BỘ XÂY DỰNG

GIÁO TRÌNH
TOÁN CAO CẤP

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

BỘ XÂY DỰNG
TRƯỜNG CAO ĐẲNG XÂY DỰNG SỐ 1

GIÁO TRÌNH
TOÁN CAO CẤP

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2005

LỜI GIỚI THIỆU

Toán Cao cấp là học phần bắt buộc trong chương trình Giáo dục đại cương đối với hệ đào tạo sinh viên Cao đẳng và Đại học khối các trường kĩ thuật, nhằm cung cấp cho sinh viên một số kiến thức cơ bản của Toán học Cao cấp làm cơ sở cho việc tiếp thu các môn học cơ sở và chuyên môn thuộc các chuyên ngành sinh viên được đào tạo.

Giáo trình Toán Cao cấp đã được nhiều trường đại học, nhiều tác giả biên soạn song các giáo trình đó chủ yếu để phục vụ quá trình nghiên cứu học tập của sinh viên các trường đại học.

Để phù hợp với thường lượng giảng dạy (5 học trình) và yêu cầu của môn học Toán Cao cấp đối với sinh viên hệ Cao đẳng do Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quy định, được Bộ Xây dựng cho phép, trường Cao đẳng Xây dựng số 1 đã nghiên cứu tổ chức biên soạn giáo trình Toán Cao cấp dành cho sinh viên hệ Cao đẳng kĩ thuật Xây dựng theo đề cương môn học đã được Bộ Xây dựng xét duyệt.

Giáo trình trình bày một số kiến thức cơ bản của môn Toán Cao cấp gồm: phần Đại số tuyến tính và Giải tích cổ điển và được cấu tạo thành 6 chương - do Thạc sĩ Trần Quang Đông làm chủ biên cùng với sự tham gia của các giáo viên bộ môn Toán trường Cao đẳng Xây dựng số 1.

Do hạn chế về thời gian và chưa có nhiều kinh nghiệm trong biên soạn giáo trình nên không tránh khỏi thiếu sót khi biên soạn. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc.

Chúng tôi xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ của Vụ Tổ chức Cán bộ - Bộ Xây dựng, cảm ơn bộ môn Toán của các trường: Đại học Kiến trúc Hà Nội và các trường Cao đẳng Xây dựng thuộc Bộ Xây dựng đã có những ý kiến đóng góp giúp chúng tôi hoàn thành giáo trình này.

Trường Cao đẳng Xây dựng số 1

Chương 1
TẬP HỢP - ÁNH XẠ - SỐ PHỨC

1.1. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC VÀ CÁC KÝ HIỆU LOGIC

1.1.1. Ta hiểu mệnh đề toán học như là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai. Thí dụ $2 < 3$ là một mệnh đề toán học đúng

$2 > 3$ là một mệnh đề toán học sai.

1.1.2. Ký hiệu $\Rightarrow$

Khi với giả thiết mệnh đề A đúng, ta chứng minh được mệnh đề B cũng đúng thì ta nói từ mệnh đề A suy ra mệnh đề B; hay mệnh đề A kéo theo mệnh đề B; ký hiệu $A \Rightarrow B$.

Thí dụ: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

1.1.3. Ký hiệu $\Leftrightarrow$

Khi $A \Rightarrow B$ đồng thời $B \Rightarrow A$ thì ta nói mệnh đề A tương đương mệnh đề B. Ký hiệu $A \Leftrightarrow B$.

Thí dụ: $a < b \Leftrightarrow b > a$

1.1.4. Điều kiện đủ; điều kiện cần; điều kiện cần và đủ

Khi $A \Rightarrow B$ ta nói A là điều kiện đủ để có B; B là điều kiện cần để có A.

Khi $A \Leftrightarrow B$ tức là $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$, ta nói A là điều kiện cần và đủ để có B; tương tự B cũng là điều kiện cần và đủ để có A.

Thí dụ: $|a| < b \Rightarrow b > 0$ nhưng từ $b > 0$ không suy ra được $|a| < b$. Vậy $|a| < b$ là điều kiện đủ để có $b > 0$; $b > 0$ là điều kiện cần để có $|a| < b$.

$|a| < b$ không phải là điều kiện cần và đủ để có $b > 0$.

1.1.5. Ký hiệu $\forall$: thay cho cụm từ "với mọi" hay "với bất kỳ".

Thí dụ: $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $x^2 - x + 1 > 0$

1.1.6. Ký hiệu $\exists$: thay cho cụm từ "tồn tại".

Thí dụ: $\exists x$ để $x^2 - 3x + 2 = 0$; đó là $x = 1$ và $x = 2$.

1.2. TẬP HỢP VÀ PHẦN TỬ

1.2.1. Khái niệm về tập hợp và phần tử

Ta coi tập hợp là khái niệm nguyên sơ, không định nghĩa. Tuy nhiên, ta có thể nói như sau: Tất cả những đối tượng xác định nào đó tạo thành một tập hợp. Mỗi đối tượng cấu thành tập hợp là phần tử của tập hợp.

Thí dụ: Tất cả các điểm trong không gian tạo nên tập hợp điểm trong không gian.

Tập hợp tất cả các số thực, ký hiệu tập $\mathbb{R}$.

1.2.2. Khái niệm thuộc và ký hiệu $\in$

Nếu a là phần tử của tập hợp A ta viết: $a \in A$;

Nếu b không phải là phần tử của tập A ta viết: $b \notin A$.

1.2.3. Cách mô tả một tập hợp

Để mô tả một tập hợp, ta phải làm rõ để khi cho một phần tử nào đó, ta biết được nó có thuộc tập hợp đã cho hay không? Thông thường, có hai cách để mô tả một tập hợp:

1) Liệt kê các phần tử của tập hợp:

Thí dụ: $A = \{x, y, z, t\}$. Tập hợp này chỉ có 4 phần tử là x, y, z, t.

Như vậy $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$, $t \in A$ nhưng $u \notin A$.

2) Nêu lên tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp đó.

Thí dụ: Cho B = {các số chẵn}. Khi đó ta có $4 \in B$ nhưng $3 \notin B$.

1.2.4. Ký hiệu "|"

Thí dụ: Tập hợp các số chẵn có thể mô tả như sau:

$$B = \{m \mid m = 2n;\ n \text{ nguyên}\}.$$

Cách viết này đọc là: B là tập hợp các phần tử m, trong đó m = 2n với n là số nguyên. Hiển nhiên đó là cách diễn đạt khác của tập hợp các số chẵn.

Ký hiệu | đặt trước phần giải thích tính chất đặc trưng của phần tử m.

1.2.5. Một số tập hợp thường gặp

- Tập hợp các số tự nhiên $N = \{0, 1, 2, ...\}$; $N^* = \{1, 2, ...\} = N \setminus \{0\}$

- Tập hợp các số nguyên $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$

- Tập hợp các số hữu tỷ $Q = \{\frac{p}{q} \setminus q \neq 0, p \in Z, q \in Z\}$

- Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$; tập hợp các số phức C.

1.2.6. Tập hợp rỗng

Định nghĩa: Tập rỗng là tập hợp không có phần tử nào; ký hiệu $\varnothing$.

Thí dụ: Tập nghiệm thực của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ là $\{1; 2\}$; nhưng tập nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là $\varnothing$ vì phương trình này không có nghiệm thực.

Chú ý: Phân biệt hai khái niệm tập hợp $\varnothing$ khác tập hợp $\{\phi\}$.

1.2.7. Sự bao hàm - Tập con

Định nghĩa: Nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B thì ta nói:

A bao hàm trong B hoặc

B bao hàm A hoặc

A là tập con của B. Ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

Thí dụ: $N \subset Z \subset Q \subset R$

Chú ý: 1) Người ta coi tập $\varnothing$ là con của mọi tập hợp.

2) Rõ ràng ta có $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$.

1.2.8. Sự bằng nhau của hai tập hợp

Định nghĩa: Cho 2 tập hợp A và B. Ta nói tập hợp A bằng tập hợp B nếu A và B trùng nhau; điều đó có nghĩa là: mọi phần tử của tập A cũng là phần tử của B và ngược lại, mọi phần tử của B cũng là phần tử của tập hợp A. Ký hiệu A = B.

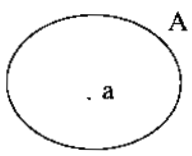
Thí dụ: Cho $A = \{x, y, 1, 2\}$

$B = \{1, 2, y, x\}$. Khi đó $A = B$

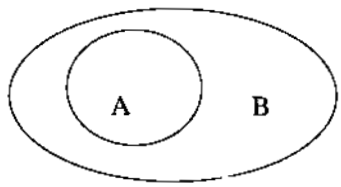
1.2.9. Biểu diễn hình học - Biểu đồ Ven

Để biểu diễn quan hệ giữa các tập hợp, người ta dùng cách biểu diễn hình học, gọi là biểu đồ Ven: Ta coi mỗi tập hợp là tập hợp trong một vòng phẳng, mỗi điểm trong vòng là một phần tử của tập hợp.

Thí dụ:



$a \in A$



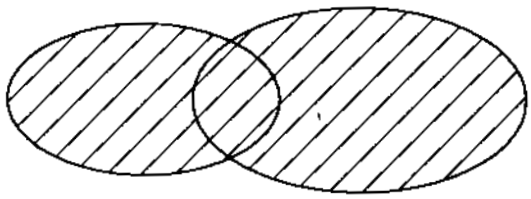
$A \subset B$

1.3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1.3.1. Phép hợp

Định nghĩa: Hợp của 2 tập hợp A và B là một tập hợp, gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B. Ký hiệu $A \cup B$.

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$. Biểu diễn bằng biểu đồ Ven:



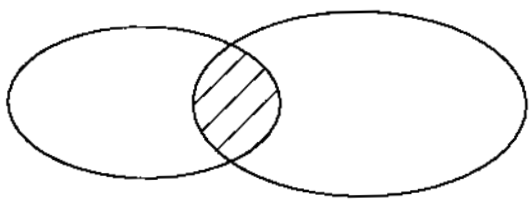
A B

$A \cup B$

1.3.2. Phép giao

Định nghĩa: Giao của 2 tập hợp A và B là một tập hợp; gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B. Ký hiệu $A \cap B$.

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$. Biểu diễn bằng biểu đồ Ven:



A B

$A \cap B$

1.3.3. Tính chất

Các tính chất sau được suy ra từ định nghĩa:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

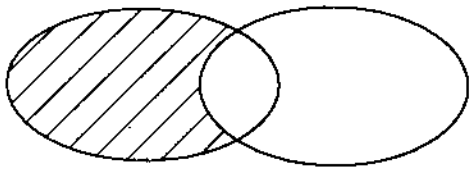
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

0.0.1 downloaded 60906.pdf at Fri Mar 23 15:07:15 ICT

1.3.4. Hiệu của 2 tập hợp

Định nghĩa: Hiệu của 2 tập hợp A và B là một tập hợp, bao gồm tất cả các phần tử thuộc A mà không thuộc B. Ký hiệu A - B hoặc $A \setminus B$.

$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin B$. Biểu diễn bằng biểu đồ Ven:



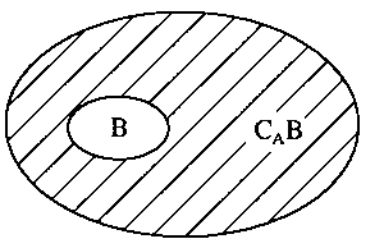
$A \setminus B$

1.3.5. Phần bù (còn gọi là tập bổ sung)

Định nghĩa: Gọi bổ sung của B trong A, ($B \subseteq A$), ký hiệu $C_A B$ là tập hợp được định nghĩa bởi:

$$C_A B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

Biểu diễn bằng biểu đồ Ven:



A

1.3.6. Tích Đêcác

Cho 2 tập A và B khác $\varnothing$; với mỗi $a \in A$ và mỗi $b \in B$, ta lập được cặp (a, b) gọi là một cặp sắp thứ tự (viết phần tử $a \in A$ trước và $b \in B$ sau).

Tích Đêcác của A và B, ký hiệu A x B; được định nghĩa bởi:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

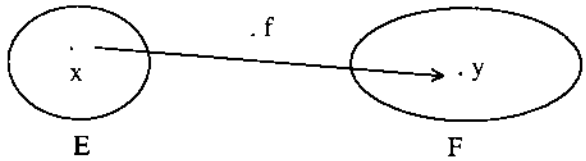
1.4. ÁNH XẠ

1.4.1. Cho 2 tập E và F và một quy luật f liên hệ các phần tử của E với một số phần tử của F.

Nếu quy luật f có đặc điểm sao cho nó tạo từ mỗi phần tử của E một và chỉ một phần tử xác định của F thì ta nói f là một ánh xạ từ E tới F.

Vậy ta có định nghĩa ánh xạ:

Định nghĩa: Ánh xạ từ tập E tới tập F là một quy luật f liên hệ giữa E và F sao cho khi nó tác động vào một phần tử x bất kỳ của E sẽ tạo ra một và chỉ một phần tử y của F.



Để diễn tả f là một ánh xạ từ tập E tới tập F, ta viết:

$$f: \quad E \longrightarrow F \qquad \text{hay} \qquad E \xrightarrow{f} F$$

$$x \longmapsto y = f(x) \qquad\qquad x \longmapsto y = f(x)$$

E: Tập nguồn; F: Tập đích; y gọi là ảnh của x và x gọi là nghịch ảnh của y.

Chú ý: Mỗi phần tử của tập E có một và chỉ một ảnh, nhưng với mỗi $y \in F$ chưa chắc đã có nghịch ảnh.

Thí dụ:

1) Cho $E = F = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ liên hệ với $y \in R$ bởi quan hệ $y = x^3$ là một ánh xạ.

2) Cho $E = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ -1 \le x \le 1\}$

$F = \mathbb{R}$

$x \in E$ liên hệ với $y \in R$ bởi quy luật y = cung có sin là x không phải là một ánh xạ, vì với mỗi $x \in E$, tạo ra vô số $y \in \mathbb{R}$ xác định bởi y = cung có sin là x. Chẳng hạn, với $x = \frac{1}{2} \in E$ thì các cung $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in N$ đều có sin là $\frac{1}{2}$.

1.4.2. Đơn ánh

Xét ánh xạ $f : E \to F$

Ánh xạ f gọi là đơn ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có nhiều nhất 1 nghiệm $x \in E$ với $\forall\, y \in F$. (hoặc: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

Thí dụ: Xét ánh xạ $f : E \to F \quad (E = F = \mathbb{R})$

$$x \to y = x^3$$

là một đơn ánh, vì phương trình $x^3 = y$ có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{y} \in R$.

1.4.3. Toàn ánh

Ánh xạ f gọi là toàn ánh nếu f(E) = F; điều đó cũng có nghĩa là: ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu phương trình f(x) = y có ít nhất một nghiệm $x \in E$ với $\forall y \in F$.

Thí dụ 1: Ánh xạ $f : R \to R$

$x \to y = x^3$ luôn luôn có nghiệm với $\forall y \in R$. Vậy ánh xạ này là một toàn ánh.

Thí dụ 2: Xét ánh xạ $f : R \to R$

$$x \to y = x^2$$

Phương trình $x^2 = y$ chỉ có nghiệm khi $y \geq 0$. Vậy ánh xạ này không phải là toàn ánh.

1.4.4. Song ánh

Ánh xạ f gọi là song ánh nếu f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh. Điều đó cũng có nghĩa là: nếu phương trình f(x) = y có nghiệm duy nhất $x \in E$ với $\forall y \in F$.

Thí dụ: Ánh xạ f : $R \to R$

$x \to y = x^3$ là một song ánh.

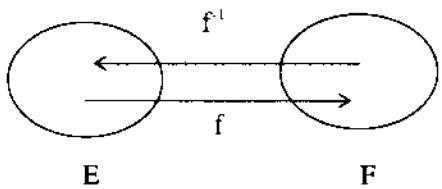
Ánh xạ f : $R \to R$

$x \to y = x^2$ không phải là một song ánh.

1.4.5. Ánh xạ ngược của một song ánh; tương ứng 1-1

Xét 2 tập E, $F \neq \varnothing$ và f là một song ánh từ E tới F.

Khi đó:



Ứng với mỗi $y \in F$ có một và chỉ một $x \in E$ để y = f(x) (có một vì f là toàn ánh từ E lên F và chỉ có một vì f là đơn ánh từ E tới F).

Vậy: Song ánh $f : E \to F$ tạo ra một ánh xạ từ F tới E. Ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f và ký hiệu f^{-1} ; $f^{-1} : F \to E$ với đặc điểm:

- nếu f(x) = y thì $f^{-1}(y) = x$ $(x \in E; y \in F)$
- nếu $f^{-1}(y) = x$ thì f(x) = y $(y \in F; x \in E)$.

Rõ ràng f^{-1} cũng là một song ánh.

Đồng thời với song ánh $f : E \to F$ ta có một tương ứng 1 - 1 hai chiều giữa E và F; chiều từ E tới F thực hiện bởi ánh xạ f; còn chiếu từ F tới E thực hiện bởi ánh xạ f^{-1}.

1.4.6. Hợp (tích) của 2 ánh xạ

Cho 3 tập hợp E, F, G và 2 ánh xạ: $f : E \to F$; $g : F \to G$.

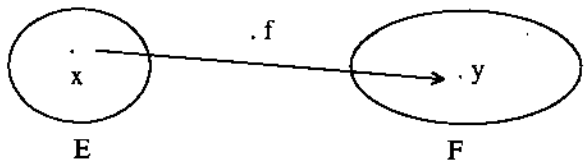
Như vậy với mỗi $x \in E$ tạo ra bởi f một và chỉ một $y \in F$: $f(x) = y$ và với mỗi $y \in F$ tạo ra bởi g một và chỉ một $z \in G$: $g(y) = z$. Do đó, với mỗi $x \in E$ tạo ra (qua trung gian y) một và chỉ một $z \in G$ xác định bởi $g[f(x)] = z$.

Vậy có một ánh xạ từ E tới G xác định như sau:

$$x \in E \to z = g[f(x)] \in G.$$

Định nghĩa: Ánh xạ này gọi là hợp của f và g (hay tích của f và g) ký hiệu gof: $gof : E \to G$ xác định như sau:

$$x \in E \to (gof)(x) = g[f(x)] \in G$$



Thí dụ: Cho $E = F = G = R$

$x \in R \to y = f(x) = x^2 \in R$

$y \in R \to z = g(y) = y - 5 \in \mathbb{R}$

thì ánh xạ hợp $gof : R \to R$ xác định như sau:

$$x \in R \to (gof)(x) = g[f(x)] = x^2 - 5, \in R.$$

Chú ý: Hợp của 2 song ánh là 1 song ánh; hợp của 2 đơn ánh là 1 đơn ánh; hợp của 2 toàn ánh là 1 toàn ánh.

1.5. SỐ PHỨC

1.5.1. Định nghĩa số phức - dạng chính tắc của số phức

a) Mở đầu

Ta đã biết rằng, tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ là rất phong phú, tuy nhiên nếu chỉ biết các số thực thì một phương trình quen thuộc như $x^2 + 1 = 0$ hay $x^2 = -1$ sẽ không có nghiệm (thực) vì không có số thực nào bình phương lên lại bằng -1.

Vấn đề đặt ra là phải xây dựng thêm số mới, loại số mới này gọi là số phức. Tất nhiên các số phức phải phong phú hơn các số thực để phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm; đồng thời có thể xem số thực là trường hợp riêng của số phức.

b) Đơn vị ảo - số ảo

Trước hết, ta đưa vào số i sao cho $i^2 = -1$, nghĩa là $i = \sqrt{-1}$ và gọi nó là đơn vị ảo.

Với đơn vị ảo i, phương trình $x^2 = -1$ có 2 nghiệm là i và - i.

Mọi số có dạng ib với b là số thực, số có bình phương: $(ib)^2 = i^2 . b^2 = - b^2$ là một số âm, người ta gọi là các số ảo thuần tuý.

c) Số phức

Số z có dạng z = a + ib trong đó a, b là các số thực, được gọi là một số phức.

a: gọi là phần thực của số phức, ký hiệu Re(z) và viết a = Re(z).

b: gọi là phần ảo của số phức, ký hiệu Im(z) và viết b = Im(z).

- Khi b = 0, z = a là một số thực. Vậy số thực là một trường hợp riêng của số phức.

- Khi a = 0, z = ib là một số ảo thuần tuý.

d) Số phức không: Đó là số phức z = 0 + i . 0 = 0 và viết là z = 0.

e) Số phức bằng nhau

Hai số phức z = a + ib và z' = a' + ib' gọi là bằng nhau nếu a = a' và b = b' và ngược lại.

f) Số phức liên hợp

Cho số phức z = a + ib

Số phức $\bar{z}$ = a - ib gọi là số phức liên hợp của số phức z.

Thí dụ: z = 2 - 3i thì $\bar{z}$ = 2 + 3i

Quy ước: Tập tất cả các số phức ký hiệu **C**.

g) Dạng chính tắc của số phức

Số phức z = a + ib gọi là dạng chính tắc của số phức.

h) Các phép tính về số phức

• Phép cộng số phức.

Tổng của 2 số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$ là một số phức có phần thực là tổng của các phần thực, phần ảo bằng tổng các phần ảo của chúng.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + b_2i)$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Các tính chất của phép cộng:

i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (tính kết hợp)

ii) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (tính giao hoán)

iii) $z + 0 = 0 + z = z$ (0 là số phức $z = 0$)

iv) $z + (-z) = 0$ (-z là số phức đối của số phức z)

Tức là: nếu $z = a + ib$ thì $-z = (-a) + (-b)i = -a - bi$

Từ đó ta có: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Thí dụ: $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 1 - 5i$

thì $z_1 + z_2 = 3 - 2i$; $z_1 - z_2 = 1 + 8i$

• Phép nhân số phức.

Tích của 2 số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ là số phức có được bằng cách nhân chúng như nhân 2 nhị thức với nhau với chú ý rằng $i^2 = -1$.

$$z_1 . z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Các tính chất của phép nhân:

i) $(z_1 . z_2).z_3 = z_1.(z_2 . z_3)$ (tính kết hợp)

ii) $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$ (tính giao hoán)

iii) $z . 1 = 1 . z = z$ (1 - là số phức đơn vị)

iv) nếu $z \neq 0$ thì $\exists\, z^{-1}$ để $z^{-1} . z = z . z^{-1} = 1$

Số phức z^{-1} gọi là số phức nghịch đảo của số phức z; tức là nếu $z = a + ib$ thì:

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Tổng quát, ta có: $z^n = \underbrace{z.z...z}_{n \text{ lần}}$

Từ tính chất iv) ta suy ra phép chia 2 số phức:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} \text{ với } z_2 \neq 0$$

Thí dụ: $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 1 - 2i$

thì $z_1 . z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = (2 + 6) + i(3 - 4) = 8 - i$

$$\frac{z_1}{z_2} = -1 + \frac{7}{5}i$$

0.0.1 downloaded 60906.pdf at Fri Mar 23 15:07:15 ICT

Chú ý: 1) Ta có $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; ...

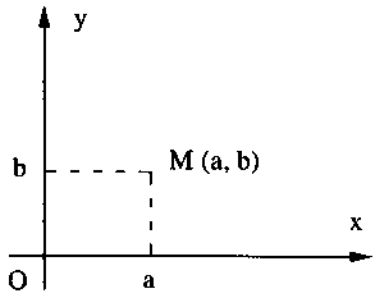
2) Với $z = a + bi$ thì: $z + \bar{z} = 2a = 2Re(z)$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

1.5.2. Dạng lượng giác của số phức

a) Mặt phẳng phức

Xét mặt phẳng với 2 trục toạ độ vuông góc Ox và Oy. Xét số phức $z = a + ib$. Ta biểu diễn a trên Ox và b trên Oy và gọi Ox là trục thực; Oy là trục ảo. Khi đó M(a, b) gọi là ảnh của số phức z và z là toạ vị của M.



b) Dạng lượng giác của số phức z = a + ib

Gọi M là ảnh của z. Nếu $z \neq 0$ thì $M \neq$ gốc O. Khi đó véctơ $\overrightarrow{OM}$ là 1 véctơ hoàn toàn được xác định.

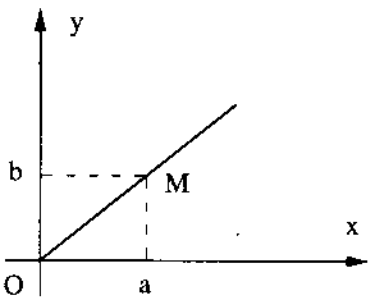
Người ta gọi $\rho = OM$ là môđun của z và gọi θ bằng góc $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là argumen của z. Môđun của z là một đại lượng dương: ký hiệu là $|z|$, ta có $\rho = |z| = \overline{OM}$. Góc θ là một góc có hướng, được xác định sai khác $2k\pi$; $k \in Z$, ký hiệu Arg(z).

Nếu θ_0 là một trong những góc xác định giữa $\overrightarrow{Ox}$ và $\overrightarrow{OM}$ thì:

$$\theta = Arg(z) = \theta_0 + 2k\pi$$

Ta có:

$$\begin{cases} a = \rho.\cos\theta \\ b = \rho.\sin\theta \end{cases}$$



Vậy số phức $z = a + ib$ còn có dạng:

$z = \rho.\cos\theta + i\,\rho\sin\theta$ hay $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ (2)

Dạng (2) gọi là dạng lượng giác của số phức.

Chú ý: Đặc biệt nếu $z = 0$ thì điểm $M \equiv 0$, khi đó $|z| = 0$ còn Arg(z) tuỳ ý.

c) Liên hệ giữa các thành phần của 2 dạng

Dựa vào hình vẽ ta có: nếu biết số phức $z = a + ib$ tức là biết a và b thì :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}\,;\ tg\theta = \frac{b}{a}$$

Chú thích: Từ phương trình $tg\theta = \frac{b}{a}$ ta suy ra góc θ ở trong khoảng $[0, 2\pi]$. Căn cứ vào dấu của a và b ta biết được là góc θ phải nằm trong góc phần tử thứ mấy và do đó, ta chọn được θ thích hợp.

Quy tắc chọn θ là: chọn θ trong số 2 nghiệm ở trong khoảng $(0, 2\pi)$ của phương trình $tg\theta = \frac{b}{a}$ sao cho $\sin\theta$ cùng dấu với b.

Ngược lại, khi biết $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$; tức là biết ρ và θ thì ta tính được a và b.

Thí dụ 1: Cho $z = 1 + \sqrt{3}i$ thì $a = 1$; $b = \sqrt{3}$ nên:

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Phương trình lượng giác này có 2 nghiệm ở trong đoạn $[0, 2\pi]$ là $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{4\pi}{3}$.

Ta có: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ cùng dấu với $b = \sqrt{3}$ nên ta chọn $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $z = 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

Thí dụ 2: Cho $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$$\Rightarrow z = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

d) Nhân số phức ở dạng lượng giác

Cho $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$; $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

Ta có: $z \cdot z' = \rho \cdot \rho'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$.

$$= \rho.\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')].$$

Vậy tích của 2 số phức trong dạng lượng giác là số phức có môđun bằng tích các môđun; còn argumen bằng tổng các argumen.

Thí dụ: $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$$z' = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow z \cdot z' = 2\sqrt{3}[\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})]$$

e) Chia 2 số phức ở dạng lượng giác

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\ ;\ z' = \rho'.(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Khi đó $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho}.[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$

f) Luỹ thừa số phức ở dạng lượng giác

Cho $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ta có: $z . z = \rho^2[\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)]$

$= \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

Tương tự: $z^3 = z^2 . z = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

Tổng quát: $z^n = \rho^n(\cos n.\theta + i\sin n.\theta)$

f) Công thức Moavơrơ

Trường hợp khi $\rho = 1$; khi đó $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

n nguyên dương, (gọi là công thức Moivre).

Thí dụ: Tính $\cos 2\theta$ và $\sin 2\theta$ theo $\cos\theta$ và $\sin\theta$

Khi $n = 2 \Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Thực hiện phép bình phương vế trái; ta được kết quả:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$$

Khi đó $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta . \cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$. Vậy:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

h) Khai căn số phức ở dạng lượng giác

Cho $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Hãy tìm căn bậc n của z?

Giải: Giả sử $\xi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ là 1 căn bậc n của z.

Khi đó $\xi^n = z \leftrightarrow (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Áp dụng công thức Moavơrơ vào vế trái ta có:

$$r^n . (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Mỗi giá trị của k cho một giá trị của α, để tường minh, ta viết:

$$\alpha_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Ứng với mỗi k, tức là mỗi α_k; ta có một căn bậc n của z;

$$\xi_k = r(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$$

hay: $$\xi_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{với } k = 0, 1, 2, ...; n - 1.$$

Thật vậy, với k = 0, ta có: $\xi_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$

với k = 1; $\xi_1 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)$

.....

với k = n ta có: $\xi_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2n\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2n\pi}{n}\right)$

Một cách tương tự, ta có $\xi_{n+1} = \xi_1$; $\xi_{n+2} = \xi_2$; ... tức là: chỉ có n căn bậc n khác nhau của z là: $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$.

Thí dụ: Tính căn bậc 3 của 1: $\sqrt[3]{1} = ?$

Giải: Vì 1 = cos0 + i sin0

nên các căn bậc 3 của 1 là: $\xi_k = \cos\frac{0 + 2n\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2n\pi}{3}$

với k = 0, 1, 2,...

Đó là: $\xi_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$; k = 0

$$\xi_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; k = 1$$

$$\xi_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; k = 2$$

Tương tự, tính $\sqrt[3]{-1}$; ta được kết quả:

$$\xi_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

$$\xi_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xi_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = -1$$

$$\xi_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.5.3. Áp dụng số phức để giải phương trình bậc 2 có biệt số âm

Nhận xét: Mọi số phức (số thực là trường hợp riêng của số phức có phần ảo bằng 0) có thể đưa được về dạng lượng giác; do đó ta có thể khai căn bậc 2. Vậy khi gặp một phương trình bậc 2 có biệt số âm; biệt số đó vẫn khai căn bậc 2 được, nên nó có nghiệm nhưng nghiệm là số phức.

Nói chung, đối với phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ có biệt số $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì nó có 2 nghiệm:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Đó là 2 số phức liên hợp với nhau.

Thí dụ: Giải phương trình: $x^2 + x + 1 = 0$

Phương trình có biệt số: $\Delta = -3 < 0$. Ta viết $\Delta = -3 = 3i^2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad ; x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa ánh xạ. Cho ví dụ.

2. Định nghĩa đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Cho ví dụ.

3. Ánh xạ ngược của song ánh. Tương ứng 1-1.

4. Tích của 2 ánh xạ.

5. Đơn vị ảo là gì? Số phức là gì? Phần thực và phần ảo của số phức? Dạng chính tắc của số phức?

6. Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia hai số phức?

7. Dạng lượng giác của số phức? Cho biết sự liên hệ giữa các thành phần của dạng lượng giác và dạng chính tắc của cùng một số phức.

8. Nhân và chia số phức ở dạng lượng giác?

9. Viết công thức luỹ thừa của số phức ở dạng lượng giác.

10. Viết công thức Moivre.

Áp dụng tính $\sin 2\theta$; $\cos 2\theta$; $\sin 3\theta$; $\cos 3\theta$ theo $\sin\theta$ và $\cos\theta$.

11. Viết công thức tính căn bậc n (n nguyên dương) của một số phức.

12. Viết công thức tính nghiệm của phương trình bậc 2 có biệt số âm.

BÀI TẬP

1.1. Các ánh xạ $f : A \to B$ sau là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Xác định ánh xạ ngược nếu có:

1) $A = R$; $B = R$; $f(x) = x + 7$.

2) $A = R$; $B = R$; $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

3) $A = R$; $B = (0 ; +\infty)$; $f(x) = e^{x+1}$.

4) $A = R$; $B = R$; $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1.2. Cho $f : E \to F$; $g : F \to G$

Chứng minh rằng:

1) Nếu f và g là toàn ánh thì gof là toàn ánh.

2) Nếu f và g là đơn ánh thì gof là đơn ánh.

3) Nếu f và g là song ánh thì gof là song ánh.

1.3. Tính:

1) $(3 + 5i) . (4 - i)$

2) $\dfrac{3-i}{4+5i}$

3) $(1 + 2i)^6$

1.4. Đưa $1 + i$ về dạng lượng giác và tính $(1 + i)^{25}$

1.5.

1) Tính $\sqrt{i}$

2) $\sqrt{-5-12i}$

3) $\sqrt[3]{i}$

4) $\sqrt[3]{-i}$

1.6. Tính các hàm số lượng giác sau theo sinx và cosx.

$\sin 4x$; $\cos 4x$

1.7. Giải các phương trình bậc 2 sau:

1) $x^2 - x + 1 = 0$

2) $x^2 + 4 = 0$

Chương 2
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1. MA TRẬN, CÁC KHÁI NIỆM VỀ MA TRẬN

2.1.1. Khái niệm ma trận

Khi ta có m × n số ta có thể xếp thành một bảng chữ nhật chứa m hàng n cột. Một bảng số như thế gọi là một ma trận.

Định nghĩa: Một bảng số chữ nhật có m hàng n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gọi là một *ma trận cỡ m × n.*

a_{ij} là phần tử của ma trận A nằm ở giao của hàng i cột j. Để ký hiệu ma trận người ta dùng hai dấu ngoặc vuông như ở trên hay hai dấu ngoặc tròn.

Để nói A là ma trận cỡ m × n có phần tử nằm ở hàng i cột j là a_{ij} ta viết:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Khi m = n, bảng số thành vuông, ta có ma trận vuông với n hàng n cột, ta gọi nó là *ma trận cấp n.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ gọi là các phần tử chéo. Đường thẳng xuyên qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính.

Ma trận A cấp n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \ddots & \\ 0 & 0 \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ còn viết } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$, gọi là ma trận tam giác trên.

Ma trận cấp n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ còn viết } \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$, gọi là ma trận tam giác dưới.

Ma trận cấp n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ còn viết } \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$ gọi là ma trận chéo.

Thí dụ: Bảng số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ 2×3 với các phần tử: $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3$

$a_{21} = 4,\ a_{22} = 5,\ a_{23} = 6$

Bảng số

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

là ma trận cỡ 3×1 với các phần tử: $b_{11} = 1,\ b_{21} = 2,\ b_{31} = 3$

Bảng số $C = [4 \quad 5 \quad 6]$ là ma trận cỡ 1×3 với các phần tử:

$c_{11} = 4,\ c_{12} = 5,\ c_{13} = 6$

Chú ý: Sau đây chỉ xét chủ yếu các ma trận thực, tức là các ma trận với $a_{ij} \in R$.

2.1.2. Ma trận không

Định nghĩa: Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không.

Ma trận không kí hiệu là 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là ma trận không cỡ 2×4.

2.1.3. Ma trận bằng nhau

Định nghĩa: Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí bằng nhau, tức là:

1) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$;

2) $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi i và mọi j.

Khi A bằng B ta viết A = B.

Thí dụ:

Cho: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

có nghĩa là a = 1, b = 2, c = 3, d = - 4.

2.1.4. Cộng ma trận

1) Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cỡ m × n:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \; B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Tổng A + B là ma trận cỡ m × n xác định bởi:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Thí dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Tính chất: Dễ thấy rằng:

$$A + B = B + A$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Nếu gọi $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ thì ta có:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

Nếu có thêm ma trận C với $C = [c_{ij}]_{m \times n}$

thì $$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Chú ý: Gọi $\mathfrak{M}_{m \times n}$ là tập các ma trận cỡ m × n. Khi đó $(\mathfrak{M}_{m \times n}, +)$ là một nhóm giao hoán.

2.1.5. Nhân ma trận với một số

1) Định nghĩa: Cho

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \; k \in R$$

thì tích kA là ma trận cỡ m × n xác định bởi $kA = [k\, a_{ij}]_{m \times n}$.

Như vậy, muốn nhân một ma trận với một số ta nhân tất cả các phần tử của ma trận với số đó.

Thí dụ:

$$2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 & 2.4 \\ 2.7 & 2.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$

2) Tính chất: Dễ thấy rằng:

$$\begin{aligned} k(A + B) &= kA + kB \\ (k + h)A &= kA + hA \\ k(hA) &= (kh)A \\ 1 . A &= A \\ 0 . A &= 0 \end{aligned}$$

2.1.6. Phép nhân ma trận với ma trận

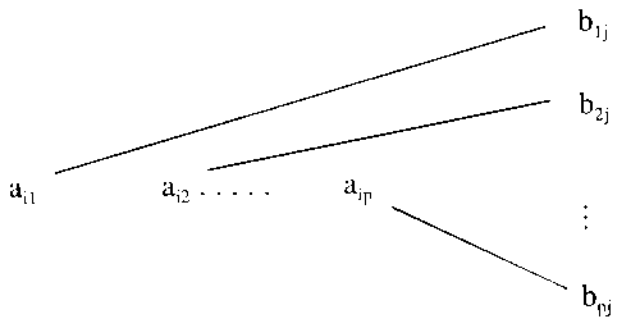
Định nghĩa: Xét hai ma trận

$$A = [a_{ij}]_{m \times p}, \; B = [b_{ij}]_{p \times n}$$

trong đó số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B. Người ta gọi tích AB là ma trận $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ có m hàng n cột mà phần tử c_{ij} được tính bởi công thức:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \qquad (2\text{-}1)$$

Cách tính c_{ij} có thể hình dung bằng sơ đồ:



và có thể nói tắt: "c_{ij} bằng hàng i của ma trận A nhân với cột j của ma trận B".

Thí dụ:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times1} [1 \quad 4]_{1\times2} = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.4 \\ 2.1 & 2.4 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4\end{bmatrix}_{1\times 2}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix}1.3+4.2\end{bmatrix}_{1\times 1} = [11]_{1\times 1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix}1.1+2.3+3.1 & 1.2+2.2+3.4\\4.1+1.3+2.1 & 4.2+1.2+2.4\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix}10 & 18\\9 & 18\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Chú ý: 1) Muốn nhân AB (A bên trái, B bên phải) phải có điều kiện: số cột của A bằng số hàng của B. Muốn nhân BA (B bên trái, A bên phải) phải có điều kiện: số cột của B bằng số hàng của A. Do đó khi nhân AB được thì chưa chắc đã nhân BA được. Trường hợp đặc biệt khi A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì nhân AB và BA đều được.

2) Khi nhân AB và BA được, chưa chắc đã có AB = BA.

Thí dụ: Cho

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}$$

thì

$$AB = \begin{bmatrix}-1 & -2\\11 & 4\end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix}3 & 6\\-3 & 0\end{bmatrix}$$

Ta thấy: $AB \neq BA$.

3) Có những ma trận $A \neq 0$, $B \neq 0$ mà $AB = 0$.

Thí dụ: Cho:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} \neq 0; \qquad B = \begin{bmatrix}2 & -6\\-1 & 3\end{bmatrix} \neq 0$$

Khi đó $$AB = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

2.1.7. Một số tính chất

Định lý:

$A(B + C) = AB + AC$

$(B + C)A = BA + CA$

$A(BC) = (AB)C$

$k(BC) = (kB)C = B(kC)$

2.1.8. Ma trận chuyển vị

Định nghĩa: Xét ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được ma trận mới gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu là A^t.

Vậy có $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$

Ta thấy rằng nếu A có m hàng n cột thì A^t có n hàng m cột.

Thí dụ:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ thì } A^t = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.1.9. Chuyển vị của tích hai ma trận

Giả sử $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, $B = [b_{ij}]_{p\times n}$

Khi đó nhân AB được và AB có cỡ $m \times n$. Qua phép chuyển vị ta có:

$$A^t = [a_{ji}]_{p\times m}, \quad B^t = [b_{ji}]_{n\times p}$$

Ta thấy rằng số cột của B^t bằng số hàng của A^t. Vậy nhân B^tA^t được và tích đó có cỡ $n \times m$.

Định lý:

$$(AB)^t = B^tA^t$$

Thí dụ:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}, \quad (AB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Vậy trong thí dụ này, ta thấy: $(AB)^t = B^tA^t$

2.2. ĐỊNH THỨC

2.2.1. Định thức của ma trận vuông

Xét ma trận cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta chú ý đến phần tử a_{ij}, bỏ đi hàng i và cột j ta thu được ma trận chỉ còn (n - 1) hàng (n - 1) cột, tức là ma trận cấp n - 1. Ta kí hiệu nó là M_{ij} và gọi nó là ma trận con ứng phần tử a_{ij}.

Chẳng hạn, với:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ta có:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa: Định thức của ma trận A, kí hiệu là det (A), được định nghĩa dần dần như sau:

- Định thức cấp 1: cho A là ma trận cấp 1:

$$A = [a_{11}] \text{ thì } \det(A) = a_{11}$$

- Định thức cấp 2: cho A là ma trận cấp hai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

thì $\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

0.0.1 downloaded 60906.pdf at Fri Mar 23 15:07:15 ICT

(Chú ý rằng a_{11} và a_{12} là các phần tử nằm cùng ở hàng 1 của ma trận A), ..., và một cách tổng quát: A là ma trận cấp n thì:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + ... + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n})$$
$$= (-1)^{1+1}a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(M_{12}) + ... + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n}) \qquad (2\text{-}2)$$

(Chú ý rằng $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ là các phần tử cùng nằm ở hàng 1 của ma trận A).

Để kí hiệu định thức, người ta dùng hai gạch đứng đặt ở hai bên:

Thí dụ: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Định thức của ma trận cấp n gọi là định thức cấp n.

