 x = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{7}{11} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{7}{11}}$.

Mà x_0 được biểu diễn dưới dạng $m^{\frac{n}{11}}$ suy ra $\begin{cases} m=3 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow m+n=10$.

Chọn C.

Ví dụ 11: Gọi x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2-4x+y+2=0$ và $2\log_2(x-2)-\log_{\sqrt{2}}y=0$ Tính giá trị của biểu thức $P=2x^2+3y^3$.

A. $P=18$. **B.** $P=83$.
C. $P=21$. **D.** $P=24$.

Lời giải

Theo bài ra, ta có $x^2-4x+y+2=0 \Leftrightarrow y=-x^2+4x-2$ (1)

Và $2\log_2(x-2)-\log_{\sqrt{2}}y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0,\ y>0 \\ 2\log_2(x-2)-2\log_2 y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ y=x-2 \end{cases}$ (2).

Từ (1),(2) ta được hệ phương trình $\begin{cases} x>2 \\ y=-x^2+4x-2 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2>0 \\ -x^2+4x-2=x-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2>0 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow P=2x^2+3y^3=2.3^2+3=21.$

Chọn C.

Ví dụ 12: Phương trình $\log_3(3^x-6)=3-x$ có nghiệm duy nhất là x_0. Biết rằng x_0 cũng là nghiệm của phương trình $\log_3(x+7a)=2\log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a\in\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $a\in(0;1)$.

C. $a\in(2;4)$. **D.** $a\in\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Phương trình $\log_3(3^x-6)=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x-6>0 \\ 3^x-6=3^{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x>6 \\ 3^x(3^x-6)=27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x>6 \\ (3^x)^2-6.3^x-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x>6 \\ (3^x-9)(3^x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x>6 \\ \left[\begin{array}{l} 3^x=9 \\ 3^x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3^x=9 \Rightarrow x_0=2.$

Mà x_0 là nghiệm của phương trình $\log_3(x+7a)=2\log_2 x$ nên suy ra

$\log_3(7a+2)=2\log_2 2 \Leftrightarrow \log_3(7a+2)=2 \Leftrightarrow 7a+2=3^2 \Leftrightarrow a=1\in\left(\frac{1}{2};2\right).$

Chọn D.

Ví dụ 13: Phương trình $\log_2\left(2^x+6\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-6\right)=2x+1$ có nghiệm duy nhất là x_0 được biểu diễn dưới dạng $x_0=a+\log_2 b$. Biết rằng a, b là hai số nguyên dương, tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=13$.

C. $P=17$. **D.** $P=25$.

Lời giải

Điều kiện: $2^{x+1}>6 \Leftrightarrow 2^x>3 \Leftrightarrow x>\log_2 3$.

Phương trình $\log_2\left(2^x+6\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-6\right)=2x+1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x+6\right)+\log_2\left(2^{x+1}-6\right)=2x+1$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+6\right)\left(2^{x+1}-6\right)=2x+1 \Leftrightarrow \left(2^x+6\right)\left(2^{x+1}-6\right)=2^{2x+1} \qquad (*)$$

Đặt $t=2^x>3$, khi đó $(*) \Leftrightarrow (t+6)(2t-6)=2t^2 \Leftrightarrow 6t-36=0 \Leftrightarrow t=6$.

Khi đó $2^x=6 \Leftrightarrow x=\log_2 6=\log_2(2.3)=1+\log_2 3=a+\log_2 b \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=10$.

Chọn A.

Ví dụ 14: Cho phương trình $2\log_8 2x+\log_8\left(x^2-2x+1\right)=\frac{4}{3}$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Nghiệm của phương trình thỏa mãn $\log_x \frac{1}{16}<-4$.

B. Nghiệm của phương trình thỏa mãn $2^x>3^{\log_3 4}$.

C. Nghiệm của phương trình thỏa mãn $\log_2 2^x+1<3^{\log_3(x+1)}$.

D. Giá trị của biểu thức $\log_{2x_0}\left(x_0+2\right)$ bằng 1.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x>0 \\ x^2-2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>0 \\ (x-1)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $\frac{2}{3}\log_2(2x)+\frac{1}{3}\log_2(x-1)^2=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow 2(1+\log_2 x)+2\log_2|x-1|=4 \Leftrightarrow \log_2 x+\log_2|x-1|=1$.

$$\Leftrightarrow \log_2 x|x-1|=1 \Leftrightarrow x|x-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x(x-1)=2\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x(x-1)=-2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Dựa vào đáp án, ta thấy rằng với $x=2$ suy ra

$$\log_2\frac{1}{16}=-4,\ 2^2=3^{\log_3 4},\ \log_2 2^x+1=3^{\log_3(x+1)}.$$

Và giá trị của biểu thức $\log_{2x_0}(x_0+2)$ bằng 1.

Chọn D.

Ví dụ 15: Gọi x, y, z là các số thực thỏa mãn $2x^2=y^2+z^2$, $xyz=64$ và ba số $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tổng $T=x+y+z$ bằng

A. $T=6$. **B.** $T=9$.
C. $T=12$. **D.** $T=15$.

Lời giải

Nhắc lại kiến thức: Ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac=b^2$.

Điều kiện: $x,y,z>0$ và $x,y,z\ne 1$.

Theo bài ra, ba số $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ lập thành **CSN** $\Rightarrow \log_y x.\log_x z=(\log_z y)^2$.

$$\Leftrightarrow \log_y z=(\log_z y)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_z y}=(\log_z y)^2 \Leftrightarrow (\log_z y)^3=1 \Leftrightarrow \log_z y=1 \Leftrightarrow y=z.$$

Khi đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases}2x^2=y^2+z^2\\ xyz=64\\ y=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y=z\\ xyz=64\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=4 \Rightarrow T=12.$

Chọn B.

Ví dụ 16: Với điều kiện xác định của bài toán, hai phương trình $\log_3(x^2+ax+5)=1$ và $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+bx+1)=-1$ có một nghiệm chung là x_0 và hai nghiệm riêng còn lại là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1-x_2=4$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=13$.
C. $P=17$. **D.** $P=25$.

Lời giải

Ta có $\log_3\left(x^2+ax+5\right)=1 \Leftrightarrow x^2+ax+5=3 \Leftrightarrow x^2+ax+2=0$ (1)

Và $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+bx+1\right)=-1 \Leftrightarrow x^2+bx+1=3 \Leftrightarrow x^2+bx-2=0$ (2)

Để phương trình $(1),(2)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-8>0 \\ b^2+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2>8 \\ b\in\mathbb{R} \end{cases}$.

Khi đó, theo hệ thức Viet, ta được $\begin{cases} x_0+x_1=-a \\ x_0x_1=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_0+x_2=-b \\ x_0x_2=-2 \end{cases}$.

Suy ra $x_0+x_1-\left(x_0+x_2\right)=x_1-x_2=b-a=4$ và $x_0\left(x_1-x_2\right)=4 \Leftrightarrow x_0=1$.

Do đó $\begin{cases} (1)\Leftrightarrow 1+a+2=0 \\ (2)\Leftrightarrow 1+b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow P=a^2+b^2=(-3)^2+1^2=10.$

Chọn A.

B. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Ví dụ 1: Phương trình $\log_2^2 x-2\log_4(4x)-4=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tích x_1x_2 bằng

A. 8. **B.** 2.

C. $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{33}{4}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$. Phương trình $\log_2^2 x-2\log_4(4x)-4=0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2-\log_2 x-6=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, khi đó ta được $t^2-t-6=0 \Leftrightarrow (t-3)(t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \end{array}\right.$.

Với $t=3$, ta có $\log_2 x=3 \Leftrightarrow x_1=2^3=8$.

Với $t=-2$, ta có $\log_2 x=-2 \Leftrightarrow x_2=2^{-2}=\frac{1}{4}$. Vậy $x_1x_2=2$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Phương trình $\log_3^2 x-2\log_{\sqrt{3}} x-2\log_{\frac{1}{3}} x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_3 x_1+\log_{27} x_2$ biết $x_1<x_2$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$.

C. $P=\frac{8}{3}$. **D.** $P=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$. Ta có $\begin{cases}\log_{\sqrt{3}} x = 2\log_3 x \\ \log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x\end{cases}$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 2\log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0 \qquad (*)$$

Đặt $t = \log_3 x$ suy ra phương trình $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Với $t=-1$, ta được $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Với $t=3$, ta được $\log_3 x = 3 \Leftrightarrow x_2 = 3^3 = 27$.

Vậy $P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2 = \log_3 \frac{1}{3} + \log_{27} 27 = 0$.

Chọn A.

Ví dụ 3: Phương trình $\log_2^2 x - 8\sqrt{\log_2 8x} - 12 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm ?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 8x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 8x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{8}$.

Phương trình $\log_2^2 x - 8\sqrt{\log_2 8x} - 12 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 8\sqrt{3+\log_2 x} - 12 = 0 \qquad (*)$.

Đặt $t = \sqrt{3+\log_2 x} \ge 0 \Leftrightarrow \log_2 x = t^2 - 3$, khi đó $(*) \Leftrightarrow (t^2-3)^2 - 8t - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t^4 - 6t^2 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 64$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Phương trình $\log_2(4x) - \log_{\frac{x}{2}} 2 = 3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm ?

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 4x > 0 \\ \dfrac{x}{2} > 0, \dfrac{x}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Phương trình $\log_2(4x) - \log_{\frac{x}{2}} 2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 x - \dfrac{1}{\log_2 \dfrac{x}{2}} = 3$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2 x - \frac{1}{\log_2 x - \log_2 2} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x - \frac{1}{\log_2 x - 1} = 1 \qquad (*).$$

Đặt $t = \log_2 x$ với $t \neq 1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow t - \dfrac{1}{t-1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - t - 1}{t-1} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 0$, ta có $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 2^0 = 1$.

Với $t = 2$, ta có $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Chọn B.

Ví dụ 5: Phương trình $\log_3(2x+1) = 2\log_{2x+1} 3 + 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Giá trị biểu thức $x_1 + x_2 + x_1x_2$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$.

C. $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \backslash \{0\}$.

Đặt $t = \log_3(2x+1)$ với $t \neq 0$ suy ra $\log_3(2x+1).\log_{2x+1} 3 = 1 \Leftrightarrow \log_{2x+1} 3 = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $t = \dfrac{2}{t} + 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Với $t = -1$, ta có $\log_3(2x+1) = -1 \Leftrightarrow 2x+1 = 3^{-1} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.

Với $t = 2$, ta có $\log_3(2x+1) = 2 \Leftrightarrow 2x+1 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy giá trị biểu thức $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -\dfrac{1}{3} + 4 + 4.\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{3} \in (2;3)$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Phương trình $1+\log_{27}\left(x^{\log_{27}x}\right)=\frac{10}{3}\log_{27}x$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=3^a$, $x_2=3^b$.

Biết rằng $x_1<x_2$, tính giá trị của biểu thức $P=b.(2x_1-3a)^{-1}$.

A. $P=1$. **B.** $P=\frac{1}{3}$.

C. $P=\frac{1}{9}$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\log_a x^\alpha=\alpha.\log_a x$ với $x>0$.

Ta có $1+\log_{27}\left(x^{\log_{27}x}\right)=1+\left(\log_{27}x\right)^2$ và đặt $t=\log_{27}x$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $1+t^2=\frac{10}{3}t\Leftrightarrow 3t^2-10t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Với $t=3$, ta được $\log_{27}x=3\Leftrightarrow x=27^3=3^9$.

Với $t=\frac{1}{3}$, ta được $\log_{27}x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$.

Theo bài ra, ta có $x_1=3^a<x_2=3^b\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\a=1\\b=9\end{cases}\Rightarrow P=\frac{b}{2x_1-3a}=\frac{9}{2.3-3}=3$.

Chọn D.

Ví dụ 7: Một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông là $\sqrt{\log_2 x}$, $\sqrt{\log_2(64x)}$. Biết rằng đường cao tương ứng với cạnh huyền của tam giác đó có độ dài bằng 2. Tìm x.

A. $x=\frac{1}{16}$. **B.** $x=64$.

C. $x=2$. **D.** $x=6$.

Lời giải

Gọi tam giác ABC vuông tại A, có độ dài cạnh $AB=\sqrt{\log_2 x}$, $AC=\sqrt{\log_2(64x)}$.

Và độ dài đường cao $AH=2$.

Khi đó $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2(64x)}$ $(*)$.

Đặt $t=\log_2 x>0$, ta có $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\ \frac{1}{4}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\ t^2-2t-24=0\end{cases}\Leftrightarrow t=6\Rightarrow x=64.$

Chọn B.

Ví dụ 8: Phương trình $\log_2\left(5^x-1\right).\log_2\left(2.5^x-2\right)=2$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tỉ số $\frac{x_1}{x_2}$ gần với giá trị nào sau đây nhất, biết rằng $x_1>x_2>0$.

A. 4.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Điều kiện: $5^x-1>0\Leftrightarrow 5^x>5^0\Leftrightarrow x>0$.

Phương trình $\log_2\left(5^x-1\right).\log_2\left(2.5^x-2\right)=2\Leftrightarrow\log_2\left(5^x-1\right).\left[\log_2\left(5^x-1\right)+1\right]=2$.

Đặt $t=\log_2\left(5^x-1\right)$, khi đó phương trình trở thành $t(t+1)=2\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta có $\log_2\left(5^x-1\right)=1\Leftrightarrow 5^x-1=2\Leftrightarrow 5^x=3\Leftrightarrow x=\log_5 3$.

Với $t=-2$, ta có $\log_2\left(5^x-1\right)=-2\Leftrightarrow 5^x-1=2^{-2}\Leftrightarrow 5^x=\frac{5}{4}\Leftrightarrow x=\log_5\frac{5}{4}$.

Mặt khác $x_1>x_2$ suy ra $\begin{cases}x_1=\log_5 3\\ x_2=\log_5\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow x_1:x_2=\log_5 3:\log_5\frac{5}{4}\approx 4,9233$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Phương trình $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1<1<x_2$. Giá trị biểu thức $\frac{x_2}{x_1}$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(3;5)$.

B. $(5;7)$.

C. $(7;9)$.

D. $(9;11)$.

Lời giải

Phương trình $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25\Leftrightarrow\left[\lg(x-1)^2\right]^4+\left[\lg(x-1)^3\right]^2=25$

$$\Leftrightarrow 16.\lg^4(x-1)+9.\lg^2(x-1)-25=0 \qquad (*)$$

Đặt $t=\lg^2(x-1)$ với $t\ge 0$, khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow 16t^2+9t-25=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{25}{16}\end{array}\right.$.

Với $t=-\dfrac{25}{16}$ suy ra không thỏa mãn điều kiện vì $t\ge 0$.

Với $t=1$, ta có $\lg^2(x-1)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg(x-1)=1 \\ \lg(x-1)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=\dfrac{11}{10}\end{array}\right.$.

Theo bài ra, ta có $x_1<1<x_2$ suy ra $x_1=\dfrac{11}{10}$, $x_2=11$. Vậy $\dfrac{x_2}{x_1}=10\in(9;11)$.

Chọn D.

Ví dụ 10: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$.