Thí dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(45 + 48) - 2(-36 - 42) + 3(32 - 35) = 240$$

2.2.2. Tính chất của định thức

Tính chất 1. $\det(A^t) = \det(A)$.

Hướng chứng minh: Trước hết người ta chứng minh một công thức phụ:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{21}\det(M_{21}) + ... + (-1)^{n+1}a_{n1}\det(M_{n1}) \qquad (2\text{-}3)$$

Thí dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2$$

Hệ quả: Một tính chất đã đúng khi phát biểu về hàng của định thức thì nó vẫn còn đúng khi trong phát biểu ta thay hàng bằng cột.

Tính chất 2. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

Thí dụ: Ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$$

Đổi chỗ hai hàng ta được:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 4.1 = 2 = -(-2)$$

Tính chất 3. Một định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau thì bằng không.

Chứng minh: Gọi định thức có hai hàng như nhau là Δ. Đổi chỗ hai hàng đó ta được $\Delta = -\Delta$

Vậy có $2\Delta = 0$, do đó $\Delta = 0$.

Tính chất 4. Dựa vào định nghĩa (phần 2.2.1) và áp dụng tính chất 2 ta suy ra:

$$\det(A) = (-1)^{i+1}\,[a_{i1}\det(M_{i1}) - a_{i2}\det(M_{i2}) + \ldots + a_{in}\det(M_{in})] \qquad (2\text{-}4)$$

Chú ý rằng các phần tử $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ đều nằm ở hàng i của định thức, nên công thức (2-4) có thể gọi là *khai triển của định thức theo hàng i.*

Dựa vào công thức (2-3) và tính chất 2, ta suy ra:

$$\det(A) = (-1)^{1+j}[a_{1j}\det(M_{1j}) - a_{2j}\det(M_{2j}) + \ldots + a_{nj}\det(M_{nj})] \qquad (2\text{-}5)$$

Chú ý rằng các phần tử $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ đều nằm ở cột j của định thức, nên công thức (2-5) có thể gọi là *khai triển của định thức theo cột j.*

Thí dụ: Xét định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

Ở thí dụ trên ta dựa vào định nghĩa và đã tìm được $\Delta = 240$.

Bây giờ áp dụng khai triển định thức theo hàng 3; áp dụng (2-4) ta có:

$$\Delta = (-1)^{3+1}\left\{7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - (-8)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= 7(12 - 15) + 8(6 + 12) + 9(5 + 8) = 240$$

Áp dụng khai triển định thức theo cột 2; nhờ (2-5) ta cũng có:

$$\Delta = (-1)^{1+2}\left\{2\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-8)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -2(-36 - 42) + 5(9 - 21) + 8(6 + 12) = 240$$

Tính chất 5. Một định thức có một hàng (hay một cột) toàn là số không thì bằng không.

Đó là hệ quả của các công thức (2-4) và (2-5).

Tính chất 6. Khi nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với cùng một số k thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

Đó là hệ quả của các công thức (2-4) và (2-5).

Hệ quả. Từ tính chất 6 ta suy ra nhận xét sau: Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

Thí dụ: $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4.1 & 4.2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(4 - 3) = 4$$

Tính chất 7. Một định thức có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ thì bằng không.

Thật vậy, đưa hệ số tỷ lệ ra ngoài dấu định thức thì được một định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau nên nó bằng không.

Tính chất 8. Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức, chẳng hạn như:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}$$

Tính chất 9. Nếu một định thức có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay của các cột khác) thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Đó là hệ quả của tính chất 8 và 7.

Tính chất 10. Khi ta cộng bội k của một hàng vào một hàng khác (hay bội k của một cột vào một cột khác) thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Thí dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4+(-2)2 & 5+(-2)1 & 7+(-2)3 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Chú ý: Làm như trong thí dụ trên ta được một định thức mới bằng định thức cũ, nhưng lại có phần tử ở hàng 2 cột 1 bằng không.

Ta cũng có thể làm như thế với hàng thứ ba để biến phần tử ở hàng 3 cột 1 thành số không:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6+(-3)2 & 1+(-3)1 & 5+(-3)3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

Ta thấy định thức sẽ đơn giản đi.

Tính chất 11 (Về các định thức có dạng tam giác). Các định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}\ ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Chẳng hạn, xét định thức cấp ba:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Khai triển theo cột 1 ta được:

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sau đó tính định thức cấp hai bằng khai triển theo cột 1 của nó ta được:

$$\Delta = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$

Thí dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 1.7.11 = 77$$

2.2.3. Cách tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

Để tính một định thức, có thể dùng định nghĩa hoặc khai triển (2-4), (2-5), cũng có thể áp dụng các tính chất của định thức mà tìm cách biến đổi để đưa nó về dạng đơn giản. Cách dùng các biến đổi sơ cấp là một trong những cách như thế.

Các biến đổi sơ cấp về hàng mà ta sẽ dùng được liệt kê ở bảng dưới đây:

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng	Lí do
(1) Nhân một hàng với một số $k \neq 0$	Định thức nhân với k	Tính chất 6
(2) Đổi chỗ 2 hàng	Định thức đổi dấu	Tính chất 2
(3) Cộng k lần hàng r vào hàng s	Định thức không đổi	Tính chất 10

Chú ý rằng:

1) Nói nhân một hàng với một số k có nghĩa là nhân tất cả các phần tử của hàng đó với k.

2) Nói cộng k lần hàng r vào hàng s nghĩa là cộng k lần mỗi phần tử ở hàng r với phần tử cùng cột với nó ở hàng s và đặt vào hàng s.

Bây giờ để tính một định thức ta làm như sau:

Bước 1. Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng tìm cách đưa dần định thức đã cho về dạng tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của từng phép biến đổi sơ cấp được sử dụng.

Bước 2. Tính giá trị của định thức dạng tam giác thu được dựa vào tính chất 11 và kể đến tác dụng tổng hợp của các phép biến đổi cấp đã sử dụng.

Thí dụ: Hãy tính:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Giải: Ta có:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \text{; (đổi chỗ hai hàng 1 và 2)}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \text{; (đưa thừa số 3 ở hàng 1 ra ngoài)}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \text{; (cộng - 2 lần hàng 1 với hàng 3)}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \text{; (cộng - 10 lần hàng 2 với hàng 3)}$$

$$= -3 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, (-55) = 165$$

Chú ý: Cũng có thể đưa các biến đổi sơ cấp về cột và áp dụng chúng để tính định thức.

2.3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

2.3.1. Ma trận đơn vị

Gọi $\mathfrak{M}_n$ là tập các ma trận vuông cấp n:

$$\mathfrak{M}_n = \{A\}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa: Ma trận:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử chéo bằng 1, các phần tử khác bằng không, gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Đặc điểm của ma trận đơn vị I là:

$$AI = IA = A, \quad \forall A \in \mathfrak{M}_n$$

Thí dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Ma trận khả đảo và ma trận nghịch đảo

Định nghĩa: Xét $A \in \mathfrak{M}_n$. Nếu tồn tại ma trận $B \in \mathfrak{M}_n$ sao cho:

$$AB = BA = I$$

thì nói A khả đảo và gọi B là ma trận nghịch đảo của A.

Khi A có nghịch đảo ta nói A không suy biến.

Người ta kí hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}, nghĩa là có:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Thí dụ:

nếu $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ thì } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

vì $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

và: $$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.3. Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

Định lý: Ma trận nghịch đảo A^{-1} của $A \in \mathfrak{M}_n$ nếu có là duy nhất.

2.3.4. Sự tồn tại của ma trận nghịch đảo và biểu thức của nó

Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ở mục 2.2.1 ta đã gọi ma trận M_{ij} suy từ A bằng cách bỏ đi hàng i cột j là ma trận con ứng với phần tử a_{ij}.

Bây giờ ta gọi $$D_{ij} = \det(M_{ij}) \qquad (2\text{-}6)$$

là định thức con ứng phần tử a_{ij}, và $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ là phụ đại số của phần tử a_{ij}.

Với các kí hiệu đó, công thức (2-4) kết hợp với tính chất 3 của định thức cho:

$$a_{k1} C_{i1} + a_{k2} C_{i2} + \dots + a_{kn} C_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = i \\ 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases} \qquad (2\text{-}7)$$

Kết hợp công thức (2-5) với tính chất 3 ta có:

$$a_{1k} C_{1j} + a_{2k} C_{2j} + \dots + a_{nk} C_{nj} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = j \\ 0 & \text{nếu } k \neq j \end{cases} \qquad (2\text{-}8)$$

Định lý: Nếu $\det(A) \neq 0$ thì ma trận A có nghịch đảo A^{-1} tính bởi công thức sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Chứng minh: Nhân AC^t và áp dụng công thức (2-7) ta được :

$$AC^t = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix}$$

Nhân C^tA và áp dụng công thức (2-8) ta cũng được kết quả như thế.

Vậy có:

$$\frac{1}{\det(A)} AC^t = \frac{1}{\det(A)} C^tA = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = I$$

và định lí được chứng minh.

Chú ý: Khi $\det(A) \neq 0$ thì A có nghịch đảo, nên A là ma trận *không suy biến*.

2.3.5. Cách tính ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số

Thí dụ: Cho:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\det(A) = -1 \neq 0$$

$$C_{11} = 40 \qquad C_{12} = -13 \qquad C_{13} = -5$$

$$C_{21} = -16 \qquad C_{22} = 5 \qquad C_{23} = 2$$

$$C_{31} = -9 \qquad C_{32} = 3 \qquad C_{33} = 1$$

Do đó:

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} C^t = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Thí dụ: Xét ma trận cấp hai:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Với $\det(A) = ad - bc \neq 0$ thì:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Vì $$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

nên $$C^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2.3.6. Ma trận nghịch đảo của tích hai ma trận

Định lý: Giả sử A và B $\in \mathfrak{M}_n$ là hai ma trận khả đảo. Khi đó AB cũng khả đảo và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Chứng minh: Ta có:

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Vậy AB khả đảo và $B^{-1}A^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của AB.

Ngoài ra ta còn có

Định lý: Nếu A $\in \mathfrak{M}_n$ khả đảo và có nghịch đảo A^{-1} thì:

(a) A^{-1} cũng khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) A^m cũng khả đảo và

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m, \text{ m nguyên} > 0.$$

(c) $\forall k \neq 0$ ta có kA cũng khả đảo và

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}.$$

2.3.7. Định thức của tích hai ma trận

Định lý: Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì có:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Thí dụ: Cho hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Khi đó $\quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$; det(AB) = 2 . 14 - 17 . 3 = -23

Mặt khác: $\quad$ det(A) = 1, det(B) = -23, det(AB) = -23

Vậy đúng là: $\quad$ det(AB) = det(A)det(B)

2.3.8. Định lý: Nếu A $\in \mathfrak{M}_n$ khả đảo tức là có nghịch đảo A^{-1} thì $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh: Từ $AA^{-1} = 1$

ta áp dụng định lý (phần 2.3.3) thì suy ra:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

Vậy phải có $\det(A) \neq 0$. (Tương tự cũng có $\det(A^{-1}) \neq 0$).

2.3.9. Định lý:

1) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho BA = I thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.

2) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho AB = I thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.

Chứng minh:

1) Vì BA = I nên: det(BA) = det(I) $\rightarrow$ det(B) det(A) = 1

Do đó det(A) ≠ 0. Vậy A khả đảo và có nghịch đảo A^{-1}. Nhân đẳng thức BA = I bên phải với A^{-1} ta có:

$$(BA)A^{-1} = IA^{-1} \qquad B(AA^{-1}) = A^{-1}$$

$$B = A^{-1}$$

2) Chứng minh tương tự.

2.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.4.1. Dạng tổng quát của một hệ phương trình tuyến tính

Đó là một hệ m phương trình đại số bậc nhất đối với n ẩn số.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2\text{-}9)$$

trong đó: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số;

a_{ij} là hệ số ở phương trình thứ i của ẩn x_j;

b_i là vế phải của phương trình thứ i.

- Khi m = n ta có một hệ vuông với n phương trình n ẩn.
- Khi các $b_i = 0$ ta có một hệ *thuần nhất*.

Thí dụ: Hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 6 \end{cases}$$ là một hệ 2 phương trình 3 ẩn;

Hệ phương trình $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$ là một hệ 2 phương trình 2 ẩn;

Còn hệ $$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$ là một hệ thuần nhất.

2.4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ (2-9). Ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}10)$$

gọi là *ma trận hệ số* của hệ; ma trận:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}^t$$

gọi là *ma trận vế phải* (hay cột vế phải) của hệ; ma trận:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t$$

gọi là *ma trận ẩn* của hệ.

Với phép nhân ma trận với ma trận, hệ (2-9) được viết:

$$Ax = b \qquad (2\text{-}11)$$

Đó là dạng ma trận của hệ (2-9)

2.4.3. Hệ Cramer

Bây giờ xét hệ n phương trình n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2\text{-}12)$$

với ma trận hệ số:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}13)$$

là một ma trận vuông cấp n.

Dạng ma trận của hệ vẫn là (2-11), chỉ khác ở chỗ A có dạng (2-13) và

$$b = [b_1 \quad b_2 \quad \dots b_n]$$

Hệ (2-11) ở đây viết lại là:

$$Ax = b \tag{2-14}$$

Định nghĩa: Hệ (2-12) tức là (2-14) gọi là hệ Cramer nếu $\det(A) \neq 0$.

Định lý: (Định lý Cramer). Hệ Cramer có nghiệm duy nhất tính bằng công thức $x = A^{-1}b$ tức là

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \tag{2-15}$$

trong đó A là ma trận (2-13), A_j là ma trận suy từ A bằng cách thay cột thứ j bởi cột vế phải b.

Chứng minh: Vì $\det(A) \neq 0$ nên A có nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

Thay trong (2-14) x bởi $A^{-1}b$ ta có:

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$$

Vậy $x = A^{-1}b$ là nghiệm của hệ.

Sử dụng biểu thức của A^{-1} ta suy ra:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là có:

$$x_j = \frac{C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \dots + C_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Để chứng minh sự duy nhất của nghiệm ta giả sử hệ (2-14) có hai nghiệm là x và y:

$$Ax = b \quad ; \quad Ay = b$$

Bằng phép trừ vế với vế ta được: $Ax - Ay = 0$

hay $$A(x - y) = 0 .$$

Nhân hai vế với A^{-1} ta có:

$$A^{-1}A(x - y) = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow (x - y) = 0 \text{ nghĩa là có } x = y.$$

Vậy hệ có một nghiệm duy nhất.

Thí dụ: Giải hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Vậy

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ta tính được:

$$\det(A) = 44 \neq 0$$

$$\det(A_1) = -40, \det(A_2) = 72, \det(A_3) = 152.$$

Ta suy ra các nghiệm của hệ đã cho:

$$x_1 = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}, x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

2.4.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

Xét hệ phương trình tuyến tính ở dạng phương trình (2-12) và ở dạng ma trận (2-14) trong đó A là ma trận (2-13).

a) Hệ tam giác trên: Đó là hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

với ma trận hệ số là một ma trận tam giác trên:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Với giả thiết $a_{ii} \neq 0$, việc giải nó từ dưới lên rất đơn giản, phương trình cuối cho ngay x_n, phương trình liền trên cho x_{n-1}, ... , phương trình đầu cho x_1.

b) Ta viết ma trận A và cạnh nó là ma trận b, ta được ma trận chữ nhật [A, b]. Áp dụng các biến đổi sơ cấp về hàng vào ma trận [A, b] để đưa dần ma trận A về dạng tam giác. Ta nhận thấy:

- Phép biến đổi sơ cấp nhân một hàng với một số khác không ứng với phép nhân một phương trình của hệ với một số khác không, nó không làm thay đổi nghiệm của hệ.

- Phép đổi chỗ hai hàng ứng với phép đổi chỗ vị trí của hai phương trình không làm thay đổi nghiệm của hệ.

- Cuối cùng, phép cộng bội k của một hàng vào một hàng khác ứng với phép cộng bội k của một phương trình vào một phương trình khác cũng không làm thay đổi nghiệm của hệ.

Vậy hệ tam giác cuối cùng thu được tương đương với hệ đã cho. Giải hệ này - điều này không khó - từ dưới lên ta thu được nghiệm của hệ đã cho.

Thí dụ: Xét hệ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Ta suy ra:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về dạng tam giác ta có:

2	4	3	4
3	1	-2	-2
4	11	7	7
2	4	3	4
	-5	-6,5	-8
	3	1	-1
2	4	3	4
	-5	-6,5	-8
		-2,9	-5,8

Vậy hệ đã cho tương ứng với hệ tam giác trên:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ \quad -5x_2 - 6,5x_3 = -8 \\ \qquad\quad -2,9x_3 = -5,8 \end{cases}$$

Giải hệ tam giác trên này từ dưới lên ta thu được $x_3 = 2$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$.

Đó là nghiệm của hệ đã cho.

Phương pháp vừa trình bày còn có tên là *phương pháp Gauss*.

2.4.5. Phương pháp Gauss - Jordan

Sau khi đưa ma trận về ma trận tam giác trên ta tiếp tục áp dụng các biến đổi sơ cấp để đưa ma trận tam giác trên về ma trận đơn vị. Trở lại thí dụ ở trên, ta có:

2	4	3	4
	-5	-6,5	-8
		-2,9	-5,8
1	2	1,5	2
	1	1,3	1,6
		1	2
1	2	0	-1
	1	0	-1
		1	2
1	0	0	1
	1	0	-1
		1	2

Kết quả ta thu được hệ chéo:

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$x_3 = 2$

Do đó ta có kết quả: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ như trên.

2.4.6. Áp dụng phương pháp Gauss - Jordan tính ma trận nghịch đảo

Muốn tính ma trận nghịch đảo của ma trận vuông $A = [a_{ij}]$, theo định lý 2.3.7 ta chỉ cần tìm ma trận $= [b_{ij}]$ sao cho $AB = I$, khi đó $B = A^{-1}$.

Để cho đơn giản cách viết ta xét trường hợp ma trận cấp ba:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ta phải tìm ma trận:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

sao cho AB = I:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}^{A} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad}^{B_1} & \overbrace{\quad}^{B_2} & \overbrace{\quad}^{B_3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad}^{I_1} & \overbrace{\quad}^{I_2} & \overbrace{\quad}^{I_3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Như vậy các cột B_1, B_2, B_3 thoả mãn:

$$AB_1 = I_1,\ AB_2 = I_2,\ AB_3 = I_3$$

Đó là ba hệ đại số tuyến tính có chung ma trận hệ số là A. Ta sẽ giải chúng bằng phương pháp Gauss - Jordan trong cùng một bảng.

• ***Quy tắc thực hành*:**

Muốn tính ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng ta làm như sau:

1) Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A.

2) Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa dần ma trận A về ma trận đơn vị I, tác động đồng thời phép biến đổi sơ cấp vào cột ma trận I.

3) Khi ở cột ma trận A xuất hiện cột ma trận đơn vị I thì ở cột còn lại ta có ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A.

Thí dụ: Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Toàn bộ quá trình tính toán có thể ghi tóm tắt thành một bảng như sau:

1	3	1	0	0	L_1
2	3	0	1	0	L_2
1	8	0	0	1	L_3
1	3	1	0	0	
0	-3	-2	1	0	$-2L_1+L_2 \to L_2$
0	5	-1	0	1	$-1L_1 + L_3 \to L_3$
	2				
1	3	1	0	0	
0	-3	-2	1	0	
0	-1	-5	2	1	$2L_2 + L_3 \to L_3$
1	3	1	0	0	
0	-3	-2	1	0	
0	1	5	-2	-1	$-1L_3 \to L_3$
1	0	-14	6	3	$-3L_3 + L_1 \to L_1$
0	0	13	-5	-3	$3L_3 + L_2 \to L_2$
0	1	5	-2	-1	
1	0	-40	16	9	$-2L_2 + L_1 \to L_1$
	0	13	-5	-3	
	1	5	-2	-1	

Vậy $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4.7. Hệ thuần nhất

Xét hệ thuần nhất:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}16)$$

Ma trận hệ số vẫn là (2-13)

Hệ có dạng ma trận:

$$Ax = 0 \tag{2-17}$$

Vế phải là ma trận không, cỡ n x 1.

Hệ thuần nhất (2-16) tức là (2-17) luôn có *nghiệm không:*

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad \dots 0]^t$$

vì thay $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ vào vế trái của (2-16) thì các phương trình đó thoả mãn.

Nghiệm không của hệ thuần nhất gọi là *nghiệm tầm thường* của nó.

Một câu hỏi đặt ra là: Khi nào hệ thuần nhất (2-16) có nghiệm không tầm thường. Ta có

Định lý: Hệ thuần nhất (2-16) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi det (A) = 0.

Thí dụ: Hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

có định thức $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên chỉ có nghiệm tầm thường $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Hệ
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

có định thức:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

nên có nghiệm không tầm thường chẳng hạn $x_1 = 3, x_2 = -2$. Thật ra hai phương trình đó chỉ là một. Cho $x_1 = 3$ ta tìm ra $x_2 = -2$.

• ***Kết quả tóm tắt:***

Trong trường hợp m = n, ta có kết quả tóm tắt sau:

Các mệnh đề sau tương đương:

(a) $\det(A) \neq 0$.

(b) A khả đảo.

(c) Hệ Ax = b có nghiệm duy nhất với mọi b.

(d) Hệ Ax = 0 chỉ có nghiệm tầm thường.

2.5. HẠNG CỦA MA TRẬN - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

2.5.1. Hạng của ma trận

Xét ma trận cỡ m x n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Gọi p là một số nguyên dương $\leq \min\{m, n\}$.

Định nghĩa: Ma trận vuông cấp p suy từ A bằng cách bỏ đi (m - p hàng n - p) cột gọi là ma trận con cấp p của A.

Định thức của ma trận con đó gọi là định thức con cấp p của A.

Thí dụ: Xét ma trận cỡ 3×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta có $\min\{3, 4\} = 3$, do đó p = 1, 2, 3.

Các định thức con cấp ba của A là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Các định thức con cấp hai của A là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \ ; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

Định nghĩa: Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A.

Ta kí hiệu hạng của ma trận A là $\rho(A)$ hoặc hạng (A).

Thí dụ: Xét ma trận A ở thí dụ trên. Các định thức con cấp ba đều bằng không, nhưng có định thức con cấp hai khác không. Vậy $\rho(A) = 2$.

Chú ý: $\rho(A^t) = \rho(A)$

2.5.2. Cách tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

a) Vì các phép biến đổi sơ cấp về hàng không làm thay đổi tính khác không hay bằng không của các định thức con của một ma trận, vì thế nó không làm thay đổi hạng của ma trận. Vậy ta có thể áp dụng chúng để đưa một ma trận về dạng bậc thang rồi áp dụng chú ý sau đây mà suy ra hạng của ma trận đã cho.

Thí dụ: Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Các biến đổi sơ cấp về hàng cho:

1	-3	4	2
2	1	1	4
-1	-2	1	-2
1	-3	4	2
0	7	-7	0
0	-5	5	0
1	-3	4	2
0	7	-7	0
0	0	0	0

Bảng số cuối cùng là một ma trận ở dạng bậc thang có hai hàng khác không. Vậy $\rho(A) = 2$.

b) Ma trận bậc thang:

Đó là những ma trận có 2 tính chất:

1) Các hàng khác không (tức là có phần tử $\neq 0$) luôn ở trên các hàng không (tức là hàng có tất cả các phần tử $= 0$).

2) Trên hai hàng khác không thì phần tử khác không đầu tiên ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên. Chẳng hạn, các ma trận sau có dạng bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ta thấy rằng ở ma trận A, định thức con khác không cấp cao nhất là 3, vậy $\rho(A) = 3$, nó bằng số hàng khác không của A, còn ở ma trận B, định thức con khác không cấp cao nhấ là 2, vậy $\rho(B) = 2$, nó bằng số hàng khác không của B.

Nói chung ta có nhận xét sau:

Chú ý: Hạng của một ma trận có dạng bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

2.5.3. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Bây giờ xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát (2-9). Ma trận hệ số của nó là ma trận A ở (2-10). Xét ma trận bổ sung tức là ma trận A thêm cột b:

$$\bar{A} = [A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Định lý: (Định lý Kronecker - Capelli). Hệ (2-9), tức là hệ Ax = b, có nghiệm khi và chỉ khi.

$$\rho(\bar{A}) = \rho(A)$$

Chứng minh: Bằng các biến đổi sơ cấp về hàng và bằng cách đánh số lại các ẩn tức là đổi chỗ các cột ta đưa ma trận $\bar{A}$ về dạng bậc thang:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ & & & & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & b_m \end{array}$$

trong đó $r \le \min\{m, n\}$. Từ đó ta suy ra định lí .

Chú ý: Từ định lí trên ta suy ra:

- $\rho(\bar{A}) \ne \rho(A)$ thì hệ vô nghiệm.
- $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- $\rho(\bar{A}) = \rho(A) < n$ thì hệ có vô số nghiệm.

Thí dụ: Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

1) Hãy xác định a và b để hệ có nghiệm duy nhất.

2) Xác định a và b để hệ có vô số nghiệm.

3) Xác định a và b để hệ vô nghiệm.

Giải: Xét các ma trận.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix}$$

Ta có $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2a - 21$

1) Điều kiện cần và đủ để hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $\det(A) \neq 0$. Vậy đáp số của câu hỏi 1) là $a \neq 21/2$, còn b bất kì.

2) Từ kết luận trên suy ra: để hệ vô số nghiệm, trước hết phải có $a = 21/2$.

Khi đó $\det(A) = 0$ nên $\rho(A) < 3$. Vì A có định thức con:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$$

là định thức cấp 2 nên $\rho(A) = 2$ khi $a = 21/2$. Theo định lí (Kronecker - Capelli), muốn cho hệ có nghiệm, cần và đủ là $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = 2$. Ta hãy tính $\rho(\bar{A})$ khi $a = 21/2$ bằng biến đổi sơ cấp. Ta có:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 21/2 & 3 \\ 3 & -1 & -21/2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[2L_2 \to L_2]{2L_1 \to L_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 6 & -2 & -21 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1 + L_3 \to L_3]{3L_1 + L_2 \to L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & -14 & -84 & -14 \\ 0 & -3 & -18 & b-6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{14}L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & -18 & b-6 \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_2 + L_3 \to L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

Qua bảng cuối cùng này ta thấy rằng số hàng khác không của A là 2, phù hợp với kết quả $\rho(A) = 2$ khi $a = 21/2$. Số hàng khác không của $\bar{A}$ phụ thuộc b. Số hàng của nó là 2 nếu $b = 3$ và số hàng $\neq 0$ của nó là 3 nếu $b \neq 3$. Vậy ta có:

$$\rho(\bar{A}) = \rho(A) = 2 \text{ khi } a = 21/2,\ b = 3$$

$$\rho(\bar{A}) \neq \rho(A) \qquad \text{khi } a = 21/2,\ b \neq 3$$

Khi $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = 2 < 3$ thì hệ đã cho tương đương với một hệ 2 phương trình 3 ẩn:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dfrac{21}{2}x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - \dfrac{21}{2}x_3 = 2 \end{cases}$$

nên nó có vô số nghiệm.

Vậy với: $a \neq 21/2$ thì hệ có nghiệm duy nhất;

$a = 21/2$, $b \neq 3$ thì hệ vô nghiệm;

$a = 21/2$, $b = 3$ thì hệ có vô số nghiệm.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Ma trận là gì? Một số ví dụ.

2. Các phép toán cộng ma trận với ma trận (cùng cỡ); phép nhân một số với ma trận? Cho ví dụ.

3. Nhân ma trận với ma trận.

4. Ma trận khả đảo và ma trận nghịch đảo. Cách tính ma trận nghịch đảo.

5. Định thức của ma trận vuông? Cách tính định thức cấp n (khai triển theo hàng i; khai triển theo cột j). Các tính chất của định thức?

6. Hạng của một ma trận. Tìm hạng của một ma trận bằng biến đổi sơ cấp?

7. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát; cách giải?

BÀI TẬP

2.1. Các bài tập về ma trận.

1) Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Tính: a) (A + B) + C ; b) A + (B + C) ; c) 3A

d) Tìm A^t ; B^t ; C^t.

2) Hãy nhân các ma trận:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3) Hãy tính AB - BA nếu:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

4) Giải phương trình AX = B đối với ẩn là ma trận X; với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5) Dùng phương pháp Gauss - Jordan tính ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6) Các ma trận sau có khả đảo không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.2. Các bài tập về định thức.

1) Tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2) Cho $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$. Hỏi các định thức sau bằng bao nhiêu?

a) $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$

3) Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$

4) Biết rằng các số 204; 527; 255 chia hết cho 17.

Chứng minh rằng: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ chia hết cho 17.

5) Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ bằng cách khai triển nó theo các phần tử của hàng 3.

6) Tính định thức $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$

bằng cách khai triển nó theo các phần tử ở cột 4.

7) Tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2.3. Các bài tập về hệ phương trình tuyến tính.

1) Áp dụng Cramer giải các hệ sau:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x + 5y = -5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

2) Hãy giải các hệ sau bằng cách tính ma trận nghịch đảo:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -3x + 2y = -6 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$

3) Áp dụng Gauss-Jordan, giải các hệ sau:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

4) Viết các nghiệm của hệ sau theo a, b, c.

a) $\begin{cases} x + 3y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y - z = a \\ x + 2y - 2z = b \\ 2x - y + 2z = c \end{cases}$

5) Xác định a để hệ sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

6) Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

7) Giải các hệ sau và biện luận theo tham số.

a) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$

Chương 3
HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

3.1. GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

3.1.1. Định nghĩa hàm số một biến số thực

Cho X, Y; $X \subseteq R$, $Y \subseteq R$, ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số một biến số thực. Tập X được gọi là miền xác định (thường ký hiệu là D_f) và tập f(X) được gọi là miền giá trị; (ký hiệu là R_f) của hàm số f; $x \in D_f$ được gọi là biến độc lập hay đối số; $f(x) \in R_f$ được gọi là biến phụ thuộc hay hàm số. Để biểu thị hàm số f tương ứng mỗi phần tử $x \in D_f$ với một phần tử xác định $f(x) \in R_f$ người ta thường viết: $x \mapsto f(x)$ hoặc $y = f(x)$.

Thí dụ: $x \mapsto x$ là hàm số đồng nhất, ký hiệu là id(x)

$x \mapsto 2x + 3$ là hàm số bậc nhất; ...

Đồ thị của hàm số một biến số thực:

Đồ thị của hàm số $x \mapsto f(x)$ hay là $y = f(x)$ được định nghĩa là tập các điểm trong mặt phẳng toạ độ có toạ độ (x; f(x)).

Tuỳ theo tính chất cụ thể của hàm số f(x), đồ thị của f(x) có thể là một tập điểm rời rạc hữu hạn hoặc vô hạn; cũng có thể là tập những mảnh cung đứt đoạn, và cũng có thể là một cung liền.

Hàm số hợp:

Giả sử $X \subseteq R$, $Y \subseteq R$, $Z \subseteq R$; cho hàm số $g: X \to Y$ và hàm số $f: Y \to Z$; xét hàm số $h: X \to Z$ định nghĩa bởi: $h(x) = f[g(x)]$; $x \in X$.

Hàm số h được gọi là hàm số hợp của hàm số f và hàm số g.

$$h(x) = f[g(x)] \text{ hay } h(x) = (fog)(x),\ x \in X$$

Thí dụ: X = Y = Z = R ; xét các ánh xạ:

$$f: x \mapsto x^2 + 2,\ g: x \mapsto 3x + 1$$

Khi đó: $f[g(x)] = [g(x)]^2 + 2 = (3x + 1)^2 + 2$

$g[f(x)] = 3\,f(x) + 1 = 3(x^2 + 2) + 1$

Hàm số ngược và đồ thị hàm số ngược:

Cho hai tập $X \subseteq R$, $Y \subseteq R$; cho song ánh $f : X \mapsto Y$, $x \mapsto y = f(x)$. Song ánh f chính là một hàm số có miền xác định: $D_f = X$ và miền giá trị là tập ảnh của X, tức là f(X):

$$f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$$

Khi đó vì f là song ánh nên f là toàn ánh (nghĩa là $f(X) = Y$) và f cũng là đơn ánh (nghĩa là với $x_1 \neq x_2$; $x_1, x_2 \in X$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$; $f(x_1), f(x_2) \in Y$). Khi đó mỗi phần tử $y \in Y$ đều là ảnh của đúng một phần tử $x \in X$ nên có thể đặt tương ứng một phần tử $y \in Y$ với một phần tử $x \in X$: phép tương ứng đó xác định một hàm số ánh xạ Y sang X, hàm số này được gọi là hàm số ngược của song ánh f và được ký hiệu là $f^{-1}: Y \to X$, nghĩa là: $f^{-1}: y \to x = f^{-1}(y)$ trong đó y là biến độc lập và x là hàm số phụ thuộc.

Từ định nghĩa của hàm số ngược, ta có:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)\ .\ \text{Do quy ước nên viết}\quad y = f^{-1}(x)$$

Đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường phân giác thứ nhất.

Thí dụ: Xét hàm số $h: R \to R, x \to x^2$

Với $y \in R$, $y < 0$, phương trình (ẩn là x) $x^2 = y$ vô nghiệm, vậy h không là toàn ánh.

Với $y \in R$, $y > 0$ phương trình $x^2 = y$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{y}$; vậy h không là đơn ánh. Do đó h không là song ánh; trong trường hợp này hàm h không có hàm ngược.

Các hàm số sơ cấp cơ bản:

Các hàm số sau đây được gọi là các hàm số sơ cấp cơ bản: hàm số luỹ thừa $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in R$; hàm số mũ $x \mapsto a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; hàm số loga: $x \mapsto \log_a x$; các hàm số lượng giác: $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto tgx$, $x \mapsto cotgx$ và các hàm số lượng giác ngược.

1) Hàm số luỹ thừa $x \mapsto x^\alpha$; $y = x^\alpha$ với $\alpha \in R$.

Miền xác định của hàm số luỹ thừa phụ thuộc α. Với $\alpha \in N$: miền xác định là cả trục số R. Với α nguyên âm; miền xác định là cả trục số trừ điểm gốc 0. Với α có dạng $\alpha = 1/p$; $p \in Z$ thì:

- Với p chẵn, $p \in N_+$: miền xác định là R^+.

- Với p lẻ, $p \in N^+$: miền xác định là R.

- Với $p \in Z$ miền xác định cũng phụ thuộc p chẵn hay lẻ.

- Với α là số vô tỷ thì quy ước chỉ xét $y = x^\alpha$ tại mọi $x \geq 0$ nếu $\alpha > 0$ và tại mọi $x > 0$ nếu $\alpha < 0$.

2) Hàm số mũ $x \to a^x$, $y = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$.

Số a được gọi là cơ số của hàm số mũ. Hàm số mũ a^x xác định với mọi x và luôn dương.

- Hàm số mũ $y = a^x$ tăng (nghĩa là với $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$) khi $a > 1$.

- Hàm số mũ $y = a^x$ giảm (nghĩa là với $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$) khi $a < 1$.

Ta có: $a^0 = 1$; $a^1 = a$

3) Hàm số logarit $y = \log_a x$: $0 < a \neq 1$.

Hàm số $\log_a x$ tăng khi $a > 1$. Khi đó: với $0 \leq x \leq 1$ thì $\log_a x \leq 0$;

với $x \geq 1$ thì $\log_a x \geq 0$

Hàm số $\log_a x$ giảm khi $a < 1$ và khi đó: với $0 < x \leq 1$ thì $\log_a x \geq 0$;

với $x \geq 1$ thì $\log_a x \leq 0$

Ta có: $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$

Ngoài ra hàm số $\log_a x$ còn có một số tính chất sau:

$\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ $(A > 0; B > 0)$

$\log_a A/B = \log_a A - \log_a B$ $(A > 0; B > 0)$

$\log_a A^\alpha = \alpha \log_a A$ $(A > 0)$

Với $b > 0$; $b = a^{\log_a b}$

Với $b > 0$, $b \neq 1$, $\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$; $A > 0$ (gọi là công thức đổi cơ số)

4) Các hàm số lượng giác:

$x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \text{tg}x$; $x \mapsto \text{cotg}x$

Các hàm số lượng giác $y = \sin x$ và $y = \cos x$ có miền xác định là toàn trục số R và có miền giá trị là đoạn $[-1; 1]$.

Hàm số: $x \to \text{tg}x$, $y = \text{tg}x$ xác định tại mọi $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$; $(k \in Z)$

Hàm số: $y \to \text{cotg}x$, $y = \text{cotg}x$ xác định tại mọi $x \neq k\pi$; $(k \in Z)$

5) Các hàm số lượng giác ngược:

• Hàm số $x \to \arcsin x$

Xét hàm số f: $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$; $x \to \sin x$; f(x) là một song ánh, do đó có hàm số ngược f^{-1}; ký hiệu hàm số ngược f^{-1}: $y \to \arcsin y$; $x = \arcsin y$;

nghĩa là $y = \sin x$; $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \arcsin y$; theo quy ước: $y = \arcsin x$.

Hàm số $y = \arcsin x$ có miền xác định là đoạn $[-1; 1]$ và miền giá trị là đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ và là một hàm số tăng.

• Hàm số $y = \arccos x$.

Xét song ánh f: $[0; \pi] \to [-1; 1]$; $x \to \cos x$; hàm f có hàm số ngược f^{-1}: $y \to \arccos y$, $x = \arccos y$ nghĩa là:

$$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi \Leftrightarrow x = \arccos y.$$

Hàm số y = arccos x có miền xác định là đoạn [-1; 1] và miền giá trị là đoạn [0; π] và là một hàm giảm.

Do $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ nên: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

• Hàm số: y = arctgx.

Hàm số y = tgx; với $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ là một song ánh; hàm số ngược của nó là x = arctg y, nghĩa là: $y = tgx;\ x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = arctgy$.

Quy ước: y = arctgx.

Hàm số y = arctgx có miền xác định là toàn trục số R, miền giá trị là khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ và là hàm số tăng.

• Hàm số y = arccotgx.

Hàm số y = cotgx với $x \in (0; \pi)$ có hàm số ngược là x = arccotgy, nghĩa là: $y = cotgx;\ 0 < x < \pi \Leftrightarrow x = arccotgy$.

Quy ước: y = arccotgx.

Hàm số y = arccotgx có miền xác định là toàn trục số R và miền giá trị là khoảng (0; π) và là hàm số giảm.

Ta dễ dàng chứng minh được: $arctgx + arccotgx = \frac{\pi}{2}, \forall x \neq 0$.

3.1.2. Giới hạn của hàm số

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b), nói rằng f(x) có giới hạn là L (hữu hạn), khi x dần tới x_0; $x_0 \in [a, b]$ nếu với bất kỳ $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Thí dụ: Cho f(x) = c, c là hằng số, ta sẽ chứng minh rằng $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$. Thật vậy cho trước $\varepsilon > 0$, vì f(x) = c, ∀x, do vậy với bất kỳ $\delta > 0$: $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

• ***Các tính chất của giới hạn:***

Định lý 1:

Cho $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$; $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$

Khi đó: a) $\lim_{x \to a} cf_1(x) = cL_1$; (với c = const)

b) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = L_1 + L_2$;

c) $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \,.\, f_2(x)] = L_1 \,.\, L_2$;

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (với $L_2 \neq 0$)

Từ định lý trên ta có thể suy ra: Nếu $P_n(x)$ là một đa thức bậc n đối với x, nghĩa là:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

thì $$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$$

Nếu R(x) là một phân thức hữu tỷ, nghĩa là:

$$R_{(x)} = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

thì $$\lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)} \quad \text{với } Q_m(x_0) \neq 0.$$

Định lý trên chưa khẳng định được trong các trường hợp khi L_1 là $+\infty$, và L_2 là $-\infty$. Khi đó ta có dạng vô định là $\infty - \infty$; tức là chưa thể khẳng định được trong trường hợp b) là $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$ có hay không. Trong trường hợp c), khi $L_1 = 0$, $L_2 = \infty$ ta có dạng vô định là $0 \,.\, \infty$. Trong trường hợp d) $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ta có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$; hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Khi gặp các dạng vô định đó, muốn tìm được giới hạn ta phải tìm cách để khử dạng vô định.

Thí dụ: Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$.

Dạng vô định ở đây là $\dfrac{\infty}{\infty}$; để khử dạng vô định này ta có thể chia tử và mẫu cho $\sqrt{x}$ và được:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}} = 1$$

Định lý 2:

Giả sử 3 hàm số f(x), g(x) và h(x) thoả mãn bất đẳng thức:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ với } x \in (a, b)$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ (3-1)

Dùng định lý này ta chứng minh được: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

và $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ (vì $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$).

Định lý 3:

Cho f(x) là một hàm số đơn điệu không giảm (không tăng) xác định trên R; khi đó, nếu f(x) bị chặn trên; nghĩa là tồn tại M sao cho $f(x) \leq M$ với mọi $x \in R$ (bị chặn dưới; nghĩa là tồn tại N sao cho $f(x) \geq N$ với mọi $x \in R$) thì:

$$\lim_{x \to +\infty(-\infty)} f(x) = L$$

Áp dụng định lý này ta chứng minh được rằng:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (3\text{-}2)$$

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \quad (3\text{-}3)$$

Từ đó ta có: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{0}{n!n}$ (3-4)

Với θ là một số dương gồm giữa 0 và 1.