C. 6. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$, phương trình trở thành $t^2+(x-1)t+2x-6=0$.

$\Leftrightarrow t^2+xt-t+2x-6=0\Leftrightarrow t^2-t-6+x(t+2)=0\Leftrightarrow (t+2)(t-3)+x(t+2)=0$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t-3+x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=3-x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=-2 \\ \log_2 x=3-x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \\ \log_2 x+x-3=0\end{array}\right. \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x)=\log_2 x+x-3$ với $x>0$, có $f'(x)=\dfrac{1}{x.\ln 2}+1>0,\ \forall x>0$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $f(2)=0\Rightarrow x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $\dfrac{9}{4}$.

Chọn A.

Ví dụ 11 [ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN ĐH VINH – 2017]:

Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 3. **B.** 2.
C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}\left|x^2-\sqrt{2}x\right|>0\\ x^2-\sqrt{2}x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq\sqrt{2}\end{cases}$.

Đặt $x^2-\sqrt{2}x+2=t$ với $t\in(-\infty;+\infty)$, khi đó phương trình trở thành $\log_3|t|=\log_5(t+2)$

Đặt $a=\log_3|t|$ suy ra $\begin{cases}|t|=3^a\\ \log_5(t+2)=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|t|=3^a\\ t+2=5^a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=3^a\\ t=-3^a\end{array}\right.\\ t+2=5^a\end{cases}$.

Với $t=3^a$, ta có $3^a+2=5^a\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^a+2.\left(\frac{1}{5}\right)^a-1=0$ (1).

Xét hàm số $f(a)=\left(\frac{3}{5}\right)^a+2.\left(\frac{1}{5}\right)^a-1$, có $f'(a)=\left(\frac{3}{5}\right)^a.\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^a.\ln\frac{9}{25}<0,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(a)$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Khi đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $a=1\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x^2-\sqrt{2}x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Với $t=-3^a$, ta có $-3^a+2=5^a\Leftrightarrow 5^a+3^a-2=0$ (2).

Xét hàm số $g(a)=5^a+3^a-2$, có $g'(a)=5^a.\ln 5+3^a.\ln 3>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(a)$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Khi đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất $a=0\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x^2-\sqrt{2}x+2=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Chọn B.

Ví dụ 12: Tính tổng tất cả các nghiệm x thuộc đoạn $[-2\pi;2\pi]$ thỏa mãn phương trình $2\log_3\cot x=\log_2\cos x$.

A. π. **B.** 2π.
C. 0. **D.** $-\pi$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}\cot x > 0\\ \cos x > 0\end{cases}$. Phương trình $2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x \Leftrightarrow \log_3 \cot^2 x = \log_2 \cos x$.

Đặt $t = \log_2 \cos x \Leftrightarrow \cos x = 2^t$ và $1+\cot^2 x = 1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \cot^2 x = \dfrac{4^t}{1-4^t}$.

Khi đó, phương trình $\log_3 \cot^2 x = \log_2 \cos x \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{4^t}{1-4^t} = t \Leftrightarrow \dfrac{4^t}{1-4^t} = 3^t$

$$\Leftrightarrow 4^t = \left(1-4^t\right)3^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t = 1-4^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t - 1 = 0 \qquad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^t + 4^t - 1$, có $f'(t) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^t.\ln\dfrac{4}{3} + 4^t.\ln 4 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $t = -1$.

Với $t = -1$, ta có $\log_2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$.

- Nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \in [-2\pi; 2\pi] \Rightarrow k \in \left[-\dfrac{7}{6}; \dfrac{5}{6}\right] \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = \{-1; 0\}$.
- Nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \in [-2\pi; 2\pi] \Rightarrow k \in \left[-\dfrac{5}{6}; \dfrac{7}{6}\right] \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = \{0; 1\}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \left\{-\dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

Chọn C.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ [TT6091]

Câu 1: [563541] Phương trình $\log_3(3x-2)=3$ có nghiệm là

A. $\frac{25}{3}$ **B.** $\frac{29}{3}$

C. $\frac{11}{3}$ **D.** 87

Câu 2: [563544] Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$

A. 2. **B.** 1.

C. 3. **D.** 0.

Câu 3: [563545] Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1|=2$

A. $\{-3;2\}$. **B.** $\{-10;2\}$.

C. $\{-4;2\}$. **D.** $\{3\}$.

Câu 4: [563546] Phương trình: $\log(x^2-7x+12)=\log(2x-8)$ có bao nhiêu nghiệm:

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 4.

Câu 5: [563547] Phương trình: $\log_2(|x+1|-2)=2$ **không** tương đương với mệnh đề nào sau đây:

A. $|x+1|-2=4$. **B.** $|x+1|=6$.

C. $x+1=6$ hay $x+1=-6$. **D.** $x=3(x=-5$ loại).

Câu 6: [563548] Phương trình : $\log_2(\log_4 x)=1$ có nghiệm là :

A. 2. **B.** 4.

C. 16. **D.** 8.

Câu 7: [563549] Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=0$ là:

A. 3. **B.** Vô nghiệm

C. 1. **D.** 2.

Câu 8: [563550] Phương trình: $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. **B.** $\{1\}$.

C. $\{1;-2\}$. **D.** $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Câu 9: [563551] Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)+\log_3(x-3)=2$ bằng ?

A. $\frac{5}{2}$.
B. 4.
C. $\frac{7}{2}$.
D. 6.

Câu 10: [563554] Tích các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+4)-\log_2(x-1)=3$ bằng ?

A. 8.
B. 13.
C. 12.
D. -12.

Câu 11: [563556] Tính tổng các nghiệm của phương trình dưới đây

$$\log_2(2x-1)+\log_2(x+3)=\log_2(x^2+3).$$

A. -5.
B. 1.
C. -6.
D. 6.

Câu 12: [563558] Phương trình $\frac{1}{2}\log_3(x+2)^2+\frac{1}{3}\log_3(4x-1)^3=2$ có số nghiệm là ?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 0.

Câu 13: [563559] Phương trình $\frac{1}{2}\log_3(x+2)^2+\frac{1}{3}\log_3(x+8)^3=1$ có số nghiệm là ?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Câu 14: [563561] Tổng các nghiệm của phương trình $\frac{1}{4}\log_3(x+1)^4+\frac{1}{3}\log_3(x+5)^3=1$ bằng

A. $\sqrt{7}-3$.
B. $\sqrt{7}-5$.
C. $\sqrt{7}-7$.
D. $\sqrt{7}-9$.

Câu 15: [563562] Tổng các nghiệm của phương trình $2\log_4 x-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=1$ bằng ?

A. 1.
B. 2.
C. -2.
D. -1.

Câu 16: [563563] Phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(2x+1)+2\log_9(x-3)=2$ có số nghiệm là ?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Câu 17: [563564] Phương trình $\log_2(x-1)+\frac{1}{\log_x 2}=1$ có số nghiệm và tổng các nghiệm lần lượt là S và T. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $S+T=3$.
B. $S-T=1$.
C. $S-T=2$.
D. $S-T=3$.

Câu 18: [563565] Phương trình $\log_3(x+1)+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{4x+5}=0$ có số nghiệm và tổng các nghiệm lần lượt là S và T. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $S+T=2+\sqrt{5}$.
B. $S+T=4$.
C. $S-T=-\sqrt{5}$.
D. $S=\frac{1+\sqrt{5}}{T}$.

Câu 19: [563566] Tổng giá trị các nghiệm của phương trình: $2\log_4 x+\log_2(x+1)=3$ là:

A. $\sqrt{33}$.
B. $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.
C. -1.
D. 2.

Câu 20: [563567] Tổng giá trị các nghiệm của phương trình: $\log_3(2x+1)+\log_3(x-3)=2$ là:

A. $\frac{5}{2}$.
B. $\frac{7}{2}$.
C. 4.
D. 5.

Câu 21: [563568] Số nghiệm của phương trình: $\log_{x^2+x}(2x^2+x-1)=1$ là:

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Câu 22: [563570] Số nghiệm của phương trình: $\log_4(x+2)=2-\log_2 x$ là:

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Câu 23: [563571] Cho phương trình sau : $\log_2 x+5=\log_{\sqrt{2}}(x+6)$. Nhận xét nào sau đây là **sai** ?

A. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

B. $x=2$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

C. Tổng giá trị các nghiệm của phương trình đã cho là 20.

D. $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Câu 24: [563572] Tìm nghiệm thực của phương trình $\log_2 x - \log_{\sqrt{2}} x = 2$.

A. $x = \frac{1}{4}$. **B.** $x = 3$.

C. $x = 2$. **D.** $x = \sqrt{2}$.

Câu 25: [563573] Cho phương trình $\log_2 (x+1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 9$ (1). Trong các mệnh đề sau:

(I). (1) $\Leftrightarrow 2\log_2 |x+1| + \log_2 |x+1| = 9$,với điều kiện $x \neq -1$.

(II). (1) $\Leftrightarrow |x+1| = 8$.

(III). (1) $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 63 = 0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Cả (I),(II),(III). **B.** Chỉ (II),(III).
C. Chỉ (III),(I). **D.** Chỉ (I),(II).

Câu 26: [563574] Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 (x-2) - 2 = 6\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5}$.

A. 3 **B.** 2

C. 1 **D.** 4

Câu 27: [563575] Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** 1.

C. $\frac{2}{3}$. **D.** 16.

Câu 28: [563576] Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$.

A. 2 nghiệm. **B.** 1 nghiệm.
C. 3 nghiệm. **D.** Vô nghiệm.

Câu 29: [563577] Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2}$.

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 1,5.

Câu 30: [563578] Tìm nghiệm lớn nhất của phương trình $\log_2 (4.3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$

A. $x = 1$. **B.** $x = 4$.
C. $x = 3$. **D.** $x = 7,5$.

Câu 31: [563579] Cho phương trình $\log_4(3.2^x-1)=x-1$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Tổng x_1+x_2 bằng

A. 2. **B.** $\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$.

C. $6+4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 32: [563580] Phương trình $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$ có bao nhiêu nghiệm:

A. Vô nghiệm. **B.** 3.
C. 2. **D.** 1.

Câu 33: [563581] Số nghiệm của phương trình $2\log_8(2x)+\log_8\left(x^2-2x+1\right)=\frac{4}{3}$ là:

A. 1. **B.** 3.

C. 0. **D.** 2.

Câu 34: [563582] Số nghiệm của phương trình $\log_5(5x)-\log_{25}(5x)-3=0$ là:

A. 1. **B.** 4.

C. 3. **D.** 2.

Câu 35: [563583] Cho phương trình: $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$ (1).

Trong các mệnh đề sau:

(I). Điều kiện phương trình: $-6<x<4$ và $x\neq-2$;

(II). $(1)\Leftrightarrow 3\log_{\frac{1}{4}}|x+2|-3=3\log_{\frac{1}{4}}(4-x)+3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$;

(III). $(1)\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(4|x+2|\right)=\log_{\frac{1}{4}}\left[(4-x)(x+6)\right]$;

Mệnh đề nào đúng ?

A. Cả I, II, III. **B.** Chỉ I, II.

C. Chỉ II, III. **D.** Chỉ III,I.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. B	03. C	04. B	05. D	06. C	07. B	08. B	09. B	10. C
11. B	12. A	13. C	14. D	15. B	16. A	17. A	18. B	19. B	20. C
21. B	22. B	23. D	24. A	25. A	26. A	27. D	28. B	29. A	30. A
31. A	32. D	33. A	34. A	35. A					

PHẦN 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ [TT6092]

Câu 1: [563692] Số nghiệm của phương trình : $\log_2 x.\log_3(2x-1)=2.\log_2 x$ là

A. 1. **B.** 3.
C. 0. **D.** 2.

Câu 2: [563694] Phương trình $\frac{1}{5-\log_2 x}+\frac{2}{1+\log_2 x}=1$ có tổng các nghiệm là :

A. $\frac{33}{64}$. **B.** 12.
C. 5. **D.** 66.

Câu 3: [563696] Số nghiệm của phương trình: $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$ là:

A. 0. **B.** 3.
C. 2. **D.** 1.

Câu 4: [563697] Tập nghiệm phương trình $\log_3^2(4-x)-2\log_{\frac{1}{3}}(4-x)=15$ là:

A. $\{5;-3\}$. **B.** $\{3^5;3^{-3}\}$.
C. $\left\{\frac{971}{243};-23\right\}$. **D.** $\left\{-239;\frac{107}{27}\right\}$.

Câu 5: [563698] Phương trình: $4\log_{25} x+\log_x 5=3$ có nghiệm là:

A. $x=5;\ x=\sqrt{5}$. **B.** $x=1;\ x=\frac{1}{2}$.
C. $x=\frac{1}{5};\ x=5$. **D.** $x=\frac{1}{5};\ x=\sqrt{5}$.

Câu 6: [563699] Tìm m để phương trình $x^4-6x^2-\log_2 m=0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 3 nghiệm lớn hơn -1.

A. $\frac{1}{2^9}<m<1$. **B.** $\frac{1}{2^9}\le m<1$.
C. Đáp án khác. **D.** $\frac{1}{25}<m<1$.

Câu 7: [563701] Số nghiệm dương của phương trình: $\log_2|x-2|+\log_2|x+5|+\log_{\frac{1}{2}}8=0$ là :

A. 1 nghiệm. **B.** 3 nghiệm.
C. 2 nghiệm. **D.** Vô nghiệm.

Câu 8: [563703] Số nghiệm phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(10x-5)=0$ là:

A. 3. **B.** Vô nghiệm.
C. 1. **D.** 2.

Câu 9: [563705] Tìm a để phương trình $x^4-4x^2+|\log_3 a|+3=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt:

A. $\frac{1}{27}<a<3$.
B. $\frac{1}{27}\le a<3$.
C. $1<a<3$.
D. $1\le a<3$.

Câu 10: [563707] Phương trình $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$ tương đương với phương trình nào dưới đây

A. $9-2^x=3-x$.
B. $x^2-3x=0$.
C. $x^2+3x=0$.
D. $9-2^x+3=2^{-x}$.

Câu 11: [563708] Tìm m để phương trình : $\log^2_{\sqrt{3}}x-m\log_{\sqrt{3}}x+1=0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1

A. $m=-2$.
B. $m=2$.
C. $m=\pm 2$.
D. Không tồn tại m.

Câu 12: [563710] Cho phương trình $\log_2 m=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x-\frac{2}{3}$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có 1 nghiệm là:

A. $2^{-34}\le m\le 2^2$.
B. $m\ge 4$ hoặc $0\le m\le 2^{-34}$.
C. $m>4$ hoặc $0<m<2^{-34}$.
D. $m\ge 2$.

Câu 13: [563712] Cho phương trình $\log_3 x^2-\sqrt{2\log_3 x}=2$. Nhận xét nào sau đây là đúng.

A. Điều kiện xác định của x là $x>0$.
B. Phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=1$.
C. Phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=9$.
D. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 14: [563714] Cho phương trình $\log_2 x^2=\log_2(2x+1)^2$. Nhận xét nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.
B. Phương trình đã cho vô nghiệm.
C. Phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=-1$.
D. Tổng giá trị các nghiệm của phương trình đã cho là $-\frac{4}{3}$.