Nếu đặt $u = \frac{1}{x}$ thì ta có một dạng khác của số e:

$$\lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e \quad (3\text{-}5)$$

• ***Số e và loga tự nhiên:***

Hàm số lôgarít với cơ số e được gọi là lôgarít tự nhiên hay lôgarít nêpe và ký hiệu là ln hay L, nghĩa là:

$$\ln x = \log_e x \; ; \; x > 0 \quad (3\text{-}6)$$

Nếu $y = \ln x$ thì có nghĩa là $x = e^y$ suy ra $e^{\ln x} = x, \; x > 0$ (3-7)

• ***Giới hạn một phía:***

Xét lim f(x) khi $x \to x_0$ (hữu hạn) khi x luôn thoả mãn $x < x_0$ hoặc khi $x > x_0$, khi đó nếu tồn tại lim f(x) thì ta nói rằng đó là các giới hạn một phía: giới hạn trái ($x \to x_0$, $x < x_0$) và giới hạn phải ($x \to x_0$, $x > x_0$) của f(x).

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$; (giới hạn trái) (3-8)

và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$; (giới hạn phải)

Dĩ nhiên ngay tại $x = x_0$ có thể hàm f(x) không xác định và nói chung:

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

Thí dụ: Cho $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Hàm số này không xác định tại x = 0 và với x < 0 thì f(x) = -1 và x > 0 thì f(x) = +1. Do vậy: $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$ và $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$.

• ***Vô cùng bé và vô cùng lớn:***

Hàm số f(x) được gọi là một vô cùng bé, viết tắt VCB khi $x \to x_0$ nếu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Hàm số f(x) được gọi là một vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$, nếu:

$$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$. (ở đây x_0 có thể là hữu hạn hoặc vô cùng).

So sánh các vô cùng bé:

Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là 2 vô cùng bé khi $x \to x_0$. Ta nói rằng $f_1(x)$ có bậc cao hơn $f_2(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ và viết $f_1(x) = 0.\ (f_2(x))$; $x \to x_0$

(đọc: $f_1(x)$ bằng không $f_2(x)$ khi $x \to x_0$)

Khi đó ta nói rằng $f_2(x)$ có bậc thấp hơn $f_1(x)$ trong quá trình $x \to x_0$; $f_1(x)$ cùng bậc với $f_2(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = c \neq 0$ và viết là: $f_1(x) = 0\ .\ (f_2(x))$; $x \to x_0$ và đọc là: $f_1(x)$ bằng 0 . $f_2(x)$ khi $x \to x_0$. Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ thì nói rằng $f_1(x)$ tương đương với $f_2(x)$ khi $x \to x_0$ và viết là: $f_1(x) \sim f_2(x)$; $x \to x_0$

Thí dụ: sinx ~ x ; tg(x) ~ x. Vậy sinx ~ tgx khi $x \to 0$.

Định lý 4:

Nếu f(x), g(x), $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$ là những VCB khi $x \to x_0$, nếu $f(x) \sim \bar{f}(x)$, $g(x) \sim \bar{g}(x)$ thì:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$$

3.1.3. Sự liên tục của hàm số một biến số

Định nghĩa: Cho f(x) là một hàm số xác định trong khoảng (a; b); nói rằng f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (3\text{-}9)$$

Thí dụ: 1) Hàm số f(x) = x liên tục tại mọi x hữu hạn.

2) Hàm số f(x) = sinx liên tục tại x = 0; hơn nữa với x_0 bất kỳ, ta có:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}$$

$$|\sin x - \sin x_0| < 2\sin\frac{x - x_0}{2}, \text{ do đó: } \lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0;$$

Vậy hàm số f(x) = sinx liên tục tại mọi $x \in R$.

3) Hàm số f(x) = c liên tục với mọi $x \in R$ (c = const).

4) Hàm số f(x) = cosx liên tục tại mọi $x \in R$.

5) Hàm số f(x) = tgx liên tục tại mọi x thuộc miền xác định của nó...

Định lý 5:

Cho f(x), g(x) là 2 hàm số liên tục trong khoảng (a,b) khi đó:

a) f(x) + g(x) liên tục trong (a,b).

b) f(x) . g(x) liên tục trong (a,b); đặc biệt cf(x) (c = const) liên tục trong (a,b).

c) f(x)/g(x) liên tục trong (a,b) trừ đi những điểm làm cho g(x) triệt tiêu.

Từ định lý ta suy ra: Các đa thức là các hàm số liên tục; phân thức hữu tỷ là hàm số liên tục trừ các *không điểm* của đa thức mẫu số; các hàm số lượng giác liên tục trong miền xác định của nó.

Có thể sử dụng tính liên tục của hàm số để tìm một số giới hạn; chúng ta có một số công thức quan trọng sau:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \qquad \text{(dạng 0/0)} \quad (3\text{-}10)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \qquad \text{(dạng 0/0)} \quad (3\text{-}11)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu \qquad \text{(dạng 0/0)} \quad (3\text{-}12)$$

Đặc biệt khi a = e ta có: $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$ hay $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ khi $\alpha \to 0$.

Hơn nữa, nếu lấy $\alpha = \frac{1}{n}$ thì $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$

Trong nhiều trường hợp, ta phải tìm giới hạn của biểu thức $[u(x)]^{v(x)}$ khi $x \to x_0$. Khi đó, giả sử: $\lim_{x\to x_0} u(x) = a$ và $\lim_{x\to x_0} v(x) = b$ với 0 < a; b là 2 số hữu hạn. Viết biểu thức u^v dưới dạng $u^v = e^{v\ln u}$; sử dụng tính liên tục của hàm số lôgarít, ta có: $\lim_{x\to x_0} v = b$; $\lim_{x\to x_0}\ln u = \ln a$.

Do đó $\lim\limits_{x \to x_0} v \cdot \ln u = b\ln a$. Lại sử dụng tính liên tục của hàm số mũ, ta có:

$$\lim_{x \to x_0} u^v = e^{b\ln u} = a^b$$

3.1.4. Điểm gián đoạn của hàm số

Định nghĩa: Điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn của hàm số $y = f(x)$ nếu $f(x)$ không liên tục tại điểm $x = x_0$. Ngoài ra có thể coi x_0 là điểm gián đoạn của hàm số khi:

- Hoặc điểm x_0 không thuộc MXĐ của hàm số $f(x)$.

- Hoặc khi x_0 tuy thuộc MXĐ của $f(x)$ nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

- Hoặc không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Thí dụ: 1) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ và $f(0) = a$. Do đó nếu $a \neq 1$ thì $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$; và nếu $a = 1$ thì hàm số liên tục tại $x = 0$.

2) Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ -1 & \text{nếu } \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & \text{với những trường hợp khác.} \end{cases}$

Tại điểm $x = \dfrac{1}{2}$ ta có $f(\dfrac{1}{2} - 0) = 1$ và $f(\dfrac{1}{2} + 0) = -1$ (tức là tại $x = \dfrac{1}{2}$; hai giới hạn trái và phải khác nhau; do đó $f(x)$ không có giới hạn; $x = \dfrac{1}{2}$ là điểm gián đoạn). Ta nói rằng đó là điểm gián đoạn loại 1. Tại điểm gián đoạn loại 1; hàm số có bước nhảy $|f(x_0 + 0) - f(x_0 + 0)|$. Những điểm gián đoạn khác (không phải loại 1) gọi là điểm gián đoạn loại 2.

3.1.5. Các tính chất của hàm số liên tục

Định lý: (Định lý về giá trị trung gian)

Cho $f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng (α, β); giả sử $a, b \in (\alpha, \beta)$; $a < b$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(x) = 0$.

Thí dụ: Tìm một nghiệm trong đoạn [1, 2] của phương trình bậc 3:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

ta có: $f(1) = -1 < 0;\ f(2) = 5 > 0$

$$u_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}\ ; \qquad f(u_0) = f(\frac{3}{2}) > 0$$

$$u_1 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}\ ; \qquad f(u_1) = f(\frac{5}{4}) < 0$$

.....

$$u_4 = \frac{43}{32}\ ; \qquad f(\frac{43}{32}) > 0$$

như vậy, dùng thủ tục phân đôi ở u_4, ta có thể khẳng định rằng nghiệm x_0 của phương trình bậc 3: $x^3 - x - 1 = 0$ nằm trong khoảng $\left[\frac{21}{16};\ \frac{43}{32}\right]$.

Hệ quả: Cho f(x) xác định, liên tục trên đoạn [a, b]. Khi đó f(x) lấy tất cả các giá trị từ f(a) đến f(b).

3.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN

3.2.1. Đạo hàm

a) Định nghĩa đạo hàm:

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trong (a, b). Ta nói rằng hàm số f(x) khả vi tại điểm $c \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = A\ ;\ x \neq c \qquad (3\text{-}13)$$

Số A là giới hạn của tỷ số $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ khi $x \to c$; $(x \neq c)$ được gọi là đạo hàm của f(x) lấy tại điểm x = c; ký hiệu f'(c).

b) Nhận xét:

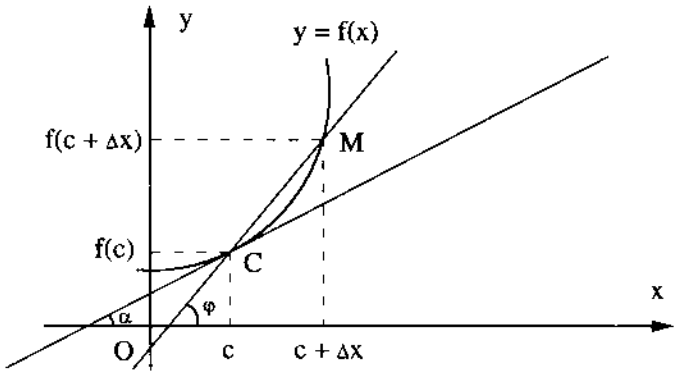
1) Nếu đặt $x - c = \Delta x$ thì biểu thức định nghĩa (mục 4.2.1) được viết thành:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \qquad (3\text{-}14)$$

Vậy đạo hàm tại x = c chính là giới hạn của tỷ số giữa số gia hàm và số gia đối tại x = c.

2) Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

Nếu vẽ đồ thị của hàm số f(x) trong hệ toạ độ Đềcac vuông góc thì tỷ số $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ chính là hệ số góc của dây cung CM với C (c; f(c)) và M $(c + \Delta x;\ f(c + \Delta x))$, nghĩa là tỷ số đó là tang của góc α, α là góc giữa chiều dương trục hoành Ox và vectơ $\overrightarrow{CM}$.



Khi cho $\Delta x \to 0$ thì điểm M trên đồ thị tiến đến điểm C; do đó cát tuyến CM tiến đến tiếp tuyến CT, như vậy, về mặt hình học, đạo hàm tại mỗi điểm chính là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị của f(x) tại điểm đó.

3) Dùng khái niệm VCB thì (3-14) $\Leftrightarrow f(c + \Delta x) - f(c) = f'(c) \,.\, \Delta x + \theta\, \Delta x$

(với $\theta\Delta(x)$ là VCB bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$)

4) Từ (3-14) suy ra rằng nếu: f(x) khả vi tại điểm $c \in (a, b)$ thì f(x) liên tục tại c; điều ngược lại không đúng, tức là: nếu f(x) liên tục tại c thì có thể f(x) không khả vi tại c.

c) Một số kết quả

$f = c \quad ; f' = 0 \qquad f = \sin x \quad ; f' = \cos x$

$f = x \quad ; f' = 1 \qquad f = e^x \quad ; f' = e^x ; \ldots$

Định lý 1:

Cho f(x), g(x) xác định trên (a, b). Giả sử f(x) và g(x) cùng khả vi tại $x \in (a, b)$.

Khi đó f(x) + g(x) ; f(x) . g(x) cũng khả vi tại x và:

$(f + g)' = f' + g'$

$(f \,.\, g)' = f' \,.\, g + f \,.\, g'$; đặc biệt khi $g = c$ thì $(c \,.\, f)' = c \,.\, f'$

Định lý 2: (Đạo hàm của hàm số hợp)

Giả sử: $u = g(x)$ xác định trên (a, b); lấy giá trị trong (c, d).

g(x) khả vi tại $c \in (a, b)$

Giả sử: $y = f(x)$ xác định trong (c, d) và khả vi tại $u_c = g(c)$

Khi đó hàm số hợp $y = f[g(x)]$ khả vi tại e và $[f[g(x)]]' = f'_u \,.\, g'(x)$

Thí dụ: $y = \sin u \;;\; y' = u' \,.\, \cos u$

$y = a^x \;;\; y' = a^x \,.\, \ln a$

3.2.2. Vi phân

Định nghĩa 1: Tích số $f'(x).\,\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số f(x) lấy tại điểm x.

Ký hiệu: $$df = f'(x) . \Delta x \quad (3\text{-}15)$$

Vậy: vi phân của hàm số bằng tích số của đạo hàm nhân với số gia đối số. Vì đối số là x nên ta xét hàm số f(x) = x; ta có:

$$dx = 1 . \Delta x \Leftrightarrow \Delta x = dx$$

Vậy từ công thức (3-15) ta có:

$$df = f'(x) . \Delta x = f'(x) . dx$$

Từ đó suy ra $$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad (3\text{-}16)$$

Vậy ta có định nghĩa khác như sau: *Đạo hàm bằng thương giữa vi phân của hàm số và vi phân của đối số.*

Kết quả quan trọng:

Cho f(u) là hàm số khả vi đối với u; u = g(x) là hàm số khả vi đối với x. Khi đó định lý đạo hàm hàm số hợp đã khẳng định f(g(x)) cũng khả vi đối với x và df = f'(x)dx (điều đó có nghĩa là: trong mọi trường hợp, f(x) là hàm số phụ thuộc x hoặc phụ thuộc qua biến trung gian u nào đó, ta luôn có vi phân của hàm số bằng tích của đạo hàm của hàm số và vi phân của đối số).

Chứng minh: Thật vậy: vì f(u) khả vi đối với u nên $df = f'_u . du$

Mặt khác; u = g(x) khả vi đối với x nên $du = g'_x . dx$

Vậy: $df = f'_u . g'_x dx = f'_x . dx$

(Hoặc áp dụng công thức đạo hàm hàm số hợp hoặc ta có thể viết:

$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} . \frac{du}{dx} = f'_u . g'_x = f'x$; vậy $\frac{df}{dx} = f'x \Rightarrow$ đpcm).

Ứng dụng của vi phân để tính đạo hàm hàm số ngược:

(*) Giả sử f(x) khả vi tại x và có đạo hàm $f'(x) \neq 0$. Giả sử f(x) có hàm số ngược x = g(y), khi đó g(y) cũng khả vi tại y = f(x) và đạo hàm $g'_y(y)$ thoả mãn hệ thức:

$$g'_y(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (3\text{-}17)$$

Áp dụng công thức trên ta có:

• Nếu $y = a^x$; nó có hàm số ngược $x = \log_a y$;

và $$y'_x = a^x \ln a \text{ suy ra } x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{\log_a e}{y}$$

Đặc biệt: y = lnx có đạo hàm $y' = \frac{1}{x}$.

• $y = \arcsin x$; $-1 < x < 1$; $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Ta có:

$y = \arcsin x$ suy ra $x = \sin y$ suy ra $x' = \cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$

(ở đây $\cos y > 0$ nên ta chỉ lấy dấu (+)); do đó: $x'_y = \sqrt{1-x^2}$

Vậy: $y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tương tự $y = \arccos x$; $-1 < x < 1$; $y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

và $y = \operatorname{arctg} x$; $y' = \frac{1}{1+x^2}$

• $y = x^{\mu}$; $x > 0$; $\mu \in R$; $y'_x = \mu\,.\,x^{\mu-1}$

• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$

Chứng minh: $\left(\frac{1}{g}.f\right)' = \left(\frac{1}{g}\right)'.f + \frac{1}{g}.f' = -\frac{g'}{g^2}f + \frac{1}{g}.f' = \frac{f'.g - g'f}{g^2}$

Áp dụng vào công thức: $y = \operatorname{tg} x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow y'_x = \frac{1}{1+x^2}$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản.

$y = c$	;	$y' = 0$
$y = x^{\mu}$; $\mu \in R$	;	$y' = \mu\,.\,x^{\mu-1}$
$y = \sin x$	;	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	;	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	;	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg} x$	;	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$y = a^x$	;	$y' = a^x . \ln a$
$y = e^x$	;	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	;	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	;	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \arcsin x$	;	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	;	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arctg} x$	;	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{arccotg} x$	;	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(*) Đạo hàm theo tham số:

Cho $x = f(t)$ là một hàm số khả vi đối với t; $t \in (\alpha, \beta)$ và $y = g(t)$ là một hàm số khả vi đối với t; $t \in (\alpha, \beta)$.

Khi đó, nếu hàm số ngược $t = f^{-1}(x)$ tồn tại thì ta suy ra tính khả vi của hàm số y đối với x. Hơn nữa: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

Thật vậy, ta có: $dy = g'(t)dt$; $dx = f'(t)dt$;

(Chia dy cho dx được kết quả trên).

Thí dụ 1: Cho $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$; $t \in (0, \dfrac{\pi}{2})$;

Khi đó: $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot gt$$

Thí dụ 2: Cho $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$; $t \in (0, 2\pi)$;

Khi đó: $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot g\frac{t}{2}$$

3.2.3. Đạo hàm một phía - Đạo hàm vô cùng

a) Đạo hàm một phía

- Đạo hàm trái: $f'_-(c) = \lim\limits_{x \to c^0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$

- Đạo hàm phải: $f'_+(c) = \lim\limits_{x \to c^{0+}} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Ta có kết quả : f(x) khả vi tại c $\Leftrightarrow f'_-(c) = f'_+(c)$

b) Đạo hàm vô cùng

Khi $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = +\infty$ hoặc $-\infty$ thì tại điểm x = c, f(x) có đạo hàm vô cùng.

3.2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

a) Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa: Cho hàm số f(x) xác định trong (a, b); f(x) gọi là khả vi n lần trong (a, b) nếu f khả vi n - 1 lần trong (a, b) và đạo hàm cấp (n - 1) của f cũng khả vi. Khi đó: Đạo hàm cấp n của một hàm số là đạo hàm của đạo hàm cấp (n - 1) của nó.

Ký hiệu: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}_{(x)} \right]$

Thí dụ 1: Hàm số $f(x) = x^k$; với k nguyên, dương có đạo hàm cấp n

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)\ldots(k-n+1) \cdot x^{k-n} \text{ nếu } k \geq n$$

và $$f^{(n)}(x) = 0 \text{ nếu } n > k$$

Thí dụ 2: Hàm số $f = e^x$ có $f^{(n)}(x) = e^x$

Thí dụ 3: $f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$; $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$

Thí dụ 4: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}; f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

b) Vi phân cấp cao

Định nghĩa: df gọi là vi phân cấp 1 của hàm số f.

Vi phân cấp 2 của hàm số f(x) tại một điểm nào đó (nếu có) là vi phân của vi phân df. Ký hiệu vi phân cấp 2: d(df) hay d^2f ;

Một cách tổng quát: Vi phân cấp n, ký hiệu $d^n f$ là vi phân của vi phân cấp (n - 1):

$$d^n f = d(d^{n-1} f)$$

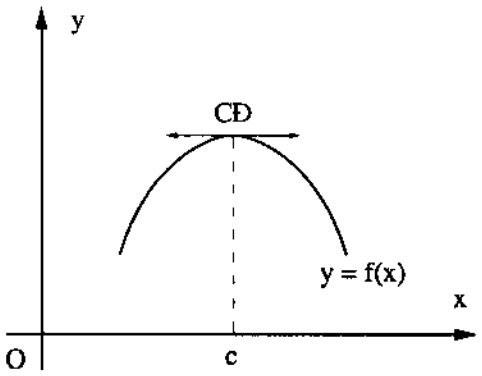
3.3. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI

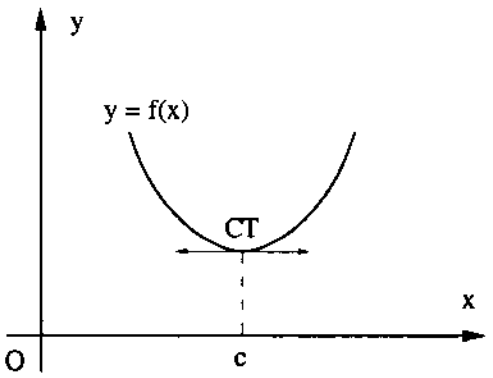
3.3.1. Các định lý về giá trị trung bình

* *Nhắc lại cực trị của hàm số:*

Cho hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên (a, b). Ta nói rằng f(x) đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x = c; c ∈ (a, b) nếu với x + Δx ∈ (a, b); ta có: f(c + Δx) - f(c) ≤ 0 (tương tự: ≥ 0).

Điểm x = c gọi là điểm cực trị của hàm số f(x).





Sau đây ta xét một số định lý về hàm khả vi.

a) Định lý Fermat

Cho hàm số y = f(x) xác định, liên tục trong (a, b). Nếu f(x) đạt cực đại tại c ∈(a, b) và nếu f(x) khả vi tại c thì f'(c) = 0.

b) Định lý Rolle

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trong [a, b] và khả vi trong (a, b). Giả sử f(a) = f(b); khi đó tồn tại c ∈ (a, b) sao cho f'(c) = 0.

Chú ý: 1) Giả thiết f(x) liên tục trên [a, b] là một giả thiết không thể thiếu được.

Thí dụ: Xét hàm số: $f(x) = \begin{cases} x & \text{với } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$

Rõ ràng hàm số này xác định trong [0, 1] nhưng không liên tục trong [0, 1] nên nó không khả vi; vì vậy không áp dụng định lý Rolle.

2) Giả thiết hàm số f(x) khả vi trên (a, b) cũng không thể thiếu được.

Thí dụ: Xét hàm số f(x) = | x | với x ∈ [-1, 1] chẳng hạn. Rõ ràng hàm số này liên tục trên [-1, 1]; hơn nữa f(-1) = f(1) = 1. Nhưng f(x) không khả vi trên (-1, 1) (Đạo hàm trái = -1 ≠ đạo hàm phải = 1) nên không thể áp dụng được kết quả định lý.

c) Định lý Lagrange (Định lý về số gia hữu hạn)

Cho hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên đoạn [a, b], khả vi trong (a, b). Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (3\text{-}18)$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (3\text{-}19)$$

Công thức này đóng vai trò quan trọng là: nó biểu thị một hiệu số thành một tích số.

d) Định lý Cauchy

Giả sử f(x), g(x) xác định, liên tục trên [a, b]; giả sử $g(a) \neq g(b)$ và giả sử f(x), g(x) cùng khả vi trong (a, b) và $g'(x) \neq 0$, với mọi $x \in (a, b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

e) Công thức Taylor

Cho f(x) liên tục trên [a, b]; khả vi đến (n + 1) lần trong (a, b). Giả sử cần tìm đa thức $P_n(x)$ có bậc không vượt quá n sao cho với $c \in (a, b)$ ta có:

$$f(x) = P_n(c);\ f'(c) = P'_{(n)}(c);\ \ldots,\ f^{(n)}(c) = P_n^{(n)}(c)$$

Khi đó đa thức $P_n(x)$ được xác định bởi:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \ldots + a_n(x - c)^n$$

Điều đó có nghĩa là chỉ cần xác định các hệ số $a_0, \ldots, a_n$ thoả mãn:

$$a_0 = f(c);\ a_1 = \frac{f'(c)}{1!};\ldots;\ a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Khi đó:

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

f) Mở rộng định lý Lagrange

Nếu f(x) xác định và có đạo hàm liên tục đến cấp n trong (a, b), có đạo hàm đến cấp (n + 1) lần trong (a, b), thì với bất kỳ $c \in (a, b)$, ta có:

$$f(x) = f'(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}$$

với $x < \bar{c} < c$.

Công thức này gọi là *khai triển Taylor hữu hạn của f(x) tại x = c.*

Đặc biệt, khi c = 0 thì:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

với θ thoả mãn 0 < 0 < 1.

g) Các kết quả quan trọng

1) $(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}x^k + ... + x^m$

Thay x bởi (-x) ta có:

$$(1 - x)^m = 1 - \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + (-1)^k \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}x^k + ... + (-1)^m x^m$$

2) $\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$

3) $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + ... +$

nếu x là VCB thì $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \theta(x^2)$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + \theta(x^2)$$

4) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

nếu x là VCB thì $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \theta(x^2)$

5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1}.\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x$

Khi x là VCB thì $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \theta(x^3)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

Khi x là VCB thì $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \theta(x^2)$

6) $f(x) = (1 + x)^\alpha$; $\alpha \in R$; $\alpha \neq 0$.

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n.\theta(x)$$

- Khi $\alpha = \frac{1}{2}$; $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2.\theta(x)$

- Khi $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2.\theta(x)$

3.3.2. Ứng dụng các định lý về giá trị trung bình

a) Khử dạng vô định

Định lý: (Quy tắc L' Hospital).

Giả sử các hàm số f(x); g(x) khả vi tại lân cận điểm a (với a hữu hạn), và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ ở lân cận a. Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

thì $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Chú ý:

1) Trường hợp $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$; định lý L' Hospital vẫn đúng.

2) Trường hợp $x \to \infty$; ta vẫn áp dụng được định lý L' Hospital.

3) Trường hợp f và g khả vi tại lân cận a trừ tại x = a; giả sử :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ và $g'(x) \neq 0$ tại lân cận a ;

Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Các thí dụ áp dụng quy tắc L' Hospital:

1) Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$ (dạng 0/0)

Áp dụng quy tắc L' Hospital 3 lần; được kết quả: L = 6.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$; ($\alpha > 0$); kết quả : $L = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4).\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$; dạng $(0 . \infty)$... Kết quả = - 16/π

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{2x}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

Trong trường hợp này, định lý L' Hospital không sử dụng được.

Thật vậy: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{2} = \lim\limits_{x\to\infty}\cos^2\dfrac{x}{2}$

Khi $x \to \infty$ thì $\cos\dfrac{x}{2}$ không xác định, do vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(2x)'}$

Khi đó ta phải tìm giới hạn này theo cách sau:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

5) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}$; (dạng $\dfrac{0}{0}$)

Dùng khai triển hữu hạn ta có: khi $x \to 0$ thì :

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + 0(x^3)$$

$$x(1-\cos x) = \frac{1}{2}x^3 + 0(x^3)$$

Vậy $L = -\dfrac{1}{3}$

6) Tìm $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; (dạng 1^∞)

Đặt $x = 1 + t$; $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}(1+t) = \dfrac{-\cos\dfrac{\pi}{2}t}{\sin\dfrac{\pi}{2}t}$. Khi $x \to 1$ thì $t \to 0$.

Vậy $A = (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = (1-t)^{-\cos\frac{\pi}{2}t/\sin\frac{\pi}{2}t}$

Lôgarit tự nhiên 2 vế ta có:

$$\ln A = -\frac{\cos\dfrac{\pi}{2}t}{\sin\dfrac{\pi}{2}t}\ln(1-t) = -\frac{1+0(t)}{\dfrac{\pi}{2}t+0(t)}[-t+0(t)]$$

$$= \frac{2}{\pi}[1+0(t)][1+0(t)]\cdot\frac{1}{1+0(t)}.$$

Khi đó $\lim\limits_{t\to 0}\ln A = \dfrac{2}{\pi}$

Vậy $\lim\limits_{t\to 0} A = \lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{2/\pi}$.

b) Khảo sát hàm số

Việc áp dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số dựa vào các định lý sau:

Định lý 1: Cho f là một hàm số xác định, liên tục trên [a, b]. Khi đó:

i) Điều kiện cần và đủ để f(x) tăng (giảm) trong [a, b] là:

$$f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) \leq 0) \text{ với } \forall\, x \in (a, b).$$

ii) Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với $\forall\, x \in (a, b)$ và nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) tại ít nhất một điểm x thì $f(b) > f(a)$; ($f(b) < f(a)$).

Định lý 2: Cho hàm số y = f(x) xác định, liên tục và khả vi với $\forall\, x \in [a,b]$. Giả sử $c \in (a, b)$ (có thể tại x = c hàm số không khả vi). Khi đó:

i) Nếu khi x qua c mà f'(x) đổi dấu từ (+) sang (-) thì f(x) đạt cực đại tại x = c.

ii) Nếu đạo hàm đổi dấu từ (-) sang (+) khi x qua x_0 thì f(x) đạt cực tiểu tại x = c.

iii) Nếu đạo hàm không đổi dấu khi x qua x = c thì f(x) không đạt cực trị tại x = c; (hàm số không đổi).

* *Hàm số lồi:*

Định nghĩa: Hàm số y = f(x) xác định trên khoảng I gọi là lồi nếu với $\forall\, a, b \in I$ và với $\forall\, t \in [0, 1]$; luôn có:

$$t\, f(a) + (1 - t)\, f(b) > f\,[ta + (1 - t)b]. \qquad (*)$$

Bất đẳng thức này gọi là bất đẳng thức lồi.

Đồ thị của hàm số lồi luôn nằm trên tiếp tuyến của nó.

Định nghĩa tương tự cho hàm số không lồi (lõm).

Thí dụ: Xét hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{1}{2}x^2}$;

$f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ với $\forall\, x < 0$; $f'(x) < 0$ với $\forall x > 0$.

Do đó tại x = 0, hàm số có cực đại.

Hơn nữa, $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2 - 1)$

$f''(1) = f''(-1) = 0$; $f''(x) > 0$ với $\forall x < -1$ hoặc $x > 1$.

$f''(x) < 0$ với $-1 < x < 1$.

Do đó tại $x = \pm 1$, hàm số có điểm uốn.

* *Các bất đẳng thức lồi:*

i) Bất đẳng thức Jensen.

Cho f là một hàm số lồi trên I = (a, b); khi đó, với $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ và với các số thực λ_i; $i = \overline{1,n}$; $\lambda_i \in [0, 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$; ta luôn có:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

ii) Bất đẳng thức về số trung bình.

Cho $a_i > 0$; $i = \overline{1,n}$. Đặt $C = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$; $N = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$. Khi đó $N \le C$ (Tức là: Trung bình nhân các số không âm, không vượt quá trung bình cộng của chúng).

iii) Bất đẳng thức Holder và Minkowski

• Cho $p > 1$, $q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó: $xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$

• Nếu: $x_i, y_i \in \mathbb{R}$; $i = \overline{1,n}$. Đặt $a = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$; $b = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$ với $a \cdot b \ne 0$; ta có:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

• Nếu p = q = 2; bất đẳng thức gọi là bất đẳng thức Cauchy - Swarsz.

$$(\sum |x_k + y_k|^p)^{1/p} \le (\sum |x_k|^p)^{1/p} + (\sum |y_k|^p)^{1/p}$$

* *Sơ đồ khảo sát hàm số:*

Việc khảo sát hàm số thường theo trình tự dưới đây:

1. Miền xác định của f.
2. Chiều biến thiên: tìm khoảng tăng, giảm của hàm số.
3. Cực trị (nếu có).
4. Tính lồi, lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có).
5. Tiềm cận (nếu có).
6. Bảng biến thiên.
7. Vẽ đồ thị.

Sau đây, lấy một thí dụ cốt để minh hoạ các bước khảo sát: Xét hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

(Hàm số chỉ xác định khi $\frac{x^3}{x-1} \geq 0$ nghĩa là khi $\frac{x}{x-1} \geq 0$; tức là $x \leq 0$ hoặc $x > 1$.

1. Miền xác định D_f là $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

2. Muốn xét chiều biến thiên của hàm số, phải tính f' (x). Ta có:

$$f'(x) = (x - \frac{3}{2})\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$$

$f'(x) = 0$ khi $x = 0$ và $x = \frac{3}{2}$

$f'(x)$ không xác định khi $0 < x \leq 1$.

Sau đây là bảng dấu của đạo hàm $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	3/2	$+\infty$
f'(x)	-		-	0	+

Từ bảng dấu của f' suy ra: f(x) giảm khi $x < 0$ hoặc $1 < x < \frac{3}{2}$; f(x) tăng khi $x > 3/2$

3. Cực trị:

Tại $x = \frac{3}{2}$, đạo hàm f' đổi dấu từ -1 sang +, do đó $x = \frac{3}{2}$ là điểm cực tiểu, $f(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; lưu ý: điểm $x = 0$ không phải là điểm cực trị.

4. Muốn xét tính lồi, lõm; ta tính f'':

$$f''(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{(x-1)^3}$$

f'' cùng dấu với $\frac{x}{x-1}$ nên $f'' \geq 0$ trong miền xác định, do đó f(x) là hàm số lồi.

5. $x = 1$ là điểm hàm số không xác định, do đó đồ thị có một tiệm cận đứng có phương trình $x = 1$. Muốn tìm tiệm cận xiên ta viết f(x) dưới dạng:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}} = |x|\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dùng công thức khai triển Taylor của $(1 + x)^\alpha$ khai triển Taylor có:

$$\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \cdot o(x)$$

Do đó có thể viết:

$$f(x) = |x| + \frac{|x|}{2(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{|x|}{(x-1)^2} + \frac{|x|}{(x-1)^2}.o(x)$$

Từ biểu thức trên suy ra:

$$x \to +\infty, \text{ có } f(x) \sim x + \frac{x}{2(x-1)} \sim x + \frac{1}{2}$$

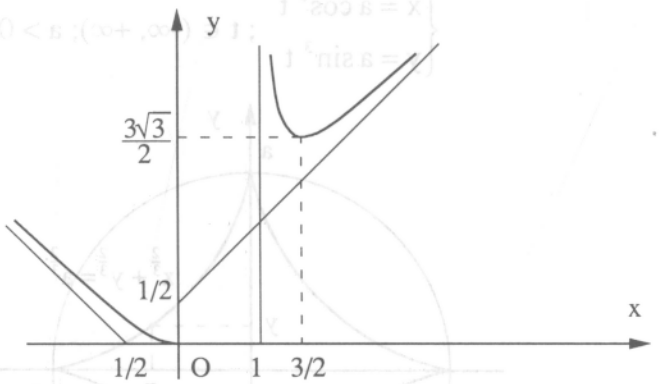
$$x \to -\infty, \text{ có } f(x) \sim -x - \frac{x}{2(x-1)} \sim -x - \frac{1}{2}$$

Với f(x) có hai tiệm cận xiên:

$$y = x + \frac{1}{2} \text{ khi } x \to +\infty; \quad y = -x - \frac{1}{2} \text{ khi } x \to -\infty,$$

6. Từ những kết quả trên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$				$-$	0	$+$	
y''		$+$				$+$		$+$	
y	$-x-\frac{1}{2}$	↘	0		$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$x+\frac{1}{2}$



c) Đường cong cho dưới dạng tham số

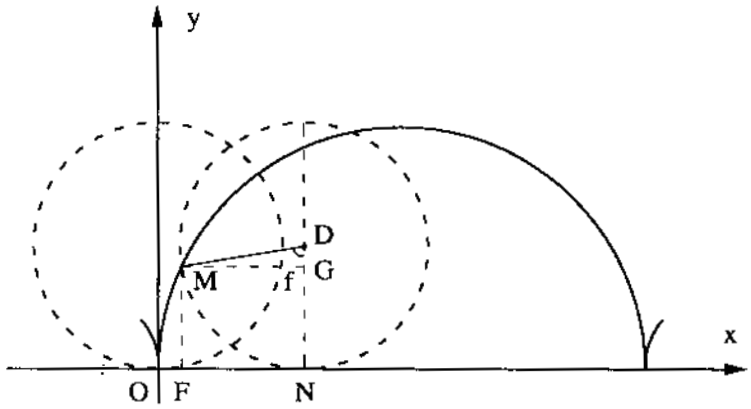
• *Phương trình tham số của đường cong:*

Cho hệ 2 phương trình: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$; $t \in (\alpha, \beta)$

gọi là hệ phương trình tham số của đường cong (C).

Thí dụ: Đường xicloit:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = b(1 - \cos t) \end{cases} ; t \in [0, 2\pi]$$



• *Khảo sát đường cong dưới dạng tham số:*

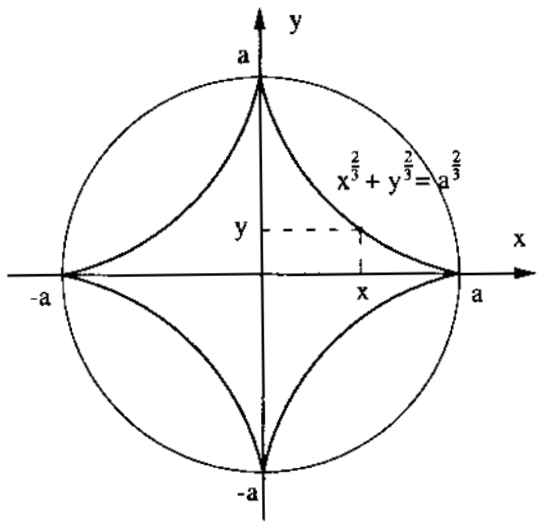
1. Tìm miền xác định, các điểm gián đoạn của các hàm số x = x(t), y = y(t). Nhận xét các tính chất chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).

2. Xét chiều biến thiên của x, y theo t bằng cách xét dấu các đạo hàm x'(t), y'(t)

3. Tìm các tiệm cận của đường cong.

Thí dụ 1: Khảo sát và vẽ đường cong cho bởi:

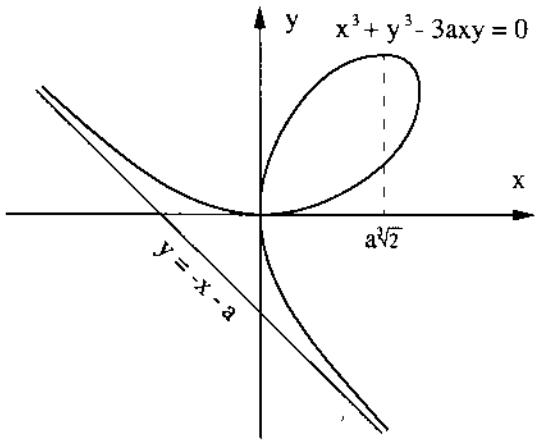
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} ; t \in (-\infty, +\infty); a > 0.$$



Được gọi là đường cong axtroit.

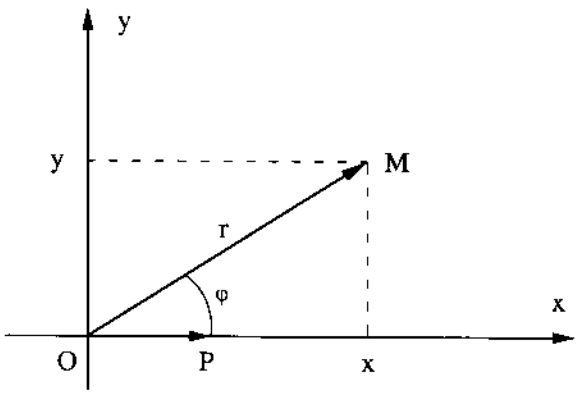
Thí dụ 2: Khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;\ a > 0 \text{ (gọi là lá Đềcác)}$$



d) Đường cong trong hệ toạ độ cực

• *Hệ toạ độ cực:* Trong mặt phẳng chọn một điểm O cố định; gọi là cực và một vectơ đơn vị $\overrightarrow{OP}$; tia mang vectơ $\overrightarrow{OP}$ gọi là trục cực. Hệ toạ độ xác định bởi trục cực và cực gọi là hệ toạ độ cực.

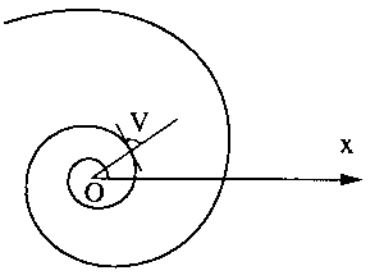


$\varphi = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})$ và $r = |\overrightarrow{OM}|$

φ được gọi là góc cực; r gọi là bán kính cực.

Mỗi điểm M trong mặt phẳng ứng với cặp số (r, φ).

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi ;\ r \ge 0$$

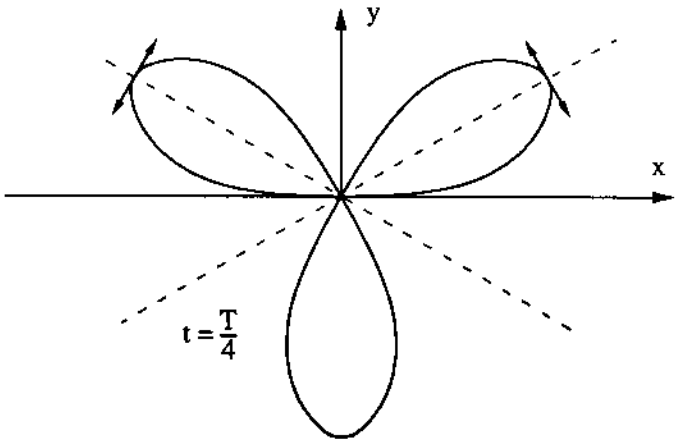


Ngược lại, ta có: $r^2 = x^2 + y^2$ và $tg\varphi = y/x$

Thí dụ:

a) Đường xoắn ốc lôgarit có phương trình: $r = ae^{b\varphi}$; $a > 0$; $b > 0$

b) Đường hoa hồng 3 cánh: $r = a\sin 3\varphi$; $a > 0$



Chú ý: Chọn φ sao cho $\sin\varphi$ cùng dấu với y.

3.4. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.4.1. Tích phân bất định - các ví dụ đơn giản

Đặt vấn đề: Biết f(x) khả vi trên (a, b) thì có đạo hàm trong (a, b) và nếu cho một hàm số khả vi thì ta có thể tính được đạo hàm f'(x) của nó.

Đặt vấn đề ngược lại, nếu cho trước một hàm số f(x) xác định trên (a, b), liệu có tồn tại hàm số F(x) khả vi trên (a, b) và có đạo hàm F'(x) = f(x) hay không? (dF(x) = f(x)dx); và nếu có F(x) thì cách tìm nó như thế nào?

a) Định nghĩa nguyên hàm

Giả sử f(x) xác định trên (a, b). Ta nói F(x) xác định trong (a, b) là nguyên hàm của hàm số f(x) nếu F(x) khả vi trong (a, b) và F'(x) = f(x).

$$\Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \qquad \text{với } \forall x \in (a, b)$$

Thí dụ: $\dfrac{x^4}{4}$ là nguyên hàm của hàm số x^3 vì F'(x) = f(x)

Định lý 1: Với mọi hằng số C; F(x) + C là nguyên hàm của hàm số f(x), $\forall x \in (a, b)$ và ngược lại.

Định lý 2: $\int f(x)dx = F(x) + C$

b) Các tính chất đơn giản

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$$

$$\int (Af(x) + Bg(x)dx = AF(x) + BG(x) + C$$

Bảng tích phân các hàm số thông dụng:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arccotg} x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

3.4.2. Cách tính tích phân bất định

a) Phép đổi biến

Giả sử cần tính tích phân $\int f(x)dx$;

Thực hiện phép đổi biến $t = W(x)$. Khi đó: $f(x)\,dx = g[W(x)].\,W'(x)dx$.

Giả sử $\int g(t)dt = G(t) + C$; tìm được nguyên hàm $G(t)$; thay $t = W(x)$:

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G[W(x)] + C$$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp, thực hiện đổi biến: $x = \varphi(t) \Rightarrow f[\varphi(t)].\,\varphi'(t)dt = g(t)dt$.

Khi đó biểu thức dưới dấu tích phân $f(x)dx$ trở thành $g(t)\,dt$.

• *Phương pháp đổi biến Euler:* $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$

Thí dụ: Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Từ $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x \Rightarrow \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = dt - dx$

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx = dt$$

$$\frac{\sqrt{x^2+\alpha}+x}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx = dt \text{ ; vì } \sqrt{x^2+\alpha}+x = t$$

nên $$\frac{tdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = dt \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{dt}{t}$$

Vậy: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C$

b) Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $f(x) = u$; $g(x) = v$ là 2 hàm số có đạo hàm $u' = f'(x)$ và $v' = g'(x)$ là 2 hàm số liên tục.

Khi đó: $\int udv = uv - \int vdu$.

Thật vậy $d(uv) = vdu + udv$

Ta có $udv = d(uv) - vdu$; vì nguyên hàm của $d(uv)$ là uv nên:

$\int udv = uv - \int vdu$

Chú ý:

- Khi tính $\int f(x)dx$, nên tách $f(x)dx$ như thế nào để $f(x)dx$ có dạng udv.

- Tính $\int vdu$ phải dễ hơn $\int udv$.

+ Hàm u dễ lấy đạo hàm.

+ Hàm v dễ lấy tích phân.

- Các loại tích phần thường dùng quy tắc này:

$$\int x^k \ln^m x dx; \int x^k \sin ax dx; \int x^k \cos ax dx; \int x^k e^{ax} dx; ...$$

Thí dụ:

1) $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C$

2) $\int \text{arctg}x dx = x.\text{arctg}x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

3) $\int e^{ax}\cos bx dx = I$;

$\int e^{ax}\sin bx dx = J$

Đặt $\qquad dv = e^{ax}dx \rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax}$

và $\qquad u = \sin bx;\ u = \cos bx \rightarrow du = b\cos bx dx;\ du = -b\sin bx dx.$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx;$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$$

Tức là
$$\begin{cases} I - \frac{b}{a}J = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx \\ \frac{b}{a}I + J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

Coi I, J là ẩn, từ hệ hai phương trình trên suy ra:

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$$

$$J = \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

Chú ý:

1) Trong nhiều trường hợp cụ thể, tuy chỉ cần tính I nhưng qua tính tích phân từng phần ở trên, ta lại gặp J. Khi đó, lại tiếp tục dùng tích phân từng phần để tính J nhưng cách đặt u và dv phải *nhất quán* với cách đặt ban đầu.

Ở đây, để tính J, nhất thiết phải đặt:

$$\left.\begin{array}{l} dv = e^{ax}dx \Rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax} \\ u = \sin bx \Rightarrow du = b\cos bx \end{array}\right\} \rightarrow \text{kết quả : I}$$

2) Nhận xét: Nếu để ý rằng đạo hàm các biểu thức $e^{ax}\cos bx$ hoặc $e^{ax}\sin bx$ cũng lại cho dạng $e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$ thì ta viết:

$$\int e^{ax}\cos bx dx = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) + C$$

trong đó A, B là 2 hằng số, ta tính được:

$$A = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ và } B = \frac{b}{a^2+b^2}$$

c) Tích phân các phân thức hữu tỷ

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m}{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}$$

với $a_i, b_i \in R$ và $a_n, b_m \neq 0$.

- Nếu $m < n$ thì $R(x)$ được gọi là một phân thức thực sự.

- Nếu $m \geq n$ thì $R(x)$ được gọi là phân thức không thực sự.

Nếu $R(x)$ không là phân thức thực sự thì bằng cách chia tử cho mẫu bao giờ cũng có thể biểu diễn $R(x)$ dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức thực sự. Tính tích phân các đa thức thì quá dễ, do vậy ta chỉ cần tìm cách tính tích phân các phân thức thực sự và trước hết ta tính các tích phân sau:

i) $\int \frac{A}{x-a}dx$

ii) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$

iii) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

iv) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$

trong đó $A, M, N, a, p, q \in R$; k, m nguyên dương, ngoài ra ta giả thiết $q - p^2/4 > 0$.

Trước hết, ta thấy rằng hai dạng i) và ii) đã quen thuộc:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}.\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \qquad (k \neq 1)$$

Muốn tính các tích phân dạng iii) và iv), chúng ta biểu diễn $x^2 + px + q$ dưới dạng:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\,.\,\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$$

$$= (x + p/2)^2 + (q - p^2/4)$$

Theo giả thiết, $q - p^2/4 > 0$ nên ta đặt $a^2 = q - p^2/4$, với:

$$a = +\sqrt{q - p^2/4}$$

Bây giờ thực hiện phép đổi biến:

$$x + p/2 = t\ ;\ dx = dt$$

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2,\ Mx + N = Mt + (N - Mp/2)$$

Khi đó, tích phân dạng iii) sẽ là:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mt + (N - Mp/2)}{t^2+a^2}dt$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + (N - Mp/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}(N - Mp/2)\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

Cuối cùng trở về biến x ta được:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Cùng với phép đổi biến như trên, tích phân dạng iv) sẽ là:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^m} = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Có thể tính tích phân thứ nhất của vế phải bằng cách đổi biến $t^2 + a^2 = u$; $2tdt = du$ và có:

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1}.\frac{1}{u^m-1} + C = -\frac{1}{m-1}.\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + C.$$

d) Tích phân các biểu thức lượng giác

Giả sử cần tính $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$ trong đó R(u, v) (*)

là một biểu thức hữu tỷ đối với x. Khi đó thực hiện phép đổi biến:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};\ -\pi < x < \pi \text{ và áp dụng: } \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \operatorname{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Khi đó: $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{(1+t^2)}$

Như vậy biểu thức dưới dấu tích phân lại là biểu thức hữu tỷ đối với t.

Thí dụ: $I = \frac{1}{2}\int \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}dx$; $(0 < a < 1;\ -\pi < x < \pi)$

Đổi biến $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$

Khi đó: $I = (1-a^2)\int \frac{1}{1+a^2-2a\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}+a^2}.\frac{t}{(1+t^2)}dt$

$$= (1-a^2)\int \frac{dt}{1+t^2-2a(1-t^2)+a^2(1+t^2)} = (1-a^2)\int \frac{dt}{(1-a)^2+t^2(1+a)^2}$$

$$= \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{1+a}{1-a}\right)t\right] + C$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

e) Tích phân các biểu thức dạng $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$ và $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm \alpha^2})dx$

* $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2})dx$ đổi biến $x = \alpha tgt$

* $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$ đổi biến $x = \alpha$ sint hoặc $x = \alpha.\cos t$

* $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$ đổi biến $x = \dfrac{\alpha}{\cos t}$

3.5. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

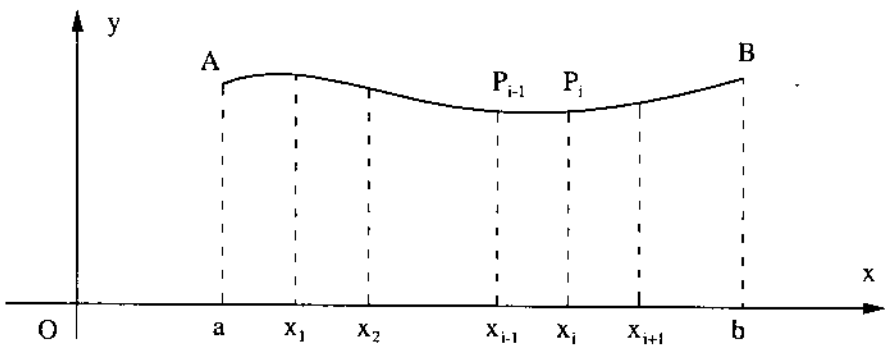
3.5.1. Định nghĩa

a) Bài toán tính diện tích hình thang cong

Cho hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên đoạn [a, b]. Giả sử f(x) > 0 trên [a, b].

Xét hình thang cong AabB: là hình giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x) trên [a, b]; các đường thẳng x = a; x = b; và y = 0 (trục hoành Ox).

Ta đi tìm diện tích S của hình thang cong AabB?



Ta thực hiện các bước:

+ Chia đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$

(gọi là phân hoạch P đoạn [a, b]).

+ Từ các điểm chia x_i ($i = \overline{1, n-1}$); dựng các đường thẳng $x = x_i$; như vậy ta đã chia hình thang cong AabB thành n hình thang cong nhỏ $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$ ($i = \overline{1, n}$); mỗi hình thang cong nhỏ đó có đáy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = \overline{1, n}$). Theo giả thiết, hàm số f(x) liên tục trên [a, b] nên cũng liên tục trên $[x_{i-1}, x_i]$, ($i = \overline{1, n}$), do đó đạt được giá trị nhỏ nhất m_i (m_i = min f(x)) và giá trị lớn nhất M_i(M_i = max f(x)), theo định lý.

Do đó: $m_i \le f(x) \le M_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_i$

$m_i\Delta x_i \le f(x)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i\ ,\ x_{i-1} \le x \le x_i$

Về mặt hình học; tích số $m_i\Delta x_i$, $M_i\Delta x_i$ chính là diện tích của hình chữ nhật "trong" và "ngoài" có chiều rộng là Δx_i và chiều dài tương ứng là m_i và M_i, hình thang cong nhỏ thứ i $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$ luôn bị các hình chữ nhật trong và hình chữ nhật ngoài kẹp.

Gọi lần lượt S_* và S^* là tổng các diện tích của các hình chữ nhật trong và hình chữ nhật ngoài, để cho gọn, gọi S. là tổng trong và S^* là tổng ngoài, luôn có bất đẳng thức:

$$S_* \le S^*\ ;\ S_* = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\ ;\ S^* = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Theo kết quả về sự hội tụ của dãy đơn điệu ta kết luận rằng khi m tăng vô hạn và mọi $\Delta x_i \to 0$, có:

$$\lim_{n\to\infty} S_*^{(n)} = \underline{S} \text{ và } \lim_{n\to\infty} S^*_{(n)} = \overline{S}$$

Ta có $\underline{S} = \overline{S}$ và ta nói rằng hình thang cong AabB có diện tích và ta định nghĩa diện tích S của hình thang cong chính là giới hạn chung đó:

$$S = \underline{S} = \overline{S}$$

Bây giờ, có thể viết:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Mặt khác, nếu gọi $\lambda_i = \Delta x_i$ và $\lambda = \max(\Delta x_i)$ thì các hệ thức có thể viết dưới dạng:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \underline{S} \text{ và } \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \overline{S}$$

Do vậy, nếu hình thang cong AabB có diện tích, nghĩa là nếu có $\underline{S} = \overline{S} = S$ thì từ bất đẳng thức kép và từ định lý chuyển qua giới hạn các bất đẳng thức kép, ta cũng có:

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

b) Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm số f(x) xác định và bị chặn trong khoảng đóng [a, b], chia [a, b] thành những khoảng nhỏ bởi một phân điểm P, trong mỗi khoảng nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm ξ_i tuỳ ý:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

và lập tổng: $\delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = \overline{1,n})$

Dĩ nhiên tổng δ định nghĩa theo trên là một số xác định; số đó *phụ thuộc* số khoảng nhỏ n, *phụ thuộc* ξ_i, chọn tuỳ ý trong $[x_{i-1}, x_i]$ và *phụ thuộc* cách chọn phân điểm P.

Nếu khi n tăng vô hạn ($n \to \infty$) sao cho max $(\lambda_i) = \lambda$, $\lambda \to 0$; với $\lambda_i = \Delta x_i$; $1 \le i \le n$

δ có giới hạn (hữu hạn) I, với giới hạn I này *không phụ thuộc* cách chọn điểm ξ_i, cũng *không phụ thuộc* cách chọn phân điểm P.

$$\lim_{\lambda \to 0} \delta = I \quad (\text{khi } n \to \infty)$$

thì I được gọi là *tích phân xác định* của hàm số f(x) lấy trên khoảng đóng [a, b] và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Khi đó ta cũng nói rằng hàm số f(x) *khả tích* trên [a, b], [a, b] là *khoảng lấy* tích phân, a là *cận dưới*, b là *cận trên* của tích phân, x là *biến số* lấy tích phân, f(x) là *hàm số* lấy tích phân và f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân.

3.5.2. Điều kiện khả tích

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để hàm số bị chặn f(x) khả tích trên [a, b] là: $\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$.

Định lý 2: Nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì nó khả tích trên [a, b].

Định lý 3: Nếu f(x) bị chặn trên đoạn [a, b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trong [a, b] thì f(x) khả tích trên [a, b].

Định lý 4: Nếu f(x) bị chặn và đơn điệu trong [a, b] thì khả tích trong [a,b].

• ***Một vài thí dụ:***

1) Tính $\int_0^1 x^2 dx$

Vì $f(x) = x^2$ liên tục trong [0, 1] nên f(x) khả tích, do đó:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i$$

Theo điều kiện khả tích có thể chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý và ở đây ta chọn $\xi_i = i.\frac{1}{n}$;

$\Delta x_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ (chia đoạn [0, 1] thành n khoảng nhỏ bằng nhau), đó $\max\Delta x_i \to 0$ với $n \to \infty$, do đó:

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(i.\frac{1}{n}\right)^2.\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

Vậy: $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$.

2) Tính $\int_a^b \sin x dx$

Vì f(x) = sinx liên tục trong [a, b], nên f(x) khả tích trên [a, b], do đó có thể chọn phân điểm sao cho:

$$x_0 = a, ..., x_i = a + ih, \text{ với } h = \frac{b-a}{n};\quad i = \overline{1,n}.$$

Khi đó max $(\Delta x_i) = \Delta x_i = h$.

Nếu chọn $\xi_i = a + (i - 1)h$; $i = \overline{1,n}$ thì theo định nghĩa có:

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{n\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\sin\xi_i)h$$

Đặt $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}(\sin\xi_i)h$, có:

$$\sigma_n = [\sin a + \sin(a + h) + \sin(a + 2h) + ... + \sin(a + (n - 1)h)]h$$

Nhân cả hai vế đẳng thức trên với $2\sin\frac{h}{2}$ và dùng công thức lượng giác:

2sinusinv = cos (u - v) - cos (u + v), suy ra:

$$\sigma_n = \frac{\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left[a + \left(n - \frac{1}{2}\right)h\right]}{2\sin\frac{h}{2}}.h$$

$$= h.\frac{\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b - \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} \quad (\text{vì } a + nh = b)$$

Cuối cùng, thế giá trị σ_n vào biểu thức cần tìm giới hạn ta được:

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{h\to 0}\frac{h/2}{\sin(h/2)}\left[\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b - \frac{h}{2}\right)\right]$$

Vậy: $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$

Chú ý:

(1) Qua hai thí dụ, ta thấy rằng nếu chỉ dùng định nghĩa để tính tích phân thì khối lượng tính toán cũng như cách tính toán rất cồng kềnh và đa dạng vì không có một công thức đủ tổng quát để gợi ý cách tính các giới hạn, chính mục sau sẽ cải thiện tình hình này.

(2) Trở lại thí dụ trên, ta dễ dàng thấy:

Nếu $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ thì $\int_0^1 t^2dt = \int_0^1 y^2dy = \int_0^1 u^2du = \frac{1}{3}$

Cũng vậy:

Nếu $\int_a^b \sin xdx = \cos a - \cos b$ thì $\int_a^b \sin tdt = \int_a^b \sin vdv = \ldots = \int_a^b \sin ydy = \cos a - \cos b$

Từ hai thí dụ đó có thể kết luận:

$\int_a^b f(x)dx$ (nếu có) thì chỉ phụ thuộc vào các cận a, b và hàm số lấy tích phân f(x), không phụ thuộc biến số tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(u)du$$

(3) Khi định nghĩa tích phân ta xét hàm số f(x) trong khoảng đóng [a, b], tức là ta đã giả thiết a < b. Bây giờ nếu b < a ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

và khi b = a ta định nghĩa:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3.5.3. Các tính chất của tích phân xác định

Để khỏi phải nhắc lại nhiều lần, trong các mệnh đề dưới đây khi nói đến tích phân $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ chúng ta đều hiểu là f(x) được giả thiết khả tích trên [α, β].

• ***Tính chất 1:***

(i) Có thể đưa thừa số là hằng số ra ngoài dấu tích phân:

$$\int_a^b C.f(x)dx = C.\int_a^b f(x)dx$$

Đặc biệt $$\int_a^b C.dx = C\int_a^b 1.dx = C(b - a)$$

(ii) Tích phân của tổng hai hàm số bằng tổng hai tích phân:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

• ***Tính chất 2:***

Cho 3 khoảng đóng [a, b], [a, c] và [c, b], nếu f(x) khả tích trên khoảng có độ dài dài nhất thì cũng khả tích trên hai khoảng còn lại và:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

• ***Tính chất 3:*** (Trong tính chất này giả thiết: $a < b$)

(i) Nếu $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

(ii) Nếu $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(iii) Nếu f(x) khả tích trên [a, b] $\Rightarrow$ |f(x)| khả tích trên [a, b] và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(iv) Nếu $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b] \Rightarrow$

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

• ***Tính chất 4:***

Giả sử f(x) khả tích trên [a, b], $(a < b)$ và giả sử $m \leq f(x) \leq M$, với $x \in [a, b]$, khi đó tồn tại μ:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a), m \leq \mu \leq M$$

Đặc biệt nếu f(x) liên tục trong [a, b], tồn tại c; $c \in [a, b]$, thì:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

3.5.4. Cách tính tích phân xác định

Nếu f(x) khả tích trên [a, b], f(x) cũng khả tích trong [a, x], $x \in [a, b]$ (tính chất 2), nếu bây giờ thay cận trên b bởi biến x thì ta có tích phân:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt\,,\ \ x \in [a, b]$$

$\Phi(x)$ là một hàm phụ thuộc cận trên x, và để phân biệt cận và biến số tích phân ta viết biến số tích phân là t (xem nhận xét 2). Hàm $\Phi(x)$ có các tính chất sau:

Định lý 1:

(1) Nếu f(t) khả tích trên [a, b] thì $\Phi(x)$ liên tục đối với $x \in [a, b]$.

(2) Nếu f(x) liên tục tại t = x thì $\Phi(x)$ có đạo hàm tại x và: $\Phi'(x) = f(x)$

Định lý 2: (Liên hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm).

Nếu f(x) liên tục trong khoảng đóng [a, b] và nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) (luôn tồn tại nguyên hàm này, theo nhận xét trên) trong khoảng đó thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Công thức này được gọi là công thức Newton - Leibnitz và cũng thường được viết dưới dạng sau đây:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Thí dụ:

1) Trở lại hai thí dụ trên dễ dàng thấy rằng:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$$

2) $\displaystyle\int_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Bigg|_a^b = \frac{1}{\mu+1}\,(b^{\mu+1} - a^{\mu+1})\ \ (\mu \neq -1)$

3) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a\ \ (a > 0, b > 0)$

4) Dùng tích phân xác định, tìm giới hạn:

$$I = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right]$$

Gọi $I_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ... + \frac{n}{n^2+n^2}$ thì có thể viết I_n dưới dạng:

$$I_n = \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + ... + \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + ... + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

Xét hàm $f(x) = 1/(1 + x^2)$, hàm số này liên tục trong [0, 1], do đó khả tích trên [0, 1]; dùng phân điểm đều $\Delta x_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ và các điểm chia:

$$x_0 = 0\ ;\ x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_i = \frac{i}{n},\ i = \overline{0,n}\ ;$$

chọn điểm $\xi_i = x_i$, có tổng tích phân chính là I_n, do đó:

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

3.5.5. Phép đổi biến trong tích phân xác định

Tương tự tích phân bất định, trong tích phân xác định, người ta cũng dùng các phép đổi biến thích hợp để tính tích phân.

Định lý 1: (Đổi biến $x = \varphi(t)$)

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, với f liên tục trong [a, b].

Giả sử thực hiện phép đổi biến $x = \varphi(t)$ thoả mãn:

(1) $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trong $[\alpha, \beta]$.

(2) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$.

(3) Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trong $[A, B] \supset [a, b]$ và f(x) liên tục trên [A, B]. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Thí dụ: Tính $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

Đặt x = 2sint; có $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

$2\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$; $2\sin\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$; dx = 2costdt.

Các điều kiện của định lý đều thoả mãn, do đó:

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt = 2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi$$

Định lý 2: (Đổi biến t = φ(x))

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, với f(x) liên tục trong [a, b].

Nếu phép đổi biến t = φ(x) thoả mãn:

(1) φ(x) biến thiên đơn điệu trên [a, b] và có đạo hàm liên tục.

(2) f(x)dx trở thành g(t)dt, trong đó g(t) là một hàm số liên tục trong khoảng đóng [φ(a), φ(b)] thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$$

Thí dụ: Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}dx$

Đổi biến t = sinx, hàm số t = sinx đơn điệu trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $$I = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \text{arctg}t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3.5.6. Phép lấy tích phân từng phần

Giả sử u(x) và v(x) là những hàm số có đạo hàm liên tục trong [a, b]. Khi đó:

$$d(uv) = vdu + udv$$

Lấy tích phân đẳng thức này trên [a, b] được :

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

Vì $\int_a^b d(uv) = (u.v)\Big|_a^b$ nên :

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Công thức được gọi là công thức tích phân từng phần.

Thí dụ: Tính $I = \int_1^e \ln x dx$

Ta có: $I = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - 1 . \ln 1 - (e - 1) = 1$

3.5.7. Một số ứng dụng của tích phân xác định

a) Tính diện tích hình phẳng

• Xét trong hệ Oxy: hình phẳng được giới hạn bởi các đường x = a, x = b; y = 0; y = f(x); với f(x) liên tục trên [a, b]: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Nếu $f(x) \le 0$ với $\forall x \in [a, b]$ thì $S = -\int_a^b f(x)dx$

Kết hợp hai công thức trên: $S = \int_a^b |f(x)|dx$

• Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi: x = a; x = b; $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ với $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là hai hàm số liên tục trên [a, b] thì:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$

• Nếu $x = \varphi(y)$ với $\varphi(y)$ liên tục trên [c, d] thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = c; y = d ; x = 0 và đồ thị hàm số $x = \varphi(y)$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_c^d |\varphi(y)|dy$$

• Đường cong cho dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ thì diện tích S cũng được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x)|dx$; y = f(x) được thay bởi $y = \psi(t)$; dx được thay bởi $\varphi'(t)dt$, 2 cận a và b được thay bởi 2 cận mới t_1, t_2 lần lượt là các nghiệm của các phương trình:

$$\begin{cases} a = \varphi(t_1) \\ b = \varphi(t_2) \end{cases}$$

tức là $S = \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt$ trong đó $\varphi(t)$; $\psi(t)$ và $\varphi'(t)$ là các hàm liên tục trong $[t_1; t_2]$.

• Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ cực. Để tính diện tích của hình quạt cong giới hạn bởi 2 tia $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$; $\alpha < \beta$ và cung AB của đường $r = r(\varphi)$; trong đó $r(\varphi)$ là một hàm số liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Ta có:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

b) Tính độ dài đường cong phẳng

$$s = \int_a^b \sqrt{(1 + f'^2(x)}dx$$

• Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t \in [\alpha, \beta]$

thì chỉ cần thay $dx = x'(t)dt$; thay $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$; ta có công thức:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

• Trong trường hợp đường cong cho trong hệ toạ độ cực: $r = f(\varphi)$; $\varphi \in (\alpha, \beta]$; ta sử dụng công thức:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

và coi x, y được biểu diễn theo tham số φ ta được:

$$\begin{cases} x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

Do đó:

$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = r^2(\varphi) + r'^2(\varphi).$$

Khi đó:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

c) Tính thể tích vật thể

- *Vật thể bất kỳ:* Cho 1 vật thể giới hạn bởi một mặt cong và 2 mặt phẳng x = a, x = b. Gọi V là thể tích:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

- *Vật thể tròn xoay:* Giả sử phải tìm thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi hình thang cong AabB giới hạn bởi y = f(x); x ∈ [a, b]; trục Ox, các đường thẳng x = a, x = b khi nó quay xung quanh trục Ox:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

d) Tích diện tích xung quanh mặt tròn xoay

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Trường hợp đường cong có phương trình x = φ(y), φ(y) liên tục trong [c, d] thì diện tích mặt tròn xoay sinh ra bởi cung của đồ thị x = φ(y) quay quanh trục Oy là:

$$S = 2\pi \int_a^b |\varphi(y)| \sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy.$$

3.5.8. Tích phân suy rộng

a) Trường hợp cận lấy tích phân là vô hạn

Giả sử hàm số f(x) xác định trong khoảng [a, + ∞) (dĩ nhiên a hữu hạn), nghĩa là f(x) xác định với mọi x ≥ a và khả tích trong bất kỳ khoảng hữu hạn [a, A]; khi đó, như đã biết tích phân $\int_a^A f(x)dx$ có nghĩa với bất kỳ A > a.

Nếu tồn tại: $$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx \qquad (*)$$

thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng* của hàm số f(x) trong khoảng [a, +∞) và kí hiệu là: $$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (**)$$

Khi đó, ta cũng nói rằng tích phân (*) *hội tụ* và viết:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$$

Nếu không tồn tại giới hạn (*) thì ta nói rằng tích phân (**) *phân kì*.

Tương tự ta cũng định nghĩa được *tích phân* của hàm số f(x) lấy từ -∞ đến a:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx \quad (A' < a) \qquad (***)$$

và tích phân của hàm số f(x) từ -∞ đến +∞ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to +\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

với giả thiết f(x) khả tích trên bất kì khoảng hữu hạn [A', A] và với những khái niệm trên, có thể viết:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \quad \forall a$$

Tích phân suy rộng trong vế trái hội tụ khi cả hai tích phân vế phải hội tụ.

Qua các định nghĩa trên ta thấy rằng tích phân suy rộng là giới hạn của tích phân xác định (hiểu theo nghĩa thông thường) khi cho cận tích phân dần tới vô cùng, do vậy, cũng rất tự nhiên, muốn tính tích phân suy rộng người ta dùng công thức Newton - Leibnitz để tính tích phân, sau đó cho cận tích phân dần tới vô cùng. Chẳng hạn, để tính tích phân dạng (**) ta tính:

$$\int_{a}^{A} f(x)dx = F(A) - F(a)$$

Nếu tích phân (**) hội tụ, dĩ nhiên ta có: $\lim_{A \to +\infty} F(A)$ là hữu hạn và ta viết:

$$\lim_{A \to +\infty} F(A) = F(\infty)$$

và khi đó:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$$

Với các tích phân dạng (***) và cũng được tính tương tự.

Thí dụ:

1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_{0}^{+\infty} = \text{arctg}(+\infty) - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0} = -\text{arctg}(-\infty) - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$

3) $\displaystyle\int_{\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

4) Tính $\quad I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0)$

Với $\alpha \neq 1$ ta có: $\quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha < 1 \\ \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases}$

Với $\alpha = 1$ ta có: $\quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty$

Vậy I hội tụ khi $\alpha > 1$ và I phân kì khi $\alpha \leq 1$.

5) $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0)$, $\quad J = \int_a^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0)$

$$I = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$J = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

• *Sự hội tụ của tích phân suy rộng có cận là vô cùng.*

Giả sử $f(x) \geq 0$ và khả tích trên [a, A], với a, A hữu hạn (a < A); khi đó tích phân: $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$ là một hàm đơn điệu tăng đối với biến A; Vậy:

Điều kiện ắt có và đủ để tích phân suy rộng (**) hội tụ là tích phân này luôn bị chặn trên khi A tăng:

$$\int_a^A f(x)dx \leq L \quad (\text{L là hằng số})$$

Nếu không thoả mãn thì tích phân $\phi(A)$ có giá trị là ∞.

Từ điều kiện trên và từ tính đơn điệu của tích phân suy ra:

Định lý (tiêu chuẩn so sánh):

(1) Cho hai hàm số f(x) và g(x) khả tích trên mọi khoảng hữu hạn [a, A] ($a \leq A$) và $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \geq a$.

Khi đó

- Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.

(2) Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số khả tích trên mọi khoảng hữu hạn [a, A] ($a \le A$). Khi đó, nếu tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 < k < +\infty)$$

thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sẽ cùng tính chất, nghĩa là cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Hệ quả:

Cho f và g là hai hàm số dương khả tích trên [a, +∞]. Khi đó:

1) Nếu $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ và nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

2) Nếu $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = +\infty$ và nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Định lý:

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Khi đó, ta nói rằng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*; còn nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kì thì ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *bán hội tụ* (hội tụ không tuyệt đối).

b) Trường hợp hàm số lấy tích phân không bị chặn

Bây giờ xét trường hợp hàm số f(x) *không bị chặn* trong khoảng đóng hữu hạn [a, b]; cụ thể hơn giả sử f(x) bị chặn và khả tích trong khoảng đóng bất kì [a, b - η] với $0 < \eta < b - a$ nhưng không khả tích trong bất kì khoảng đóng dạng [b - η, b], f(b - 0) không giới nội và b được gọi là một điểm *bất thường*.

Nếu tồn tại giới hạn: $$\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx \qquad (*)$$

thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng* của hàm f(x) lấy trên [a, b] và ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ* và viết:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

Nếu giới hạn (*) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *phân kì*.

Tương tự, nếu f(x) bị chặn và khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a + \eta', b]$ nhưng $f(a + 0)$ không bị chặn và f(x) không khả tích trong mọi khoảng hữu hạn $[a, a + \eta']$, điểm a là điểm bất thường, ta có định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta' \to 0} \int_{a+\eta'}^b f(x)dx$$

Nếu f(x) không bị chặn tại c, $a < c < b$; nghĩa là $f(c \pm 0)$ không bị chặn ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ bởi biểu thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tích phân suy rộng ở vế trái đẳng thức trên hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ.

Thí dụ:

1) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \to 0} \int_{-1+\eta'}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \to 0} [- \arcsin(-1 + \eta')] = \frac{\pi}{2}$ (điểm - 1 là điểm bất thường).

2) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \to 0} \int_{0}^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \to 0} \arcsin(1 - \eta) = \frac{\pi}{2}$ (điểm + 1 là điểm bất thường).

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Giới hạn và sự liên tục của hàm số 1 biến số.

2. Hàm số ngược và đồ thị của nó. Các hàm số sơ cấp cơ bản.

3. Vô cùng bé - vô cùng lớn.

4. Đạo hàm và vi phân của hàm số 1 biến. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số. Đạo hàm của hàm số hợp. Vi phân. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản. Đạo hàm các hàm số ngược. Đạo hàm một phía; đạo hàm vô cùng. Đạo hàm và vi phân cấp cao.

5. Các định lý về giá trị trung bình. Định lý Fermat; định lý Roll; định lý Lagrange; định lý Cauchy; công thức Taylor. Định lý Lagrange mở rộng khai triển Maclaurin. Một số khai triển Maclaurin hữu hạn của một số hàm số sơ cấp quen thuộc.

6. Ứng dụng các định lý về giá trị trung bình.

- Khử các dạng vô định - công thức L'Hospital.
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số.
- Đường cong cho dưới dạng tham số.
- Hệ toạ độ cực; đường cong trong hệ toạ độ cực.

7. Nguyên hàm và tích phân bất định. Định nghĩa nguyên hàm. Bảng tích phân các hàm số thông dụng. Cách tính tích phân bất định. Phép đổi biến; phương pháp tích phân từng phần. Tích phân các phân thức hữu tỷ; tích phân các hàm số lượng giác; tích phân các hàm số vô tỷ.

8. Tích phân xác định. Định nghĩa. Điều kiện khả tích, cách tính tích phân xác định. Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định: Tính diện tích hình phẳng; tính độ dài đường cong phẳng; tính thể tích vật thể; tính diện tích mặt tròn xoay.

9. Tích phân suy rộng.

BÀI TẬP:

3.1. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x)$

3.2. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$ 2) $\lim\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

3.3. Xét sự liên tục của hàm số:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-4)}{x-2} & \text{nếu } x\neq 2\\ A & \text{nếu } x=2\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x.\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{nếu } x<0\\ a+x & \text{nếu } x\geq 0\end{cases}$

Chọn a để f(x) liên tục.

3.4. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

1) $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ 2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 4) $y=e^x.\ln\sin x$

5) $y=\begin{cases}1-x & \text{khi } -\infty<x<1\\ (1-x)(2-x) & \text{khi } 1\leq x\leq 2\\ -(2-x) & \text{khi } 2<x<+\infty\end{cases}$

3.5. Với điều kiện nào thì hàm số $f(x)=\begin{cases}x^n.\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

a) Liên tục tại x = 0.

b) Khả vi tại x = 0.

c) Có đạo hàm liên tục tại x = 0.

3.6. Tìm đạo hàm trái $f'_-(x)$ và đạo hàm phải $f'_+(x)$ của các hàm số:

1) $y=|x|$ 2) $y=\sqrt{\sin x^2}$

3.7. Tìm vi phân các hàm số:

1) $y = \frac{1}{x}$ 2) $y = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}$; $(a \neq 0)$

3) $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$ 4) $y = \arcsin\frac{x}{a}$; $(a \neq 0)$

3.8. Tìm:

1) $d(x \cdot e^x)$ 2) $d\sqrt{a^2 + x^2}$

3) $d\ln(1 - x^2)$ 4) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

3.9. Tìm y'_x ; y''_{xx} của hàm f(x) cho dưới dạng tham số:

1) $x = 2t - t^2$; $y = 3t - t^3$

2) $x = a\cos t$; $y = a\sin t$

3) $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$

3.10. Tìm đạo hàm cấp cao của các hàm số:

1) $y = \frac{x^2}{1-x}$; Tính $y^{(8)}$ 2) $y = x^2 \cdot \sin 2x$; Tính $y^{(50)}$

3) $y = \frac{1}{x(1-x)}$; Tính $y^{(n)}$ 4) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$; Tính $y^{(n)}$

3.11. Xét xem định lý Rolle có áp dụng được cho hàm số sau không?

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

3.12. Giải thích tại sao công thức Cauchy không áp dụng được cho các hàm số f(x): $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$; $-1 \leq x \leq 1$.

3.13. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + a\text{tg}^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$; $a \neq 0$.

3.14. Khảo sát các hàm số:

1) $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$ 2) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

3.15. Khảo sát hàm số $r = a + b\cos\varphi$; $0 \le a \le b$

3.16. Tính các tích phân bất định:

1) $\int x^2 (5 - x)^4 dx$ 2) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$ 3) $\int \frac{e^{3x+1}}{e^x + 1} dx$

4) $\int \frac{dx}{2 - 3x^2}$ 5) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ 6) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

7) $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)}$ 8) $\int \frac{dx}{(x+a)^2)(x+b)^2}$ 9) $\int \sin^2 x dx$

10) $\int \text{arctg}x\, dx$ 11) $\int \frac{1 + \cos x}{\sin x - 1} dx$ 12) $\int \frac{dx}{1 + x^3}$

13) $I_n = \int x^n . e^x dx$; $n \in N$ 14) $\int e^{-2x} \cos 3x\, dx$

15) $\int x^2 \ln x\, dx$

3.17. Dùng định nghĩa, tính tích phân $I = \int_1^2 e^x dx$

3.18. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tính giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + ... + \sqrt{1 + \frac{n}{n}}\right)$$

3.19. Tính các tích phân:

1) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$ 2) $\int_0^1 \sqrt{9 - 4x^2} dx$ 3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$

4) $\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$ 5) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x . \cos nx\, dx$

6) Chứng minh rằng, nếu f(x) liên tục trên [0,1] thì:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

3.20. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

1) Đường cong $y = x^2$ và các đường $x = 0$; $y = 4$.

2) Đường parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$.

3) Đường bậc ba $y = x^3$ và các đường $y = x$; $y = 2x$.

4) Đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$ và parabol $y^2 = 2x$.

5) Đường $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Chương 4
CHUỖI

4.1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

4.1.1. Định nghĩa

Cho dãy số $U_1; U_2;...U_n,...$

Biểu thức $U_1 + U_2 + ... + U_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (1) được gọi là chuỗi số.

- Các số $U_1; U_2;...U_n,...$, được gọi là các số hạng của chuỗi số.
- U_n với n tổng quát gọi là số hạng tổng quát.
- Tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + ... + U_n$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số (1)
- Nếu S_n dần tới một giới hạn hữu hạn S khi $n \to \infty$, ta nói rằng chuỗi số (1) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ hội tụ và có tổng S. Khi đó: $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ và viết:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

- Hiệu $R_n = S - S_n$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi số.
- Nếu chuỗi số hội tụ thì $R_n \to 0$ khi $n \to \infty$
- Nếu S_n không dần tới một giới hạn hữu hạn, khi $n \to \infty$, ta nói chuỗi số (1) phân kỳ.

Thí dụ: Xét chuỗi số $\sum_{n-1}^{\infty} a.q^{n-1}$; $a \neq 0$ (*)

Đó là chuỗi cấp số nhân vô hạn có công bội q (chuỗi số này được dùng nhiều trong lý thuyết, bài tập về chuỗi).

+ Nếu $q = 1 \Rightarrow$ (*) $\equiv \sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = a + a + a + ...$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$: chuỗi phân kỳ.

+ Nếu $a = 0 \Rightarrow \sum 0 = 0 + 0 + ... + 0 + ... = 0$: chuỗi hội tụ.

+ Nếu $q = -1 \Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \sum_{n-1}^{\infty} aq^{n-1} = a - a + a - a + ...$

- Vì $S_n = 0$ khi n chẵn; và $S_n = a$ khi n lẻ; khi đó S_n không dần tới một giới hạn khi $n \to \infty$ nên (*) phân kỳ.

+ Nếu $q \neq 1$; $S_n = a + a.q + a.q^2 + ... + a.q^{n-1} = a\dfrac{(q^n - 1)}{q - 1}$

- Trường hợp 1: Xét $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$; do đó:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a.\frac{(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n\to\infty} a\frac{(-1)}{q - 1} = \frac{a}{1 - q} \text{ (hữu hạn)}$$

nên (*) hội tụ và có tổng $S = \dfrac{a}{1 - q}$

- Trường hợp 2: Xét $|q| > 1$; thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, do đó:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a.\left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \infty$ nên (*) phân kỳ. Vậy không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Tóm lại: Chuỗi $\sum a\, q^{n-1}$ hội tụ khi $|q| < 1$; phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

4.1.2. Điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ

Định lý:

Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ hội tụ thì số hạng tổng quát U_n của nó dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Chứng minh: Từ giả thiết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = S$; $S_n = S_{n-1} + U_n$, do đó $U_n = S_n - S_{n-1}$

Nếu chuỗi số hội tụ thì S_n và S_{n-1} phải cùng dần tới một giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \to$ đpcm.

Chú ý: Điều ngược lại không đúng. Thí dụ:

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *(được gọi là chuỗi điều hoà).*

- Số hạng tổng quát: $U_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$; nhưng chuỗi đó phân kỳ . Thật vậy:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Nếu chuỗi số hội tụ thì S_n và S_{2n} cùng dần tới 1 giới hạn khi $n \to \infty$. Tức là $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ điều này mâu thuẫn với $S_{2n} - S_n > 1/2$.

Hệ quả: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ phân kỳ.