Câu 15: [563715] Tổng giá trị các nghiệm của phương trình $\log^2_{\frac{1}{2}}x+2\log_{\sqrt{2}}x=5$ là:

A. $\frac{65}{32}$.
B. $\frac{33}{32}$.
C. -4.
D. $\frac{61}{32}$.

Câu 16: [563717] Phương trình nào trong các phương trình sau đây vô nghiệm:

A. $\log_2(x+1)=-1$.

B. $\log_{x^2+1} x=1$

C. $\sqrt{\log_3 x}=2$.

D. $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$.

Câu 17: [563718] Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_2 x^3=-2$ là:

A. 6.

B. 16.

C. 20.

D. 18.

Câu 18: [563720] Tìm tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$

A. 2,25.

B. 6.

C. 2.

D. 10.

Câu 19: [563722] Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x-1=0$

A. 35.

B. 84.

C. 65.

D. 28.

Câu 20: [563723] Tìm số nghiệm thực của phương trình $2.9^{\log_2\frac{x}{2}}=x^{\log_2 6}-x^2$.

A. 2 nghiệm.

B. 3 nghiệm.

C. 1 nghiệm.

D. 4 nghiệm.

Câu 21: [563724] Tìm số nghiệm thực của phương trình $4^{\log(10x)}-6^{\lg x}=2.3^{\lg(100x^2)}$.

A. 2 nghiệm

B. 3 nghiệm.

C. 4 nghiệm.

D. 1 nghiệm.

Câu 22: [563726] Xét phương trình $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$. Phép biến đổi nào sau đây là đúng ?

A. $16\lg^4(x-1)+9\lg^2(x-1)=25$.

B. $2\lg^4(x-1)+3\lg^2(x-1)=25$.

C. $16\lg^4(x-1)+3\lg^2(x-1)=25$.

D. $16\lg^4|x-1|+9\lg^2|x-1|=25$.

Câu 24: [563727] Tìm số nghiệm của phương trình $27^{\log_2 x}+x^{\log_2 3}=30$.

A. 2 nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. Vô nghiệm.

Câu 25: [563728] Phương trình $\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^3-2=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+6)^2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 2 nghiệm. **B.** 3 nghiệm.
C. 4 nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Câu 26: [563729] Xác định số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+3x+2)+\log_2(x^2+7x+12)=3+\log_2 3$.

A. 2 nghiệm. **B.** 1 nghiệm.
C. 3 nghiệm. **D.** Vô nghiệm.

Câu 27: [563730] Tìm số nghiệm thực của phương trình $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$.

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm.
C. 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Câu 28: [563731] Giải phương trình $\log_2 x+\log_2 x^2=\log_2 9x$ trên tập số thực.

A. $x=\sqrt{6}$. **B.** $x=3$.
C. $x=6$. **D.** $x=\sqrt{3}$

Câu 29: [563732] Phương trình $\log_2^2 x-2\log_4(4x)-4=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Vậy $x_1.x_2$ bằng :

A. 8. **B.** 2.
C. $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{33}{4}$.

Câu 30: [563734] Phương trình $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$ có tất cả bao nhiêu nghiệm trên tập số thực.

A. 2. **B.** 3.
C. 1. **D.** 4.

Câu 31: [563735] Cho phương trình $2\log_8 2x+\log_8(x^2-2x+1)=\frac{4}{3}$. Nghiệm của phương trình thỏa mãn bất phương trình nào dưới đây ?

A. $\log_x \frac{1}{16}<-4$. **B.** $2^x>3^{\log_3 4}$.
C. $\log_2 2^x+1<3^{\log_3(x+1)}$. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 32: [563736] Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=\log_8(x-1)^3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. Phương trình có nghiệm duy nhất.

B. Phương trình có nghiệm nhỏ hơn 2.

C. Nghiệm của phương trình thỏa mãn bất phương trình $\log_3(2x-3)<0$.

D. Tất cả mệnh đề trên đều đúng.

Câu 33: [563737] Phương trình logarit $2\log_3(a+1-x)+\log_{\sqrt{3}}(ax-1)=2$ có một nghiệm là $x=2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng** ?

A. $a<x$. **B.** $a>x$.

C. $a=x$. **D.** $2<ax<3$.

Câu 34: [563738] Phương trình $\log_3^2 x-2\log_{\sqrt{3}}x-2\log_{\frac{1}{3}}x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_3 x_1+\log_{27}x_2$ biết $x_1<x_2$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$.

C. $P=\frac{8}{3}$. **D.** $P=\frac{1}{3}$.

Câu 35: [563739] Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_x\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+\log_{1-\sqrt{x}}x=3$ thỏa mãn $x_1<x_2$.

Cho các phát biểu sau về hai nghiệm x_1, x_2 :

1) Tổng hai nghiệm của phương trình là một số dương.

2) Giá trị của x_2 là một số vô tỷ.

3) Biểu thức $4x_1+x_2^2$ có giá trị nhỏ hơn 1.

4) Tích của hai nghiệm là một số nguyên.

Số các phát biểu đúng là :

A. 1 **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 36: [563740] Phương trình $\log_3|x+2|+\frac{1}{2}\log_3(x-5)^2+\log_{\frac{1}{3}}8=0$ có **tất cả bao nhiêu** nghiệm ?

A. 1 **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 37: [563741] Gọi x, y là hai số thực thỏa mãn đồng thời điều kiện $x^2-4x+y+2=0$ và $2\log_2(x-2)-\log_{\sqrt{2}}y=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=2x^2+3y^3$.

A. $P=18$. **B.** $P=83$.
C. $P=21$. **D.** $P=24$.

Câu 38: [563742] Phương trình $\log_2(2^x+6)-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-6)=2x+1$ có nghiệm duy nhất là x_0 được biểu diễn dưới dạng $x_0=a+\log_2 b$. Biết rằng a, b là hai số nguyên dương, tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=13$.
C. $P=17$. **D.** $P=25$.

Câu 39: [563743] Phương trình $\log_3(3^x-6)=3-x$ có nghiệm duy nhất là x_0. Biết rằng x_0 cũng là nghiệm của phương trình $\log_3(x+7a)=2\log_2 x$. Giá trị của a bằng:

A. $a=3$. **B.** $a=\log_2 3$.

C. $a=2$. **D.** $a=1$.

Câu 40: [563744] Phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)=2$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tỉ số $\frac{x_1}{x_2}$ **gần với giá trị nào sau đây nhất**, biết rằng $x_1>x_2>0$.

A. 4. **B.** $\frac{9}{2}$.

C. 5. **D.** 2.

Câu 41: [563745] Phương trình $\log_3^2 x-2\log_{\sqrt{3}}x-2\log_{\frac{1}{2}}x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_3 x_1+\log_{27}x_2$ biết $x_1<x_2$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$.

C. $P=\frac{8}{3}$. **D.** $P=\frac{1}{3}$.

Câu 42: [563747] Với điều kiện xác định của bài toán, phương trình $\log_3(x^2+ax+5)=1$ và $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+bx+1)=-1$ có một nghiệm chung là x_0 và hai nghiệm riêng còn lại là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1-x_2=4$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=13$.

C. $P=17$. **D.** $P=25$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	02. B	03. D	04. C	05. A	06. D	07. C	08. D	09. D	10. B
11. A	12. C	13. C	14. D	15. A	16. B	17. C	18. A	19. B	20. A
21. D	22. A	23. D	24. B	25. A	26. A	27. A	28. B	29. B	30. C
31. D	32. A	33. C	34. A	35. B	36. D	37. C	38. A	39. D	40. C
41. A	42. A								

Chủ đề 8

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

[TV6093]

Để giải bất phương trình lôgarit, ta áp dụng tính đơn điệu của các hàm số đó.

- ***Với hàm số lôgarit:*** Ta cần đặt điều kiện tồn tại các biểu thức lôgarit.

Ta có $\log_a N$ khi và chỉ khi $a>0,\ a\neq 1$ và $N>0$.

$0<a<1$:	$\log_a N<\log_a M \Leftrightarrow N>M>0$.
$a>1$:	$\log_a N<\log_a M \Leftrightarrow 0<N<M$.

Chú ý rằng nếu $\log_a N<\log_b N$ ta biến đổi về cùng một cơ số, chẳng hạn

$$\log_a N<\log_b N \Leftrightarrow \log_a N<\frac{\log_a N}{\log_a b}$$

- ***Sử dụng phương pháp đổi cơ số và đặt ẩn phụ tương tự với các bài toán phương trình lôgarit.***

Ví dụ 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x)$ là $S=(a;b)\cup(c;d)$ với a,b,c,d là các số thực. Hỏi có bao nhiêu số thực dương trong bốn số a,b,c,d ?

A. 4. **B.** 1.
C. 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0,\ 2-x>0\\ \log_3\dfrac{1}{x+1}>\log_3(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2\\ \dfrac{1}{x+1}>2-x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2\\ -x^2+x+1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2\end{array}\right.\Rightarrow S=\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right).$$

Suy ra $S=(a;b)\cup(c;d)=\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right)\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\ d=2\\ b=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$.

Vậy trong bốn số a,b,c,d có hai số thực dương.

Chọn D.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-6x+5\right)+2\log_2(2-x)\ge 0$ là

A. $S=(1;5)$. **B.** $S=(1;2)$.

C. $S=\left[\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $S=\left[\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-6x+5\right)+2\log_2(2-x)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+5>0\\ 2-x>0\\ \log_2(2-x)^2\ge\log_2\left(x^2-6x+5\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>5\\ x<1\end{array}\right.,\ x<2\\ (2-x)^2\ge x^2-6x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x<1\Rightarrow S=\left[\frac{1}{2};1\right)$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\log_x 8+\log_4 x^2\right)\log_2\sqrt{2x}\ge 0$ là

A. $S=\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$.

C. $S=(0;+\infty)$. **D.** $S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Cách 1. Điều kiện: $0<x\ne 1$.

Bất phương trình $\left(\log_x 8+\log_4 x^2\right)\log_2\sqrt{2x}\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\log_8 x}+2\log_4 x\right).\log_2 2x\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{\log_2 x}+\log_2 x\right)(\log_2 x+1)\ge 0\Leftrightarrow\left(\log_2^2 x+3\right).\frac{\log_2 x+1}{\log_2 x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x+1}{\log_2 x} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x \le -1\\ \log_2 x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x \le \frac{1}{2}\\ x > 1\end{array}\right. \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Cách 2. Ta có, bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ x \ne 1 \\ \frac{1}{2}(3\log_x 2 + \log_2 x)(\log_2 x + 1) \ge 0 \end{cases} \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} t = \log_2 x \\ t \ne 0 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{t} + t\right)(t+1) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t^2+3)(t+1)}{t} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ t > 0 \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x \le -1\\ \log_2 x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{array}\right. \Rightarrow S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$$

Chọn B.

Ví dụ 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \le 0$ có dạng $S = [a; b]$. Tích $a \times b$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Ta có $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\log_{0,2} x - 3)(\log_{0,2} x + 2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \le \log_{0,2} x \le 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{125} \le x \le 25 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{125} \le x \le 25 \Rightarrow S = \left[\frac{1}{125}; 25\right] = [a; b] \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{125} \\ b = 25 \end{cases} \Rightarrow a \times b = \frac{1}{5}.$$

Vậy tích $a \times b = 0,2$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4}\right) < 0$ có dạng $(a; b) \cup (c; +\infty)$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$. **B.** $S = -1$.

C. $S = -7$. **D.** $S = 7$.

Lời giải

Điều kiện: $\frac{x^2+x}{x+4}>0$ và $\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0$ $(*)$.

Bất phương trình $\log_{0,7}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0\Leftrightarrow\log_{0,7}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<\log_{0,7}1\Leftrightarrow\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$, ta được $\frac{x^2+x}{x+4}>6\Leftrightarrow\frac{(x-8)(x+3)}{x+4}>0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>8\\-4<x<-3\end{array}\right.\Rightarrow S=(-4;-3)\cup(8;+\infty)$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Vậy $S=(a;b)\cup(c;+\infty)=(-4;-3)\cup(8;+\infty)\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-3\\c=8\end{cases}\Rightarrow S=a+b+c=1$.

Chọn A.

Ví dụ 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_x\frac{3x+2}{x+2}>1$ là

A. $S=(0;2)$. **B.** $S=(1;2)$.

C. $S=(0;1)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>0,\ x\neq1\\\frac{3x+2}{x+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\ x\neq1\\\left[\begin{array}{l}x>-\frac{3}{2}\\x<-2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq1\end{cases}$ $(*)$.

- **TH1:** Với $x>1\Rightarrow$ BPT $\Leftrightarrow\frac{3x+2}{x+2}>x\Leftrightarrow x^2-x-2<0\Leftrightarrow-1<x<2\Rightarrow1<x<2$.
- **TH2:** $0<x<1\Rightarrow$ BPT $\Leftrightarrow\frac{3x+2}{x+2}<x\Leftrightarrow x^2-x-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-1\end{array}\right.\Rightarrow x\in\varnothing$.

Kết hợp hai trường hợp, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;2)$.

Chọn B.

Ví dụ 7: Biết tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(9^x-2)<1$ là khoảng $(a;b)$.

Tính hiệu số $b-a$.

A. $b-a=\log_9 10$. **B.** $b-a=1$.

C. $b-a=\log_9\frac{2}{5}$. **D.** $b-a=\log_9\frac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có $\log_3\left(9^x-2\right)<1 \Leftrightarrow \begin{cases}9^x-2>0\\9^x-2<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9^x>2\\9^x<5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\log_9 2\\x<\log_9 5\end{cases} \Rightarrow S=\left(\log_9 2;\log_9 5\right)$

Suy ra $\begin{cases}a=\log_9 2\\b=\log_9 5\end{cases} \Rightarrow b-a=\log_9 5-\log_9 2=\log_9\dfrac{5}{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 8: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2+\log_2(2x)\ge 2\log_2(x+2)$.

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

C. $S=\{2\}$. **D.** $S=(0;2]$.

Lời giải

Bất phương trình $2+\log_2(2x)\ge 2\log_2(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\ x+2>0\\\log_2(8x)\ge\log_2(x+2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\8x\ge(x+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\(x-2)^2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\x=2\end{cases} \Rightarrow x=2 \Leftrightarrow S=\{2\}$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Biết tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,3}\left(4x^2\right)\ge\log_{0,3}(12x-5)$ là một đoạn. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của tập S. Mối liên hệ giữa m và M là

A. $m+M=3$. **B.** $m+M=2$.

C. $M-m=3$. **D.** $M-m=1$.

Lời giải

Bất phương trình $\log_{0,3}\left(4x^2\right)\ge\log_{0,3}(12x-5) \Leftrightarrow \begin{cases}12x-5>0\\4x^2\le 12x-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12x-5>0\\4x^2-12x+5\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}12x-5>0\\(2x-5)(2x-1)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{5}{12}\\\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{5}{2} \Rightarrow S=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

Vậy $M=\dfrac{5}{2}, m=\dfrac{1}{2}$ suy ra $M+m=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=3$.

Chọn A.

Ví dụ 10: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a để bất phương trình

$$2\log_{\frac{1}{2}} a-3+2x.\log_{\frac{1}{2}} a-x^2<0$$

nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 6.

C. 7. **D.** 8.

Lời giải

Bất phương trình $2\log_{\frac{1}{2}} a-3+2x.\log_{\frac{1}{2}} a-x^2<0 \Leftrightarrow x^2-2x.\log_{\frac{1}{2}} a-2\log_{\frac{1}{2}} a+3>0$.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}} a$, khi đó bất phương trình trở thành $x^2-2t.x-2t+3>0$ $(*)$.

Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta'_{(*)}<0$

$\Leftrightarrow t^2-(-2t+3)<0 \Leftrightarrow t^2+2t-3<0 \Leftrightarrow -3<t<1 \Leftrightarrow -3<\log_{\frac{1}{2}} a<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<a<8$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Ví dụ 11: Có tất cả bao nhiêu giá trị của x thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $x+\frac{1}{3}$ là số nguyên và $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5-x}<\log_{\frac{1}{3}} 3-x$?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Xét bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5-x}<\log_{\frac{1}{3}}(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ \sqrt{5-x}>3-x \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ (x-1)(x-4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Mặt khác $x+\frac{1}{3}$ là số nguyên $\Leftrightarrow \frac{3x+1}{3}$ là số nguyên $\Leftrightarrow 3x+1$ chia hết cho 3.

Ta có $1<x<3 \Leftrightarrow 4<3x+1<10 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1=6 \\ 3x+1=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{3} \\ x=\frac{8}{3} \end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 2 giá trị của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 12: Gọi S_1 là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+5)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\ge 0$ và S_2 là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)\ge 1$. Khẳng định nào dưới đây **đúng** ?

A. $S_1\cap S_2=[1;3)$.

B. $S_1\cap S_2=[-1;3)$.

C. $S_1\cap S_2=[-1;1]$.

D. $S_1\cap S_2=[1;3]$.

Lời giải

Xét bất phương trình $\log_2(x+5)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\ge 0 \qquad (1)$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+5>0,\ 3-x>0\\ \log_2(x+5)-\log_2(3-x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5<x<3\\ \log_2(x+5)\ge\log_2(3-x)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5<x<3\\ x+5\ge 3-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5<x<3\\ 2x\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x<3\longrightarrow S_1=[-1;3).$$

Xét bất phương trình $\log_2(x+1)\ge 1\Leftrightarrow\log_2(x+1)\ge\log_2 2\Leftrightarrow x\ge 1\longrightarrow S_2=[1;+\infty)$.

Vậy $S_1\cap S_2=[-1;3)\cap[1;+\infty)=[1;3)$.

Chọn A.

Ví dụ 13: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)>\log_2(x^2-x)-1$

A. $S=(2;+\infty)$.

B. $S=(1;2)$.

C. $S=(0;2)$.

D. $S=(1;2]$.

Lời giải

Điều kiện: $x>1$. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)>\log_2(x^2-x)-1$.

$$\Leftrightarrow -\log_2(x+2)+\log_2 x^2>\log_2\frac{x^2-x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\log_2\frac{x^2}{x+2}>\log_2\frac{x^2-x}{2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+2}>\frac{x^2-x}{2}\Leftrightarrow x\in(0;2).$$

Chọn C.

Ví dụ 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x\right)<1$ có dạng $S=\left(\frac{1}{a};b\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Khẳng định nào dưới đây là đúng về mối liên hệ giữa a, b ?

A. $a+b=4$ **B.** $ab=10$.
C. $a=b$ **D.** $a-2b=3$.

Lời giải

Bất phương trình $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x\right)<1 \Leftrightarrow \begin{cases}1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x>0\\ 1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x<2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ 1-\log_9 x-\log_9 x>0\\ 1-\log_9 x-\log_9 x<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ -\frac{1}{2}<\log_9 x<\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ 9^{-\frac{1}{2}}<x<9^{\frac{1}{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3.$$

Suy ra tập nghiệm S của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{3};3\right)=\left(\frac{1}{a};b\right)\Rightarrow a=b=3$.

Chọn C.

Ví dụ 15: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x trong đoạn $[-2017;2017]$ thỏa mãn bất phương trình $\log_3 x-\log_5 x\le \log_3 x.\log_5 x$.

A. 2017. **B.** 4026.
C. 2018. **D.** 2016.

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3 x\le(1+\log_3 x).\log_5 x=\log_3(3x).\log_5 x$ (1).

- Nếu $x>1$ suy ra $(1)\Leftrightarrow \frac{\log_5 x.\log_3(3x)}{\log_3 x}\ge 1\Leftrightarrow \log_5 x.\log_x(3x)\ge 1$

  $\Leftrightarrow \frac{\log_x 3x}{\log_x 5}\ge 1\Leftrightarrow \log_5 3x\ge 1\Leftrightarrow 3x\ge 5\Leftrightarrow x\ge\frac{5}{3}$.
- Nếu $x=1$ suy ra (1) luôn đúng.
- Nếu $0<x<1$ suy ra $(1)\Leftrightarrow \log_5 3x\le 1\Leftrightarrow 0<x<1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{5}{3}\\ 0<x<1\end{array}\right.$. Kết hợp $m\in[-2017;2017]$ suy ra có tất cả 2016 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6094]

Câu 1: [564685] Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)-2\log_4(5-x)<1-\log_2(x-2)$ là:

A. $-4<x<3.$ **B.** $2<x<3.$

C. $1<x<2.$ **D.** $2<x<5.$

Câu 2: [564686] Bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2$ có tập nghiệm là:

A. $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left[\frac{3}{4};3\right]$

C. $\left(\frac{3}{4};3\right]$ **D.** $\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$

Câu 3: [564687] Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x+1)>\log_{0,2}(3-x)$ là:

A. $S=(-\infty;3)$ **B.** $S=(1;+\infty)$

C. $S=(1;3]$ **D.** $S=(-1;1)$

Câu 4: [564688] Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)-2\log_4(5-x)<1-\log_2(x-2)$ là :

A. $2<x<5$ **B.** $1<x<2$

C. $2<x<3$ **D.** Đáp số khác.

Câu 5: [564689] Tập nghiệm của bất phương trình $-4<-\lg x<-3$ là:

A. $(3;4).$ **B.** $(0;1000)\cup(10000;+\infty).$

C. $(1000;10000).$ **D.** Vô nghiệm.

Câu 6: [564690] Giải bất phương trình : $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}>\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+3).$

A. $3<x<5$ **B.** $x>5$

C. $x>3$ **D.** $x>\sqrt{10}$

Câu 7: [564691] Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+8)+2\log_5(x-4)>0$ là:

A. $x>4$ **B.** $x<2$

C.Vô nghiệm **D.** $0<x<1$

Câu 8: [564692] Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)-2\log_4(5-x)<1-\log_2(x-2)$ là:

A. $2<x<3$ **B.** Đáp số khác

C. $2<x<5$ **D.** $1<x<2$

Câu 9: [564693] Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là:

A. $[3;5]$ **B.** $(1;3]$

C. $(1;5)$ **D.** $[-3;3]$

Câu 10: [564694] Tập các số x thỏa mãn $\log_{0,4}(x-4)+1>0$:

A. $(4;6,5]$ **B.** $[6,5;+\infty)$

C. $(4;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6,5)$

Câu 11: [564695] Bất phương trình $4\log_{25}x+\log_x 5\geq 3$ có nghiệm là:

A. $\sqrt{5}\leq x\leq 5$ **B.** $0<x\leq\sqrt{5};x\geq 5$

C. $x\leq\sqrt{5};x\geq 5$ **D.** $0\leq x\leq\frac{1}{2};x\geq 1$

Câu 12: [564696] Tập các số x thỏa mãn $\log_{0,4}(x-4)+1\geq 0$ là:

A. $\left(-\infty;\frac{13}{2}\right)$ **B.** $\left[\frac{13}{2};+\infty\right)$

C. $(4;+\infty)$ **D.** $\left(4;\frac{13}{2}\right]$

Câu 13: [564697] Tập nghiệm của BPT $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geq 0$ là:

A. $S=[5;+\infty)$ **B.** $S=\left[4-\sqrt{2};+\infty\right)$

C. $S=(4;+\infty)$ **D.** $S=(4+\sqrt{2};+\infty)$

Câu 14: [564698] Cho bất phương trình $\log_{3\sqrt{10}}|2x+1|>1$ có tập nghiệm là S. Khi đó $R\setminus S$ bằng:

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{7}{20};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-\frac{13}{2}\right]\cup\left[-\frac{7}{20};+\infty\right)$

C. $\left(-\infty;-\frac{13}{30}\right)\cup\left(-\frac{7}{20};+\infty\right)$ **D.** Đáp số khác.

Câu 15: [564699] Bất phương trình: $\log_2(2x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\leq 1$ có tập nghiệm là:

A. $\left[\frac{5}{2};3\right]$ **B.** $(2;+\infty)$.

C. $\left(2;\frac{5}{2}\right]$. **D.** $(2;3]$

Câu 16: [564700] Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2-x-1)<0$ là:

A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

D. $(-\infty;0)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 17: [564701] Giải bất phương trình $\log_3\left(x+9^{500}\right)>1000$.

A. $x>3$.

B. $x>0$.

C. $0<x<3$.

D. $-9^{500}<x<0$.

Câu 18: [564702] Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+4^{500}\right)>-1000$.

A. $-4^{500}<x<2$.

B. $x>0$.

C. $-2^{1000}<x<0$.

D. $0<x<2$.

Câu 19: [564703] Giải bất phương trình $\log_3\left(x^2-1\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>1000$.

A. $x>1+9^{500}$.

B. $x>2^{1000}-1$.

C. $x>3001$.

D. $1<x<3001$.

Câu 20: [564704] Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<1000$.

A. $x\in\mathbb{R}$.

B. $x\in\varnothing$.

C. $1<x<2^{1000}-1$.

D. $x>1$.

Câu 21: [564705] Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2(3x-1)\right)^{1001}>0$.

A. $\frac{1}{3}<x<1$.

B. $x>1$.

C. $1<x<\frac{3}{2}$.

D. $\frac{2}{3}<x<1$.

Câu 22: [564706] Giải bất phương trình $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2)>1000$.

A. $x>1+\sqrt{1+4^{500}}$.

B. $x>1+\sqrt{2+2^{1000}}$.

C. $2<x<1+\sqrt{1+4^{500}}$.

D. $2<x<1+\sqrt{2+2^{1000}}$.

Câu 23: [564707] Giải bất phương trình $\log_3\left(\log_2\frac{2x-1}{x-1}\right)^{2017}>0.$

A. $0<x<1.$
B. $x>1.$
C. $x>1$ hoặc $x<0.$
D. $1<x<2.$

Câu 24: [564708] Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{x}{x-1}\right)^{2017}>0.$

A. $\frac{3}{2}<x<9.$
B. $1<x<\frac{3}{2}.$
C. $x>\frac{3}{2}.$
D. $1<x<9.$

Câu 25: [564709] Nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}(2x-1)>\log_3(4x+1)$.

A. $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$
B. $x\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(2;+\infty).$
C. $x\in(2;+\infty)$
D. $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty).$

Câu 26: [564710] Nghiệm của bất phương trình $\log^2_{\frac{1}{2}}x-\log_2(2x)-5\ge 0$ là:

A. $x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(9;+\infty).$
B. $x\in[3;+\infty).$
C. $x\in\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[8;+\infty).$
D. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]\cup[9;+\infty).$

Câu 27: [564711] Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x+2)>\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{x\sqrt{x}}$ là:

A. $x\in R$
B. $x>2$
C. $x>0$
D. $x\ge 2$

Câu 28: [564712] Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{x}}(2x+1)>\log_{\frac{1}{x}}(x-1)$ là:

A. $x\ge 1.$
B. $0<x<1.$
C. $-2<x<1.$
D. $x>2;\ 0<x<1.$

Câu 29: [564713] Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-3)+\log_8(3x+1)^3>5$ là:

A. $x>3.$
B. $-\frac{7}{3}<x<5.$
C. $x\ge 5.$
D. $x>5.$

Câu 30: [564714] Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3^2\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)<2$

A. $x=3$.

B. $S=\left(\frac{1}{3};2\right)$.

C. $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$.

D. $S=\left(\frac{1}{3};5\right)$.

Câu 31: [564715] Bất phương trình $\log_3\left(3x^2\right)+\log_x\sqrt{3}>\frac{7}{2}$ có tập nghiệm là:

A. $x\in(3;+\infty)$

B. $x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$

C. $x\in\left(1;\sqrt[4]{3}\right)\cup(3;+\infty)$

D. $x\in\left(1;\sqrt{3}\right)\cup(3;+\infty)$

Câu 32: [564716] Nghiệm của bất phương trình $x+\log_3(x+1)>3$ là:

A. $x>-1$.

B. $x>-2$.

C. $x>2$.

D. $x>0$.

Câu 33: [564717] Nghiệm của bất phương trình $\log_2\frac{2^x+1}{4^x+5}>\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x+2\right)$ là :

A. $x\in\mathbb{R}$.

B. $x>0$.

C. $x>1$.

D. $x\geq 1$.

Câu 34: [564718] Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$:

A. $x>1$.

B. $x\leq 5$.

C. $1<x<5$.

D. $2<x<5$.

Câu 35: [564719] Giải bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x-3\right)\leq 1$:

A. $x>0$.

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\leq x<\frac{1}{2}$.

C. $x>\frac{1}{2}$.

D. $0<x\leq\frac{1}{2}$.

Câu 36: [564720] Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2 \frac{1+2x}{1+x}\right) > 0$:

A. $-1 < x < 0$.
B. $x < 0$.
C. $x \geq 0$.
D. $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -1 \end{array}\right.$.

Câu 37: [564721] Giải bất phương trình $\log_2(1 - 2\log_9 x) < 1$:

A. $x < \frac{1}{9}$.
B. $x > 3$.
C. $\frac{1}{9} < x < 3$.
D. $\frac{1}{3} < x < 3$.

Câu 38: [564722] Giải bất phương trình $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$.

A. $S = \left(3; \sqrt{10}\right)$.
B. $S = (3; +\infty)$.
C. $S = (3; 9)$.
D. $S = \left(\sqrt{10}; +\infty\right)$.

Câu 39: [564723] Biết tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,3}(4x^2) \geq \log_{0,3}(12x - 5)$ là một đoạn. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của tập S. Mối liên hệ giữa m và M là

A. $m + M = 3$.
B. $m + M = 2$.
C. $M - m = 3$.
D. $M - m = 1$.

Câu 40: [564724] Nghiệm của bất phương trình $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$ là

A. $x > 2$.
B. $x > \frac{1}{100}$.
C. $x > -2$.
D. $x > 100$.

Câu 41: [564725] Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \leq 0$ có tập nghiệm $S = [a; b]$.

Giá trị của $a^2\sqrt{b}$ bằng

A. 16.
B. 12.
C. 8.
D. 4.

Câu 42: [564726] Khoảng nghiệm của bất phương trình $\log_{x^2-4}(x+2) \geq 0$ chứa khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\sqrt{5}; -2\right)$.
B. $\left(\sqrt{5}; +\infty\right)$.
C. $(-2; +\infty)$.
D. $\left(-2; \sqrt{5}\right)$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. C	03. D	04. C	05. C	06. D	07. C	08. A	09. B	10. A
11. B	12. D	13. D	14. D	15. C	16. C	17. B	18. C	19. A	20. D
21. D	22. A	23. B	24. C	25. C	26. C	27. B	28. C	29. D	30. C
31. C	32. C	33. B	34. D	35. B	36. C	37. D	38. D	39. A	40. B
41. C	42. B								

Chủ đề 9

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CHỨA THAM SỐ

[TV6095]

I. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: [ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2017] Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

A. $m = -4$. **B.** $m = 4$.

C. $m = 81$. **D.** $m = 44$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_3 x$ với $x > 0 \to t \in (-\infty; +\infty)$.