Thí dụ 1: Chuỗi số $1+\frac{3}{4}+\frac{4}{6}+...+\frac{n+1}{2n}+...$ phân kỳ vì số hạng tổng quát:

$$U_n=\frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} \neq 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Thí dụ 2: Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ là phân kỳ; mặc dù $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$

Chuỗi này phân kỳ vì: $S_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\frac{n}{\sqrt[3]{n}}=n^{2/3}$

$$S_n > n^{2/3} \text{ nên } \lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty}(n^{2/3})=\infty$$

4.1.3. Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý: Điều kiện ắt có và đủ để chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\alpha} U_n$; (1) hội tụ là: với $\forall\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được số nguyên dương n_0 sao cho khi $p > q \geq n_0$ ta có:

$$|S_p - S_q| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} U_n\right| < \varepsilon$$

Chứng minh: Thật vậy, chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng S_n hội tụ. Theo tiêu chuẩn Cauchy của dãy hội tụ, điều này xảy ra khi và chỉ khi với $\forall\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được một số nguyên dương n_0 sao cho khi $p > q \geq n_0$ ta có:

$$|S_p - S_q| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} U_n\right| < \varepsilon$$

Thí dụ: Đối với chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ta thấy rằng: điều kiện của định lý Cauchy không được thoả mãn vì không thể xảy ra bất đẳng thức:

$$|S_{2n} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| < \varepsilon; \text{ nên chuỗi phân kỳ.}$$

4.1.4. Vài tính chất đơn giản của chuỗi số hội tụ

i) Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha U_n$; α = const cũng hội tụ và có tổng là α. S.

ii) Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$; $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ hội tụ và có tổng theo thứ tự là S_1, S_2 thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n \pm V_n)$ hội tụ và có tổng $S_1 \pm S_2$.

iii) Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi ta bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên.

Bài tập tự giải:

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây, tính tổng của chúng khi chúng hội tụ.

1) $U_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1}$

2) $U_n = \dfrac{2n+1}{n^2(+n+1)^2}$

3) Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n(2n+2)(2n+4)}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$

Gợi ý: 3); 4) phân tích thành tổng các phân thức đơn giản.

4.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG (HAY CHUỖI SỐ CÓ SỐ HẠNG DƯƠNG)

4.2.1. Định nghĩa

Chuỗi số (1) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ gọi là chuỗi số dương nếu $U_n > 0$, $\forall n$. Vậy với chuỗi số dương $\sum U_n$ thì $S_{n+1} > S_n$ (Thật vậy: vì $S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$; $U_{n+1} > 0 \rightarrow S_{n+1} > S_n$)

Vậy $\{S_n\}$ là một dãy số tăng. Do đó nếu dãy $\{S_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ hữu hạn. Do đó (1) hội tụ. Còn nếu dãy $\{S_n\}$ không bị chặn thì $S_n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$ nên chuỗi số phân kỳ.

Chú ý: Nếu $V_n < 0$, $\forall n$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = -\sum_{n=1}^{\infty} |V_n|$ mà $\sum |V_n|$ là chuỗi số dương; vì vậy chỉ cần nghiên cứu chuỗi số dương là đủ.

4.2.2. Các định lý so sánh

Định lý 1: Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (2) và $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ (3); giả sử $U_n < V_n$, với $\forall n \geq n_0 \in N$. Khi đó nếu chuỗi (3) hội tụ thì (2) hội tụ, nếu (2) phân kỳ thì (3) phân kỳ.

Chú ý: Khi sử dụng định lý 1; dễ mắc sai lầm như sau:

+) "Anh lớn" phân kỳ thì chưa kết luận được gì về "Anh bé"; vì vậy, nếu kết luận ngay là "Anh bé" phân kỳ thì sẽ là một sai lầm.

+) Hoặc "Anh bé" hội tụ thì chưa kết luận được gì về "Anh lớn". Nếu vội kết luận ngay là "Anh lớn" hội tụ thì sẽ sai lầm.

Hai ví dụ sau sẽ tường minh điều đó.

Thí dụ: Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3.4^n} \quad ; \qquad \text{b) } \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}-5}$$

Giải:

a) Sử dụng kết quả $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$. Chuỗi số này hội tụ khi $|q| < 1$; $S = \frac{a}{1-q}$.

Phân kỳ khi $|q| \geq 1$ (chuỗi (*) trong 4.1.1).

Cụ thể lấy a = 1; $q = \frac{1}{4}$ chẳng hạn, ta có chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{n-1}$ hội tụ hay chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ hội tụ. Đối với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{n-1}$ ta có: $\frac{1}{n^3.4^n} \leq \frac{1}{4^n}$. Xong $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3.4^n}$ hội tụ.

b) Ta đã biết: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ phân kỳ. (Thí dụ trong phần 4.1.2)

Vậy $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ cũng phân kỳ. Xong với $n \geq 100$, ta có: $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}-5}$

Do đó $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}-5}$ phân kỳ.

Chứng minh định lý 1.

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_k ; S'_n = \sum_{k=1}^{\infty} V_k$ Vì $u_k \leq V_k$; $\forall k > 1$ nên $S_n \leq S'_n$

Nếu chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ hội tụ và có tổng S' thì $S'_n \leq S'$.

Từ 2 điều trên suy ra $S_n \leq S'$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ hội tụ vì có tổng riêng S_n bị chặn trên.

Nếu chuỗi $\sum U_n$ phân kỳ thì $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ do đó $\lim_{n\to\infty} S'_n = +\infty$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ phân kỳ

Thí dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ vì:

Ta có $\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n} \le \frac{1}{3^n}$ với $\forall n \ge 1$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ.

Chuỗi $\sum\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ phân kỳ; vì $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}$ với $\forall n \ge 1$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ (chuỗi điều hoà).

Định lý 2: Cho 2 chuỗi số dương (2) và (3).

Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = k > 0;\ (0 < k < +\infty)$ thì hai chuỗi đó đồng thời hội tụ hay phân kỳ.

Chứng minh định lý 2.

Thật vậy, bắt đầu từ một số hạng nào đó trở đi, ta có: $\frac{k}{2} < \frac{U_n}{V_n} < 3.\frac{k}{2}$

Nếu chuỗi số $\sum V_n$ hội tụ thì vì $U_n < \frac{3k}{2}V_n$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ cũng hội tụ.

Còn nếu chuỗi $\sum U_n$ hội tụ thì vì $U_n > \frac{k}{2}V_n$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ cũng hội tụ.

4.2.3. Các quy tắc khảo sát tính hội tụ của chuỗi

• ***Quy tắc D'Alembert.***

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = l$ thì chuỗi hội tụ khi $l < 1$; phân kỳ khi $l > 1$.

Chứng minh: Giả sử $l < 1$, chọn ε- khá nhỏ để $l + \varepsilon < 1$. Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$, tồn tại số nguyên dương n_0 để cho: với $\forall n > n_0 : \frac{U_{n+1}}{U_n} < l + \varepsilon$. Ta cũng có thể xem như $n_0 = 1$. Khi đó:

$$U_n = \frac{U_n}{U_{n-1}}.\frac{U_{n-1}}{U_{n-2}}...\frac{U_2}{U_1}.U_1 \le (l+\varepsilon)^{n-1}.U_1$$

Vì $l + \varepsilon < 1$; chuỗi có số hạng tổng quát $(1+\varepsilon)^{n-1}.U_1$ hội tụ, do đó theo định lý so sánh; chuỗi $\sum U_n$ hội tụ.

Nếu $l > 1$, thì từ 1 số hạng nào đó đi; $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ do đó $U_{n+1} > U_n$; số hạng tổng quát không dần tới 0 khi $n \to \infty$; chuỗi số phân kỳ.

Thí dụ 1: Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1).2^n}{n.2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$; vậy chuỗi hội tụ.

Thí dụ 2: Xét chuỗi $A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{3^n.n!} \right)$

Ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1..3..5...(2(n+1)-1))}{3^{n+1}.(n+1)!} \right] : \left[\frac{1.3...(2n-1)}{3^n.n!} \right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1.3...(2n-1).(2n+1).3^n n!}{1.3...(2n-1)3.3^n (n+1).n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vậy A hội tụ theo D'Alembert.

• ***Quy tắc Cauchy***

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$. Nếu $\lim \sqrt[n]{U_n} = l$ thì chuỗi số hội tụ khi $l < 1$; phân kỳ khi $l > 1$.

Bài tập tự giải: 1. Xét sự hội tụ; phân kỳ của chuỗi số dương sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+7} \right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{2n+1} \right)^n$

2. Xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi sau: $\sum \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.3^n}$

Gợi ý:

Xét $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} (U_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.3^n} \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n.3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}.\left(\frac{n+1}{n} \right)^n$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3} < 1$$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

4.2.4. Tiêu chuẩn tích phân

Giả thiết $A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ là chuỗi số dương. Giả sử hàm số f(x) liên tục; dương; giảm trên khoảng $[1; +\infty]$ và dần tới 0 khi $x \to +\infty$. Khi đó tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, trong đó $U_n = f(n)$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Thí dụ: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$; $\alpha = \text{const}$

Giải: Ta so sánh nó với tích phân $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$

Ta biết rằng, tích phân đó hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

Từ đó: chuỗi đã cho $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

Khi $\alpha = 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi điều hoà nên nó phân kỳ.

4.3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KỲ

4.3.1. Hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ với các số hạng có dấu bất kỳ.

Định lý: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ cũng hội tụ.

Thí dụ: Xét chuỗi $\sum\frac{\cos n}{n^2}$

Lập chuỗi $\sum\frac{|\cos n|}{n^2}$. Vì: $\frac{|\cos n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ và vì chuỗi $\sum\frac{1}{n^2}$ (chuỗi Rieman; $\alpha = 2$) hội tụ nên chuỗi $\sum\frac{|\cos n|}{n^2}$ hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

* *Chú ý 1)* Điều kiện $\sum|U_n|$ hội tụ chỉ là điều kiện đủ để chuỗi $\sum U_n$ hội tụ, chứ không phải là điều kiện cần. Có thể chuỗi $\sum U_n$ hội tụ mà chuỗi $\sum|U_n|$ phân kỳ.

Định nghĩa:

Chuỗi số $\sum U_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi $\sum|U_n|$ hội tụ; là *bán hội tụ* nếu $\sum U_n$ hội tụ nhưng $\sum|U_n|$ phân kỳ.

* *Chú ý 2)* Nếu dùng quy tắc D'Alembert hay quy tắc Cauchy mà biết được chuỗi $\sum|U_n|$ phân kỳ thì có thể khẳng định rằng chuỗi $\sum U_n$ phân kỳ.

Thí dụ:

1. Chuỗi số $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ bán hội tụ.

2. Xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^5}$ (a)

Giải:

Xét chuỗi $\sum \left|\frac{\sin n\alpha}{n^5}\right|$ (b). Rõ ràng ta có: $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^5}\right| \le \frac{1}{n^5}$

Mà $\sum \frac{1}{n^5}$ hội tụ (dạng $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; $\alpha = 5 > 1$) nên chuỗi (b) hội tụ suy ra (a) hội tụ tuyệt đối.

3. Xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $A = \sum \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

Giải: Xét hàm f(x) = x - lnx với $x \ge 1$. Ta có $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ với x > 1 nên f(x) luôn luôn tăng trên miền xác định của nó. Vì thế:

$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x - \ln x}$ luôn luôn giảm nên $\frac{1}{n - \ln n}$ luôn luôn giảm.

Mặt khác: ta có f(1) = 1 - ln1 = 1 > 0 nên f(x) luôn luôn tăng.

Từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \ln n} = 0$.

Vậy chuỗi A hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Chú ý: Ký hiệu $|A| = \sum \left|\frac{(-1)^n}{n - \ln n}\right| = \sum \frac{1}{n - \ln n}$

A là chuỗi số dương; $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$ nhưng $\sum \frac{1}{n}$ phân kỳ (chuỗi điều hoà) (theo tiêu chuẩn so sánh) suy ra $\sum \frac{1}{n - \ln n}$ phân kỳ. Vậy chuỗi A - bán hội tụ (thoả mãn điều kiện: A - hội tụ song |A| phân kỳ).

4.3.2. Chuỗi đan dấu

Theo định nghĩa, đó là chuỗi số có dạng $\pm (u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...)$ trong đó $u_1, u_2, ...$ là những số dương. Ta chỉ xét chuỗi số đan dấu với số hạng đầu tiên dương.

Định lý: (Tiêu chuẩn Leibniz)

Nếu dãy số dương $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ đơn điệu giảm ($u_n > u_{n+1}$) và dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi số đan dấu $u_1 - u_2 + u_3 - ...$ hội tụ và có tổng bé thua u_1.

Thí dụ 1: Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1}$

Ta có $U_n = \frac{1}{3n+1}$ đơn điệu giảm và tiến tới 0 khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi đan dấu đã cho hội tụ.

Thí dụ 2: Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

+) Nó thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibniz nên nó hội tụ.

+) Nhưng $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi số điều hoà, nó phân kỳ.

Vậy chuỗi đã cho bán hội tụ.

4.3.3. Vài tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối

Tính chất 1. Nếu chuỗi $\sum u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng S thì chuỗi số suy từ nó bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng và bằng cách nhóm tuỳ ý một số số hạng lại cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S.

Còn nếu chuỗi $\sum u_n$ bán hội tụ thì ta có thể thay đổi thứ tự của các số hạng của nó để chuỗi số thu được hội tụ và có tổng bằng một số bất kỳ cho trước hoặc trở nên phân kỳ.

Định nghĩa:

Giả sử cho 2 chuỗi số hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$; $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Người ta gọi tích của chúng là chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} W_n$; trong đó: $W_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k . v_{n-k}$.

Tính chất 2. Nếu 2 chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là S và S' thì tích của chúng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng S. S'.

4.3.4. Chuỗi hàm số - chuỗi luỹ thừa

a) Các định nghĩa

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ (1)

Chuỗi hàm số là tổng vô hạn $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ trong đó $U_i(x)$ là hàm số của biến độc lập x với $\forall$ i.

- Nếu với $\forall x = x_0$, chuỗi $\sum U_n(x_0)$ hội tụ thì ta nói x_0 là điểm hội tụ của (1).

- Ngược lại, $x = x_0$ gọi là điểm phân kỳ của (1) nếu chuỗi số $\sum U_n(x_0)$ phân kỳ.

- Miền hội tụ của (1) là tập hợp mọi điểm hội tụ của (1).

- Tổng riêng thứ n của (1) là tổng $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x)$ (hiển nhiên $S_n(x)$ cũng là hàm của x).

- Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ ta nói (1) hội tụ và có tổng $S = S(x)$ và viết $\sum_{i=1}^{\infty} U_n(x) = S(x)$.

Trong trường hợp này; $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ gọi là phần dư thứ n của chuỗi số (1).

Thí dụ 1: Xét chuỗi hàm số

$A_{(x)} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ là một cấp số nhân vô hạn có công bội x; nó hội tụ nếu $|x| < 1$. Vậy chuỗi số hội tụ với $\forall x \in (-1, 1)$ và có tổng $S_{(x)} = \frac{1}{1-x}$. Vậy ta có:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + ... + x^n + ... ; \quad -1 < x < 1.$$

Thí dụ 2: Xét chuỗi hàm $\sum \frac{\sin x}{n^2 + x^2}$ ta có: $\frac{|\sin x|}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2} \forall x \in R$; Mà chuỗi $\sum \frac{1}{n^2}$ là chuỗi Riemann; $\alpha = 2$ hội tụ suy ra chuỗi hàm đã cho hội tụ tuyệt đối với $\forall x \in R$.

Thí dụ 3: Xét chuỗi hàm $\sum \frac{1}{n^x}$ hội tụ khi $x > 1$; phân kỳ khi $x < 1$. Vậy tập hội tụ của nó là khoảng $(1, +\infty)$.

Định nghĩa:

Chuỗi (1) gọi là hội tụ đều trên X nếu dãy $\{S_n\}$ hội tụ đều trên X tương đương chuỗi (1) hội tụ đều trên X và có tổng S nếu $\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_o \in N \mid n \ge n_o$

$$\Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \text{ với } \forall x \in X.$$

b) Chuỗi luỹ thừa

Định nghĩa: Chuỗi luỹ thừa là chuỗi hàm số có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... \qquad (1)$$

Định lý Abel:

Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại $\forall x$ với $|x| < |x_0|$.

Chứng minh:

Thậy vậy: chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ nên số hạng tổng quát $a_n x_0^n$ dần đến 0 khi $n \to \infty$; do đó $a_n x_0^n$ bị chặn, tức là $|a_n x_0^n| \le M$ với $\forall n$ và một số dương M nào đó, ta có:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$. Vì $\left|a_n x_0^n (\frac{x}{x_0})^n\right| \le M.\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ với $\forall n \in N$. Áp dụng định lý so sánh vào 2 chuỗi có số hạng dương $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ và $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ ta suy ra chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm thoả mãn $|x| < |x_0|$.

Hệ quả: Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại $x = x_1$ thì nó phân kỳ tại mọi x thoả mãn $|x| > |x_1|$.

Chứng minh: (dùng phương pháp phản chứng)

Lấy $x = x_2$; với $|x_2| > |x_1|$. Theo định lý Abel thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x mà $|x| < |x_2|$; đặc biệt, nó hội tụ tại $x = x_1$; điều này trái với giả thiết. Vậy nó phải phân kỳ tại x_2.

Chú ý:

- Tại $x = 0$ thì chuỗi (1) chỉ còn một số hạng là a_0 nên (1) hội tụ; tổng bằng a_0. Vậy (1) luôn tồn tại ít nhất 1 điểm hội tụ là $x = 0$

- Từ định lý Abel, hệ quả và chú ý nói trên; với mọi chuỗi luỹ thừa (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; chắc chắn $\exists r \ge 0$ để (1) hội tụ tuyệt đối trong khoảng (-r, r) (hay chuỗi hội tụ tuyệt đối với $\forall x$: $|x| < r$); và phân kỳ trong các khoảng $(-\infty, -r)$ và $(r, +\infty)$ (hay phân kỳ trong các khoảng trên với $\forall x$; $|x| > r$).

- Tại $x = \pm r$ thì (1) có thể hội tụ, cũng có thể phân kỳ; ta xét cụ thể từng trường hợp.

Số r đó gọi là bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa. Khoảng (-r, r) gọi là khoảng hội tụ của (1).

c) Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (1)

Định lý: Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$) thì bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (1) được xác định bởi công thức:

$$r = r = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu} \quad 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{nếu} \quad \rho = \infty \\ +\infty & \text{nếu} \quad \rho = 0 \end{cases}$$

Chứng minh: Xét chuỗi số dương $\sum |a_n x^n|$; với x cố định. Áp dụng quy tắc D'Alembert, ta có:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| . |x| = \rho . |x|$$

+) Giả sử $\rho|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{\rho}$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n x^n |$ hội tụ, hay (1) hội tụ tuyệt đối.

+) Nếu $\rho.|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \dfrac{1}{\rho}$; chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n x^n |$ phân kỳ (vì số hạng tổng quát $|a_n x^n|$ của nó không dần tới 0 khi $n \to \infty$) nên (1) phân kỳ.

+) Nếu $\rho = +\infty$ thì $\rho.|x| = \infty \Rightarrow \sum |a_n x^n|$ phân kỳ nên (1) phân kỳ tại $\forall x \neq 0$

+) Nếu $\rho = 0 \to \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a^n x^n|} = 0 < 1$ nên chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối tại $\forall x$.

* Chứng minh tương tự cho trường hợp $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ (dùng quy tắc Cauchy).

Thí dụ 1: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ (2)

Giải: $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{(-1)^{n+2}.n}{(n+1)(-1)^{n+1}} \right| = 1 = \rho$

Vậy $r = \dfrac{1}{\rho} = 1$ suy ra khoảng hội tụ (-1, 1).

Xét tại x = 1; (2) $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Tại x = -1; (2) $\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}.(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)}{n}$ phân kỳ, vì chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi (2) là: $-1 < x \leq 1$ hay (-1, 1]

Thí dụ 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k.(x-2)^{2k}$ (3)

Giải: (3) $\equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k X^k$ trong đó $X = (x - 2)^2$; $X \geq 0$ (3')

Ta tìm miền hội tụ của (3'). Ta có: (3') có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Từ đó: $\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Vậy $r = \frac{1}{\rho} = 2 \Rightarrow$ khoảng hội tụ của (3') là: (-2, 2). Vì $X \geq 0$ nên khoảng hội tụ của (3') là [0, 2).

Xét X = 2. Khi đó: (3') $\equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k 2^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k$

Ta có: $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k = \lim\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t-1}{2}}$ (đặt t = 2k + 1)

$= \lim_{t\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^{1/2}.(1+\frac{1}{t})^{-1/2} = e^{1/2} \neq 0$ nên (3') không hội tụ khi X = 2. Vậy miền hội tụ của (3') là $0 \leq X < 2$.

$\Leftrightarrow$ Miền hội tụ của (3) là: $(x - 2)^2 < 2 \Leftrightarrow |x - 2| < \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x - 2 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$.

Vậy miền hội tụ là khoảng $\left(2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}\right)$

Thí dụ 3: Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa sau:

$$A = \sum \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}\ ; \qquad n \in N$$

Giải: Đặt m = 2n + 1; $m \in N \to n = \frac{m-1}{2}$

$$(n+1)! = \left[\left(\frac{m-1}{2}\right)+1\right]! = \frac{(m+1)!}{2!}$$

$$\Rightarrow A = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m-1)^5.2!}{2^5.(m+1)!}(x+5)^m = \sum\frac{(m-1)^5}{2^4.(m+1)!}X^m \text{ với } X = x + 5$$

Ta có: $\lim\limits_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim\limits_{m\to\infty}\left|\frac{m^5(m+1)!2^4}{2^4.(m+2)!(m-1)^5}\right| = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^5.\frac{1}{(m+2)} = 0$

$\Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow r = +\infty$

Vậy chuỗi hội tụ với $\forall X \leftrightarrow -\infty < X < +\infty \Leftrightarrow -\infty < x + 5 < +\infty$ nên A hội tụ với $\forall x \in R$.

Thí dụ 4: Tìm miền hội tụ của chuỗi: $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$

Giải: $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$ là chuỗi số khi cố định x.

Xét chuỗi số $|A| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}\right|$. Hiển nhiên miền hội tụ của |A| cũng là miền hội tụ của chuỗi A.

Để tìm miền hội tụ của A, ta tìm những giá trị của x để |A| hội tụ; khi x cố định; |A| là chuỗi số và $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x+2|^n}{n}$.

Ta có kết quả $= \begin{cases} 0 & \text{khi } -3 \le x \le -1 \\ +\infty & \text{khi } x < -3 \text{ hoặc } x > -1 \end{cases}$

vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ khi } a < 1 \\ \infty \text{ khi } a > 1 \end{cases}$ với $a = |x + 2|$.

Theo Cauchy: |A| hay A hội tụ khi $-3 \le x \le -1$.

Vậy miền hội tụ của A là $-3 \le x \le -1$.

d) Một số tính chất của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (4)

Tính chất 1: Tổng S(x) của chuỗi (4) là hàm số liên tục trong khoảng hội tụ (-r, r) của nó. Nếu tại 2 đầu mút $x = \pm r$, chuỗi (4) hội tụ thì S(x) liên tục bên phải tại -r và liên tục trái tại r.

Tính chất 2: Nếu (-r, r) là khoảng hội tụ của chuỗi (4); $[a, b] \subset (-r, r)$ thì có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi đó.

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n\right)dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \ldots + \int_a^b a_n x^n dx + \ldots$$

Nếu $[a, b] \equiv [0, x] \subset (-r, r)$ thì biểu thức trên được viết thành:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + ... + \int_0^x a_n x^n dx + ...$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_n}{(n+1)}x^{n+1} + ...$$

Đẳng thức đúng với $\forall x$; $-r < x < r$; (hay vế phải là chuỗi của luỹ thừa, có khoảng hội tụ là $(-r, r)$).

Tính chất 3: Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi (4) tại $\forall x \in (-r, r)$ hay:

Với $\forall x \in (-r, r)$; $S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^{n-1}$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n.a_n x^{n-1} + ...$$

Vì vế trái là chuỗi liên tục nên có thể áp dụng tính chất 3 để có $S'' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)''$.

Tổng quát: $\left(S_{(x)}\right)^{(n)} = \sum\left(a_n x^n\right)^{(n)}; \forall x \in (-r, r)$

e) (Mở rộng) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ (5)

Để làm điều đó, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định của hàm $U_i(x)$; $i = \overline{1, n}$

Bước 2: Cố định x; Tìm $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|$ hoặc $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}$. Giả sử giới hạn này là $|U(x)| < 1$ (*)

Nghiệm của bất phương trình (*) bỏ đi những điểm làm U(x) không xác định là những điểm hội tụ của chuỗi (5).

Muốn tìm miền hội tụ của chuỗi (5); ta xét thêm các điểm biên thoả mãn $|U(x)| = 1$.

(Hiển nhiên, tại những điểm x | $|U(x)| > 1$ thì chuỗi (5) phân kỳ).

Đặc biệt, nếu $\forall x$ mà $U(x) \equiv 1$ thì ta phải xét sự hội tụ của chuỗi theo phương pháp khác.

Bài tập áp dụng: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln x)^n}$

Giải: B không phải là chuỗi luỹ thừa.

Xét $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n.(\ln x)^n}{(n+1)(\ln x)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\ln x}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\ln x|} = \frac{1}{|\ln x|}$

Giải bất phương trình $\frac{1}{|\ln x|} < 1 \Rightarrow |\ln x| > 1$. Ta được:

$$\begin{cases} \ln x > 1 \\ \ln x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > e \\ x < e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Kết luận:

* Nếu $x > e$ hoặc $x < \frac{1}{e}$ thì B hội tụ tuyệt đối.

* Nếu $\frac{1}{|\ln x|} > 1$ thì B phân kỳ.

* Tại x mà $\frac{1}{|\ln x|} = 1 \Leftrightarrow x = e$ và $x = \frac{1}{e}$. Khi đó:

- Xét tại x = e thì B có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: chuỗi điều hoà nên phân kỳ.

- Xét tại $x = \frac{1}{e}$; $B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{n}$ hội tụ (theo Leibnitz).

Tóm lại: Miền hội tụ của chuỗi B là $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$.

f) (Mở rộng) Khai triển một số hàm thành chuỗi luỹ thừa; chuỗi Taylor, chuỗi Macloranh.

Định lý 1: Giả sử f(x) có đạo hàm mọi cấp ở lân cận điểm x_0; giả sử $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$;

với $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$; với ξ là 1 điểm nào đó trong khoảng giữa x và x_0.

Khi đó ta có thể khai triển được f(x) thành chuỗi Taylor tại $\forall x \in$ lân cận x_0

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (1)$$

Chú ý:

1) Trong kết luận của định lý; vế phải là chuỗi luỹ thừa của $(x - x_0)$; gọi là chuỗi Taylor của f(x) trong lân cận đã cho của điểm x_0, nó hội tụ và có tổng là f(x).

2) Nếu $x_0 = 0$ thì (1) có dạng:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2)$$

Ta nói f(x) đã khai triển thành chuỗi Macloranh ở lân cận điểm 0.

0.0.1 downloaded 60906.p 23 15:07:15 ICT

Định lý 2: Giả sử trong lân cận của điểm x_0; f(x) có đạo hàm mọi cấp và $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M; \forall n \in N^*$. Khi đó, khai triển f(x) được thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm x_0; hay:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

g) Một số khai triển quen thuộc một số hàm thành chuỗi Taylor - chuỗi Macloranh

1) $f(x) = e^x$

Vì $\forall k \ge 1; \forall x \in (-N, N)$ (lân cận của $x_0 = 0$) ta có:

$\left|f^{(k)}(x)\right| = e^x < e^N \equiv M$. Theo định lý 2; khai triển được hàm $f(x) = e^x$ thành chuỗi Macloranh.

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \quad ; \quad f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

Vậy $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \qquad (3)$$

2) $f(x) = \sin x$

Vì $\forall k \ge 1$ và $\forall x \in R$; $\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|\sin(x + k\frac{\pi}{2})\right| \le 1$

Theo định lý 2, khai triển hàm sin x thành chuỗi Macloranh trên toàn R:

Vì f(0) = 0; f'(0) = 1; f''(0) = 0; f'''(0) = -1; $f^{(4)}(0) = 0$; $f^{(5)}(0) = 1$; ...

Nên $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \qquad (4)$$

Tương tự: $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad (5)$$

3) $f(x) = (1 + x)^\alpha; \alpha \in R$

Ta có: f(0) = 1; $f'(0) = \left[\alpha(1+x)^{\alpha-1}\right] = \alpha$; (do x = 0)

$f''(0) = \left[\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\right] = \alpha(\alpha-1)$; (do x = 0)

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$. Vậy chuỗi Macloranh của f(x) có dạng:

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ... \qquad (6)$$

Tìm miền hội tụ của chuỗi này:

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)n!}{(n+1)!\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1 = \rho \Rightarrow r = \frac{1}{\rho} = 1.$$

Vậy chuỗi Macloranh hội tụ khi $|x| < 1$

(Khi $|x| = 1 \leftrightarrow x = \pm 1$ thì kết quả như thế nào? *(bài tập dành cho người đọc))*

Vậy, với $\forall x \in (-1, 1)$ ta có:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ... \qquad (7)$$

(chuỗi này còn gọi là chuỗi nhị thức).

Khi $\alpha = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n.x^n + ...$ (8)

4) $f(x) = \ln(1 + x)$

Lấy miền $-1 < x < 1$. Ta có $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \sum \int_0^x (-1)^n.x^n dx$. Vậy:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^n.\frac{x^{n+1}}{(n+1)} + ... \qquad (9)$$

5) $f(x) = \text{arctg}x$,

vì $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Trong (8) thay x bởi x^2.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - ... + (-1)^n.x^{2n} + ... \qquad (8')$$

Tích phân từng số hạng của chuỗi luỹ thừa trên đoạn [0, x]; ta có:

$$\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^{n-1}.\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + ... \qquad (10)$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Đại cương về chuỗi số.
2. Chuỗi số dương.
3. Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ.
4. Hội tụ tuyệt đối. Bán hội tụ.
5. Chuỗi đan dấu.
6. Chuỗi hàm số, chuỗi luỹ thừa, chuỗi Fourier.

BÀI TẬP

4.1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây:

1) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1}$;

2) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

3) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

4) $u_n = \dfrac{2^n+n}{3^n+3n+3}$

5) $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2(n^2+3)}$;

6) $u_n = 1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

7) $u_n = \ln\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}\right)$;

8) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$

9) $u_n = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2+2\ln n}$;

10) $u_n = \dfrac{2+\cos n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

4.2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây:

1) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$;

2) $u_n = \ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 2$

3) $u_n = \dfrac{k^n}{n^k}$ $(k > 0)$;

4) $u_n = \dfrac{a^n}{n+b^n}$ $(a > 0, b > 0)$

5) $u_n = \ln\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

6) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

7) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

8) $u_n = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

9) $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{n^2}{n^2+an+b}\right)$;

10) $u_n = na^{\sqrt{n}}$ $(a > 0)$

11) $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$.

4.3. Các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây có hội tụ không? Tính tổng của chúng khi chúng hội tụ.

1) $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

2) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$

3) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

4) $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

5) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1}$;

6) $u_n = \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$

7) $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$;

8) $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}.\cos\dfrac{1}{n+1}}$

9) $u_n = \ln\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2^n}-1\right)$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

10) $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

4.4. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây:

1) $u_n = \dfrac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}$;

2) $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

3) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n+n}$;

4) $u_n = \left(\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}\right)^n$

5) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

6) $u_n = \left(\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}\right)^n$

7) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n-1}\right)^{n\ln n}$;

8) $u_n = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^n$

9) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

10) $u_n = \operatorname{tg}^n\left(a+\dfrac{b}{n^2}\right)$, $0 < a \leq \dfrac{\pi}{2}$, $b > 0$

11) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

12) $u_n = \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$

13) $u_n = \left(1-\dfrac{3}{2}\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$;

14) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

15) $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

16) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}+n\right)\pi$

17) $u_n = (-1)^n\dfrac{n^2}{(\ln n)^n}$;

18) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$

19) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$;

20) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$

21) $u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$;

22) $u_n = \ln\left[1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right]$, $\alpha > 0$.

4.5. Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

1) $u_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$;

2) $u_n(x) = \dfrac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

3) $u_n(x) = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$;

4) $u_n(x) = (nx)^n$

5) $u_n(x) = x^n \ln n$;

6) $u_n(x) = \dfrac{(5x)^n}{n!}$

7) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$;

8) $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$

9) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $0 < a_0 < \dfrac{\pi}{2}$, $a_n = \sin a_{n-1}$; $\forall n \geq 1$.

4.6. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

1) $u_n(x) = (2n+1)\, x^{3n}$, $n \geq 1$;

2) $u_n(x) = (2^n + 3^n)\, x^n$, $n \geq 0$

3) $u_n(x) = \dfrac{n^2+3n-1}{n+3} \cdot \dfrac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$;

4) $u_n(x) = \text{ch}\,na \,.\, x^n$, $a > 0$, $n \geq 0$.

5) $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$.

4.7. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận điểm $x_0 = 0$ các hàm số sau:

1) $f(x) = \text{ch}x$;

2) $f(x) = x^2 \,.\, e^x$

3) $f(x) = \sin^2 x$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$;

6) $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$;

8) $f(x) = e^x \,.\, \cos x$.

4.8. Tính bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

a) $u_n(x) = \dfrac{\text{ch}n}{\text{sh}^2 n} x^n$;

b) $u_n(x) = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) x^n$

c) $u_n(x) = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})x^n$

d) $u_n(x) = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})x^n$.

Chương 5
HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

5.1. NHỮNG KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

5.1.1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Xét không gian Euclide n - chiều R^n ($n > 1$); $n \in N^*$. Một phần tử $x \in R^n$ là một bộ n số thực $(x_1, x_2,..., x_n)$. D là tập hợp trong R^n.

Gọi ánh xạ $f : D \to R$,

$x \to u = f(x)$; $(x_1, x_2,..., x_n) \to f(x_1, x_2,..., x_n) \in R$ là một hàm số của n biến số xác định trên D. Khi đó:

+) D gọi là miền xác định của hàm số f.

+) x_i; $i = \overline{1,n}$ gọi là các biến số độc lập (nếu xem $x_1, x_2,..., x_n$ là toạ độ của điểm $M \in R^n$ trong hệ toạ độ nào đó thì có thể viết $u = f(M)$). Xét $n = 2$ ta có $z = f(x, y)$; $n = 3$ ta có $u = f(x, y, z)$.

Chú ý: Ta chỉ xét những hệ toạ độ Đềcac vuông góc.

5.1.2. Tập hợp trong R^n

Giả sử: $M(x_1, x_2,..., x_n)$; $N(y_1, y_2,..., y_n)$ là 2 điểm trong R^n.

Khoảng cách giữa 2 điểm đó , ký hiệu d(M, N) được cho bởi công thức:

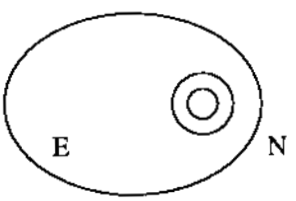
$$d(M, N) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Với 3 điểm bất kỳ A, B, C trong R^n, ta có:

$$d(A, C) \le d(A, B) + d(B, C) \text{ (bất đẳng thức tam giác)}$$

- M_0 là điểm bất kỳ $\in R^n$. Người ta gọi ε lân cận của M_0 là tập tất cả những điểm của R^n sao cho $d(M_0, M) < \varepsilon$.

Ta gọi lân cận của M_0 là $\forall$ tập hợp chứa một ε lân cận nào đó của M_0.



- E là tập hợp trong R^n. Điểm $M \in E$ gọi là điểm trong của E nếu tồn tại ε lân cận nào đó của M nằm hoàn toàn trong E. Tập E gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

- $N \in R^n$ gọi là điểm biên của tập E, nếu mọi ε lân cận của N vừa chứa những điểm thuộc E; vừa chứa những điểm không thuộc E.

Điểm biên của tập hợp E có thể thuộc tập hợp E cũng có thể không thuộc E.

Tập tất cả những điểm biên của E gọi là biên của nó.

+ E gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của nó. Tập hợp E được gọi là quả cầu mở tâm M_0, bán kính r; biên của tập hợp ấy gồm những điểm $M \backslash d(M_0, M) = r$ được gọi là mặt cầu tâm M_0, bán kính r.

Tập hợp những điểm $M \backslash d(M_0, M) \leq r$ là 1 tập đóng được gọi là quả cầu đóng tâm M_0, bán kính r.

+ E gọi là bị chặn nếu tồn tại 1 quả cầu nào đó chứa E.

+ E gọi là liên thông nếu có thể nối 2 điểm bất kỳ M_1, M_2 của E bởi 1 đường liên tục nằm hoàn toàn trong E.

5.1.3. Miền xác định của hàm số nhiều biến số

* *Quy ước:* Nếu u là hàm số được cho bởi biểu thức u = f(M) mà không nói gì thêm về MXĐ của nó thì MXĐ của u được hiểu là tập hợp tất cả những điểm của M sao cho f(M) có nghĩa.

5.1.4. Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$

và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_0, M_n) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$

Thí dụ 1: Cho $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

- Hàm số f(x, y) xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

- Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo phương đường thẳng y = kx ta có:

$$f(x,kx) = \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2} \; ; x \neq 0$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = \dfrac{k}{1+k^2}$ tiến tới những giới hạn khác nhau (khi k khác nhau) nên không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Thí dụ 2: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ với $g(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Làm tương tự ta có kết quả:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

Thí dụ 3: $h(x,y) = \dfrac{xy^3}{2x^2+3y^6}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \dfrac{1}{5}$ dọc theo đường parabol bậc ba: $x = y^3$.

5.1.5. Tính liên tục của hàm số nhiều biến

Cho f(M) xác định trong miền D; M_0 là điểm $\in$ D. Ta nói f(M) liên tục tại M_0 nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Nếu D đóng, M_0 là điểm biên của D thì $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ được hiểu là giới hạn của f(M) khi $M \to M_0$ ở bên trong của D.

Thí dụ: Khảo sát tính liên tục của $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Đáp số: - Với $\alpha > 1$ thì f(x, y) liên tục tại (0, 0);

- Với $\alpha \leq 1$ thì f(x, y) không liên tục tại (0, 0).

5.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

5.2.1. Đạo hàm riêng

Định nghĩa: Cho u = f(x,y) xác định trên D; $M_0(x_0, y_0) \in$ D

Nếu cho $y = y_0$; hàm số $x \mapsto f(x, y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ khi đó, nó được gọi là đạo hàm riêng của f đối với x tại M_0 và được ký hiệu $f'_x(x_0, y_0)$

hay $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0).$$

+ Số gia riêng của f(x, y) theo x tại (x_0, y_0) là:

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$$

+ Định nghĩa tương tự cho ĐHR của f đối với y tại $M_0(x_0, y_0)$. Ký hiệu:

$$f'_y(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

+ Nếu $n \geq 3$ ta cũng định nghĩa tương tự cho các đạo hàm riêng của chúng.

Chú ý: Khi tính đạo hàm riêng của 1 hàm số nào thì chỉ việc xem như hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến số khác coi như không đổi (hằng số); rồi áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số 1 biến.

Thí dụ 1: $z = x^y \ (x > 0)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y.x^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

0.0.1 downloaded 60906.p 23 15:07:15 ICT

Thí dụ 2: $u = x^3 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z}$; $z \neq 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^3 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z} \; ; z \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 z \frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}.\frac{1}{z} = \frac{x^3 z^2}{y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3 \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + x^3 z.\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}.(-\frac{y}{z^2}) = x^3(\operatorname{arctg}\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2})$$

Chú ý: $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$ là ký hiệu đạo hàm của các hàm số f đối với các biến x; y; z (vi phân của hàm trên vi phân của đối). Đó không phải là một thương số; nếu đặt ∂f ; ∂x riêng sẽ thì không có ý nghĩa gì.

5.2.2. Vi phân toàn phần

• ***Vi phân hàm 2 biến z = f(x, y).***

Cho f(x, y) xác định trên D. Giả sử cho $M_0(x_0, y_0) \in D$; $M(x_0 + \Delta x ; y + \Delta y) \in D$.

Biểu thức:

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ gọi là số gia toàn phần của f tại $M_0(x_0, y_0)$.

Khi đó: $$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \qquad (5\text{-}1)$$

trong đó: A, B phụ thuộc x_0, y_0 ; còn α, β dần tới 0 khi $M \to M_0$ tức là $\Delta x \to 0$; $\Delta y \to 0$ thì ta nói hàm số z = f(x, y) khả vi tại M_0. Biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ gọi là vi phân toàn phần của hàm số z = f(x, y) tại M_0; ký hiệu dz hay df. Hàm số z = f(x, y) khả vi trên D nếu nó khả vi tại $\forall$ điểm $\in$ D

Chú ý: 1) Nếu f(x, y) khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì f(x, y) liên tục tại M_0.

2) Đối với hàm số 2 biến z = f(x, y); sự tồn tại đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0)$ chưa đủ kết luận để hàm số khả vi tại điểm đó. Thật vậy, xét ví dụ:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

• ***Điều kiện đủ để z = f(x, y) khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$***

Định lý: Nếu hàm số f(x, y) có các đạo hàm riêng ở lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng liên tục tại M_0 thì f(x, y) khả vi tại M_0 và ta có:

$$dz = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y \qquad (5\text{-}2)$$

5.2.3. Đạo hàm của hàm số hợp

Giả sử $D \in R^n$; xét ánh xạ $\varphi : D \to R^m$

và ánh xạ $f : \varphi(D) \to R$.

Ánh xạ tích $f o \varphi$ xác định bởi:

$f o \varphi$: $(x_1, x_2,...,x_n) \in D \xrightarrow{\varphi} (u_1(x_1, x_2,...,x_n);... u_m(x_1, x_2,...,x_n)) \in \varphi(D)$

$\xrightarrow{f} f\,[u_1(x_1, x_2,..., x_n);... u_m(x_1, x_2,..., x_n)] \in R$ được gọi là hàm số hợp của các biến số $x_1, x_2,..., x_n$ qua các biến số trung gian $u_1, u_2,..., u_m$.

Để đơn giản, xét m = 2 ; n = 2 ; đặt $F = f o \varphi$, ta có:

F: $(x, y) \in D \xrightarrow{\varphi} [u(x, y), v(x, y)] \in \varphi(D) \xrightarrow{f} f\,[u(x, y); v(x, y)] = F(x, y)$

Định lý: Nếu hàm f có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}$; $\frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong $\varphi(D)$ và nếu u, v có đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì trong D tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}$; $\frac{\partial F}{\partial y}$ và ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{5-3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

trong đó ma trận $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ gọi là ma trận Jacobi của ánh xạ φ hay ma trận của u, v đối với x, y; ký hiệu $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$

Chú ý: Trong tính toán người ta không phân biệt f và F; chúng lấy cùng một giá trị tại những điểm tương ứng (u, v) và (x, y)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Thí dụ: Cho $z = e^u.\ln v$ với $\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$. Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^u(\ln v).y + e^u.\frac{1}{v}.2x = e^{xy}\left[y.\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^u(\ln v).x + e^u.\frac{1}{v}.2y = e^{xy}\left[x.\ln(x^2+y^2) + \frac{2y}{x^2+y^2}\right]$$

Chú thích 1: - Nếu $z = f(x, y)$; $y = y(x)$ thì z là hàm số hợp của $x \Leftrightarrow z = f[x, y(x)]$; khi đó ta có: $\frac{dz}{dx} = \frac{df}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'(x)$

- Nếu $z = f(x, y)$; $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ thì z là hàm số hợp của t qua 2 biến trung gian x, y.

Khi đó ta có: $\frac{dz}{dt} = \frac{df}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$.

Chú thích 2: Nếu giả thiết thêm rằng $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial y}$ liên tục thì từ (5-3) ta có $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục, khi đó z được xem như hàm số của x, y là khả vi và ta có $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial v}dy \rightarrow dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$. Điều đó có nghĩa là vi phân của hàm số nhiều biến cũng có tính bất biến như vi phân của hàm số 1 biến.

5.2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định nghĩa: Cho hàm số 2 biến $z = f(x, y)$. Các đạo hàm riêng f'_x; f'_y là những đạo hàm riêng cấp 1; các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 1 nếu tồn tại, được định nghĩa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x,y)$$

gọi là những đạo hàm riêng cấp 2.

Định nghĩa tương tự cho đạo hàm riêng cấp 3.

Thí dụ: Cho $z = x^2y^3 + x^4$ ta có:

$$z'_x = 2xy^3 + 4x^3$$

$$z'_y = 3x^2y^2$$

$$z''_{x^2} = 2y^3 + 12x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} z''_{yx} = 6xy^2 \\ z''_{xy} = 6xy^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Nhận xét } z''_{xy} = z''_{yx}$$

$$z''_{y^2} = 6x^2y$$

Định lý (Schwarz): Nếu trong lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Chú ý: Định lý Schwarz vẫn đúng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn của hàm số n biến số với $n \geq 3$.

Khi $n = 3$; $U = f(x, y, z) \Rightarrow U'''_{xyz} = U'''_{yzx} = U'''_{zxy} = U'''_{xzy} = ...$

**** Vi phân toàn phần cấp 2, vi phân toàn phần cấp cao.***

Xét hàm số $f(x, y) = z$; khi đó $dz = f'_x dx + f'_y dy$ nếu tồn tại, cũng là hàm số của x, y. Vi phân toàn phần của dz nếu tồn tại; được gọi là vi phân toàn phần cấp 2 của z, ký hiệu:

$$d(dz) = d^2z = d(f'_x dy + f'_y dy)$$

Tiếp tục đối với vi phân cấp cao hơn: $d^3z = d(d^2z)$, ...; $d^nz = d(d^{n-1}z)$. Ta có:

$$\Rightarrow d^2z = d(dz) = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_y dy$$

$$= f''_{x^2} dx^2 + \left(f''_{xy} + f''_{yx}\right) dxdy + f''_{y^2} dy^2$$

Giả thiết f''_{xy} và f''_{yx} liên tục; khi đó chúng bằng nhau. Vậy:

$$d^2z = f'_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2$$

$$\Leftrightarrow d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f$$

Với bình phương của $\frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng 2 lần đối với x; 2 lần đối với y; $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng 1 lần đối với y; 1 lần đối với x.

Tiếp tục được công thức luỹ thừa tượng trưng:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f \qquad (5\text{-}4)$$

Chú ý: Vi phân toàn phần cấp lớn hơn hoặc bằng 2 của hàm số nhiều biến số không có dạng bất biến.

5.3. CỰC TRỊ

5.3.1. Cực trị của hàm số nhiều biến số

Cho $z = f(x, y)$; xác định trên miền D; $M_0(x_0, y_0)$ là 1 điểm của D. Nói $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 nếu với mọi điểm M trong 1 lân cận nào đó của M_0 ($\neq M_0$); hiệu $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.

- Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$; thì hàm số có cực tiểu.

- Nếu $f(M) - f(M_0) < 0$; thì hàm số có cực đại.

Ta dùng ký hiệu: $\begin{cases} p = f'_x(M) \\ q = f'_y(M) \\ r = f''_{x^2}(M) \\ s = f''_{xy}(M) \\ t = f''_{y^2}(M) \end{cases}$

Định lý: Nếu $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 mà tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M)$; $q = f'_y(M)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy $= 0 \Leftrightarrow p = 0; q = 0$ (tại M_0) (5-5)

Điều kiện trên là điều kiện ắt có của cực trị; nó cho phép thu hẹp việc tìm cực trị mà tại những điểm đó cả p, q triệt tiêu hoặc tại những điểm mà ở đó hoặc p, q không tồn tại. Những điểm đó gọi là điểm tới hạn (điểm dừng).

Định lý: Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục trong 1 lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$; giả sử tại M_0 có $p = 0$, $q = 0$. Khi đó, tại M_0:

1. Nếu $s^2 - rt < 0$: $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 (cực tiểu nếu $r > 0$; cực đại nếu $r < 0$)

2. $s^2 - rt > 0$: $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_0.

3. Nếu $s^2 - rt = 0$: $f(x, y)$ có thể có cực trị tại M_0, cũng có thể không có cực trị tại M_0 (gọi là trường hợp nghi ngờ!).

Thí dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$

Ta có: $p = f'_x(M) = 3x^2 - 3$; $p = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$q = f'_y(M) = 6y^2 - 6$; $q = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$r = 6x$

$s = f''_{xy}(M) = 0$

$t = 12y$

Áp dụng định lý: Xét biểu thức $s^2 - rt$. Ta có các điểm dừng: $M_1(1, 1)$; $M_2(-1, 1)$; $M_3(-1, -1)$; $M_4(1, -1)$

- Tại M_1: ta có: $r = 6$, $s = 0$, $t = 12$, $s^2 - rt = -72 < 0$ và vì có $r = 6 > 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu.

- Tại M_3: $r = -6$; $s = 0$; $t = -12$; $s^2 - rt = -72 < 0$; $r = -6 < 0$ nên M_3: điểm cực đại.

- Tại M_2: $s^2 - rt = 72 > 0$: M_2 không phải là điển cực trị; tương tự M_4 không phải là điểm cực trị.

Chú ý: Nếu tại M_0; mà $p = q = r = s = t = 0$, thì ta không xét trường hợp này.

5.3.2. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến số trong miền đóng, bị chặn

Muốn tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến số trong miền đóng, bị chặn, ta có thể tìm điểm tới hạn trong D; tính giá trị của hàm số tại các điểm ấy rồi so sánh chúng với những giá trị của hàm số trên biên của nó.

Thí dụ: $z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$ trên miền đóng D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$

Giải: z liên tục $\forall$ x, y nên tồn tại giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên D. Ta có:

$$p = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1).\,4x = 8x(1 - 2x^2 - y^2)$$

$$q = 6y - (2x^2 + y^2 + 1).\,2y = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2)$$

Cho $p = 0$; $q = 0$ ta được:

1) $x = 0$; $y = 0$

2) $x = 0$; $1 - 2y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3) $y = 0$; $1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $y = 0$

4) $\begin{cases} 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 4x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy có 5 điểm tới hạn $O(0,0)$; $A_1(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $A_2(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $A_3(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$; $A_4(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in D$.

+ Tính giá trị của z tại các điểm đó ta được.

$$z(0) = 0;\ z(A_1) = z(A_2) = \frac{1}{4};\ z(A_3) = z(A_4) = 1$$

0.0.1 downloaded 60906.p 23 15:07:15 ICT

+ Xét giá trị của z trên biên của D: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 > 0$

$\Rightarrow z = x^2(1 - x^2)$

Xét hàm ấy với $-1 \le x \le 1$; ta có $z = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; và giá trị lớn nhất đó bằng $\frac{1}{4}$.

Kết luận: Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất = 0 tại gốc O; lớn nhất = 1 tại A_3, A_4

5.4. HÀM SỐ ẨN. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

5.4.1. Khái niệm hàm ẩn

Cho phương trình $F(x,y) = 0$ (5-6) với $F : U \to R$ là hàm số xác định trên $U \in R^2$. Nếu với mỗi giá trị $x = x_0$ trong một khoảng I nào đó; có 1 hay nhiều giá trị y_0 sao cho $F(x_0, y_0) = 0$, ta nói phương trình (5-6) xác định một hay nhiều hàm số ẩn y theo x trong khoảng I.

Vậy hàm số $f : I \mapsto R$ là hàm số ẩn xác định bởi (5-6) nếu với mọi $x \in I$ thì $(x, f(x)) \in U$ và $F(x, f(x)) = 0$.

Thí dụ: Từ phương trình (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ xác định được 2 hàm số ẩn trong [-a, a]. Nhưng gặp phương trình $xy = yx$ chẳng hạn ta không viết được tường minh các hàm y theo x.

Tương tự, phương trình 3 biến $F(x, y, z) = 0$; trong đó $F : U \to R$ là một hàm số xác định trên $U \in R^3$ có thể xác định được 1 hay nhiều hàm số ẩn z của các biến x, y. Hệ 2 phương trình.

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = 0 \\ G(x,y,z,u,v) = 0 \end{cases}$$

Với $F : U \to R$, $G : U \to R$ là các hàm số xác định trên $U \subset R^5$, có thể xác định 1 hay nhiều cặp hàm số ẩn u, v của các biến số x, y, z.

Định lý: (Định lý về sự tồn tại, liên tục, khả vi của các hàm số ẩn).

Cho phương trình $F(x, y) = 0$ (5-6)

Với $F : U \to R$: là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset R^2$. Giả sử$(x_0, y_0) \in U$; $F(x_0, y_0) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì từ phương trình (5-6) xác định trong 1 lân cận nào đó của x_0 một hàm số ẩn $y = f(x)$ duy nhất, hàm số đó có giá trị bằng y_0 khi $x = x_0$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên.

Chú ý: - Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ nhưng $F'_x(x_0, y_0) = 0$ thì định lý trên khẳng định rằng phương trình xác định hàm số $x = g(y)$, hàm số ấy có giá trị bằng x_0 khi $y = y_0$, liên tục, có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên.

- Nếu $F'_y(x_o, y_o) = F'_x(x_o, y_o) = 0$ thì không kết luận được gì về sự tồn tại của hàm số ẩn xác định bởi công thức (5-6).

- Điểm (x_0, y_0) gọi là *điểm kỳ dị* của phương trình (5-6).

5.4.2. Đạo hàm của hàm số ẩn

Giả sử các giả thiết của định lý trên được thoả mãn.

Khi đó phương trình (5-6) xác định 1 hàm số ẩn y = f(x), xác định; liên tục và có đạo hàm liên tục trong 1 khoảng I nào đó; trong khoảng ấy ta có: F[x, f(x)] = 0.

Lấy đạo hàm 2 vế theo x, ta được:

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0$$

vì $F'_y \neq 0$, ta có $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Thí dụ 1: Cho $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow F'_x = \frac{2x}{a^2}$; $F'_y = \frac{2y}{b^2}$; với $y \neq 0$; ta có $F'_y \neq 0$, khi đó phương trình trên xác định hàm số ẩn y = y(x) và $y' = -\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}$.

* Phương trình 3 biến F (x, y, z) = 0. Giả sử z = f(x, y) $\Leftrightarrow$ F [x, y, f(x, y)] = 0

Lấy đạo hàm 2 vế lần lượt theo x, y ta được $\begin{cases} F'_x + F'_z . z'_x = 0 \\ F'_y + F'_z . z'_y = 0 \end{cases}$

Vì $F'_z \neq 0$ suy ra $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$

Thí dụ 2: $F(x, y, z) = e^z + xy + x^2 + z^3 = 0$

$F'_x = y + 2x$; $F'_y = x$; $F'_z = e^z + 3z^2$

Vì $F'_z \neq 0$, $\forall$ z nên phương trình trên xác định 1 hàm số ẩn z = f(x, y) liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục.

$$z'_x = -\frac{2x + y}{e^z + 3z^2}; \qquad z'_y = -\frac{x}{e^z + 3z^2}.$$

5.4.3. Cực trị có điều kiện

Ta gọi cực trị của hàm số z = f(x, y) (5-7) với x, y được ràng buộc bởi g(x, y) = 0 (5-8) gọi là cực trị có điều kiện.

Định lý: Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số (5-7) với điều kiện (5-8). Giả sử:

1) Ở lân cận M_0 các hàm số f[x, y, g(x,y)] có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục.

2) Các đạo hàm riêng g'_x, g'_y không đồng thời bằng không tại M_0. Khi đó ta có tại M_0.

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0$$

Thí dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$; với điều kiện $ax + by + c = 0$; $c \neq 0$.

Điều kiện (5-9) có: $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0$ cho ta $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2xb = 2ay \Leftrightarrow xb = ay \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$

Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$ suy ra điểm tới hạn duy nhất: $M_0(-\dfrac{ac}{a^2+b^2}; -\dfrac{bc}{a^2+b^2})$.

Về mặt hình học, ta phải tìm cực trị của bình phương khoảng cách từ gốc O đến 1 điểm trên đường thẳng $ax + by + c = 0$. Bài toán có 1 cực tiểu, không có cực đại. Do đó cực tiểu chỉ có thể đạt được tại điểm tới hạn; cực tiểu ấy bằng: $\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

5.5. TÍCH PHÂN BỘI

5.5.1. Tích phân kép

Định nghĩa: Cho hàm số f(x, y) xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D, một cách tuỳ ý thành n mảnh nhỏ, gọi các mảnh nhỏ đó và cả diện tích của chúng là ΔS_1, ΔS_2,..., ΔS_n. Trong mỗi mảnh ΔS_i, lấy một điểm tuỳ ý $M_i(x_i, y_i)$. Tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ (5-10) được gọi là tổng tích phân của hàm f(x, y) trong miền D; ký hiệu $\iint_D f(x,y)dS$.

D được gọi là miền lấy tích phân; f là hàm dưới dấu tích phân; dS là yếu tố diện tích. Nếu tích phân (5-10) tồn tại ta nói rằng hàm số f(x, y) khả tích trong miền D.

Người ta chứng minh được rằng nếu hàm số f(x, y) liên tục trong miền bị chặn, đóng D thì nó khả tích trong miền ấy. Nếu f(x, y) liên tục, không âm với mọi (x, y) thuộc D thì tích phân kép (5-10) bằng thể tích vật thể hình trụ. Vậy:

$$V = \iint_D f(x,y)dS$$

Nếu f(x, y) $\equiv 1$, $\forall$ (x, y) $\in$ D thì tích phân kép (5-10) bằng diện tích S của miền D: $\iint\limits_D dS = S$

Chú ý: Vì tích phân kép không phụ thuộc cách chia miền D thành các mảnh nhỏ như đã nêu trong định nghĩa, ta có thể chia D bởi 2 họ đường thẳng song song với các trục toạ độ. Do đó dS = dx.dy và có thể viết:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

• ***Điều kiện tồn tại của tích phân kép:*** (tính chất của tích phân kép)

Tích phân kép có những tính chất tương tự như tích phân xác định; với giả thiết rằng các tích phân có mặt trong các tính chất ấy đều tồn tại.

1. $\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

2. $\iint\limits_D k\, f(x,y)dxdy = k \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong đó k là hằng số.

3. Nếu miền D có thể chia thành 2 miền D_1; D_2 không dẫm lên nhau thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4. Nếu f(x, y) $\leq$ g(x, y); $\forall$ (x, y) $\in$ D thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

5. Nếu m $\leq$ f(x, y) < M với mọi (x, y) $\in$ D, m và M là hằng số thì:

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS \text{ (S: diện tích của miền D)}$$

6. Nếu f(x, y) liên tục trong miền bị chặn D thì trong D có ít nhất 1 điểm $(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\bar{x}, \bar{y}).S \text{ (S: diện tích của miền D)}$$

• ***Điều kiện khả tích***

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hàm số f(x, y) khả tích trên miền D là:

$$\lim_{\max d_i \to 0} (D - S) = 0$$

Hệ quả: Nếu hàm số f(x, y) liên tục trong một miền bị chặn, đóng D thì nó khả tích trong miền ấy.

• ***Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Đềcac***

1- Trường hợp 1. Miền lấy tích phân là hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ.

Định lý Fubini:

Giả sử D = [a, b] x [c, d]; giả sử f : $D \to R$: khả tích trên D. Khi đó:

i) Nếu tồn tại $x \in [a, b]$; hàm số $y \to f(x, y)$ khả tích trên [c, d] thì hàm số $x \mapsto I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ khả tích trên [a, b] và:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \qquad (5\text{-}11)$$

ii) Nếu với mọi $y \in [c, d]$; hàm số $x \to f(x,y)$ khả tích trên [a, b] thì hàm số $y \mapsto J(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ khả tích trên [c, d] và:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (5\text{-}12)$$

Hệ quả: Nếu f(x, y) liên tục trên D = [a, b] × [c, d] thì: (công thức đổi thứ tự tích phân)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Thí dụ: $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$; $D = [1,2]^2$ (= [1,2] . [1,2])

Vì $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$ liên tục trên D, nên $I = \int_1^2 dx . \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$.

Ta có: $\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

Vậy $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln \frac{x+1}{x+2}\Big|_1^2 = \ln\frac{9}{8}$

Chú ý: nếu $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x)f_2(y)dy = \int_a^b f_1(x)dx . \int_c^d f_2(y)dy \qquad (5\text{-}13)$$

2- Trường hợp 2: Miền lấy tích phân là miền bất kỳ bị chặn.

Định lý:

Giả sử $D = \{(x,y) : a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ với y_1, y_2 là 2 hàm số khả tích trên [a, b]; $y_1(x) \le y_2(x)$; $\forall x \in [a, b]$. Giả sử f là hàm số khả tích trên D.

Nếu với $\forall x \in [a, b]$; hàm số $y \to f(x, y)$ khả tích trên $[y_1(x); y_2(x)]$ thì hàm số $x \to I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ khả tích trên [a,b] và:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (5\text{-}14)$$

Hệ quả: $D = \{(x,y):\ a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ y_1, y_2 là hai hàm số liên tục trên [a, b]. Nếu f liên tục trên D thì:

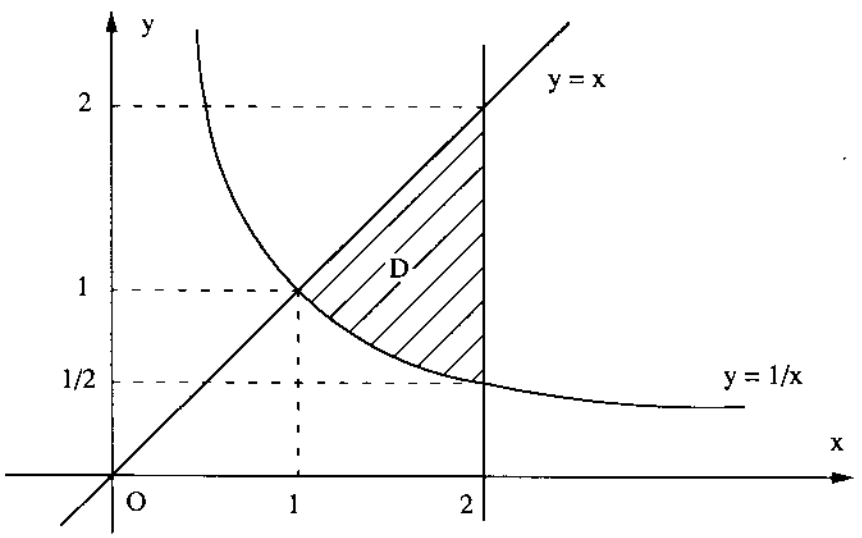
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

• ***Công thức đổi thứ tự tích phân:***

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (5\text{-}15)$$

Thí dụ 1: Hãy xác định các cận tích phân khi tính $I = \iint f(x,y)dxdy$

Với D được giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{x} \\ y = x \end{cases}$



Miền D được xác định bởi $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x} \le y \le x \end{cases} \to \quad I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy \qquad (*)$

Hoặc chia D thành D_1 và D_2: $D_1 \begin{cases} \frac{1}{2} \le y \le 1 \\ \frac{1}{y} \le x \le 2 \end{cases}$; $D_2 \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ y \le x \le 2 \end{cases}$

Vậy $$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y)dx \qquad (**)$$

Nhận xét: Công thức (*) đơn giản hơn công thức(**)

Thí dụ 2:

Tính $I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$; $D \begin{cases} y = x & \to x = y \\ y = x+1 & \to x = y-1 \\ y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow D: \begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ y-1 \le x \le y \end{cases}$$

$$\to I = \int_{1}^{3} dy \int_{y-1}^{y} (x^2 + y^2)dx = 14$$

• Đổi biến số trong tích phân kép

** Công thức đổi biến số trong tích phân kép*

Xét tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$ trên D; f(x, y) liên tục trên D.

Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ (5-16)

Giả sử thoả mãn 3 điều kiện:

1. x(u,v); y(u,v) là hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D' của mặt phẳng O'uv.

2. Các công thức (5-16) xác định 1 song ánh từ miền D' lên miền D của mặt phẳng Oxy.

3. Định thức Jacobi của nó:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \ne 0 \text{ trong miền D'.}$$

Khi đó, ta có công thức:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)].|J|\, dudv \qquad (5\text{-}17)$$

Giải thích: Đưa miền D $\begin{cases} y = y_2(x) \\ y = y_2(x) \\ x = x_1(y) \\ x = x_2(y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_2 = b \\ v_1 = c \\ v_2 = d \end{cases}$

Trở về dạng tích phân kép trong hệ toạ độ Đềcác có miền D là hình chữ nhật.

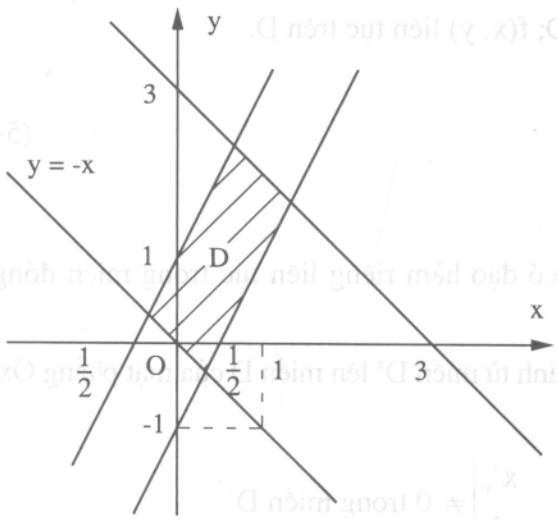
Thí dụ 1: Tính $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường

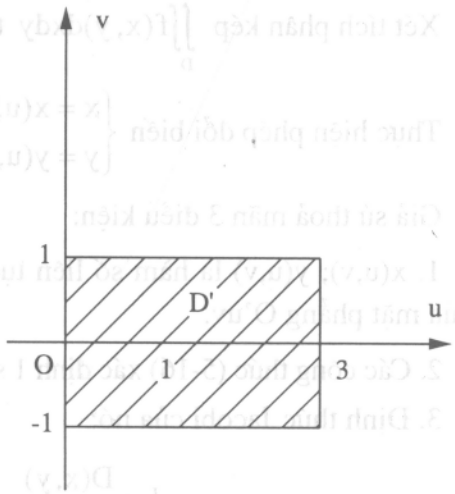
$$\begin{cases} y = -x \\ y = -x+3 \\ y = 2x-1 \\ y = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=3 \\ -2x+y=-1 \\ -2x+y=1 \end{cases}$$

Đổi biến: $\begin{cases} x+y=u \\ -2x+y=v \end{cases} \Rightarrow D' \begin{cases} u=0 \\ u=3 \\ v=-1 \\ v=1 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} x+y=u \\ -2x+y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u-v}{3} \\ y = \dfrac{2u+v}{3} \end{cases}$$





Định thức Jacobi: $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Áp dụng công thức (5-17) ta được:

$$I = \frac{1}{3}\iint_{D'} u.dudv = \frac{1}{3}\int_0^3 u.du.\int_{-1}^1 dv \quad = \frac{1}{3}.\frac{u^2}{2}\ v\Big|_{-1}^{1} \quad = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot 2 = 3$$

Thí dụ 2: Tính $I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy,\ \ D\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 1 \end{cases}$

Giải: Đổi biến:

$$\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

Đó là song ánh từ D lên D' xác định bởi: $\begin{cases} v \ge 0 \\ u + v \ge 0 \\ v - u \ge 0 \\ v \le 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad u + v \ge 0, u \ge 0, v - u \ge 0, v \le 1$$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \ne 0$$

Vậy: $I = \frac{1}{2}\iint_{D'} e^{u/v} dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 dv.\int_{-v}^{v} e^{u/v} dv \ = \frac{1}{2}(e - e^{-1})\int_0^1 vdv = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$.

• ***Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ cực.***

Công thức liên hệ giữa toạ độ Đềcác (x, y) và toạ độ cực (r, φ) của cùng một điểm là:

$$\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad r > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Các công thức đó xác định 1 song ánh giữa toạ độ Đềcác và toạ độ cực.

Thực hiện phép đổi biến. Ta có:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \ne 0$$

(Trừ tại gốc 0 (gốc 0 có r = 0 ; φ tuỳ ý))

Vậy: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi).r.dr.d\varphi$.

Nếu $D: \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r.dr$

Đặc biệt $0 \in D$ và mọi tia phát xuất từ 0 đều cắt biên của miền D tại 1 điểm có bán kính vectơ là $r(\varphi)$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r.dr$$

Thí dụ 1: Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$; D là $\frac{1}{4}$ hình tròn đơn vị nằm trên góc phần tư thứ nhất.

Chuyển sang toạ độ cực, biểu thức dưới dấu tích phân là: $\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{1+r^2}}$.

Miền $D': \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Ta được kết quả $= \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$

Thí dụ 2: Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

với $D: \begin{cases} x^2+y^2-2y \ge 0 \\ x^2+y^2-1 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Chuyển sang hệ toạ độ cực; hai đường $x^2 + y^2 - 2y = 0$ và $x^2 + y^2 = 1$ có phương trình trong toạ độ cực là: $r = 2\sin\varphi$; $r = 1$.

Chúng cắt nhau tại điểm có toạ độ cực là $(1, \frac{\pi}{6})$. Vậy miền: $D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6} \\ 2\sin\varphi \le r \le 1 \end{cases}$

Do đó $I = \int\limits_0^{\pi/6} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{1} r^2 dr$.

Tính được kết quả $= \frac{1}{3}(\frac{\pi}{6} + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3})$.

0.0.1 downloaded 60906.p 23 15:07:15 ICT

• ***Ứng dụng hình học tích phân kép***

1- Ứng dụng 1: Tính thể tích của vật thể

Thể tích V của hình trụ mà mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh // Oz; đáy là miền D $\in$ Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong z = f(x,y); f(x,y) $\geq$ 0 và liên tục trên D được tính bởi công thức: $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

Thí dụ 1: Tính V của vật thể giới hạn bởi: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ và mặt $z = x^2 + xy + 1$.

$$V = \iint\limits_D (x^2 + xy + 1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 1)dy =$$

$$= \int_0^1 dx(x^2 y + x.\frac{y^2}{2} + y)\Big|_{y=0}^{y=1-x} = \int_0^1 (-\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} + 1)dx = (-\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} + x)\Big|_0^1 = \frac{5}{8}$$

2- Ứng dụng 2: Tính diện tích hình phẳng: $S = \iint\limits_D dxdy$

3- Ứng dụng3: Tính diện tích mặt bất kỳ: $\partial = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy$ với $p = f'_x$; $q = f'_y$ liên tục trên D.

5.5.2. Tích phân bội 3

• ***Khái niệm tích phân bội 3***

Cho hàm số f(x, y, z) xác định trong một miền đóng - giới nội V của không gian Oxyz.

Chia miền V một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ, gọi tên và thể tích của các miền nhỏ ấy là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Trong mỗi miền ΔV_i lấy một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ được gọi là tổng tích phân của hàm số f(x, y, z) trong miền V.

Nếu $n \to \infty$ sao cho max $(d_i) \to 0$ (d_i là đường kính của miền nhỏ ΔV_i) mà I_n dần tới giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm M_i trong miền ΔV_i thì giới hạn đó gọi là tích phân 3 lớp của hàm số f(x, y, z) trong miền V và được ký hiệu là: $\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$

Nếu tích phân đó tồn tại, ta nói rằng hàm số f(x, y, z) khả tích trên miền V.

Ta thừa nhận định lý: *Nếu hàm số f(x, y, z) liên tục trên miền bị chặn, đóng V thì nó khả tích trên miền ấy.*

Nếu f(x, y, z) là khối lượng riêng của vật thể V thì tích phân trên cho ta khối lượng của vật thể đó.

Nếu f(x, y, z) ≡ 1 thì $\iiint dV$ cho ta thể tích miềnV.

Tích phân bội 3 cũng có các tính chất như tích phân kép.

Chú ý: Vì tích phân bội 3 không phụ thuộc cách chia miền V thành các miền nhỏ nên ta có thể chia miền V thành 3 họ mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ. Do đó dV = dxdydz và $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$.

• ***Cách tính tích phân bội 3 trong hệ toạ độ Đềcác***

Giả sử: $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ trong đó: f(x, y, z) liên tục trong V.

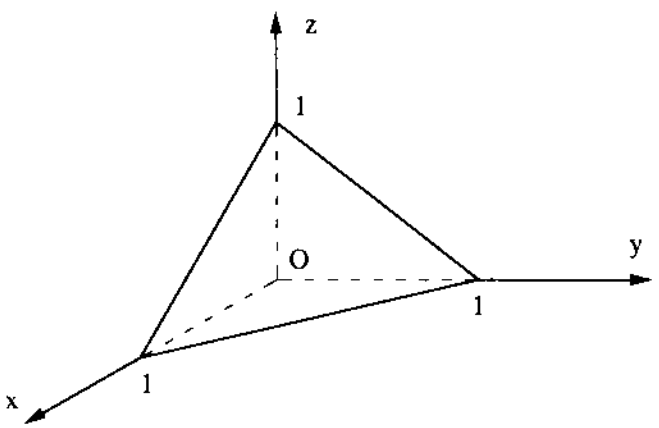
Nếu V được giới hạn bởi các mặt $\begin{cases} z = z_1(x,y) \\ z = z_2(x,y) \end{cases}$; trong đó $z_1(x, y)$; $z_2(x, y)$ liên tục trong D; D là hình chiếu của V trên mặt phẳng Oxy thì:

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (5\text{-}18)$$

Nếu D được giới hạn bởi các đường $y = y_1(x)$; $y = y_2(x)$ trong đó $y_1(x)$; $y_2(x)$ là những hàm số liên tục trên [a,b] thì:

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (5\text{-}19)$$

Thí dụ 1: Tính $I = \iiint \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$; V là miền được giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng x + y + z = 1



$$V = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$$

Giải: Áp dụng công thức (5-19): $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$

$$= ... = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$$

Thí dụ 2: Tính $I = \iiint_V z dxdydz$. V là nửa hình cầu giới hạn bởi z = 0 và mặt $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Giải: Gọi D là hình chiếu của V lên mặt z = 0; đó là mặt tròn đơn vị.

Áp dụng (5-18) ta có: $I = \iint_D dxdy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\iint_D (R^2 - x^2 - y^2)dxdy$

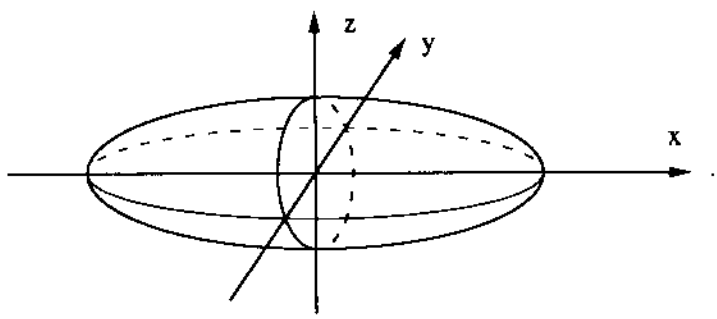
Chuyển sang toạ độ cực để tính tích phân kép trên; ta được:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2)rdr = -\frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)^2\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{4}$$

Chú ý: $$I = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x,y,z)dydz \qquad (5\text{-}20)$$

Thí dụ: Tính $\iiint_V x^2 dxdydz$; V: giới hạn bởi mặt Elipxoit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Giải:



Áp dụng (5-20): $\Rightarrow I = \int_{-a}^{a} x^2 dx \iint_{S(x)} dydz$ với $\iint_{S(x)} dydz$ bằng diện tích thiết diện S(x).

Vì S(x) là miền giới hạn bởi đường elíp: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

hay $$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$ nên diện tích của S(x) bằng $\pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

Do đó: $I = \pi bc \int_{-a}^{a} x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\int_0^a\left(x^2-\frac{x^4}{a^2}\right)dx$

$$= 2\pi bc\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{15}\pi a^3 bc$$

• ***Phương pháp đổi biến trong tích phân bội 3***

Công thức đổi biến trong tích phân bội 3.

Xét tích phân bội 3: $\iiint f(x,y,z)dxdydz$

trong đó f(x,y,z) liên tục trên V.

Đổi biến:
$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \qquad (5\text{-}21)$$

Giả sử rằng: x(u, v, w); y(u, v, w); z(u, v, w) liên tục cùng với các đạo hàm cấp 1 liên tục trên miền đóng V' của không gian Ouvw.

Các công thức (5-21) xác định 1 song ánh từ V' $\to$ V của không gian Oxyz.

Định thức Jacobi: $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$ trong miền V'

Khi đó: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)].|J|dudvdw \qquad (5\text{-}22)$

• ***Tích phân bội 3 trong hệ toạ độ trụ***

M(x, y, z) $\in$ không gian Oxyz $\to$ (r, φ, z) với (r, φ) là toạ độ cực của điểm M'(x, y); hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy.

Với $\forall$ điểm của không gian ta có:

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Khi đó $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

với $J \neq 0$ khi đó $r \neq 0$.

Công thức (5-22) cho ta: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$

• ***Tích phân bội 3 trong hệ toạ độ cầu***

$$\begin{cases} x = r\sin\phi.\cos\varphi \\ y = r\sin\phi.\sin\varphi \\ z = r\cos\phi \end{cases} ; \qquad r > 0;\ 0 < \phi < \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi \text{ thì } J = -r^2 - \sin\phi$$

với $J \neq 0$ khi $r \neq 0$ và $\sin\phi \neq 0$. Khi đó:

$$I = \iiint\limits_{V'} f(r\sin\phi\cos\varphi, r\sin\varphi.\sin\phi, r\cos\phi)r^2\sin\phi\, d\phi d\varphi$$

Đó là công thức tính phân bội 3 trong hệ toạ độ cầu.

Thí dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$; V là miền giới hạn bởi hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Giải:

Chuyển sang toạ độ cầu ta có: $I = \iiint\limits_{V'} r\sin\phi drd\phi d\varphi$. Miền V' được xác định bởi $1 \le r \le 2$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \phi \le \pi$.

Vậy $$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_1^2 rdr = 2\pi.\pi.\frac{3}{2} = 6\pi.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa, giới hạn và tính liên tục của hàm số nhiều biến.

2. Đạo hàm và vi phân hàm số nhiều biến. Đạo hàm riêng; vi phân toàn phần và ứng dụng để tính gần đúng.

3. Cực trị hàm số nhiều biến.

4. Tích phân kép. Định nghĩa; điều kiện tồn tại; cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Đềcác. Ứng dụng của tích phân kép.

5. Tích phân bội 3. Định nghĩa; điều kiện tồn tại; cách tính tích phân bội 3 trong hệ toạ độ Đềcác. Ứng dụng của tích phân bội 3.

BÀI TẬP

5.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

1) $z = \ln xy$ 2) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$

3) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

5.2. Tìm giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ của các hàm số $f(x, y)$ sau:

1) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; 2) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

3) $f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y^2}(1 - \cos y)$.

5.3. Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau:

1) $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; 2) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 3) $z = y^2 \sin \frac{x}{y}$

4) $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$; 5) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

5.4. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

1) $x^3y - y^3x = a^4$. Tính y'.

2) $x \cdot e^y + y \cdot e^x - e^{xy} = 0$. Tính y'.

3) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Tính y' ; y''.

4) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. Tính z'_x ; z'_y.

5.5. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

1) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$;

2) $z = x^2 . \ln(x + y)$

3) $z = \text{arctg}\ \frac{y}{x}$

5.6.

1) Tìm hàm số f(x, y) thoả mãn phương trình $f''_{xy} = 0$.

2) Tìm hàm số f(x, y) thoả mãn phương trình $f''_{x^2} = 0$.

5.7. Tìm cực trị của các hàm số sau;

1) $x = 4(x - y) - x^2 - y^2$

2) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

3) $z = x + y - x . e^y$

5.8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

1) $z = x^2 - y^2$ trong miền tròn $x^2 + y^2 \leq 4$.

2) $z = x^2y\ (4 - x - y)$ trong miền tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$.

3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$; $y = 2$.

4) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; $y = 0$; $y = \frac{\pi}{2}$.

5.9. Tìm cực trị có điều kiện:

1) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

2) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

5.10. Tính các tích phân:

a) $\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^n dx$;

$\alpha > 0$; n nguyên dương.

b) $\int_0^{\pi/2} \ln(1 + y\sin^2 x)dx$;

$y > -1$.

5.11. Tính các tích phân:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$

với $y > 0$; n - nguyên dương.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$;

$\alpha > 0$; $\beta > 0$.

5.12. Đổi thứ tự tích phân trong các tích phân sau:

a) $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$; b) $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx$

c) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$; d) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$; $a > 0$

5.13. Tính $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}$; D là miền xác định bởi $x \geq 1$; $y \geq 1$; $x + y \leq 3$.

5.14. Tính $\iint_D \frac{ydxdy}{x^2+1}$; D là miền xác định bởi $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x^2 + y^2 \leq 1$.

5.15. Tính $\iint_D x^2(y-x)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $x = y^2$.

5.16. Tính $\iint_D \ln(x+y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi $x = 1$; $y = 1$; $y = x + 1$.

5.17. Tính $\iint_D \frac{xdxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$; D là miền giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x$ và $x = 2$.

5.18. Tính $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$; D là miền giới hạn bởi $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$.

5.19. Tính $\iint_D (x-y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$; $y = 2x - 1$.

5.20. Tính $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$; D là miền giới hạn bởi:

a) Các đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = 4a^2$; $a > 0$.

b) Đường hoa hồng 4 cánh $r = a\sin 2\varphi$; $a > 0$.

5.21. Tính $\iint_D (x^2+y^2+1)dxdy$; D là miền giới hạn bởi $x^2 + y^2 - x = 0$.

5.22. Tính $\iint\limits_D (x + 2y + 1)dxdy$;

D là giao của 2 đường tròn $x^2 + y^2 \le 2y$

$x^2 + y^2 \le 2x$.

5.23. Tính $\iint\limits_D (x + y)^3 (x - y)^2 dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường

$x + y = 1$; $x - y = 1$; $x + y = 3$; $x - y = -1$.

5.24. Tính $\iint\limits_D xydxdy$; D là miền giới hạn bởi $y^2 = x$; $y^2 = 3x$; $y = x$; $y = 2x$.

5.25. Tính diện tích của các hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $x = 4y - y^2$; $x + y = 6$. b) $y^2 = x^3$; $y^2 = 8(6 - x)^3$.

c) $r = a\cos\varphi$; $r = b\cos\varphi$ $(b > a > 0)$.

d) $r = a\sin 2\varphi$; e) $r = a(1 + \cos\varphi)$; $(a > 0)$

5.26. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt:

a) $z = 1 - x^2 - y^2$; $y = x$; $y = \sqrt{3}x$; $z = 0$ và nằm trong góc phần tám thứ nhất.

b) $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + z^2 = a^2$

c) $z = x^2 + y^2$; $z = x + y$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; $x^2 + y^2 = z^2$.

5.27. Tính diện tích của:

a) Phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$; $z \ge 0$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

b) Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm ở trong hình trụ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$; $(a > 0)$

5.28. Tính $\iiint\limits_V (1 - x - y - z)dxdydz$;

V là miền xác định bởi $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $x + y + z \le 1$.

5.29. Tính $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$;

V là miền xác định bởi $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \le 1$.

5.30. Tính thể tích của vật thể:

a) Giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$; ; $z = 2(x^2 + y^2)$; $y = x^2$; $y = x$.

b) Giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$; $z^2 = x^2 + y^2$.

c) Xác định bởi $0 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \le 1$; $-h \le z \le h$.