Khi đó, phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + 2m - 7 = 0 \quad (*)$.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - (2m-7) = (m-1)^2 + 6 > 0, \forall m$.

Với $m \in \mathbb{R}$, phương trình $(*)$ có hai nghiệm $\begin{cases} t_1 = \log_3 x_1 \\ t_2 = \log_3 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2$.

$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = \log_3(x_1x_2)$ mà $x_1x_2 = 81$ và $t_1 + t_2 = m$ (hệ thức Viet).

Suy ra $m = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m \geq \frac{1}{4}$. **B.** $m \geq 0$.

C. $0 < m < \frac{1}{4}$. **D.** $m \leq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m = 0$

Đặt $t=\log_2 x$ với $x\in(0;1)$ suy ra $t\in(-\infty;0)$, khi đó $t^2+t+m=0\Leftrightarrow m=-t^2-t=f(t)$.

Ta có $f'(t)=-2t-1\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow -2t-1=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ với $t\in(-\infty;0)$.

Ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $(0;1)$ thì phương trình $f(t)=m$ có ít nhất một nghiệm, khi đó $m\le\frac{1}{4}$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình lôgarit $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. 3. **B.** 2.

C. 1. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\Rightarrow \log_3^2 x=t^2-1$. Với $1\le x\le 3^{\sqrt{3}}$ suy ta $1\le t\le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2+t=2m+2$ $(*)$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Leftrightarrow(*)$ có nghiệm $1\le t\le 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $1\le t\le 2$, ta thấy $f(t)$ là hàm đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra $2=f(1)\le f(t)\le f(2)=6$, $\forall t\in[1;2]$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2\le 2m+2\le 5\Leftrightarrow 0\le m\le 2$ suy ra có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Ví dụ 4: [ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN ĐH VINH] Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x-\frac{2}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $-1<m\ne 0$. **B.** $m>-1$.

C. Không tồn tại m. **D.** $-1<m<0$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>-1\\ \log_3(x+1)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x+1\ne 3^0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x\ne 0\end{cases}$.

Xét hàm số $f(x)=x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}$ trên khoảng $D=(-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta có $f'(x)=1-\dfrac{2.\left[\log_3(x+1)\right]'}{\log_3^2(x+1)}=1+\dfrac{2}{\ln 3.(x+1).\log_3^2(x+1)}>0,\ \forall x\in D$.

Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
y'	‖	$+$	‖	$+$	
y	‖ -1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ $m>-1$.

Chọn B.

Ví dụ 5: [ĐỀ THI THAM KHẢO BỘ GD – ĐT 2017] Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất ?

A. 2017. **B.** 4014.
C. 2018. **D.** 4015.

Lời giải

Phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}mx>0\\x+1>0\end{array}\right.\\ \log(mx)=\log(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\mx=x^2+2x+1\quad(*)\end{cases}$.

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình $(*)$.

Khi đó, với $\begin{cases}x>-1\\x\neq 0\end{cases}$ thì phương trình $(*)$ trở thành $m=\dfrac{x^2+2x+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}+2=f(x)$.

Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}+2$ trên khoảng $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$, có $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}\\1-\dfrac{1}{x^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}\\x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $m\in[-2017;2017]$ và $m\in\mathbb{R}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=\overline{-2017,-1} \end{array}\right.$.

Chọn C.

Chú ý: Với dạng phương trình $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>0 \quad (g(x)>0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ thì ta chỉ cần xét điều kiện hoặc là $f(x)>0$, hoặc là $g(x)>0$ để tìm điều kiện của biến x. Vậy ta sẽ chọn hàm số không chứa tham số m để tìm điều kiện bài toán.

Ví dụ 6: Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^3)+2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2+29x-2)=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt ?

A. 0. **B.** 4.

C. 18. **D.** 15.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(mx-6x^3)=\log_2(-14x^2+29x-2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -14x^2+29x-2>0 \\ mx-6x^3=-14x^2+29x-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{14}<x<2 \\ m=6x^2-14x+29-\dfrac{2}{x} \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có ba nghiệm phân biệt $x\in\left(\dfrac{1}{14};2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=6x^2-14x+29-\frac{2}{x}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{14};2\right)$.

Ta có $f'(x)=12x-14+\frac{2}{x^2}=\frac{12x^3-14x^2+2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ (do $\frac{1}{14}<x<2$).

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		1		2
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$\frac{3}{98}$	↗	$\frac{39}{2}$	↘	19	↗	24

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt khi $19<m<\frac{39}{2}$.

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Ví dụ 7: Biết rằng phương trình $\log_5\left(x^4-3x^2+3x-m\right)-\log_{125}(4-x)^3=\log_5(x+1)$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m\in(a;b)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $a.b=-4$. **B.** $a-b=1$.

C. $b-2a=6$. **D.** $5a=2b$.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}4-x>0,\ x+1>0\\ \log_5\left(x^4-3x^2+3x-m\right)-\log_5(4-x)=\log_5(x+1)\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4\\ \log_5\left(x^4-3x^2+3x-m\right)=\log_5\left[(4-x)(x+1)\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4\\ x^4-3x^2+3x-m=(4-x)(x+1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4\\ m=x^4-3x^2+3x-\left(4+3x-x^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4\\ m=x^4-2x^2-4=f(x)\end{cases}\quad(*)$.

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow(*)$ có ba nghiệm phân biệt $x\in(-1;4)$

.

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2-4$ trên khoảng $(-1;4)$, có $f'(x)=4x^3-4x$.

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<4\\4x^3-4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<4\\x(x-1)(x+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	220

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;4)$ khi và chỉ khi $-5<m<-4 \Leftrightarrow m\in(-5;-4)=(a;b) \Rightarrow \begin{cases}a=-5\\b=-4\end{cases} \Rightarrow b-2a=6.$

Chọn C.

Ví dụ 8: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình dưới đây có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2\ge 1$.

$$2\log_4\left[2x^2-x+2m(1-2m)\right]+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+mx-m^2\right)=0$$

A. 2. **B.** 0.

C. 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2\left[2x^2-x+2m(1-2m)\right]=\log_2\left(x^2+mx-m^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2x^2-x+2m(1-2m)=x^2+mx-2m^2>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-(1+m)x+2m-2m^2=0 & (1)\\x^2+mx-2m^2>0 & (2)\end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với $(x-2m)(x+m)-(x-2m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2m\\x_2=1-m\end{cases}$.

Khi đó $x_1^2+x_2^2\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases}2m\ne 1-m\\(2m)^2+(1-m)^2\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3m\ne 1\\5m^2-2m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge \dfrac{2}{5}\\m\le 0\end{array}\right.$.

Và x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $(2) \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2+2m^2-2m^2>0\\(1-m)^2+m(1-m)-2m^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>0\\2m^2+m-1<0\end{cases}$.

Kết hợp hai điều kiện trên, ta được $\left[\begin{array}{l}-1<m<0\\\dfrac{2}{5}\le m<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Vậy không có giá trị m nguyên nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 9: [ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2017] Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=25$.

C. $S_{\min}=33$. **D.** $S_{\min}=17$.

Lời giải

Phương trình $\begin{cases}a\ln^2 x+b\ln x+5=0\\5\log^2 x+b\log x+a=0\end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=b^2-20a>0$.

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}\ln x_1+\ln x_2=-\dfrac{b}{a}\\\log x_3+\log x_4=-\dfrac{b}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x_1x_2)=-\dfrac{b}{a}\\\log(x_3x_4)=-\dfrac{b}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1x_2=e^{-\frac{b}{a}}\\x_3x_4=10^{-\frac{b}{5}}\end{cases}$.

Mặt khác $x_1x_2>x_3x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow \ln e^{-\frac{b}{a}}>\ln 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}>-\dfrac{b}{5}.\ln 10 \Leftrightarrow a>\dfrac{5}{\ln 10}$.

Vì a, b là hai số nguyên dương suy ra $a\ge 3 \Rightarrow a_{\min}=3$ và $b^2>20a>60 \Rightarrow b_{\min}=8$.

Vậy $S_{\min}=2a_{\min}+3b_{\min}=2.3+3.8=30$.

Chọn A.

Ví dụ 10: Tính tổng tất cả các giá trị của tham số a để phương trình sau có đúng 3 nghiệm.

$$4^{-|x-a|}.\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}.\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-a|+2\right)=0$$

A. 4. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2.4^{-|x-a|}.\log_3\left(x^2-2x+3\right)-2^{-x^2+2x}.\log_3\left(2|x-a|+2\right)=0 \quad (*)$

$x^2-2x+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $(*)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1}.\log_3\left(x^2-2x+1+2\right)=2^{2|x-a|}.\log_3\left(2|x-a|+2\right)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t.\log_3(t+2)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Suy ra $t_1=t_2\Leftrightarrow f(t_1)=f(t_2)$. Do đó $(*)\Leftrightarrow f\left(x^2-2x+1\right)=f\left(2|x-a|\right)$.

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2|x-a|\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)^2=4(x-a)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2+1-2a=0 & (1)\\ x^2-4x+1+2a=0 & (2)\end{array}\right..$$

Xét $\Delta'_{(1)}=2a-1$ và $\Delta'_{(2)}=4-(2a+1)=3-2a$.

Phương trình đã cho có 3 nghiệm khi và chỉ khi:

TH1. Phương trình (1) có nghiệm kép và (2) có hai nghiệm phân biệt.

TH2. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép.

TH3. Phương trình $(1),(2)$ có hai nghiệm phân biệt và có một nghiệm trùng nhau.

Giải 3 trường hợp ta tìm được $a=\frac{1}{2},\ a=\frac{3}{2},\ a=1$ suy ra $\sum a=3$.

Chọn D.

Ví dụ 11: [ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2017] Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

A. $m<1$. **B.** $m\le 1$.

C. $m<0$. **D.** $m<\frac{2}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$, với $x>0$ suy ra $t\in(-\infty;+\infty)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2t+3m-2<0\Leftrightarrow 3m<-t^2+2t+2 \quad (*)$.

Để bất phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3m < M = \max\limits_{(-\infty;+\infty)}\left\{-t^2+2t+2\right\}$ (1).

Ta có $-t^2+2t+2=3-(t-1)^2 \le 3, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $M=3$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $3m<3 \Leftrightarrow m<1$ là giá trị cần tìm.

Chọn A.

Ví dụ 12: Tìm m để bất phương trình $\log_m\left(x^2-2x+m+1\right)>0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$.
C. $m>2$. **D.** $m \ge 2$.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp

+) **TH1:** Với $m>1$, suy ra $\log_m\left(x^2-2x+m+1\right)>0 \Leftrightarrow x^2-2x+m+1>1$.

$\Leftrightarrow x^2-2x+m>0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 1-m<0 \Leftrightarrow m>1$.

+) **TH2:** Với $0<m<1$, suy ra $\log_m\left(x^2-2x+m+1\right)>0 \Leftrightarrow x^2-2x+m+1<1$.

$\Leftrightarrow x^2-2x+m<0$.

Vì hệ số của x^2 dương nên bất phương trình có nghiệm hoặc vô nghiệm.

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m>1$ là giá trị cần tìm.

Chọn B.

Ví dụ 13: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m trong đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\lg^2 x - m.\lg x + m + 3 \le 0$ có nghiệm $x>1$.

A. 10. **B.** 11.
C. 12. **D.** 19.

Lời giải

Đặt $t=\lg x$ suy ra với $x>1 \longrightarrow t>0$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$t^2-mt+m+3 \le 0 \Leftrightarrow t^2+3 \le m(t-1)$ (1)

TH1. Với $t<1$, suy ra bất phương trình $(1) \Leftrightarrow \dfrac{t^2+3}{t-1} \ge m$ (2).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+3}{t-1}$ trên khoảng $(0;1)$, ta có $f'(t)=\dfrac{t^2-2t-3}{(t-1)^2}<0, \forall t \in (0;1)$.

$\Rightarrow (2)$ có nghiệm $t \in (0;1)$ khi và chỉ khi $m<f(0)=-3$.

TH2. Với $t>1$, suy ra bất phương trình $(1)\Leftrightarrow m\ge\dfrac{t^2+3}{t-1}$ $\quad(3)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+3}{t-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên

t	1		3		$+\infty$
f'(t)		−	0	+	
f(t)	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

$\Rightarrow(3)$ có nghiệm $t\in(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\ge f(3)=6$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m<-3\\m\ge 6\end{array}\right.$, kết hợp điều kiện $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\-10\le m\le 10\end{cases}\Rightarrow m=\left\{\begin{array}{l}-10,-9,-8,-7,-6,\\-5,-4,6,7,8,9,10\end{array}\right\}$.

Chọn C.

Ví dụ 14: Cho bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $2<m\le 3$. **B.** $2\le m\le 3$.
C. $m\ge 3$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\log_5\left[5\left(x^2+1\right)\right]\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m>0\Leftrightarrow\begin{cases}(5-m)x^2-4x-m+5\ge 0\\mx^2+4x+m>0\end{cases}\quad(*),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

TH1. $m=0$ hoặc $m=5$: $(*)$ không thỏa mãn.

TH2. $m\ne 0$ và $m\ne 5$: $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=5-m>0\\\Delta'_{(1)}=4-(5-m)^2\le 0\\a_2=m>0\\\Delta'_{(2)}=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 3$.

Vậy $m\in(2;3]$ là giá trị cần tìm.

Chọn A.

Ví dụ 15: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $9x^2-4y^2=5$ và $\log_m(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $3x+2y\le 5$.

A. 6. **B.** 10.

C. 3. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $X=3x+2y$, $Y=3x-2y$ và điều kiện $\begin{cases} X, Y>0 \\ 1\ne m>0 \end{cases}$.

Theo bài ta, ta có $\begin{cases} (3x+2y)(3x-2y)=5 \\ \log_m(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} XY=5 \\ \log_m X-\log_3\dfrac{5}{X}=1 \end{cases} \quad (*)$.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow \log_m X-\log_3 5+\log_3 X=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 X}{\log_3 m}+\log_3 X=\log_3 5+1 \Leftrightarrow \log_3 X=\frac{(\log_3 5+1).\log_3 m}{1+\log_3 m} \quad (1).$$

Mặt khác $3x+2y\le 5 \Leftrightarrow X\le 5 \Leftrightarrow \log_3 X\le \log_3 5$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{(\log_3 5+1).\log_3 m}{1+\log_3 m}\le \log_3 5 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 m-\log_3 5}{1+\log_3 m}\le 0$ (3).

Đặt $M=\log_3 m$, ta có $(3) \Leftrightarrow -1<M<\log_3 5 \Leftrightarrow -1<\log_3 m\le \log_3 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}<m\le 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của m là 5.

Chọn D.