Chương 6
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

6.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

Phương trình vi phân là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Trong đó:

x: biến số độc lập ; y = f(x): là hàm số phải tìm ; y', y'',..., $y^{(n)}$: là các đạo hàm của nó. Cấp cao nhất của đạo hàm của y gọi là cấp của phương trình.

Thí dụ: Phương trình vi phân cấp 1: $y' + xy^2 - 2y = e^x$

Phương trình vi phân cấp 2: $y'' + 4y = 0$

Phương trình vi phân gọi là tuyến tính nếu F là bậc nhất đối với y, y', y'', ... , $y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

với $a_1(x)$; $a_2(x)$,..., $a_n(x)$; b(x) là những hàm số cho trước.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thoả mãn phương trình đó; tức là mọi hàm số sao cho khi thế nó vào phương trình ta được đồng nhất thức.

Thí dụ 1: Các hàm số $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$; (C_1 ; C_2 = const)

là nghiệm của phương trình: $y'' + 4y = 0$

Thật vậy:

Vì $y' = -C_1 . 2 \sin 2x + C_2 . 2 \cos 2x$

$y'' = -4 . C_1 . \cos 2x - 4 . C_2 . \sin 2x$

$= -4 (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

Thay vào vế trái của phương trình:

$$VT = -4(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 4(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = 0 = VP.$$

Cho C_1 ; C_2 những giá trị khác nhau, ta được những nghiệm khác nhau của phương trình đó nên phương trình đã cho có vô số nghiệm.

Thí dụ 2: Xét phương trình $y' = \cos x$. Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int y' dx = \int \cos x dx \Leftrightarrow y = \sin x + C \text{, với C là hằng số tuỳ ý.}$$

Giả sử nếu đặt thêm điều kiện: hàm số y có giá trị bằng 2 khi $x = \frac{\pi}{2}$; khi đó:

$$2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

Vậy $y = \sin x + 1$ là nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện đã cho.

Giải 1 phương trình vi phân và tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ý nghĩa hình học:

+ Mỗi nghiệm của phương trình vi phân xác định 1 đường gọi là đường tích phân của phương trình.

+ Giải 1 phương trình vi phân là tìm tất cả các đường tích phân của nó, các đường đó được xác định bởi hoặc phương trình $y = f(x)$; hoặc bởi phương trình $\phi(x, y) = 0$; hoặc bởi phương trình tham số: $x = x(t)$; $y = y(t)$

Chú ý: Trong giáo trình này ta chỉ xét phương trình vi phân cấp 1 và phương trình vi phân cấp 2.

6.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

6.2.1. Định nghĩa

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 là:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (6\text{-}1)$$

Nếu giải được phương trình đó đối với y'; phương trình sẽ có dạng:

$$y' = f(x, y) \qquad (6\text{-}2)$$

Thí dụ: Các phương trình : $y' + xy = x \sin x$

và $yy' + x^2 + y^2 = 0$ là phương trình vi phân cấp 1.

Trong đó phương trình: $y' + xy = x \sin x$ là tuyến tính.

6.2.2. Nghiệm riêng, nghiệm tổng quát

Định lý: (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm) cho phương trình vi phân cấp 1:

$$y' = f(x, y) \qquad (6\text{-}2)$$

Giả sử $f(x, y)$ liên tục trên D; Giả sử (x_0, y_0) là 1 điểm $\in$ D. Khi đó trong 1 khoảng lân cận nào đó của điểm $x = x_0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm $y = f(x)$ của phương trình (6-2); lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$.

Nếu ngoài ra, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ cũng liên tục trên D thì nghiệm đó là duy nhất.

* Điều kiện $y = y(x)$ lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$ được gọi là điều kiện ban đầu của phương trình vi phân; ký hiệu: $y\big|_{x=x_0} = y_0$

* Bài toán tìm nghiệm của phương trình (6-2) thoả mãn điều kiện ban đầu gọi là bài toán Cauchy của phương trình vi phân.

Định nghĩa: (Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (6-2)):

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 1: $y' = f(x,y)$ là hàm số

$$y = \varphi(x, C) \qquad (*)$$

Với C là 1 hằng số tuỳ ý, thoả mãn các điều kiện sau:

+) Nó thoả mãn phương trình vi phân với mọi giá trị của C.

+) Với mọi (x_0, y_0) ở đó các điều kiện của định lý trên được thoả mãn, có thể tìm được 1 giá trị $C = C_0$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ thoả mãn điều kiện ban đầu: $y\big|_{x=x_0} = y_0$

(Về mặt hình học, nghiệm tổng quát phương trình vi phân (6-2) được biểu diễn bởi 1 họ đường tích phân $y = \varphi(x, C)$ phụ thuộc 1 tham số).

Chú ý: Có nhiều khi, ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (6-2) dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà chỉ tìm được một hệ thức có dạng $\phi(x, y, C) = 0$, nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Hệ thức đó gọi là tích phân tổng quát của phương trình (6-2).

• *Nghiệm riêng:*

Nghiệm riêng của phương trình vi phân (6-2) là mọi hàm số $y = \varphi(x, C)$ mà ta có được bằng cách cho C trong nghiệm tổng quát một giá trị xác định C_0. Hệ thức $\phi(x, y, C_0) = 0$ mà ta có được bằng cách cho C trong tích phân tổng quát lấy giá trị C_0 được gọi là tích phân riêng.

• *Nghiệm kỳ dị:* Phương trình (6-2) có thể có 1 số nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát; những nghiệm đó được gọi là nghiệm kỳ dị.

6.2.3. Phương trình khuyết

* ***Dạng 1:*** Phương trình khuyết y: $F(x,y') = 0$. Ba trường hợp thường gặp là:

- *Trường hợp 1:* Phương trình giải ra được đối với y' có dạng $y' = f(x)$. Khi đó, chỉ việc lấy tích phân 2 vế ta được $y = \int f(x)dx = F(x) + C$; (F(x) là nguyên hàm của f(x)).

- *Trường hợp 2:* Phương trình giải ra được đối với x có dạng $x = f(y')$.

Đặt $y' = t \Rightarrow x = f(t)$

$dx = f'(t)dt$

$dy = tdx = t \,.\, f'(t)dt$. Do đó:

$$y = \int tf'(t)dt = tf(t) - \int f(t)dt$$

$$= t.f(t) - F(t) + C \text{ với } F(t) \text{ là nguyên hàm của } f(t).$$

Khi đó, ta được phương trình tham số của đường tích phân:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = tf(t) - F(t) + C \end{cases}$$

Thí dụ: Giải phương trình: $x = y'^2 + y' + 1$

Đặt $y' = t$ suy ra $x = t^2 + t + 1$

$$dx = (2t + 1)dt$$

$$dy = y'dx = t(2t + 1)dt = (2t^2 + t)dt$$

Vậy $$y = \int(2t^2 + t)dt = 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Phương trình tham số của đường tích phân là: $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} + C \end{cases}$

- *Trường hợp 3:* Phương trình có thể tham số hoá:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$$

Ta có $dy = y'\,dx = g(t).\,f'(t)dt$. Do đó $y = \int g(t).f'(t)dt = h(t) + C$ với $h(t)$ là nguyên hàm của $g(t).\,f'(t)$. Ta được phương trình tham số của đường tích phân.

* ***Dạng 2:*** Phương trình khuyết x: $F(y, y') = 0$. Có 3 trường hợp thường gặp:

- *Trường hợp 1:* Phương trình dạng $y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$

Lấy tích phân 2 vế ta được $x = F(y) + C$ với $F(y)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{f(y)}$.

- *Trường hợp 2:* Phương trình có dạng $y = f(y')$

Đặt $y' = t \rightarrow y = f(t)$; $dy = f'(t)dt$

Mặt khác, $dy = tdx$ suy ra $dx = \frac{f'(t)}{t}dt$ suy ra $x = \int\frac{f'(t)}{t}dt = F(t) + C$; với $F(t)$ là nguyên hàm của $\frac{f'(t)}{t}$, ta được phương trình tham số của đường tích phân.

- *Trường hợp 3:* Phương trình tham số hoá của $F(y, y') = 0$ dưới dạng: $\begin{cases} y = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$

Ta có $dy = f'(t)dt = g(t)dx \rightarrow dx = \frac{f'(t)}{g(t)}dt$. Vậy $x = \int\frac{f'(t)}{g(t)}dt = G(t) + C$

Thí dụ: Giải phương trình: $y^2 + y'^2 = 1$. Tham số hoá nó bằng cách đặt:

$$y = \sin t \rightarrow y' = \cos t$$

Vì $y' = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'dx \Rightarrow \cos t dt = \cos t dx$. Có 2 trường hợp:

- Nếu $\cos t \neq 0 \rightarrow dt = dx; t = x + C \rightarrow y = \sin(x + C)$: đó là nghiệm tổng quát.

- Nếu $\cos t = 0 \rightarrow t = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ vậy $y = \pm 1$ không thuộc họ nghiệm tổng quát; nó là nghiệm kỳ dị.

6.2.4. Phương trình với biến số phân ly (phân ly biến số)

Định nghĩa: là phương trình có dạng $f(x)dx = f(y)dy$ (6-3)

Lấy tích phân 2 vế $\int f(x)dx = \int g(y)dy \Rightarrow F(x) = G(y) + C$

Với F(x) là nguyên hàm của f(x); G(y) là nguyên hàm của g(y).

Thí dụ: Giải phương trình: $(1 + x)ydx + (1 - y)xdx = 0$

Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$ phương trình tương đương: $(\dfrac{1}{x} + 1)dx = (1 - \dfrac{1}{y})dy$

Lấy tích phân 2 vế ta được $\ln|x| + x = y - \ln|y| + C$ hay $\ln|xy| + x - y = C$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình.

Ta có: $x = 0$, $y = 0$ cũng thoả mãn phương trình, chúng biểu thị 2 đường tích phân kỳ dị.

Chú ý: Những phương trình khuyết, dạng $y' = f(x)$ hoặc $y' = f(y)$ cũng là những phương trình với biến số phân ly.

6.2.5. Phương trình thuần nhất

Dạng tổng quát: $$y' = f(\frac{y}{x}) \quad (6\text{-}4)$$

Nhận xét: Phương trình không đổi khi ta thay (x, y) bởi (kx, ky), k: hằng số.

Đặt $y = ux$, với u là hàm số của x; suy ra $y' = u + u'.x = f(u)$

hay $$x.\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

Vậy, nếu $f(u) - u \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{f(u) - u}$; đó là phương trình với biến số phân ly.

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\ln|x| = \int \dfrac{du}{f(u) - u} = \Phi(u) + \ln|C|$

Với $\Phi(u)$ là nguyên hàm của $\dfrac{1}{f(u) - u}$. Do đó $x = C.e^{\Phi(u)}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (6-4) là $x = C.e^{\Phi(\frac{y}{x})}$

Vậy phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là: $\begin{cases} x = C.e^{\Phi(u)} \\ y = C.u.e^{\Phi(u)} \end{cases}$ đó là một họ *đường vị tự.*

Đặc biệt: Nếu f(u) = u → phương trình (6-4) có dạng: $y' = \frac{y}{x}$.

Nghiệm tổng quát của nó là: y = Cx.

Còn nếu f(u) = u tại $u = u_0$ thì $y = u_0x$ cũng là nghiệm của phương trình.

Thí dụ 1. Giải phương trình: $y' = \frac{x + ay}{ax - y}$; a: hằng số

Đây là phương trình thuần nhất vì vế phải có thể viết là: $\dfrac{1 + a\frac{y}{x}}{a - \frac{y}{x}}$

Đặt y = ux suy ra $u + x\frac{du}{dx} = \frac{1 + au}{a - u}$ hay $\frac{dx}{x} = \frac{a - u}{1 + u^2}du$

Lấy tích phân 2 vế → $\ln|x| = a.\text{arctg}u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + \ln|C|$ hay

$$x\sqrt{1 + u^2} = C.e^{a.\text{arctg}u}. \text{ Do đó } \sqrt{x^2 + y^2} = C.e^{a.\text{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Chú ý: Nếu đổi sang hệ toạ độ cực, đường tích phân tổng quát có dạng: $r = C.e^{a\varphi}$ - (gọi là đường xoắn ốc logarit).

Thí dụ 2. Giải phương trình: $x^2y'^2 - (x^2 + y^2) = 0$

Đó là phương trình thuần nhất vì có thể viết nó dưới dạng: $y'^2 - (\frac{y}{x})^2 = 1$

Tham số hoá bằng cách đặt $\begin{cases} y' = \text{cht} \\ \frac{y}{x} = \text{sht} \end{cases}$

Suy ra dy = chtdx. Mặt khác, vì y = x sht → dy = sht dx + x cht dt.

Do đó: (cht - sht) dx = x cht dt.

Nhưng do cht - sht = $e^{-t} \neq 0$ nên $\frac{dx}{x} = e^t\text{chtdt} = \frac{e^{2t} + 1}{2}dt$.

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\ln|x| = \frac{e^{2t} + 2t}{4} + \ln|C|$.

Đặt $g(t) = \frac{e^{2t} + 2t}{4}$ ta được $x = C \cdot e^{g(t)}$; $y = C.sht.e^{g(t)}$

Đó là phương trình tham số của họ đường tích phân tổng quát, đó là 1 họ đường vị tự.

Chú thích: Phương trình dạng $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ trong đó $P(x, y)$; $Q(x, y)$ là 2 hàm số thuần nhất cùng bậc, cũng là phương trình thuần nhất, vì tỉ số $\frac{P}{Q}$ có thể biểu thị dưới dạng $f(\frac{y}{x})$. Chẳng hạn phương trình $(2xy - 5y^2)dx + (3y^2 - xy)dy = 0$ là phương trình vi phân cấp 1 thuần nhất.

6.2.6. Phương trình tuyến tính

Dạng tổng quát: $$y' + p(x)y = q(x) \qquad (6\text{-}5)$$

với $p(x)$, $q(x)$ là những hàm số liên tục.

Phương trình (6-5) gọi là thuần nhất nếu $q(x) = 0$; là không thuần nhất nếu $q(x) \neq 0$.

Để giải phương trình (6-5), trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (6\text{-}6)$$

Nếu $y \neq 0$ thì $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$. Đó là phương trình với biến số phân ly, suy ra:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \quad ; \quad C \text{ là hằng số tuỳ ý.}$$

Do đó $y = C.e^{-\int p(x)dx}$ (6-7) là nghiệm tổng quát của phương trình (6-6).

Chú ý: $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (6-6) và là 1 nghiệm riêng ứng với $C = 0$.

Bây giờ xem C là một hàm số; ta phải tìm C để phương trình (6-7) thoả mãn phương trình không thuần nhất (6-5).

Lấy đạo hàm 2 vế của (6-7) rồi thế vào (6-5) ta có:

$$e^{-\int p(x)dx}C'(x) - C(x).p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

hay $\frac{dC}{dx} = q(x).e^{\int p(x)dx}$. Do đó $C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$ với K là hằng số tuỳ ý.

Vậy $y = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}.dx$ là nghiệm tổng quát của phương trình (6-5). (Phương pháp này gọi là phương pháp biến thiên hằng số).

Thí dụ: Tìm nghiệm của phương trình tuyến tính $(x^2 + 1)y' + xy = 1$ thoả mãn điều kiện $y|_{x=0} = 2$.

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$(x^2+1)y'+xy=0 \text{ hay } \frac{dy}{y}=-\frac{x}{x^2+1}dx \quad .$$

Lấy tích phân 2 vế, ta được:

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln|C|$$

Hay $y=\dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ đó là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Bây giờ xem C là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất ta có:

$$C'\sqrt{x^2+1}=1 \Rightarrow C'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow C=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+K \text{; với K là hằng số tuỳ ý.}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y=\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+K}{\sqrt{x^2+1}}$$

Từ điều kiện ban đầu $y|_{x=0}=2$ ta được K = 2. Vậy nghiệm phải tìm là:

$$y=\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

6.3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'')=0 \tag{6-8}$$

Nếu giải được phương trình ấy đối với y", nó có dạng:

$$y''=f(x, y, y') \tag{6-9}$$

Thí dụ: $yy''-y'^2+yy'+x^2y^2=0$; $y''-2\dfrac{y}{x^2}=x\cos x$ là những phương trình vi phân cấp 2; phương trình sau là tuyến tính.

6.3.2. Nghiệm riêng - nghiệm tổng quát

Định lý: (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm). Cho phương trình:

$$y''=f(x, y, y') \tag{6-10}$$

Nếu $f(x,y,y')$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')$ và $\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')$ liên tục trong một miền D nào đó trong R^3 và nếu (x_0, y_0, y'_0) là 1 điểm thuộc D thì trong 1 lân cận nào đó của điểm $x = x_0$, tồn tại 1 nghiệm duy nhất $y = y(x)$ của phương trình (6-10) thoả mãn các điều kiện:

$$y\big|_{x=o} = y_0 \;;\quad y'\big|_{x=o} = y'_0 \qquad (6\text{-}11)$$

- Người ta gọi nghiệm tổng quát của phương trình (6-10) là hàm số: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là những hằng số tuỳ ý thoả mãn các điều kiện sau:

1. Nó thoả mãn phương trình (6-10) với mọi giá trị của C_1, C_2.

2. Với mọi (x_0, y_0, y'_0) ở đó các điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm được thoả mãn, có thể tìm được các giá trị xác định $C_1 = C_1^o$; $C_2 = C_2^o$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_1^o, C_2^o)$ thoả mãn: $y\big|_{x=o} = y_0$; $y'\big|_{x=o} = y'_0$.

Hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình (6-10) dưới dạng ẩn được gọi là tích phân tổng quát của nó. Nó biểu diễn 1 họ đường tích phân phụ thuộc 2 tham số.

- Người ta gọi nghiệm riêng của phương trình (6-10) là 1 hàm số $y = \varphi(x, C_1^o, C_2^o)$ mà ta có được bằng cách cho C_1, C_2 trong nghiệm tổng quát các giá trị C_1^o, C_2^o. Hệ thức $\phi(x, y, C_1^o, C_2^o) = 0$ được gọi là tích phân riêng.

6.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số hằng số

Cho phương trình: $y'' + py' + qy = 0$ với p, q là 2 hằng số (6-12)

Ta biết rằng muốn tìm nghiệm tổng quát của nó, chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng:

$$y = e^{kx} \qquad (6\text{-}13)$$

trong đó k là một hằng số nào đó mà ta sẽ tìm. Ta có $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Thế vào phương trình (6-12), ta được:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Vì $e^{kx} \neq 0$, ta có $k^2 + pk + q = 0$ (6-14)

Vậy nếu k thoả mãn phương trình (6-14) thì hàm số $y = e^{kx}$ là một nghiệm của phương trình (6-12). Phương trình (6-14) được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (6-12). Đó là một phương trình bậc hai, nó có hai nghiệm k_1, k_2 thực hay phức. Có thể xẩy ra ba trường hợp:

i) *Hai số k_1, k_2 thực và khác nhau.*

Khi ấy phương trình (6-12) có hai nghiệm:

$$y_1 = e^{k_1x} \quad , \quad y_2 = e^{k_2x}$$

Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính vì $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \neq$ hằng số. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (6-12) là:

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x} \text{ với } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tuỳ ý.}$$

Thí dụ: Tìm nghiệm của phương trình:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

thoả mãn các điều kiện $\quad y|_{x=0} = 0\ ,\ y'|_{x=0} = 1,$

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là $k^2 + k - 2 = 0$, nó có 2 nghiệm phân biệt $k_1 = 1$, $k_2 = -2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

Do đó: $\quad y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}$

Từ các điều kiện ban đầu ta được:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$$

Do đó $C_1 = \frac{1}{3}$; $C_2 = -\frac{1}{3}$, vậy nghiệm riêng phải tìm là:

$$y = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$$

ii) *k_1 và k_2 là hai số trùng nhau $k_1 = k_2$.*

Ta đã có một nghiệm riêng của phương trình (6-12) là $y_1 = e^{k_1x}$. Ta sẽ tìm một nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng $y_2 = y_1 . u(x) = u(x)\ e^{k_1x}$. Ta có:

$$y'_2 = u' . e^{k_1x} + k_1u e^{k_1x}$$
$$y''_2 = u'' e^{k_1x} + 2k_1u' e^{k_1x} + k_1^2 u e^{k_1x}.$$

Thế vào phương trình (6-12), ta được:

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0$$

Vì k_1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta có:

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0,\ \ k_1 = -\frac{p}{2} \text{ hay } 2k_1 + p = 0$$

Do đó ta được $e^{k_1x}u'' = 0$ hay $u'' = 0$. Suy ra $u = Ax + B$, trong đó A, B là những hằng số tuỳ ý. Chọn $A = 1$, $B = 0$, ta được $u = x$, vậy $y_2(x) = xe^{k_1x}$. Như vậy hai nghiệm độc lập tuyến tính của (6-12) là $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = xe^{k_1x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (6-12) là:

$$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$$

iii) *k_1 và k_2 là hai số phức liên hợp:* $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$.

Hai nghiệm riêng của phương trình (6-12) là:

$$\bar{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$$

$$\bar{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$$

Dùng công thức Euler: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i.\sin\beta x$, $e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$, ta được:

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$\bar{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Nếu $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ là hai nghiệm của phương trình (6-12) thì:

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , y_2 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

cũng là nghiệm của phương trình ấy. Hai nghiệm ấy lại độc lập tuyến tính vì $\frac{y_1}{y_2} = \text{cotg}\beta x$ khác hằng số. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (6-12) là:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

Thí dụ: Giải phương trình $y'' - 2y' + 5y = 0$

Giải: Phương trình đặc trưng của nó là $k^2 - 2k + 5 = 0$, nó có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = 1 + 2i$, $k_2 = 1 - 2i$. Vậy nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

0.0.1 downloaded 60906.pdf at Fri Mar 23 15:07:15 ICT

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Khái niệm phương trình vi phân - nghiệm của phương trình vi phân?

2. Phương trình vi phân cấp 1. Định nghĩa; cách giải? Phương trình khuyết; phương trình với biến số phân ly; phương trình thuần nhất; phương trình tuyến tính?

3. Phương trình vi phân cấp 2. Định nghĩa; cách giải? Phương trình khuyết; phương trình tuyến tính? phương trình tuyến tính với hệ số hằng?

BÀI TẬP

6.1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly:

a) $x(1 + y^2)^2 dx + y(1 + x^2)^2 dy = 0$.

b) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$.

c) $y'\cos 2y - \sin y = 0$.

d) $y' = \dfrac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$.

e) $\dfrac{e^y - 1}{e^y - 2} \cdot y' = \dfrac{1}{x}$.

f) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

g) $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$.

h) $y' = \cos(x - y)$.

i) $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$.

j) $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$.

6.2. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân thoả mãn điều kiện ban đầu:

a) $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$; $y\big|_{x=0} = 1$.

b) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$; $y\big|_{x=0} = 0$.

c) $\sin x dy - y \ln y.dx = 0$; $y\big|_{x=0} = 1$.

6.3. Giải các phương trình vi phân:

a) $x = y' + y'^3$

b) $x = y' + e^{y'}$

c) $y = y'^2 \sin y'$

d) $y^3 + y'^3 - yy' = 0$

e) $y' = \dfrac{x + y - 3}{(x + y - 1)^2}$

f) $(\sqrt{xy} + 1)xy' - (\sqrt{xy} - 1)y = 0$.

6.4. Giải các phương trình vi phân thuần nhất cấp 1.

a) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$

b) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

c) $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$

d) $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$

e) $2(x + yy')^2 = y^2(1 + y'^2)$.

(Gợi ý: Chuyển sang toạ độ cực).

6.5. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

a) $y' - 2xy = x \,.\, e^{-x^2}$

b) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

c) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; $y\Big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

d) $(1 + x^2)y' + xy = 1$; $y\Big|_{x=0} = 0$

e) $2\,ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

f) $xy' - y = x^2 \,.\, \text{arctg}\, x$

g) $y' - \dfrac{y}{x \ln x} = x.\ln x$; $y\Big|_{x=e} = \dfrac{e^2}{2}$.

6.6. a) Chứng minh rằng phương trình: $x(x^2 + 1)y' - (2x^2 + 3)y = 3$ có 1 nghiệm là một tam thức bậc hai. Hãy giải phương trình ấy.

b) Cùng câu hỏi với phương trình: $(x^3 - x)y' + (1 - 2x^2)y + 1 = 0$.

6.7. Giải các phương trình vi phân cấp 1 phi tuyến tính:

a) $xy^2 + x^2(x + 1)yy' + 3x - 5 = 0$;

b) $y' + xy = x^3 \,.\, y^3$;

c) $(y\ln x - 2)y \,.\, dx = xdy$;

d) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}.\sqrt{y}$; $y\Big|_{x=0} = \frac{9}{4}$;

e) $ydx + (x + x^2y)dy = 0$.

6.8. a) Giải phương trình $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(x)$.

b) Giải phương trình $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(y)$.

c) Giải phương trình $xdy + ydx - xy^2\ln x.dx = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(xy)$.

6.9. Giải các phương trình:

a) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$;

b) $xy' = y - x . \cos^2 \frac{y}{x}$;

c) $y' = \frac{2x^3y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$;

d) $xy' + y = \frac{1}{x^2y^2}$;

e) $y' = \frac{y(x+1)}{x^2} - \frac{2y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

6.10. Giải các phương trình vi phân cấp 2 khuyết.

a) $xy'' - y' = x^2 . e^x$;

b) $y'' - \frac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0$; $y\big|_{x=2} = 1$; $y'\big|_{x=2} = -1$;

c) $y'' + 2y(1-2y) = 0$; $y\big|_{x=0} = 0$; $y'\big|_{x=0} = \frac{1}{2}$;

d) $xy'' - y' = x^2.\ln x$; $y\big|_{x=1} = -4/9$; $y'\big|_{x=1} = -1$;

e) $yy'' + y'^2 + y'^3 = 0$.

6.11. Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính:

a) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$, biết rằng có có một nghiệm riêng có dạng $y_1(x) = x^\alpha$, $a \in R$.

b) $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng có dạng $y_1(x) = e^{\alpha x}$; $\alpha \in R$.

c) $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$, biết rằng có nó một nghiệm riêng $y_1(x)$ có dạng đa thức.

d) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$; $y\big|_{x=1} = 0$; $y'\big|_{x=1} = 1$, biết rằng nó có một nghiệm riêng $y_1(x) = e^x$.

e) $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$, biết rằng nó có hai nghiệm riêng là $y_1(x) = 1$; $y_2(x) = x$.

6.12. Giải các phương trình:

a) $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

b) $y'' + 2y' + y = 2 \,.\, e^{-x} \,.\, \sqrt{x+1}$

c) $y'' + y = \text{tg}x$

d) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

e) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x.\sqrt{\cos 2x}}$.

6.13. Giải các phương trình:

a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

b) $y'' + 9y = 6 \,.\, e^{3x}$

c) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

d) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \,.\, \cos x$

e) $y'' + 4y = 2 \sin 2x$

f) $y'' + 2y' + y = 4 \,.\, e^{-x}$

g) $y'' + 9y' + 20y = x^2 \,.\, e^{4x}$

h) $y'' + 4y' - 5y = 2e^x$

j) $y'' + 2y' + 5y = 2x \,.\, e^{-x} \,.\, \cos 2x$

k) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

l) $y'' + y = \cos^3 x$

m) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \,.\, \cos^2 x$

n) $y'' - 2y' + (1 + \alpha^2)y = (1 + 4\alpha^2)\cos\alpha x$; α là tham số $\neq 0$, thoả mãn.

6.14.

a) Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tìm hàm số $\varphi(r)$ để cho hàm số $u(x, y, z) = \dfrac{\varphi(r)}{r}$ thoả mãn phương trình: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4u$.

b) Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tìm hàm số $\varphi(r)$ để cho hàm số $u(x, y) = \varphi(r)$ thoả mãn phương trình: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{xy}{r^\alpha}$; α là hằng số.

6.15.

a) Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi luỹ thừa của phương trình:

$$4xy'' + 2y' - y = 0 .$$

b) Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi luỹ thừa của phương trình:

$$2x(1 - x)y' + (1 - 2x)y = 1 .$$

ĐÁP SỐ VÀ LỜI GIẢI VẮN TẮT

ĐÁP SỐ - LỜI GIẢI VẮN TẮT

Chương 1.

1.1.

1) Xét phương trình $f(x) = y \in B$; tức là $x + 7 = y$; $x \in A$

Với $y \in B$ cho trước, nó có không quá một nghiệm; vậy f là đơn ánh.

Với mọi $y \in B$ nó luôn có nghiệm, vậy f là toàn ánh. Do đó f là song ánh.

2) Xét phương trình $f(x) = y \in B$; tức là:

$x^2 + 2x - 3 = y$; $x \in A$. Đây là phương trình bậc 2 đối với x :

$x^2 + 2x - (3 + y) = 0$. Nó có biệt số $\Delta' = 4 + y$

Nếu $4 + y > 0 \Leftrightarrow y > -4$ thì phương trình có 2 nghiệm khác nhau. Vậy f không phải là đơn ánh.

Nếu $4 + y < 0 \Leftrightarrow y < -4$ thì phương trình không có nghiệm thực. Vậy f không phải là toàn ánh.

Do đó f không phải là song ánh, nó không có ánh xạ ngược.

3) Xét hàm số $y = f(x) = e^{x+1} = e^x . e$.

Nó có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y	0^+	$\nearrow$	$+\infty$

Khi x tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ thì y tăng liên tục từ 0^+ đến $+\infty$. Vậy phương trình $f(x) = y \in (0 ; +\infty) = B$. Do đó f vừa là toàn ánh, vừa là đơn ánh, nên là song ánh và có ánh xạ ngược thu được bằng cách giải phương trình:

$$e^x . e = y \quad \Rightarrow f^{-1}(y) = \ln y - 1$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln x - 1$$

Vậy hàm số $y = \ln x - 1$ và hàm số $y = e^{x+1}$ là hai hàm số ngược nhau.

4) Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Nó có đạo hàm $y' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

Lập bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = y$ tức là $\dfrac{2x}{1+x^2} = y \in R$ có tới hai nghiệm khác nhau khi $-1 < y < 1$ và vô nghiệm khi $y < -1$ hoặc $y > 1$. Vậy f không phải là đơn ánh; không phải là toàn ánh. Đồng thời $f(R) = [-1; 1]$.

1.2.

1) Giả thiết f và g là toàn ánh: $f(E) = F$; $g(F) = G$.

Ta suy ra $(gof)(E) = g[f(E)] = g(F) = G$. Vậy gof là toàn ánh.

2) Giả thiết f và g là đơn ánh. Xét x_1 và $x_2 \in E$. Ta có:

$$x_1 \in E;\ f(x_1) = y_1 \in F;\ g(y_1) = z_1 \in G.$$

$$x_2 \in E;\ f(x_2) = y_2 \in F;\ g(y_2) = z_2 \in G.$$

và:

$$(gof)(x_1) = g[f(x_1)] = g(y_1) = z_1$$

$$(gof)(x_2) = g[f(x_2)] = g(y_2) = z_2$$

Giả sử $z_1 = z_2$. Vì g là đơn ánh nên $y_1 = y_2$. Từ đó, vì f là đơn ánh nên $x_1 = x_2$. Vậy từ $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$ ta suy ra $x_1 = x_2$. Do đó gof là đơn ánh.

3) Từ 2 kết quả trên, ta suy ra nếu f và g là song ánh thì gof cũng là song ánh.

1.3.

1) $17 + 17i$

2) $\frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$

3) $117 + 44i$

1.4. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $2^{12}(1 + i)$

1.5. 1) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

2) $2 - 3i$; $-2 + 3i$

3) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $-i$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

4) i ; $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$; $\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$

1.6. $\cos 4x = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x$

$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \,.\, \sin^3 x$

1.7. 1) $x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $x_1 = 2i$; $x_2 = -2i$

Chương 2.

2.1.

1) a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$

c) $3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$;

d) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $C^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

2) a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

3) a) $AB - BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -7 & 9 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5) a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 5/2 & 2 & 7 & -25/2 \\ -3/2 & -1 & -4 & 15/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$

6) a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.

1) a) 5 ; b) 1 ; c) 2 ; d) 1 ; e) - 2

2) a) Δ ; b) - Δ

3) 2 ; 3 ; 4

4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & [4+10.0+100.0] \\ 5 & 2 & [7+10.2+100.5] \\ 2 & 5 & [5+10.5+100.2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix}$

chia hết cho 17 vì các phần tử ở cột 3 chia hết cho 17; vậy định thức chia hết cho 17.

5) 3a - b + 2c + d.

6) - x - y - z + 4t.

7) a) - 29400000 ; b) 48

2.3.

1) a) x = - 3; y = 7/5 ; b) x = 7 ; y = - 3; z = - 9

c) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$; $x_4 = -2$

2) a) x = - 7; y = 6 ; b) $x = \frac{22}{8}$; $y = \frac{9}{8}$

3) a) x = 1 ; y = 2 ; z = - 2 ; b) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $x_4 = -1$

4) a) $x = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b$; $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$

b) x = 2a - b ; y = - 6a + 4b + c ; z = - 5a + 3b + c.

5) a = 0 ; a = 5

6) a) $\rho(A) = 2$; b) $\rho(A) = 3$.

7) a) $\lambda \neq 1$ và $\lambda \neq -2$; $x = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$; $y = \frac{1}{\lambda+2}$; $z = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$

Khi $\lambda = 1$: Hệ vô số nghiệm.

$\lambda = -2$: Hệ vô nghiệm.

b) $a \neq b \neq c$ thì x = a . b . c ; y = - (ab + bc + ca) ; z = a + b + c.

Chương 3

3.1.

1) Dạng $\frac{0}{0}$. Khử dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách viết $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

$x^3 - 12x + 16 = (x - 2)^2 . (x + 4)$

Kết quả: $L = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}.3^{10}}{6^{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.3^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

2) Dạng $\frac{0}{0}$.

Viết $x + x^2 + ... + x^n - n = (x - 1) + (x^2 - 1) + ... + (x^n - 1)$

$= (x - 1)[1 + (x + 1) + (x^2 + x + 1) + ... + (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)]$

Vậy kết quả $= 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3) Chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$, chuyển qua giới hạn được kết quả $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Để ý rằng: $\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x} = \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{\alpha.x}.\alpha$

Áp dụng kết quả: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$

(sử dụng phép đổi biến $\sqrt{1+x} = y$; khi $x \to 0$ thì $y \to 1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{y\to 1}\frac{y-1}{y^2-1} = \frac{1}{2}$)

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{\alpha.x}.\alpha = \frac{\alpha}{m}$

Tương tự: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{\beta.x}.\beta = \frac{\beta}{m}$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1) - (\sqrt[n]{1+\beta x} - 1)}{x} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$

5) Biến đổi $\sin x - \sin a = 2\cos\frac{x+a}{2}.\sin\frac{x-a}{2}$

Sử dụng $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Vậy kết quả $= \cos a$.

6) Nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp ($\sqrt{1+tgx} + \sqrt{1+\sin x}$)

$$\to L = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tgx} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{tgx - \sin x}{x^3(\sqrt{1+tgx} - \sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}.\frac{(1-\cos x)}{x^2}.\frac{1}{\sqrt{1+tgx} + \sqrt{1+\sin x}}$$

Sử dụng kết quả: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+tgx} + \sqrt{1+\sin x}) = 2$. Vậy kết quả $= \frac{1}{4}$.

7) Viết $\sqrt[3]{x^3 + x^3 - 1} - x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - \sqrt[3]{x}$

Sử dụng $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; kết quả $= \frac{1}{3}$.

3.2.

1) Dạng U^v

Viết $\frac{x^3}{1-x} = -x^2 - x + 1 + \frac{1}{1-x}$. Khi $x \to +\infty$ thì $\frac{x^3}{1-x} \to -\infty$.

Vậy giới hạn cần tìm $\to \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0$.

2) Dạng U^v ; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = 1$. Vậy kết quả = 1.

3) Đặt $A = (\sin x)^{tgx} = [1 + (\sin x - 1)]^{tgx}$

$$\ln A = tgx \,.\, \ln[1 + (\sin x - 1)] = \frac{\ln[1 + (\sin x - 1)]}{\cot gx}$$

$$= \frac{\ln[1 + (\sin x - 1)]}{(\sin x - 1)} \cdot \frac{(\sin x - 1)}{\cot gx}$$

viết $\frac{\sin x - 1}{\cot gx} = \sin x \,.\, \frac{(\sin x - 1)}{\cos x}$.

Sử dụng kết quả: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$; $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \sin x \,.\, \frac{\sin x - 1}{\cos x} = 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln A = 0 \to \lim A = e^0 = 1$.

4) Áp dụng $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\ln\frac{x+1}{x} \to \ln 1 = 0$ khi $x \to \infty$.

Vậy kết quả = 0.

5) Viết $\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \frac{(e^{\alpha x} - 1) + (1 - e^{\beta x})}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \frac{\frac{e^{\alpha x} - 1}{x} - \frac{e^{\beta x} - 1}{x}}{\frac{\sin\alpha x}{x} - \frac{\sin\beta x}{x}}$

Sử dụng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = \ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Kết quả = $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1$.

3.3.

1) Liên tục nếu A = 4 ; gián đoạn tại x = 2 nếu A ≠ 4.

2) Liên tục với ∀x.

3) a = 1.

3.4.

1) Viết $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Sử dụng đạo hàm hàm số x^{α}; được kết quả:

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

2) Viết $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}} = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$. Sử dụng đạo hàm logarít;

$\ln y = \dfrac{1}{3}\ [\ln(1 + x^3) - \ln(1 - x^3)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[\frac{3x^2}{1+x^3} + \frac{3x^2}{1-x^3}\right] = x^3\left(\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1-x^3}\right)$$

Vậy $y' = \dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; $|x| \neq 1$.

3) Áp dụng đạo hàm của một tích rồi đạo hàm của hàm y = lnx được kết quả: $y' = e^x(\ln \sin x + \cot g x)$ với $\sin x > 0$.

5) $y' = \begin{cases} -1 & \text{với } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{với } 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{với } x > 2 \end{cases}$

3.5.

a) Với x ≠ 0; hàm số liên tục. Tại x = 0 phải có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ tức là:

$\lim\limits_{x\to 0} x^n.\sin\dfrac{1}{x} = 0$. Vì $|\sin\dfrac{1}{x}| \le 1$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x^n.\sin\dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$

⇔ Khi n > 0 thì $\lim\limits_{x\to 0} x^n.\sin\dfrac{1}{x} = 0$ và f(x) liên tục tại x = 0.

b) Để xét tính khả vi của f(x) tại x = 0; ta lập số gia:

$\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0) = (\Delta x)^n . \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$

Suy ra: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} . \frac{(\Delta x)^n . \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} . \sin \frac{1}{\Delta x}$

vì $\left|\sin \frac{1}{\Delta x}\right| \le 1$ nên: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = 0$ khi $n - 1 > 0$.

Mặt khác theo giả thiết f(0) = 0 nên với $n - 1 > 0 \Leftrightarrow n > 1$ thì hàm số khả vi tại x = 0.

c) Với $x \neq 0$ ta có: $f' = n . x^{n-1} . \sin \frac{1}{x} - \frac{x^n}{x^2} . \cos \frac{1}{x}$

$$= x^{n-2} \left(nx . \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$$

theo b) ta có f(x) khả vi tại x = 0 và f'(0) = 0 nên để f'(x) liên tục tại x = 0 phải có:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} x^{n-2} \left(nx . \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = 0$$

Điều đó xảy ra $\Leftrightarrow n - 2 > 0 \Leftrightarrow n > 2$

Kết luận: Với n > 2 thì f(x) có đạo hàm liên tục tại x = 0.

6)

a) $f'_-(0) = -1$; $f'_+(0) = 1$

b) Hàm số $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ xác định với $\forall x$ thoả mãn:

$$\sqrt{2k\pi} \le |x| \le \sqrt{(2k+1)\pi} \quad (*) ; k \in N.$$

Tuy nhiên, khi $x^2 = 2k\pi$ hoặc $x^2 = (2k + 1)\pi$ thì $\sin x^2 = 0$.

Vậy với điều kiện (*) thì $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x . \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$

Khi $x \to 0$ thì $\sin x^2 \sim x^2$ và $\sqrt{\sin x^2} \sim |x|$.

Vậy: với x = 0 thì $f'_-(0) = -1$; $f'_+(o) = 1$

Với $x = \pm \sqrt{2k\pi}$ hoặc $x = \pm \sqrt{(2k+1)\pi}$ ta có:

$$f'_\pm (\sqrt{2k\pi}) = \pm \infty ; k \in N^+$$

$$f'_\pm (\sqrt{(2k+1)\pi}) = \pm \infty ; k \in N^+$$

3.7.

Áp dụng công thức: $df = f'_x \cdot dx$; được kết quả:

1) $-\frac{1}{x^2}dx$; 2) $\frac{dx}{a^2+x^2}$; $a \neq 0$; 3) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

4) $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (\text{sgn } a)$; $a \neq 0$ với $\text{sgn } a = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a > 0 \\ -1 & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$

3.8.

1) $d(x \cdot e^x) = (x \cdot e^x)' dx = e^x (1 + x)dx$.

2) $d(\sqrt{a^2+x^2} = \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

3) $d(\ln(1 - x^2)) = [\ln(1 - x^2)]' dx = -\frac{2x}{1-x^2}dx$; $|x| < 1$.

4) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos dx}{-\sin x\, dx} = -\cot gx$; $x \neq k\pi$; $k \in z$.

3.9.

1) $dx = (2 - 2t)\, dt = 2(1 - t)\, dt$.

$dy = (3 - 3t^2)\, dt = 3(1 - t^2)\, dt$.