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT 6096]

Câu 1: [566098] Phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$ khi và chỉ khi $a\le m\le b$. Khi đó tích số ab bằng:

A. 6. **B.** 12.

C. 18. **D.** 54.

Câu 2: [566099] Số giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3^2 2x+\log_9 4x^2+4-m=0$ có nghiệm $x\in\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{2}\right]$ là:

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 3: [566100] Phương trình $9^x - 3m.3^x + 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{a}{b}; (a > 0, b > 0)$. Giá trị của biểu thức $(b - a)$ bằng:

A. -1. **B.** -2.

C. 1. **D.** 2.

Câu 4: [566101] Phương trình $m.16^x + (2m+1).4^x - 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi:

A. $0 < m < \frac{4}{3}$. **B.** $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{3}. \end{cases}$

C. $0 < m < \frac{3}{4}$. **D.** $m = \varnothing$.

Câu 5: [566102] Giá trị của m để phương trình $5^x - m.5^{\frac{x+2}{2}} + 3 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt sao cho $x_1 + x_2 = 2$ là:

A. -2. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 6: [566104] Giá trị của m để phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2 + mx + m - 1\right) + \log_{2-\sqrt{3}} x = 0$ có nghiệm duy nhất là

A. $m > -5$. **B.** $m < -2$

C. $m > -3$. **D.** $m < 1$.

Câu 7: [566106] Cho phương trình $9^x - 10.3^x + 1 - m = 0$. Giá trị của m để phương trình trên có 2 nghiệm là:

A. $m \in (-24; 1)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in (-5; +\infty)$. **D.** $m \in (-24; +\infty)$.

Câu 8: [566108] Với giá trị nào của m để phương trình $9^x - 3^x + m = 0$ có nghiệm?

A. $m > \frac{1}{4}$. **B.** $m < 0$.

C. $m > 0$. **D.** $m \le \frac{1}{4}$.

Câu 9: [566110] Phương trình $(m-2).2^{2(x^2+1)} - (m+1).2^{x^2+2} + 2m = 6$ có nghiệm khi:

A. $2 < m \le 3$. **B.** $2 \le m < 9$.

C. $2 \le m \le 9$. **D.** $2 < m < 3$.

Câu 10: [566111] Tìm m để phương trình $9^x - m.3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

A. $m > 2$ hoặc $m < -2$.
B. $m > 2$.
C. $-2 < m < 2$.
D. $m < -2$.

Câu 11: [566112] Tìm m để phương trình: $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 3 nghiệm lớn hơn -1 ?

A. $\frac{1}{2^9} \le m \le 1$.
B. $\frac{1}{2^9} < m < 1$.
C. $\frac{1}{2^5} < m < 1$.
D. Đáp án khác.

Câu 12: [566113] Tất cả các giá trị của m để phương trình: $2^{2x-1} + m^2 - m = 0$ có nghiệm là:

A. $m < 0$; $m > 1$.
B. $0 < m < 1$.
C. $m < 0$.
D. $m > 1$.

Câu 13: [566114] Để phương trình: $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu thì m phải thỏa mãn điều kiện:

A. $-4 < m < -1$.
B. Không tồn tại m.
C. $-1 < m < \frac{3}{2}$.
D. $-1 < m < \frac{-5}{6}$.

Câu 14: [566115] Tìm a để phương trình: $x^4 - 4x^2 + |\log_3 a| + 3 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt:

A. $\frac{1}{27} < a < 3$.
B. $1 \le a < 3$.
C. $\frac{1}{3} < a < 3$
D. $\frac{1}{27} \le a < 3$.

Câu 15: [566116] Tìm m để phương trình $\log^2 \sqrt{3}x - m\log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1 :

A. $m = 2$.
B. Không tồn tại m.
C. $m = -2$.
D. $m = \pm 2$.

Câu 16: [566117] Tìm m để phương trình $\log_2^2 x+\log_2 x+m=0$ có nghiệm $x\in(0;1)$?

A. $m\ge 1$. **B.** $m\ge \frac{1}{4}$.

C. $m\le \frac{1}{4}$. **D.** $m\le 1$.

Câu 17: [566120] Cho phương trình $\log_2 m=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x-\frac{2}{3}$, với m là tham số. Tất cả các giá trị của m để phương trình trên có một nghiệm là:

A. $m>4$ hoặc $0<m<2^{-34}$. **B.** $m\ge 4$ hoặc $0<m\le 2^{-34}$.

C. $m\in[2;+\infty)$. **D.** $2^{-34}\le m\le 2^2$.

Câu 18: [566121] Bất phương trình $\lg^2 x-m\lg x+m+3\le 0$ có nghiệm $x>1$ khi giá trị của m là:

A. $(-\infty;-3)\cup[6;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-3)$.

C. $[6;+\infty)$. **D.** $(3;6]$.

Câu 19: [566122] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2^{x^2-x+1}=2^{mx-1}$ có nghiệm.

A. $m>-1+2\sqrt{2}$ hoặc $m<-1-2\sqrt{2}$.

B. $m\ge -1+2\sqrt{2}$ hoặc $m\le -1-2\sqrt{2}$.

C. $-1-2\sqrt{2}\le m\le -1+2\sqrt{2}$.

D. $1-2\sqrt{2}\le m\le 1+2\sqrt{2}$.

Câu 20: [566123] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\frac{1}{3^{|x-1|}}=2m-1$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=1$. **B.** $m\ge 1$.

C. $m>\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}<m\le 1$.

Câu 21: [566124] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2^x+x=m$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=3$. **B.** $m\in\varnothing$.

C. $m>0$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 22: [566125] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $4^x-m.2^x+4=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $4<m<6$. **B.** $m>4$.

C. $0<m<6$. **D.** $m>6$.

Câu 23: [566126] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\log_3\left(x^2-4x+6\right)=m$ có nghiệm kép.

A. $m=\log_2 3$. **B.** $m=\frac{2}{3}$.

C. $m=\log_3 2$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 24: [566127] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\log_2 x+\log_2\left(x+1\right)=m$ có nghiệm duy nhất.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$.

C. $m>0$. **D.** $m>1$.

Câu 25: [566128] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\log_3\left(x+1\right)+\log_3\left(x-3\right)=m$ có nghiệm kép.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$.

C. $m>0$. **D.** $m=-\frac{4}{3}$.

Câu 26: [566130] Cho phương trình $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+4.\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=m$. Giá trị của m để phương trình trên có nghiệm là:

A. $m\in\left(2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(4;+\infty\right)$.

C. $m\in\left[2;+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[4;+\infty\right)$.

Câu 27: [566131] Cho phương trình $\log_3\left(m+2x\right)=\log_3\left(4-x^2\right)$

A. $m\in\left(-4;4\right)$. **B.** $m\in\left(-4;4\right]$

C. $m\in\left(-4;5\right)$. **D.** $m\in\left(-4;5\right]$.

Câu 28: [566134] Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(m-4x\right)+2\log_2\left(x+2\right)=0$. Giá trị của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[2;5\right]$ là:

A. $m\in\left[24;69\right]$. **B.** $m\in\left(20;69\right]$.

C. $m\in\left(10;70\right)$. **D.** $m\in\left[10;70\right]$.

Câu 29: [566136] Cho phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 2x=m-1$. Giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm là:

A. $m\geq 2$. **B.** $m\geq -2$.

C. $m<2$. **D.** $m\in R$.

Câu 30: [566137] Giá trị của m để phương trình $9^x-(m+1).3^x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $x_1^2+x_2^2=4$ là:

A. $m=9;\ m=-9.$

B. $m=3;\ m=-3.$

C. $m=9;\ m=\frac{1}{9}.$

D. $m=3;\ m=-\frac{1}{3}.$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. C	03. A	04. D	05. B	06. D	07. A	08. D	09. A	10. B
11. C	12. B	13. D	14. C	15. C	16. A	17. A	18. A	19. B	20. A
21. D	22. B	23. C	24. B	25. A	26. D	27. D	28. A	29. B	30. C

Chuyên đề 10

ỨNG DỤNG MŨ VÀ LOGARIT-GTLN, GTNN CỦA MŨ VÀ LOGARIT NHIỀU BIẾN

[TV6097]

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Công thức 1: **Lãi kép:** $T = A(1+r)^n$ trong đó A là số tiền ban đầu, r là lãi suất/ kỳ hạn và n là số kỳ hạn và T là số tiền cả gốc lẫn lãi thu được. Như vậy số tiền lãi là $\pi = T - A = A(1+r)^n - A$.

Công thức 2: **Tăng trưởng dân số**: $N = N_0(1+r)^n$ trong đó N_0 là dân số năm ban đầu, r là tỷ lệ tăng dân số/ năm, n là số năm và N và dân số năm cần tìm.

Công thức 3: **Hao mòn tài sản hoặc diện tích rừng bị giảm**

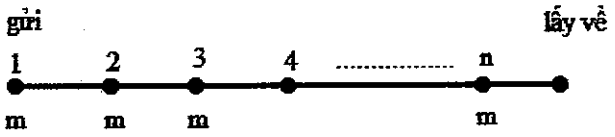
+ ***Hao mòn tài sản:*** $H = H_0(1-r)^n$ trong đó H_0 là giá trị tài sản lúc ban đầu, H là giá trị tài sản sau n năm và r là tỷ lệ hao mòn tính theo năm.

+ ***Diện tích rừng bị giảm***: $T = T_0(1-r)^n$ trong đó T_0 là diện tích rừng ban đầu, T là diện tích rừng sau n năm và r là tỷ lệ rừng giảm hằng năm.

Công thức 4: **Tăng trưởng của bèo hoặc tăng trưởng của vi khuẩn.**

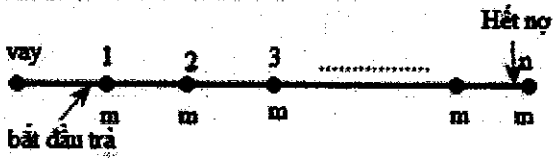
Giả sử lượng bèo ban đầu là T_0 và mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 2 lần thì sau n giờ lượng bèo sẽ là $T = T_0.2^n$ (nếu mỗi giờ tăng k lần thì công thức là $T = T_0.k^n$)

Công thức 5: **Gửi hàng tháng số tiền là** m (tiền)



$$T = m(1+r)^n + m(1+r)^{n-1} + ... + m(1+r) = m(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Công thức 6: **Trả góp hàng tháng số tiền m (tiền).**



$$T(1+n)^n = m(1+r)^{n-1} + ... + m \Rightarrow T(1+r)^n = m\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

PHẦN 1: BÀI TOÁN LÃI SUẤT

Ví dụ 1: [Trích đề thi THPT QG năm 2017]. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra

A. 13 năm. **B.** 12 năm.

C. 14 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải:

Gọi $n \in \mathbb{N}^+$ là số năm cần để có hơn 100 triệu đồng.

Suy ra $50(1+6\%)^n > 100 \Leftrightarrow n > 11,9 \Rightarrow n = 12$ năm.

Chọn B.

Ví dụ 2: [Trích đề thi THPT QG năm 2017]. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng ?

A. Năm 2022. **B.** Năm 2021.

C. Năm 2020. **D.** Năm 2023.

Lời giải:

Tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên sau n năm là: $T = T_0(1+r)^n = 1(1+15\%)^n$.

Giải $(1+15\%)^n \geq 2 \Rightarrow n \geq 4,95 \Rightarrow n = 5$.

Chọn B.

Ví dụ 3: [Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội] Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5 % nột năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

A. 150 triệu đồng. **B.** 154 triệu đồng.

C. 145 triệu đồng. **D.** 140 triệu đồng.

Lời giải:

Công thức lãi kép $T = A(1+r)^n$

Tiền lãi ông Việt có sau 3 năm sẽ là tiền gốc+lãi trừ đi số tiền gốc ban đầu

Ta có: $A(1+6,5\%)^3 - A \geq 30 \Leftrightarrow A \geq \dfrac{30}{(1+6,5\%)^3 - 1} \approx 144,26$ triệu.

Chọn C.

Ví dụ 4:[Chuyên Đại học vinh lần 1-2017] Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây một nhóm các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể được dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

A. $7 \times \log_3 25$. **B.** $3^{\frac{25}{7}}$.

C. $7 \times \dfrac{24}{3}$. **D.** $7 \times \log_3 24$.

Lời giải:

Gọi A là lượng bèo ban đầu, để phủ kín mặt hồ thì lượng bèo là $\dfrac{100}{4}A$

Sau 1 tuần số lượng bèo là $3A$ suy ra sau n tuần lượng bèo là: $3^n.A$

Để lượng bèo phủ kín mặt hồ thì $3^n.A = \dfrac{100}{4}.A \Rightarrow n = \log_3 \dfrac{100}{4} = \log_3 25 \Rightarrow$ thời gian để bèo phủ kín mặt hồ là: $t = 7\log_3 25$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp

học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng . **B.** 309604 đồng .

C. 215456 đồng. **D.** 232289 đồng.

Lời giải:

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$$s = 3000000\left[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%)\right] = 12927407,43$$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là 12.927.407,43 đồng, số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm .

Ta có công thức:

$$\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1} = \frac{12927407,4(1+0,0025)^{60}.0,0025}{(1+0,0025)^{60} - 1} \approx 232289.$$

Chọn D.

Ví dụ 6: Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của một cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành Nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5730}}(\%)$.

Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 53%. Hãy tính niên đại của công trình kiến trúc đó.

A. 5530 năm **B.** 6241 năm

C. 5064 năm **D.**5248 năm

Lời giải:

Ta có: $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5730}} = 53 \Rightarrow 5248$ năm.

Chọn D.

Ví dụ 7: Các nhà nghiên cứu cho biết dân số của thế giới năm 1950 là 2,56 tỉ người và năm 1960 là 3,04 tỉ người. Đồng thời các nhà nghiên cứu còn công bố rằng dân số của thế giới tăng hàng năm theo một hàm mũ theo thời gian có dạng như sau

$P(t)=P(0).e^{kt}$ trong đó $P(0)$ là dân số thế giới tại thời điểm chọn làm mốc, $P(t)$ là dân số thế giới tại thời điểm t (năm) và hệ số k là hằng số. Hãy ước lượng dân số thế giới vào năm 2020 có khoảng bao nhiêu tỉ người

A. ≈ 8 tỉ người. **B.** $\approx 8,33$ tỉ người.

C. $\approx 8,4$ tỉ người. **D.** $\approx 8,52$ tỉ người.

Lời giải:

Dựa vào đề bài ta có $3,04=2,56.e^{10k}\Rightarrow k\approx 0,0172$.

Suy ra dân số thế giới ước tính năm 2020 sẽ bằng $P(2010)=2,56.e^{0,0172.70}\approx 8,52$ tỉ người.

Chọn D.

PHẦN 2: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Ví dụ 1: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\ln x+\ln y\ge \ln\left(x^2+y\right)$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

A. $P=6$. **B.** $P=3+2\sqrt{2}$.

C. $P=2+3\sqrt{2}$. **D.** $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\ln xy=\ln x+\ln y\ge \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y\Leftrightarrow y(x-1)\ge x^2 \quad (*)$.

Vì $x=1$ không thỏa mãn $(*)$ và $y>0\Rightarrow x>1\Rightarrow P=x+y\ge \dfrac{x^2}{x-1}+x=f(x)$.

Xét hàm $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}+x$ trên khoảng $(1;+\infty)$, có $f'(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$, $\forall x\ne 1$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 2x^2-4x+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=f\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=3+2\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $3+2\sqrt{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2>1$ và $\log_{x^2+y^2}(x+2y)\ge 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+y$. Tính $M+m$.

A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

Lời giải

Vì $x^2+y^2>1$ suy ra $y=\log_{x^2+y^2} f(x)$ là hàm số đồng biến trên tập xác định.

Khi đó $\log_{x^2+y^2}(x+2y)\ge \log_{x^2+y^2}(x^2+y^2)\Leftrightarrow x+2y\ge x^2+y^2$

$$\Leftrightarrow x^2-x+y^2-2y\le 0\Leftrightarrow\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-2y+1\right)\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2\le\frac{5}{4}$$

Xét biểu thức P, ta có $P=2x+y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+y-1+2\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)+y-1=P-2$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, có $\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)+y-1\right]^2\le\left(2^2+1^2\right).\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2\right]^2$

$$\Leftrightarrow (P-2)^2\le 5.\frac{5}{4}=\frac{25}{5}\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le P-2\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le P\le\frac{9}{2}\longrightarrow\begin{cases}P_{\min}=-\frac{1}{2}\\ P_{\max}=\frac{9}{2}\end{cases}.$$

Vậy tổng $M+m=\frac{9}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=4$.

Chọn C.

Ví dụ 3 [ĐỀ THI THỬ NGHIỆM BỘ GD – ĐT 2017] Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min}=19$. **B.** $P_{\min}=13$.

C. $P_{\min}=14$. **D.** $P_{\min}=15$.

Lời giải

Ta có $\log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right)=4\left(\log_{\frac{a}{b}}a\right)^2=\frac{4}{\left(\log_a\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{4}{\left(\log_a a-\log_a b\right)^2}=\frac{4}{\left(1-\log_a b\right)^2}$.

Khi đó, biểu thức $P=\frac{4}{\left(1-\log_a b\right)^2}+3\log_b a-3=\frac{4}{\left(1-\log_a b\right)^2}+\frac{3}{\log_a b}-3$.

Đặt $t=\log_a b$ với $\begin{cases} a>1 \\ b>1 \end{cases} \Rightarrow t>0$ suy ra $P=f(t)=\dfrac{4}{(1-t)^2}+\dfrac{3}{t}-3$.

Xét hàm số $f(t)$, có $f'(t)=-\dfrac{8}{(t-1)^3}-\dfrac{3}{t^2}$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Tính các giá trị $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=15$, $\lim\limits_{t\to 1} f(t)=+\infty$ và $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=+\infty$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ là 15.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $P_{\min}=15$.

Chọn D.

Ví dụ 4: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>1$, $b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P=\frac{27}{2}\left(2\log_{ab} a+\log_{ab} b\right)^2+4\log_a ab$$

A. $P_{\min}=36$. **B.** $P_{\min}=24$.

C. $P_{\min}=48$. **D.** $P_{\min}=32$.

Lời giải

Xét biểu thức P, ta có $P=\dfrac{27}{2}\left(\dfrac{2}{\log_a ab}+\dfrac{1}{\log_b ab}\right)+4\log_a b+4$.

Đặt $t=\log_a b$ $(t>0) \Leftrightarrow \log_b a=\dfrac{1}{t}$. Khi đó $P=\dfrac{27}{2}\left(\dfrac{2}{t+1}+\dfrac{t}{t+1}\right)^2+4t+4$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{27}{2}\left(\dfrac{t+2}{t+2}\right)^2+4t$ với $t\in(0;+\infty)$, có $f'(t)=\dfrac{(t-2)(2t+5)^2}{(t+1)^3}=0 \Leftrightarrow t=2$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $f(2)=32 \Rightarrow P_{\min}=36$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hai số thực $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $T=\dfrac{2}{\log_{ab} a}+\sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b=a^m$. Tính $P=M+m$.

A. $M-m=\dfrac{23}{8}$. **B.** $M-m=\dfrac{81}{16}$.

C. $M-m=\dfrac{19}{8}$. **D.** $M-m=\dfrac{51}{16}$.

Lời giải

Xét biểu thức T, ta có $T=2\log_a(ab)+\sqrt{\log_a a-\log_a b}=2\log_a b+\sqrt{1-\log_a b}+2$.

Đặt $t=\log_a b$ với $t\in(-\infty;1]$, khi đó $T=f(t)=2t+\sqrt{1-t}+2$.

Xét hàm số $f(t)$ trên khoảng $(-\infty;1]$, có $f'(t)=2-\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{15}{16}$.

Tính các giá trị $f(1)=4$, $f\left(\dfrac{15}{16}\right)=\dfrac{33}{8}$ và $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ là $\dfrac{33}{8}$.

Vậy $M=\dfrac{33}{8}$ và $b=a^m\Leftrightarrow m=\log_a b=t=\dfrac{15}{16}$ suy ra $M-m=\dfrac{51}{16}$.

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho a,b là các số thực dương khác 1. Biết rằng biểu thức $P=\dfrac{\log_a\dfrac{b}{a}+\log_b a}{\log_a(ab)+\log_b a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $b=a^m$. Tính $M+m$.

A. $M+m=2$.

B. $M+m=\dfrac{2}{3}$.

C. $M+m=\dfrac{4}{3}$.

D. $M+m=0$.

Lời giải

Xét biểu thức P, ta có $P=\dfrac{\log_a b-\log_a a+\log_b a}{\log_a a+\log_a b+\log_b a}=\dfrac{\log_a b+\log_b a-1}{\log_a b+\log_b a+1}$.

Đặt $t=\log_a b\Leftrightarrow\log_b a=\dfrac{1}{t}$ với $t\in\mathbb{R}$, khi đó $P=f(t)=\dfrac{t+\dfrac{1}{t}-1}{t+\dfrac{1}{t}+1}=\dfrac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $f(t)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, có $f'(t)=\dfrac{2(t^2-1)}{(t^2+t+1)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm1$.

Tính các giá trị $f(1)=\dfrac{1}{3}$, $f(-1)=3$ và $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=1$ suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ bằng $\dfrac{1}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=1\Leftrightarrow\log_a b=1\Leftrightarrow a=b$.

Vậy $M=\dfrac{1}{3}$, $b=a^m=a\Rightarrow m=1\longrightarrow M+m=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$.

Chọn C.

Ví dụ 7 [THI THỬ SỞ GD – ĐT KIÊN GIANG] Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $b^2 = 3ab + 4a^2$ và $a \in \left[4; 2^{32}\right]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4}\log_2 \frac{b}{4}$. Tính tổng $T = M + m$.

A. $T = \frac{3701}{124}$.

B. $T = \frac{7}{2}$.

C. $T = \frac{2957}{124}$.

D. $T = \frac{1897}{62}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $b^2 = 3ab + 4a^2 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3.\frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = 4a$.

Khi đó $P = \log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4}\log_2 \frac{b}{4} = \log_{\frac{b}{8}} b + \frac{3}{4}\left(\log_2 b - \log_2 4\right) = \frac{1}{\log_b \frac{b}{8}} + \frac{3}{4}\log_2 b - \frac{3}{2}$.

$$= \frac{1}{1 - \log_b 8} + \frac{3}{4}\log_2 b - \frac{3}{2} = \frac{1}{1 - \frac{3}{\log_2 b}} + \frac{3}{4}\log_2 b - \frac{3}{2} = \frac{\log_2 b}{\log_2 b - 3} + \frac{3}{4}\log_2 b - \frac{3}{2}.$$

Đặt $t = \log_2 b$ với $a \in \left[4; 2^{32}\right] \Rightarrow 16 \le b \le 2^{34} \Rightarrow 4 \le \log_2 b \le 34 \Rightarrow t \in [4; 34]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{t-3} + \frac{3}{4}t$ với $t \in [4; 34]$, ta có $f'(t) = \frac{3\left(t^2 - 6t + 5\right)}{4(t-3)^2}$; $\forall t \in [4; 34]$.

Phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le t \le 34 \\ t^2 - 6t + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow f(4) = 7,\ f(5) = \frac{25}{4},\ f(34) = \frac{1649}{62}$.

Suy ra $\begin{cases} \max\limits_{[4;34]} f(t) = f(34) = \frac{1649}{62} \\ \min\limits_{[4;34]} f(t) = f(5) = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = P_{\max} = \frac{778}{31} \\ m = P_{\min} = \frac{19}{4} \end{cases} \Rightarrow T = M + m = \frac{3701}{124}$.

Chọn A.

Ví dụ 8 [ĐỀ THI THỬ SỞ GD – ĐT ĐÀ NẴNG] Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn hệ thức $3 + \ln\frac{x + y + 1}{3xy} = 9xy - 3x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = xy$

A. $m = \frac{1}{3}$.

B. $m = 1$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln c$, khi đó từ giả thiết, ta có

$$3+\ln\frac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y\Leftrightarrow 3+\ln(x+y+1)-\ln xy=9xy-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+y+1)+3(x+y+1)=\ln(3xy)+3(3xy)\Leftrightarrow f(x+y+1)=f(3xy)\qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+3t$ với $t>0$, ta có $f'(t)=3+\frac{1}{t}>0\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow x+y+1=3xy\Leftrightarrow 3xy-1=x+y\underset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{xy}\Leftrightarrow 3xy-2\sqrt{xy}-1\geq 0.$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(3\sqrt{xy}+1\right)\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{xy}\geq 1\Leftrightarrow xy\geq 1\Rightarrow P_{\min}=1\Rightarrow m=1.$$

Chọn B.

Ví dụ 9 [ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2017] Xét các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

B. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min}=\frac{18\sqrt{11}-19}{21}$.

D. $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\log_3(1-xy)-\log_3(x+2y)=3xy+x+2y-4$

$$\Leftrightarrow\log_3(3-3xy)+3-3xy=\log_3(x+2y)+x+2y\qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ với $t>0$, có $f'(t)=1+\frac{1}{t.\ln 3}>0;\ \forall t>0$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(3-3xy)=f(x+2y)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y\Leftrightarrow 3-2y=(3y+1)x\Leftrightarrow x=\frac{3-2y}{3y+1}$.

Thế vào biểu thức P, ta được $P=x+y=\frac{3-2y}{3y+1}+y=\frac{3y^2-y+3}{3y+1}=f(y)$

Xét hàm số $f(y)$ trên khoảng $(0;+\infty)$, có $f'(y)=\frac{9y^2+6y-10}{(3y+1)^2}=0\Leftrightarrow y=\frac{-1+\sqrt{11}}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)}f(y)=f\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Chọn D.

Ví dụ 10 [ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2017] Xét hàm số $f(t)=\frac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi số thực x,y thỏa mãn $e^{x+y}\le e(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** 1.

C. Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $a=x+y\in\mathbb{R}$, xét hàm số $g(a)=e^a-ea$, ta có $g'(a)=e^a-e;\ g'(a)=0\Leftrightarrow a=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $g(a)\ge f(0)\Leftrightarrow e^a\ge ea\Leftrightarrow e^{x+y}\ge e(x+y)$.

Theo bài ra, ta có $e^{x+y}\le e(x+y)$ suy ra $e^{x+y}=e(x+y)\Leftrightarrow x+y=1$.

Với $x+y=1$, xét biểu thức $f(x)+f(y)=\frac{9^x}{9^x+m^2}+\frac{9^y}{9^y+m^2}=\frac{9^x}{9^x+m^2}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+m^2}=1$

$$\Leftrightarrow\frac{9^x}{9^x+m^2}+\frac{9}{9+9^xm^2}=1\Leftrightarrow\frac{9}{9+9^x.m^2}=1-\frac{9^x}{9^x+m^2}=\frac{m^2}{9^x+m^2}\Leftrightarrow 9\left(9^x+m^2\right)=m^2\left(9+9^xm^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 9.9^x+9m^2=9m^2+9^xm^4\Leftrightarrow m^4=9\Leftrightarrow m^2=3\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}.$$

Chọn D.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN [TT6099]

Câu 1: [566611] Bác Hiếu đầu tư 99 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 8,25% một năm. Hỏi sau 5 năm mới rút tiền lãi thì bác Hiếu thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không đổi).

A. 48,155 triệu đồng. **B.** 147,155 triệu đồng.

C. 58,004 triệu đồng. **D.** 8,7 triệu đồng.

Câu 2: [566613] Bác Hùng gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép theo kì hạn 3 tháng với lãi suất 5,28% một quý. Hỏi sau 8 năm bác Hùng thu được bao nhiêu tiền (cả vốn lẫn lãi)? (Giả sử rằng lãi suất hàng quý không đổi).

A. 318,355 triệu đồng. **B.** 518,881 triệu đồng.

C. 259,44 triệu đồng. **D.** 9,8 triệu đồng.

Câu 3: [566619] Một người gửi 25 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép theo kì hạn 6 tháng với lãi suất 4,25% mỗi kì. Hỏi sau 4 năm người đó thu được bao nhiêu tiền (cả vốn lẫn lãi)? (Giả sử rằng lãi suất hàng quý không đổi).

A. 17,439 triệu đồng. **B.** 34,878 triệu đồng.

C. 69,756 triệu đồng. **D.** 9,9 triệu đồng.

Câu 4: [566621] Bác Bình đầu tư 15 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 10,99% một năm. Hỏi sau 3 năm rút tiền lãi thì bác Bình thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không đổi).

A. 4,155 triệu đồng. **B.** 3,789 triệu đồng.

C. 5,509 triệu đồng. **D.** 3,12 triệu đồng.

Câu 5: [566623] Bác An đầu tư 67 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 5,99% mỗi quý. Hỏi sau 2 năm rút tiền lãi thì bác An thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử rằng lãi suất hàng quý không đổi).

A. 39,707 triệu đồng. **B.** 24,669 triệu đồng.

C. 58,004 triệu đồng. **D.** 9,2 triệu đồng.

Câu 6: [566625] Một người đầu tư vào 25 tờ trái phiếu mỗi tờ có mệnh giá là 2 triệu đồng với lãi suất $r\%$/năm trong vòng 5 năm. Sau 5 năm người đó có được số tiền cả gốc lẫn lãi là 72,5 triệu đồng . Hỏi lãi suất r của tờ trái phiếu đó là bao nhiêu phần trăm một năm.

A. 7%. **B.** 8%.

C. 9%. **D.** 10%.

Câu 7: [566631] Một người muốn có số tiền là 100 triệu sau 3 năm để dùng số tiền đó đầu tư vào một quán café. Với lãi suất ngân hàng hiện nay là 15%/ năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi ngay từ bây giờ anh ta phải gửi vào ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu đó? (Chọn kết quả gần đúng nhất).

A. 59,75 triệu đồng. **B.** 70,75 triệu đồng.

C. 75,75 triệu đồng. **D.** 65,75 triệu đồng.

Câu 8: [566635] Anh **A** muốn có 500 triệu sau 10 năm nữa để mua một mảnh đất. Anh **B** là bạn thân của anh **A** có một cửa hàng chuyên bán điện thoại **Iphone** và muốn anh **A** cùng góp vốn đầu tư, anh **B** tự tin và chắc chắn với anh **A** rằng mức lợi nhuận thu được từ cửa hàng này sẽ là 12%/ năm và lợi nhuận hàng năm thu được từ cửa hàng lại tiếp tục sử dụng để tái đầu tư. Hỏi ngay từ bây giờ thì số tiền anh **A** cần phải đầu tư vào là bao nhiêu? (Chọn kết quả gần đúng nhất).

A. 160 triệu đồng. **B.** 180 triệu đồng.

C. 200 triệu đồng. **D.** 220 triệu đồng.

Câu 9: [566638] Hiện tại bạn sinh viên **A** đang có một khoản tiền, sau 1 năm nữa sau khi ra trường bạn **A** mới cần dùng đến số tiền đó để mua xe máy. Hiện tại ngân hàng **Vietinbank** đang có các loại hình gửi tiết kiệm như sau:

+) Kỳ hạn 1 tháng, lãi suất là 12% một năm.

+) Kỳ hạn 3 tháng, lãi suất là 12% một năm.

+) Kỳ hạn 6 tháng, lãi suất là 12% một năm.

+) Kỳ hạn 12 tháng, lãi suất là 12% một năm.

Hỏi bạn **A** nên gửi tiền theo hình thức nào

A. Kỳ hạn 1 tháng. **B.** Kỳ hạn 3 tháng.

C. Kỳ hạn 6 tháng. **D.** Kỳ hạn 12 tháng.

Câu 10: [566640] Bạn **NAM** vay một số tiền tại ngân hàng **VIB bank** và trả góp số tiền đó trong vòng 40 tháng với mức lãi suất là $1,2\%$/tháng. Mỗi tháng bạn **NAM** trả một số tiền bằng nhau và bằng 2 triệu đồng cho ngân hàng. Vậy số tiền bạn **NAM** đã vay ngân hàng là bao nhiêu. Chọn kết quả gần đúng nhất?

A.100 triệu đồng. **B.** 40 triệu đồng.

C. 50 triệu.đồng. **D.** 65 triệu đồng.

Câu 11: [566643] Ông **A** mua trả góp một căn nhà có trị giá là 1 tỷ đồng. Ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng với mức lãi suất là $r\%$/tháng, mỗi tháng ông **A** trả một số tiền bằng nhau và bằng 340 triệu đồng. Biết rằng ông A hoàn nợ trong vòng 3 tháng kể từ ngày vay. Lãi suất vay gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau

A. r = 1,2%/tháng. **B.** r = 1%/tháng.

C. r = 0,8%/tháng. **D.** r = 0,9%/tháng.

Câu 12: [566646] Bạn **AN** định vay một số tiền để mua xe máy và hoàn nợ ngân hàng theo hình thức trả góp với mức lãi suất là $r\%$/tháng trong vòng 2 tháng. Nếu số tiền bạn **AN** vay là T triệu đồng thì mỗi tháng bạn phải trả số tiền là 10,15 triệu đồng, còn nếu số tiền bạn **AN** vay là $T+10$ triệu đồng thì mỗi tháng bạn phải trả số tiền là 15,225 triệu đồng.Vậy giá trị của T là:

A. 24 triệu đồng. **B.** 20 triệu đồng.

C. 18 triệu đồng. **D.** 25 triệu đồng.

Câu 13: [566647] Một người gửi tiết kiệm 300 triệu đồng loại kỳ hạn 3 tháng vào ngân hàng với lãi suất 10,45% một năm. Sau 10 năm 9 tháng, gọi T là số tiền cả vốn lẫn lãi người đó nhận được. Biết rằng người đó không rút lãi tất cả các định kỳ trước đó, T gần giá trị nào sau đây nhất ?

A. 800 triệu. **B.** 890 triệu.

C. 1 tỷ. **D.** 900 triệu.

Câu 14: [566648] Ông **A** có số tiền là 50 triệu đồng gửi tiết kiệm với lãi suất $1,2\%$ /tháng. Sau 8 tháng ông **A** gửi thêm vào 100 triệu đồng nhưng lãi suất các tháng sau đó là $1,6\%$/tháng. Sau 20 tháng kể từ lúc gửi tiền ban đầu, số tiền ông **A** nhận được cả gốc lẫn lãi là : (đơn vị triệu đồng, làm tròn đến số thập phân thứ nhất).

A. 195,6. **B.** 187,5.

C. 189,9. **D.** 197,8.

Câu 15: [566649] Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 5% một quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi và cộng vào gốc). Sau

đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 50 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Cho biết số tiền cả gốc và lãi được tính theo công thức $T = a.\ 1+r\ ^{n}$, trong đó a là số tiền gửi, r là lãi suất và n là số kì hạn gửi. Tính tổng số tiền người đó nhận được một năm sau khi gửi tiền (đơn vị : triệu đồng).

A. $\approx 176,676$.
B. $\approx 177,676$.
C. $\approx 178,676$.
D. $\approx 179,676$.

Câu 16: [566652] Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 7% một năm và nhận được số tiền là T_1 triệu đồng. Với một phương thức trả lãi khác, nếu ngân hàng trả lãi suất $\frac{7}{12}\%$ một tháng thì người đó nhận được số tiền là T_2 triệu đồng. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng ?

A. $T_1 + T_2 = 99,73$.
B. $T_1 + T_2 = 69,63$.
C. $T_1 + T_2 = 79,53$.
D. $T_1 + T_2 = 89,43$.

Câu 17: [566653] Lãi suất gửi tiết kiệm của ngân hàng A thời gian vừa qua thay đổi liên tục. Bạn Duy gửi số tiền ban đầu là 10 triệu đồng với lãi suất 0,8% một tháng. Chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,2% một tháng trong nửa năm tiếp theo. Và bạn Duy tiếp tục gửi ; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 1% một tháng. Đồng thời bạn Duy quyết định gửi thêm một số tháng tròn nữa. Biết rằng khi rút tiền bạn Duy được cả vốn lẫn lãi là 12 153 337,95 triệu đồng. Tổng số tháng mà bạn Duy gửi tiết kiệm là :

A. 20.
B. 19.
C. 18.
D. 16.

Câu 18: [566655] Một người được lãnh lương khởi điểm là 10 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 tháng, lương của anh ta lại được tăng thêm 12%. Sau 36 tháng làm việc anh ta lĩnh được tất cả số tiền là T, giá trị của T gần với giá trị nào sau đây nhất ?

A. 723 triệu đồng.
B. 724 triệu đồng.
C. 725 triệu đồng.
D. 726 triệu đồng.

Câu 19: [566656] Một người gửi 20 triệu đồng tiết kiệm với lãi suất 15% trên một năm và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì sao bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền là 300 triệu đồng.

A. 18.
B. 19.
C. 20.
D. 21.

Câu 20: [566657] Giả sử anh T có 180 triệu đồng muốn đi gửi ngân hàng trong 18 tháng. Trong đó có hai ngân hàng **A** và ngân hàng **B** tính lãi với các phương thức như sau :

- Ngân hàng **A**. Lãi suất 1,2%/tháng trong 12 tháng đầu tiên và lãi suất 1,0%/tháng trong 6 tháng còn lại.

- Ngân hàng **B**. Mỗi tháng anh T gửi vào ngân hàng 10 triệu với lãi suất hàng tháng là $0,8\%$/ tháng.

Hỏi rằng số tiền mà anh T sau 18 tháng được nhận (tính cả vốn lẫn lãi) khi gửi ở ngân hàng **A** hay **B** được nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu (đơn vị triệu đồng và làm tròn đến số thập phân thứ nhất) ?

A. $T_B - T_A = 26,2$.

B. $T_A = T_B + 26,2$.

C. $T_A - T_B = 24,2$.

D. $T_B = T_A + 24,2$.

Câu 21: [566659] Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 12%/1 năm. Ông muốn hoàn trả nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn trả nợ, hai lần hoàn trả nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn trả nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 5 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu ? Giả sử rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn trả nợ.

A. $\frac{100.1,01^3}{3}$ (triệu đồng).

B. $\frac{100.1,01^5}{5}$ (triệu đồng).

C. $\frac{1,01^5}{1,01^5-1}$ (triệu đồng).

D. $\frac{100.1,01^5}{1,01^5-1}$ (triệu đồng).

Câu 22: [566662] Ông A muốn gửi x (triệu) tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo lãi suất 0,6%/1 tháng theo hình thức: Sau đúng một tháng đầu tiên kể từ ngày gửi, ông bắt đầu gửi thêm x (triệu) nữa vào tiền tiết kiệm; hai lần gửi liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền gửi ở mỗi lần đều là x (triệu). Sau đúng 1 năm ông A thực hiện giao dịch rút tiền. Nếu ông A muốn có 50 triệu sau 1 năm thì cần gửi liên tiếp mỗi tháng bao nhiêu tiền ?

A. 4 triệu.

B. 4 triệu 8000 đồng.

C. 4 triệu 3000 đồng.

D. 3 triệu 900000 đồng.

Câu 23: [566663] Thầy Hùng ĐZ có dự định mua một chiếc xe **Lexus RX 350** với trị giá khoảng 3 tỷ đồng. Thầy quyết định gửi **Ngân Hàng Techcombank** 2 tỷ đồng trong vòng 3 năm để tiết kiệm tiền mua xe với mức lãi suất như sau:

- Lãi suất $1,0\%$/ tháng trong 12 tháng đầu tiên.

- Lãi suất $1,1\%$/ tháng trong 18 tháng tiếp theo.

- Lãi suất $1,2\%$/ tháng trong 6 tháng cuối cùng.

Biết rằng **Ngân Hàng Techcombank** tính lãi gộp theo quý. Tổng số tiền cả gốc lẫn lãi mà **Thầy Hùng ĐZ** nhận được sau 3 năm gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau:

A. 2,93 tỷ.

B. 3,12 tỷ.

C. 3,4 tỷ.

D.4 tỷ.

Câu 24: [566664] Một người gửi tiền bảo hiểm cho con từ lúc con tròn 10 tuổi , hàng năm anh ta đều đặn gửi cho con số tiền là 10 triệu đồng/tháng với lãi suất 18%/ năm.

Trong quá trình đó anh ta không rút tiền khỏi tài khoản của mình. Sau 8 năm anh ta rút số tiền đó ra để nuôi con học đại học Kinh Tế Quốc Dân. Khi đó số tiền rút ra là bao nhiêu?

A. $\frac{100(1,015^8-1)}{1,015-1}$.

B. $\frac{590(1,18^8-1)}{1,18-1}$.

C. $\frac{590(1,18^8-1)}{9}$.

D. $10.(1.18^8-1)$.

Câu 25: [566666] Một người gửi $9,8$ triệu đồng tiết kiệm với lãi suất $8,4\%$ trên một năm và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì sao bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền là 20 triệu đồng.

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Câu 26: [566668] Ông **A** có số tiền là 100 triệu đồng gửi tiết kiệm với lãi suất $1,2\%$ /tháng. Sau 8 tháng ông **A** gửi thêm vào 100 triệu đồng nhưng lãi suất các tháng sau đó là 2% /tháng. Sau 20 tháng kể từ lúc gửi tiền ban đầu, số tiền ông **A** nhận được cả gốc lẫn lãi là : (đơn vị triệu đồng, làm tròn đến số thập phân thứ nhất).

A. $312,4$

B. $266,3$

C. $289,9$

D. $254,5$

Câu 27: [566669] Một người vay vốn ngân hàng với số vốn là 100 triệu đồng, thời hạn 48 tháng, lãi suất $1,15\%$ trên tháng, tính theo dư nợ, trả đúng theo quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu để đến tháng thứ 48 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng ?

A. Khoảng 3 triệu đồng.

B. Khoảng $2,5$ triệu đồng.

C. Khoảng $2,7$ triệu đồng.

D. Khoảng $3,2$ triệu đồng.

Câu 28: [566671] Một người được lãnh lương khởi điểm là 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 2 tháng, lương của anh ta lại được tăng thêm 15%. Sau hai năm làm việc anh ta lĩnh được tất cả số tiền là T, số tiền T này lại được gửi vào ngân hàng với lãi suất 3% trên một năm, thì một năm sau đó, số tiền lãi người đó có là :

A. $11,56$ triệu đồng.

B. $12,18$ triệu đồng.

C. $11,70$ triệu đồng.

D. $12,45$ triệu đồng.

Câu 29: [566673] Ông **A** gửi tiết kiệm 200 triệu theo hình thức lãi kép với lãi suất là r sau 3 năm lãi suất ngân hàng tăng lên là $r+0,01$. Thấy thế ông **A** gửi vào tài khoản tiết kiệm của mình thêm 50 triệu đồng. Hỏi sau 5 năm số tiền cả gốc lẫn lãi mà ông **A** thu được là:

A. $T=250(1+r)$.

B. $T=\left[200(1+r)^3+50\right](r+1,01)$.

C. $T=\left[200(1+r)^3+50\right](1+r)$.

D. $T=\left[200(1+r)^3+50\right](1,1+r)$.

Câu 30: [566675] Ông **X** vay một số tiền để mua nhà và hoàn nợ ngân hàng theo hình thức trả góp với mức lãi suất là $r\%$/tháng trong vòng 3 tháng. Nếu số tiền ông **X** vay là T triệu đồng thì mỗi tháng ông phải trả số tiền là 79 triệu đồng, còn nếu số tiền ông **X** vay là $T+100$ triệu đồng thì mỗi tháng ông phải trả số tiền là $118,5$ triệu đồng. Vậy giá trị của T và r lần lượt là là (Chọn kết quả gần đúng nhất):

A. $T=100$ triệu và $r=9\%$.
B. $T=200$ triệu và $r=9\%$.
C. $T=200$ triệu và $r=10\%$.
D. $T=120$ triệu và $r=9\%$.

Câu 31: [566676] Anh **A** dự kiến cần một số tiền để đầu tư sản xuất, đầu năm thứ nhất anh **A** gửi vào ngân hàng số tiền là 200 triệu đồng, cứ đầu mỗi năm tiếp theo anh **A** lại gửi thêm một số tiền lớn hơn số tiền anh gửi ở đầu năm trước 50 triệu đồng. Đến cuối năm thứ 3 số tiền anh **A** có được là $898,7$ triệu đồng. Vậy lãi suất ngân hàng là? (Chọn kết quả gần nhất trong các kết quả sau)

A. 9%/năm.
B. 10%/năm.
C. 11%/năm.
D. 12%/năm.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	**02. B**	**03. B**	**04. C**	**05. A**	**06. C**	**07. D**	**08. A**	**09. A**	**10. D**
11. B	**12. B**	**13. D**	**14. B**	**15. A**	**16. C**	**17. D**	**18. B**	**19. C**	**20. B**
21. C	**22. B**	**23. A**	**24. C**	**25. D**	**26. B**	**27. C**	**28. B**	**29. B**	**30. B**
31. B									

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập: (04) 39714896;
Quản lý xuất bản:(04) 39728806 ; Tổng Biên tập: (04) 39715011;
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc – Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập xuất bản: ĐẶNG THỊ PHƯƠNG ANH
Biên tập chuyên ngành: NGUYỄN NGỌC THẮNG
Chế bản: NGUYỄN NGỌC THẮNG
Trình bày bìa: NGỌC MAI

Đối tác liên kết xuất bản: CÔNG TY CP GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN ALADANH
Địa chỉ: Tầng 19, tòa nhà Trung Yên 1, Cầu Giấy, Hà Nội.

SÁCH LIÊN KẾT

PRO S – TOÁN HỌC: TẬP 2 – HÀM SỐ VÀ MŨ - LOGARIT

Mã số: 1L - 522 PT 2017
In 2000 cuốn, khổ 19 x 27 in tại Công ty TNHH in Khuyến học
Địa chỉ: Số 9/64, ngõ 35, Cát Linh, Đống Đa, Hà Nội.
Số xuất bản: 2795/CXB, IPH/ 15 - 288, ĐHQGHN, ngày 24/08/2017
Quyết định xuất bản số: 509 LK- TN/ QĐ-NXBĐHQGHN, ngày 12/09/2017
In xong và nộp lưu chiểu năm 2017