$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(1+t)$; $y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}(1+t)'_t.t'_x = \frac{3}{2}t'_x$

Vì $dx = 2(1 - t)\, dt \rightarrow t'_x = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2(1-t)}$

Vậy: $= y''_{xx} = \frac{3}{2}.\frac{1}{2(1-t)} = \frac{3}{4(1-t)}$; $t \neq 1$.

2) $dx = -a\sin t dt$; $t'_x = -\frac{1}{a\sin t}$

$dy = a\cos t dt$; $y'_x = -\cot gt$

$y''_{xx} = -(\cot g\, t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{\sin^2 t}\left(-\frac{1}{a\sin t}\right) = -\frac{1}{a.\sin^3 t}$; $t \neq k\pi$.

3) $dx = a(1 - \cos t)dt$; $t'_x = \frac{1}{a(1-\cos t)} = \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}}$

$dy = a\sin t dt = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt}{2a\sin^2\frac{t}{2}dt} = \cot g\frac{t}{2}$$

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\cot g\frac{t}{2}\right)'_t . t'_x = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} . \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}} \ ; \ t \neq k\pi \ ; k \in z.$$

3.10.

1) Viết $y = \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x} - (1+x)$.

$$y^{(8)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} - (1-x)^{(8)} = [(1-x)^{-1}]^{(8)} - 0$$

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)\ldots(-1-8+1).(-1).\frac{1}{(1-x)^9}$$

Vậy: $y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}$; $x \neq 1$.

2) $y^{(50)} = (\sin 2x)^{(50)} . x^2 + 50 . (\sin 2x)^{(49)} . (x^2)' + \frac{50.49}{2}(\sin 2x)^{(48)}(x^2)''$

Mặt khác: $(\sin 2x)^{(50)} = 2^{50} . (-1)^{25} . \sin 2x = -2^{50} . \sin 2x.$

$(\sin 2x)^{(49)} = 2^{49} . (-1)^{24} . \cos 2x = 2^{49} . \cos 2x.$

$(\sin 2x)^{(48)} = 2^{48} . (-1)^{24} . \sin 2x = 2^{48} . \sin 2x.$

Thế các giá trị các đạo hàm cấp cao của sin 2x vào $y^{(50)}$.

$y^{(50)} = 2^{50}(-x^2 . \sin 2x + 50x . \cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x)$.

3) Viết $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}$

Vậy: $y^{(n)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = n!\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right]$

4) Viết $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$

Vậy: $y^{(n)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{2-x}\right)^{(n)} = n!\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(2-x)^{n+1}}\right]$; $x \neq 2$; $x \neq 2$.

3.11.

Có.

Vì nó thoả mãn mọi giả thiết của định lý Rolle trong các khoảng có các mút là nghiệm của phương trình f(x) = 0.

3.12. Giải thích tại sao công thức Cauchy không áp dụng được cho các hàm số:

$$f(x) = x^2 \; ; \; g(x) = x^3 \; ; \; -1 \le x \le 1.$$

Trả lời: Giả thiết của định lý Cauchy yêu cầu $g'(x) \neq 0$ với $\forall x \in [-1, 1]$.

Ở bài toán này, ta có $g'(x) = 3x^2$; và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Do vậy không áp dụng được công thức Cauchy cho các hàm số:

$$f(x) = x^2; \; g(x) = x^3 \text{ với } x \in [-1, 1].$$

3.13.

1) Viết $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}$

Dùng công thức khai triển hữu hạn: $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \theta.(x^2)$

Khi đó: $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{x} + \theta\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$$

2) Ta có $a^x = e^{x.\ln x} = 1 + x\ln a + \theta(x)$

(Áp dụng công thức: $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \theta(x^2)$)

và: $\dfrac{a^x - b^x}{x} = \dfrac{1 + x\ln a + x.\theta_1(x) - 1 - x\ln b - x.\theta_2(x)}{x}$

$= \ln\dfrac{a}{b} + \theta_1(x) - \theta_2(x)$ tại lân cận x = 0.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x} = \ln\dfrac{a}{b}$

3) Sử dụng các công thức: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \theta_1(x^2)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \theta_2(x^3)$$

Khi x là VCB ; ($x \to 0$).

Đặt $A = (1 + atg^2x)^{\frac{1}{x\sin x}}$ ta có:

$$\ln A = \frac{\ln(1 + atg^2x)}{x.\sin x} = \frac{atg^2x - \frac{1}{2}a^2tg^4x + \theta_1(a^2.tg^4x)}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \theta_2(x^3)\right)}$$

tại lân cận $x = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln A = \lim_{x\to 0} \frac{atg^2x}{x^2} = a$$

Do đó: $\lim_{x\to 0} A = \lim_{x\to 0}(1 + atg^2x)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^a$

3.14.

1) Hàm số $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$ xác định với $\forall x$ và là hàm số chẵn, nên đồ thị đối xứng với nhau qua trục tung, vì vậy chỉ cần khảo sát trong khoảng $[0, +\infty)$.

Đạo hàm: $y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2}$. Dấu y' là dấu của tử số. Mặt khác, ta có:

$x^4 - 4x^2 - 1 = [x^2 - (2 + \sqrt{5})]\,[x^2 - 2 + \sqrt{5}]$

$= (x - \sqrt{2 + \sqrt{5}})\,(x + \sqrt{2 + \sqrt{5}})\,(x^2 - 2 + \sqrt{5})$

Do $x^2 - 2 + \sqrt{5} > 0$ với $\forall x$ nên dấu y' là dấu của $x\,(x - \sqrt{2 + \sqrt{5}})\,(x + \sqrt{2 + \sqrt{5}})$.

Vậy ta có bảng xét dấu của y' :

x	0		$\sqrt{2 + \sqrt{5}}$		$+\infty$
y'	0	-	0	+	

Vậy: $y_{max} = y(0) = 2$.

$y_{min} = y(\pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}) = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

Ngoài ra $y = 0$ khi $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

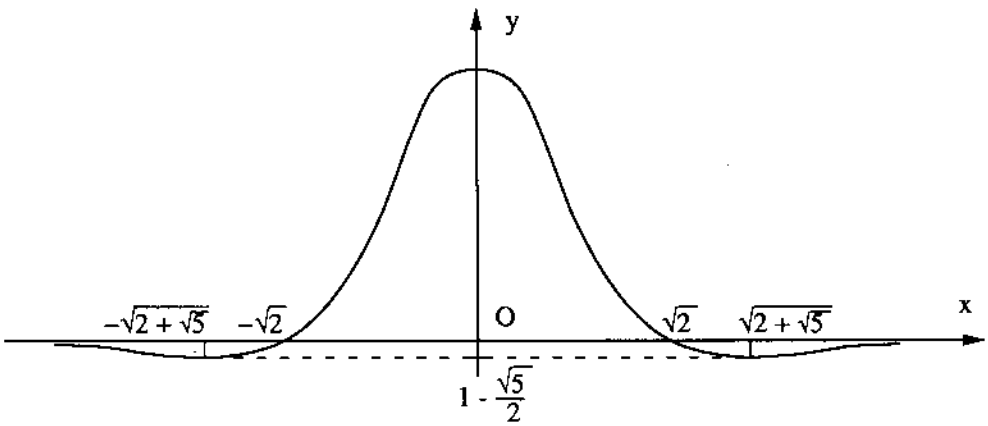
Tiệm cận: $\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 + 2}{1 + x^4} = 0$

Nên tiệm cận ngang là trục hoành Ox.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
y'		-	0	+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
y	0	↘	CT $1-\frac{\sqrt{5}}{2}$	↗	0	↗	CĐ 2	↘	0	↘	$1-\frac{\sqrt{5}}{2}$	↗	0

Đồ thị:



2) Hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ xác định với $\forall x$; có đạo hàm:

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3.\sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}} = \frac{(x-1)(x+\frac{1}{3})}{3.\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^2}}$$

$\lim\limits_{x \to -1} y' = \infty$ nhưng y' không đổi dấu khi x qua giá trị x = -1.

Mặt khác, $\lim\limits_{x \to 1} y' = \pm\infty$ và đổi dấu khi qua giá trị x = +1.

Vậy: $y_{max} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$; $y_{min} = y(1) = 0$

+) Tiệm cận: Để tìm tiệm cận, ta viết:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} = \sqrt[3]{x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})}$$

$$= x.\sqrt[3]{1+u}$$

với $u = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow y = x\,(1+u)^{1/3}$.

Áp dụng công thức khai triển hữu hạn:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots$$

Ta có: $(1 + u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u + \theta(u^2)$ ta được:

$$y = x\left[1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + \theta\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = x - \frac{1}{3} + \theta.\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vậy tiệm cận xiên là đường $y = x - \frac{1}{3}$.

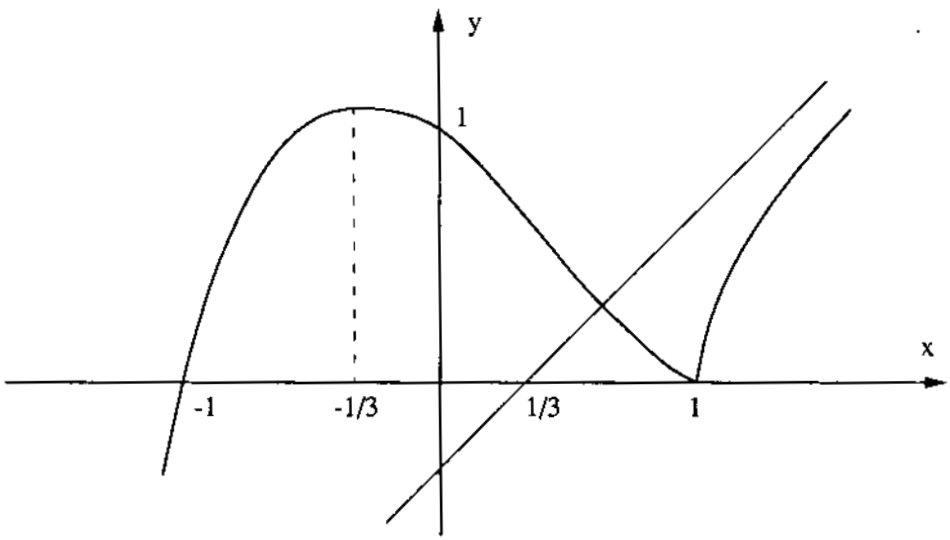
Ngoài ra ta có: $y = 0$ khi $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	-	0	-	‖	+	
y	$x - \frac{1}{3}$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	↘	1	↘	0	↗	$x - \frac{1}{3}$

Đồ thị:

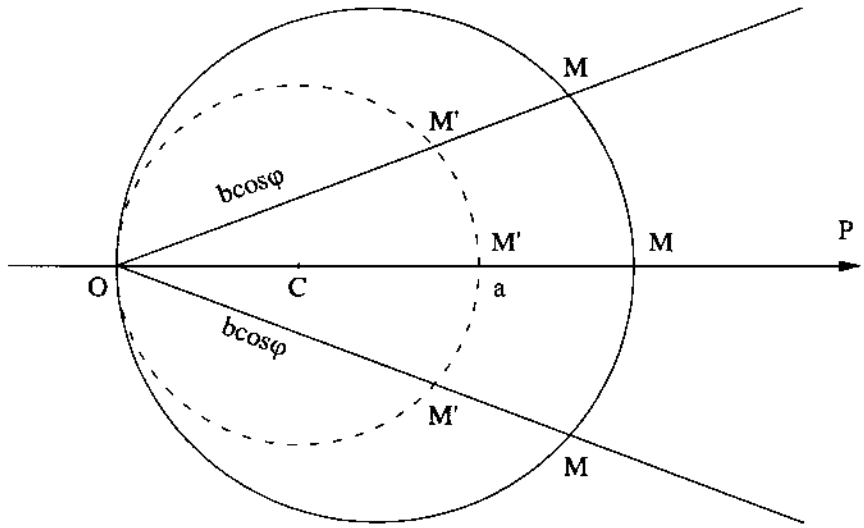


3.15. Khảo sát hàm số trong hệ toạ độ cực: $r = a + b\cos\varphi$

Miền xác định: $r \geq 0$; $|\varphi| \leq \alpha$; $\alpha = \arccos(-\frac{a}{b})$.

Đường cong kín, đối xứng với trục cực.

$r_{max} = r_{(0)} = a + b$; $r_{min} = 0$ khi $\varphi = \pm\alpha$.



+) Vẽ 1 đường tròn có đường kính là b.

+) Lấy 1 điểm trên đường tròn làm gốc cực O và vẽ trục cực OP đi qua tâm C của đường tròn.

Khi đó, hiển nhiên 1 điểm M' bất kỳ trên đường tròn đều thoả mãn $r = b\cos\varphi$; từ đó suy ra: Muốn có điểm M của đồ thì chỉ cần nối OM' kéo dài và lấy $M'M = a \leq b$.

3.16. Tính các tích phân bất định.

1) $I = \int x^2 (5 - x)^4 dx$

Khai triển $(5 - x)^4 = 5^4 - 4 . 5^3x + 6 . 5^2 x^2 - 4 . 5x^3 + x^4$

Vậy $I = \int(5^4x^2 - 4 . 5^3x^3 + 6.5^2.x^4 - 4.5.x^5 + x^6)dx$

$$= \frac{5^4}{3}x^3 - 5^3.x^4 + 6.5.x^5 - 4.5.\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + C$$

2) $$I = \int\frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx = \int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$$

$$= -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C$$

3) $I = \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{1+e^x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$

4) $I = \int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right| + C$

5) $I = \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}} = tg\frac{x}{2} + C$

6) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = arctg(e^x) + C$

7) $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)} = \int\left[\frac{5}{3(x+5)} - \frac{2}{3(x+2)}\right]dx$

vì $\frac{x}{(x+2)(x+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+5} \Rightarrow A = -\frac{2}{3}; B = \frac{5}{3}$

vậy $I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+5)^5}{(x+2)^2}\right| + C$

8) Với $a \neq b$; ta có: $\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \left[\frac{1}{(x+a)(x+b)}\right]^2$

$$= \left[\frac{(x+b)-(x+a)}{(b-a)(x+a)(x+b)}\right]^2 = \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{(x+a)^2} - 2.\frac{1}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+b)^2}\right].$$

Vậy:

$$I = \frac{1}{(b-a)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2}{(b-a)}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) + \frac{1}{(x+b)^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}.\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{2}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|\right] + C$$

với $a = b \Rightarrow \int \frac{dx}{(x+a)^4} = \int (x+a)^{-4}dx = -\frac{1}{3(x+a)^3} + C$

9) $\int \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

10) $\int \text{arctg}x dx$, dùng tích phân từng phần được kết quả:

$$I = x \,.\, \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C\,.$$

11) Viết: $\dfrac{1+\cos x}{\sin x - 1} = \dfrac{1}{\sin x - 1} + \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

Ta có: $d(\sin x - 1) = \cos x dx$; $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$

Vậy: $I = \int \dfrac{dx}{\sin x - 1} + \int \dfrac{\cos x}{\sin x - 1} dx$

$$= -\int \frac{dx}{1 + \cos(x + \frac{\pi}{2})} + \int \frac{d(\sin x - 1)}{\sin x - 1} = \ln|\sin x - 1| - \text{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + C$$

12) $\int \dfrac{dx}{1 + x^3} = I$

Ta có: $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1 - x^2 + x^2}{1 + x^3} = \dfrac{x^2}{1+x^3} + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^3} = \dfrac{x^2}{1+x^3} + \dfrac{1 - x}{1 - x + x^2}$

Vậy $I = I_1 + I_2$

Tính $I_1 = \dfrac{1}{3}\ln|1 + x^3| + C$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

Vậy: $I = \dfrac{1}{3}\ln|1 + x^3| - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$

13) Dùng tích phân từng phần tính được:

$$I = x^n \,.\, e^x - n \int x^{n-1}.e^x dx \text{ với : } \begin{cases} u = x^n \\ dv = e^x dx \end{cases}$$

$\Rightarrow I = x^n \,.\, e^x - n \,.\, I_{n-1}$.

14) Có thể dùng tích phân từng phần.

Hoặc: Áp dụng do tính chất của hàm $e^{ax}\cos bx$ nên đặt:

$$\int e^{-2x}\cos 3x dx = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + C$$

Đạo hàm cả 2 vế đối với x ta có:

$$e^{-2x} . \cos 3x \equiv e^{-2x}[(-2A + 3B)\cos 3x - (3A + 3B)\sin 3x]$$

suy ra: $\begin{cases} -2A + 3B = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{2}{13} \\ B = \dfrac{3}{13} \end{cases}$

Vậy: $\int e^{-2x}\cos 3x dx = \dfrac{e^{-2x}}{13}(-2\cos 3x + 3\sin 3x) + C$.

15) Dùng tích phân từng phần; đặt u = lnx; du = $\dfrac{1}{x}$dx. $\Rightarrow$ dv = x^2dx ; v = $\dfrac{1}{3}x^3$

$\rightarrow$ Kết quả = $\dfrac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C$

3.17.

Xét hàm số f(x) = e^x trên [1, 2], nó liên tục trên [1, 2] nên nó khả tích trên [1, 2]. Phân hoạch P đoạn [1, 2] thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia:

$x_0 = 1$; $x_1 = 1 + \dfrac{1}{n}$, ...; $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$, ...; $x_n = 1 + \dfrac{n}{n} = 2$

$x_{i+1} - x_i = \dfrac{1}{n} = \dfrac{2-1}{n} = \Delta x_i$. Chọn $\xi_i = x_i$; khi đó tổng tích phân là:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.e^{1+\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}.e.\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = e.\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = e^2 - e = e(e-1)$$

do $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$

Vậy $\int_1^2 e^x dx = e(e-1)$

3.18. Đặt $\sigma_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{1+x}$; $x \in [0, 1]$

Khi đó ta có: $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ với : $x_i = 0 + \frac{1}{n}$.

$\Delta x_i = \Delta x_1 = ... = \Delta x_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$ khả tích trên [0, 1], do đó theo định nghĩa tích phân xác định ta có: $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

3.19. Tính các tích phân.

1) Ta có: $|\ln x| = \begin{cases} \ln x & \text{nếu } \ln x > 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ -\ln x & \text{nếu } \ln x < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$

Vậy $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int_{1}^{e} \ln x dx$

vì $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$ (Tích phân từng phần)

nên $I = -x(\ln x - 1)\Big|_{1/e}^{1} + x(\ln x - 1)\Big|_{1}^{e} = 2(1 - \frac{1}{e})$

2) Ta có: $\sqrt{9-4x^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - x^2\right).4} = 2\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$

Vậy $I = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}dx = 2\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4}\arcsin\frac{2}{3}$.

3) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = I = \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{x^2 + x + \frac{5}{4}} = \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$

$= \frac{1}{4}\text{arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{16}$

4) $I = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\pi/2} \ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos x)dx$

Đặt $J = \int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos x)dx$ và đặt $x = \frac{\pi}{2}$ - t.

Khi đó, dx = - dt.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \text{ . Vậy } I = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(1+\sin t)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(1+\sin t)dt = \int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos x)dx$$

Vậy $I = \int_0^{\pi/2} \ln(1+\sin t)dx - \int_0^{\pi/2} \ln(1+\sin x)dx = 0$

5) $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x.\cos nx dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^n x.d(\sin nx)$. Tích phân từng phần:

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{n}\cos^n x.\sin nx\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x.\sin x.\sin nx dx$$

$$= 0 + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x.\cos(n-1)xdx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x.\cos(n+1)xdx$$

$$= \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x[\cos nx.\cos x - \sin x.\sin x]dx$$

$$= \frac{1}{2}I_{n-1} - 0$$

Vậy: $I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} \Rightarrow I_{n-1} = \frac{1}{2}I_{n-2}; \ldots$

$I_1 = \frac{1}{2}I_0$. Ta có: $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Nhân vế với vế (n + 1) đẳng thức trên suy ra:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x.\cos nx\, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

6) Đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ → Điều phải chứng minh.

3.20. Tính diện tích

1) $S = \frac{13}{6}$.

2) $S = \frac{1}{6}$.

3) $S = \frac{3}{4}$.

4) $S = 2\pi - \frac{16}{3}$.

Gợi ý đổi biến $t = \frac{2-x}{2}$; với $x \in [0, 2]$ thì $4 - x^2 \geq 2x$, do đó:

$$S = 2\int_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x})dx.$$

5) Vì lẽ đối xứng, ta có: $\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}$

Vậy $S = a^2$.

Chương 4

4.1.

1) Số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n+1}$ dần tới $2 \neq 0$ khi $n \to \infty$. Từ điều kiện cần của sự hội tụ của chuỗi số suy ra rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

2) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho phân kỳ.

3) $u_n = \text{arctg}\frac{n^2-1}{n^2+1} \to \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4} \neq 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số đã cho phân kỳ.

4) $u_n = \frac{2^n+n}{3^n+n^3+3} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$ khi $n \to \infty$. Vì $\frac{2}{3} < 1$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ, nên chuỗi số đã cho hội tụ.

5) $u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2(n^2+3)} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ là chuỗi số Riemann với $\alpha = 2 > 1$, nó hội tụ. Do đó chuỗi số đã cho hội tụ.

6) $u_n = 1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sin\frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}$ khi $n \to \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi điều hoà, nó phân kỳ. Do đó chuỗi số đã cho phân kỳ.

7) $u_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{n^2}\right) \sim \operatorname{tg}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

8) $u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{3}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

9) $u_n = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2 + 3\ln n} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số đã cho phân kỳ.

10) Vì $-1 \le \cos n \le 1$, $\forall n \in N$, nên $\frac{1}{n^\alpha} \le u_n \le \frac{3}{n^\alpha}$, $\forall n \in N$.

Các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^\alpha}$ cùng hội tụ nếu $\alpha > 1$, cùng phân kỳ nếu $\alpha \le 1$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kỳ nếu $\alpha \le 1$.

4.2.

1) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(e^{\frac{1}{n}} - 1) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Khi $n \to \infty$, ta có

$$\ln\frac{n^2 + \sqrt{n}}{n^2 - n} = \ln\left(1 + \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n}\right) \sim \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - 1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Do đó $u_n \sim \frac{1}{n^3}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

3) - Nếu $k > 1$, $u_n = \frac{k^n}{n^k} \to +\infty$ khi $n \to \infty$, vậy chuỗi số phân kỳ.

- Nếu $k = 1 \to u_n = \frac{1}{n} \to$ chuỗi điều hoà nên phân kỳ.

- Nếu $k < 1$, ta có $n^2u_n = n^{2\cdot k}.k^n \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy với mọi số $C > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với $n \ge n_0$ ta có:

$$n^2u_n \le C \Rightarrow u_n \le \frac{C}{n^2}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ hội tụ, vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi $k < 1$, phân kỳ khi $k \geq 1$. Bài này cũng có thể giải được bằng cách dùng quy tắc Cauchy. Ta có:

$\sqrt[n]{u_n} = \frac{k}{n^{\frac{k}{n}}} = k.e^{-\frac{k}{n}\ln n} \to k$ khi $n \to \infty$, vì $\frac{k}{n}\ln n \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi số đã cho hội tụ khi $k < 1$, phân kỳ khi $k > 1$; còn khi $k = 1$, ta có chuỗi số điều hoà, nó phân kỳ.

4) Giả sử $b > 1$. Khi $n + b^n \sim b^n$ khi $n \to \infty$, do đó $u_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu $a < b$, phân kỳ nếu $a \geq b$.

Nếu $b \leq 1$, thì $u_n = \frac{a^n}{n + b^n} \sim \frac{a^n}{n}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số đã cho hội tụ khi $a < 1$, phân kỳ khi $a \geq 1$.

Tóm lại chuỗi số hội tụ nếu ($a < b$ và $b > 1$) hoặc ($a < 1$ và $b \leq 1$).

5) $u_n = \ln\frac{1}{\sqrt{n}} - \ln\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = -\ln\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số sinx, ta có:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

trong đó $o(x^3)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn x^3 khi $x \to 0$. Vậy khi $n \to \infty$.

$$u_n = \ln\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right] = -\ln\left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n}$ phân kỳ, vậy chuỗi số đã cho phân kỳ.

6) Ta có:

$$n^{\alpha}u_n = n^{\alpha-2}\ln n \to 0 \text{ khi } n \to \infty \text{ nếu } \alpha < 2.$$

Lấy một số α sao cho $1 < \alpha < 2$. Vì $n^{\alpha}u_n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho khi $n > n_0$ thì: $n^{\alpha}u_n < 1 \Rightarrow u_n < \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ (vì đã chọn $\alpha > 1$), nên chuỗi số đã cho hội tụ.

Cũng có thể nhận xét rằng chuỗi số có số hạng tổng quát

$u_n = \dfrac{\ln n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2(\ln n)^{-1}}$ là chuỗi Bertrand với $\alpha = 2 > 1$, nó hội tụ.

7) Ta có $$0 \le u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}dx \le \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

8) Ta có $$0 \le u_n = \int_0^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{x^4+1}},$$

vì ta có $$\forall x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right] : \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$$

Nhưng khi $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

9) Ta có $$\frac{n^2}{n^2+an+b} = 1 - \frac{an+b}{n^2+an+b}$$

Do đó $$u_n = \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{an+b}{n^2+an+b}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{an+b}{n^2+an+b}\right).$$

Khi $n \to \infty$, nếu $a \ne 0$ thì $u_n \sim \dfrac{\pi}{2}\dfrac{an+b}{n^2+an+b} \sim \dfrac{\pi a}{2n}$, chuỗi số đã cho phân kỳ. Nếu $a = 0$, $b \ne 0$ thì $u_n \sim \dfrac{\pi b}{2n^2}$ khi $n \to \infty$, chuỗi số hội tụ. Nếu $a = b = 0$ thì u_n - 0, chuỗi số hội tụ. Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi và chỉ khi $a = 0$.

10) $u_n = na^{\sqrt{n}}$ $(a > 0)$.

Nếu $a \ge 1$, $u_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$, vậy chuỗi số phân kỳ. Nếu $0 < a < 1$, vì $u_n = ne^{\sqrt{n}\ln a}$ và $\ln a < 0$, ta có:

$$n^2u_n = n^3e^{\sqrt{n}\ln a} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với $n > n_0$ ta có:

$$n^2u_n \le 1 \Rightarrow u_n \le \frac{1}{n^2}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi $0 < a < 1$, phân kỳ khi $a \geq 1$.

11) $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3} = n\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - n\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ta có công thức khai triển hữu hạn:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \theta(x^2)$$

trong đó $\theta(x^2)$ là một vô cùng bé cấp cao đối với x^2 khi $x \to 0$. Do đó khi $n \to \infty$.

$$u_n \sim n\left(1 + \frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4}\right) - n\left(1 + \frac{3}{2n^2} - \frac{9}{8n^4}\right) = \frac{2a - 9}{6n} + \frac{81 - 8a^2}{72n^3}.$$

Vậy nếu $2a - 9 \neq 0$ thì $u_n \sim \frac{2a - 9}{6n}$, chuỗi số đã cho phân kỳ; còn nếu $2a - 9 = 0$, tức là $a = \frac{9}{2}$, thì $u_n \sim -\frac{9}{8n^3}$, chuỗi số đã cho hội tụ. Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi $a = \frac{9}{2}$, phân kỳ khi $a \neq \frac{9}{2}$.

4.3.

1) $u_n = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} \sim \frac{1}{4n^2}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có:

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}\right).$$

Do đó:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right).$$

Vậy $\quad S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2}$.

2) $u_n = \frac{1}{n^2 + n} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}.$$

Do đó $\quad S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}\right) = 1 - \frac{1}{n + 1}$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = 1.$$

3) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \dfrac{2}{n^3}$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có:

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Do đó $$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

4) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ là một chuỗi số đan dấu, $|u_n| = \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ giảm khi n tăng, giảm tới 0 khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi số ấy hội tụ theo định lý Leibniz. Ta có:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

Do đó

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \ldots + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

5) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1} \sim \dfrac{1}{n^2+n+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{1}{n(n+1)}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

Do đó

$$S_n = \left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{m+1}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}1\frac{1}{n+1}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

6) $u_n = \dfrac{n}{n^4+n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^3}$ khi $n \to \infty$.

Do đó chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có:

$$n^4 + n^2 + 1 = (n+1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right).$$

Do đó

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right]$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

7) $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có:

$$u_n = \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

Suy ra $$S_n = \ln\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln\frac{n+1}{2n}$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

8) $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}.\cos\dfrac{1}{n+1}} \sim \dfrac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

Do đó chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có:

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n}.\cos\frac{1}{n+1}} = \operatorname{tg}\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}.$$

Suy ra

$$S_n = \left(\operatorname{tg}1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}-\operatorname{tg}\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\operatorname{tg}\frac{1}{n+1}\right) = \operatorname{tg}1 - \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \operatorname{tg}1.$$

9) Ta có $\forall\alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\forall n \geq 0$

$$2\cos\frac{\alpha}{2^n}-1=1-2\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)=1-4\sin^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}>0$$

Do đó $$u_n=\ln\left(2\cos\frac{\alpha}{2^n}-1\right)\sim-4\frac{\alpha^2}{2^{2n+2}}=-\frac{\alpha^2}{4^n}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$

$$2\cos x-1=\frac{2\cos 2x+1}{2\cos x+1}$$

Suy ra

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\ln\left(2\cos\frac{\alpha}{2^k}-1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\ln\frac{2\cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}+1}{2\cos\frac{\alpha}{2^k}+1}=\ln\prod_{k=0}^{n}\frac{2\cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}+1}{2\cos\frac{\alpha}{2^k}+1}=\ln\frac{2\cos 2\alpha+1}{2\cos\frac{\alpha}{2^n}+1}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\ln\frac{2\cos 2\alpha+1}{3}.$$

10) Ta có

$$n+1=n\left(1+\frac{1}{n}\right),\ n+2=n\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

Do đó $$u_n=(1+a+b)\ln n+a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right).$$

Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số $\ln(1+x)$, ta có

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$$

$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\sim\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}$$

Suy ra $$u_n\sim(1+a+b)\ln n+\frac{a+2b}{n}-\frac{a+4b}{n^2}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+b+1=0\\a+2b=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ấy, ta được $a=-2$, $b=1$. Với các giá trị ấy, ta được:

$$S_n=(\ln 1-2\ln 2+\ln 3)+(\ln 2-2\ln 3+\ln 4)+(\ln 3-2\ln 4+\ln 5)+$$

$$+\ldots+[\ln n-2\ln(n+1)+\ln(n+2)]=-\ln 2+\ln\frac{n+2}{n+1}.$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\ln 2.$$

4.4.

1) Áp dụng quy tắc D'Alembert, ta có:

$$\frac{n_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1).2^{2n-1}}{(2n+1).2^{2n+1}} = \frac{2n-1}{2n+1}.\frac{1}{4}.$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{4} < 1.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Ta có $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2} = \frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

3) Ta có:

$$u_n = \frac{n^2}{2^n+n} - \frac{n^2}{2^n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Đặt $v_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, ta có $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1(n+1)^2}{n^2}$

Do đó $$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ, nên chuỗi số đã cho hội tụ.

4) Ta có $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{(n+1)^{n+1}}.n^n = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

5) Ta có $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a.\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu a < 1, phân kỳ nếu a > 1. Nếu a = 1,

$u_n = \dfrac{1}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$, chuỗi số hội tụ.

6) Áp dụng quy tắc Cauchy, ta có:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n^2-1}{3n^2+2}$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{3} < 1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

7) Ta có $$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^{\ln n}$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n} = 0 < 1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

8) Ta có $$\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

9) Ta có $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{[n!]^2} = \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

10) Ta có $$\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg}\left(a + \frac{b}{n^2}\right)$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg} a.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu tga < 1, tức là $a < \dfrac{\pi}{4}$; phân kỳ nếu tga >1, tức là $a > \dfrac{\pi}{4}$. Nếu $a = \dfrac{\pi}{4}$, ta có:

$$\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{n^2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\dfrac{b}{n^2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{b}{n^2}}.$$

Khi $n \to \infty$ thì $\sqrt[n]{u_n} \to 1$, nhưng vì $\sqrt[n]{u_n} > 1$, $\forall n$, nên u_n không dần tới 0 khi $n \to \infty$, chuỗi số phân kỳ.

11) Ta có $\sqrt[n]{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^{\alpha-1}} = e^{-n^{\alpha-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

Khi $n \to \infty$, ta có

$$-n^{\alpha-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -n^{\alpha-1}.\frac{1}{n} = -n^{\alpha-2}.$$

- Nếu $\alpha > 2$ thì $-n^{\alpha-2} \to -\infty$ khi $n \to \infty$, vậy $\sqrt[n]{u_n} \to 0$ khi $n \to \infty$, chuỗi số đã cho hội tụ.

- Nếu $\alpha = 2$ thì $-n^{\alpha-2}$ thì $-n^{\alpha-2} = -1$, vậy $\sqrt[n]{u_n} \to \dfrac{1}{e} < 1$ khi $n \to \infty$, chuỗi số đã cho hội tụ.

- Nếu $\alpha < 2$ thì $-n^{\alpha-2} \to 0$, vậy $\sqrt[n]{u_n} \to 1$ khi $n \to \infty$, chưa thể kết luận được gì. Ta viết $u_n = e^{v_n}$, trong đó $v_n = n^{\alpha}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Do công thức khai triển hữu hạn của hàm $\ln(1+x)$, ta được:

$$v_n = -n^{\alpha}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \theta\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -n^{\alpha-1} + \frac{1}{2}n^{\alpha-2} - \theta(n^{\alpha-2}) \text{ khi } n \to \infty.$$

+ Với $\alpha < 1$, $v_n \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó $u_n = e^{v_n} \to 1 \neq 0$, nên chuỗi số phân kỳ.

+ Với $\alpha = 1$, $v_n \to -1$ khi $n \to \infty$, do đó $u_n \to \dfrac{1}{e} \neq 0$, nên chuỗi số phân kỳ.

+ Với $1 < \alpha < 2$, ta có:

$u_n = e^{-n^{\alpha-1}}.e^{\frac{1}{2}n^{\alpha-2}-\theta(n^{\alpha-2})} \sim e^{-n^{\alpha-1}}$ khi $n \to \infty$ vì $n^{\alpha-2} \to 0$.

Đặt $w_n = e^{-n^{\alpha-1}}$. Ta có $n^2 w_n = e^{2\ln n - n^{\alpha-1}} \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho với $n \geq n_0$ ta có $n^2 w_n \leq 1 \Rightarrow w_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Vậy chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ hội tụ, suy ra chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ với $\alpha > 1$, phân kỳ với $\alpha \leq 1$.

12) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}.\frac{(2n)!}{4^n[n!]^2} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1.$

Theo quy tắc D'Alembert, chưa thể kết luận được gì. Nhưng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2n+2}{2n+1}>1,\ \forall n\in N,$ do đó $u_{n+1}>u_n,\ \forall n\in N$, dãy số $\{u_n\}$ là dãy tăng, u_n không thể dần tới 0 khi $n\to\infty$. Chuỗi số đã cho phân kì.

13) Ta có $\sqrt[n]{u_n}=1-\dfrac{3}{2}\dfrac{\ln n}{n}.$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1.$

Chưa thể kết luận được gì theo quy tắc Cauchy. Ta có:

$$u_n=e^{n\ln\left(1-\frac{3}{2}\frac{\ln n}{n}\right)}.$$

Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số ln(1 + x), ta được:

$n\ln\left(1-\dfrac{3}{2}\dfrac{\ln n}{n}\right)=-\dfrac{3}{2}\ln n+o(1)$ khi $n\to\infty$. Do đó $u_n\sim e^{-\frac{3}{2}\ln n}=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

14) Chuỗi số có số hạng tổng quát $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{n\ln n}$ là một chuỗi số đan dấu. Vì $|u_n|=\dfrac{1}{n\ln n}$ giảm khi n tăng và dần tới 0 khi $n\to\infty$, nên chuỗi số ấy hội tụ theo định lý Leibniz. Vì chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ là chuỗi số Bertrand với $\alpha=1$, $\beta=1$, nó phân kì. Vậy chuỗi số đã cho bán hội tụ.

15) Ta có: $u_n=\sin(n\pi+\sqrt{n^2+1}\,\pi-n\pi)=(-1)^n\sin[\pi\sqrt{n^2+1}-n)]$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Vậy chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ là một chuỗi số đan dấu. Vì $|u_n|=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ giảm khi n tăng và dần tới 0 khi $n\to\infty$, nên chuỗi số ấy hội tụ. Khi $n\to\infty$ ta có $|u_n|\sim\dfrac{\pi}{2n}$, do đó chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kì. Vậy chuỗi số đã cho bán hội tụ.

16) Ta có $u_n=\sin\left(\dfrac{1}{n}+n\right)\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{n}+n\pi\right)=(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}.$

Chuỗi số đã cho là một chuỗi số đan dấu, thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, do đó nó hội tụ. Vì $|u_n| = \sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kì, chuỗi số đã cho bán hội tụ.

17) Áp dụng quy tắc Cauchy vào chuỗi số có số hạng tổng quát là

$$|u_n| = \frac{n^2}{(\ln n)^n}, \text{ ta có } \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{2}{n}\ln n}}{\ln n}.$$

Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\ln n = 0$, nên $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\ln n} = 1$, do đó $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = 0 < 1$.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ, chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối.

18) Ta có $u_n = v_n + w_n$ trong đó $v_n = \frac{1}{1+n}$, $w_n = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$ là một chuỗi số dương phân kì.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$ là một chuỗi số đan dấu. Khi n tăng thì:

$|w_n| = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ giảm (vì hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ có đạo hàm $y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(1+x)^2} < 0, \forall x \geq 0$),

và dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Chuỗi số ấy hội tụ. Chuỗi số đã cho có số hạng tổng quát là $u_n = v_n + w_n$, nó phân kì.

Chú ý rằng trong bài này không thể lập luận như sau: Vì $u_n \sim (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ là một chuỗi số đan dấu hội tụ theo định lí Leibniz, nên chuỗi số đã cho hội tụ. Sở dĩ như vậy, vì định lí so sánh chỉ đúng với các chuỗi số dương, mà chuỗi số đã cho không phải là chuỗi số dương.

19) Ta có bằng cách dùng công thức khai triển hữu hạn:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) = v_n + w_n$$

trong đó $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $w_n = \frac{1}{n^2} + \theta\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi số đan dấu hội tụ theo định lí Leibniz, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ là chuỗi số dương hội tụ vì $w_n \sim \frac{1}{n^2}$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

20) Ta có : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = v_n + w_n$$

trong đó $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = \frac{1}{n} + \theta\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là chuỗi số đan dấu hội tụ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ là chuỗi số phân kì vì $w_n \sim \frac{1}{n}$. Vậy chuỗi số đã cho phân kì.

21) Ta có: $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left[\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] =$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \theta\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = v_n + w_n$$

trong đó $v_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, $w_n = -\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}} + \theta\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \sim -\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}}$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là chuỗi số đan dấu hội tụ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ là chuỗi số hội tụ vì $w_n \sim -\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}}$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

22) Ta có: $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \theta\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$

trong đó $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \theta\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là chuỗi số đan dấu hội tụ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ hội tụ khi và chỉ khi $2\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ với $\alpha > \frac{1}{2}$.

4.5.

1) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 .$$

Do bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa là R = 1. Tại x = - 1, ta có chuỗi số $-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, nó phân kì. Tại x = 1, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, đó là chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nó hội tụ. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 < x \le 1$.

2) $u_n(x) = a_n(x - 4)^n$, trong đó $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Vì $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, nên R = 1. Chuỗi luỹ thừa hội tụ với $-1 < x - 4 < 1$, tức là $3 < x < 5$. Tại x = 3, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nó hội tụ. Tại x = 5, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, nó phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $3 \le x < 5$.

3) $u_n(x) = a_n X^n$, trong đó $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$, $X = (x - 2)^2$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Do đó R = 2. Chuỗi luỹ thừa hội tụ với $|X| < 2$, tức là $(x - 2)^2 < 2$, hay $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Khi $x = 2 \pm \sqrt{2}$, ta có chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n .$$

Số hạng tổng quát của nó có thể viết là:

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}$$

khi $n \to \infty$, $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n+1}\right) \sim \dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$. Do đó:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = e^{\frac{1}{2}} \neq 0 .$$

Vậy chuỗi số ấy phân kì. Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là:

$$2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}.$$

4) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = n^n$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1.$$

Do đó R = 1. Tại x = - 1 và x = 1, ta có theo thứ tự các chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln n$, $\sum_{n=2}^{\infty}\ln n$, chúng phân kì vì số hạng tổng quát của chúng không dần tới 0 khi $n \to \infty$. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 < x < 1$.

6) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \frac{5^n}{n!}$. Ta có $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0$.

Do đó $R = \infty$. Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-\infty < x < +\infty$.

7) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(1+1)^\alpha} = 1.$$

Do đó R = 1. Tại x = - 1, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}$, nó hội tụ theo định lí Leibniz. Tại x = 1 ta có chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, nó hội tụ nếu $\alpha > 1$. phân kì nếu $\alpha \le 1$. Vậy nếu $\alpha \le 1$, miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 \le x < 1$, còn nếu $\alpha > 1$, miền hội tụ của nó là $-1 \le x \le 1$.

8) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Do đó $R = \infty$. Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-\infty < x < +\infty$.

9) Vì $0 < a_0 < \frac{\pi}{2}$, nên $0 < a_1 = \sin a_0 < a_0$. Bằng quy nạp, có thể chứng minh được rằng $a_n < a_{n-1}$, $\forall n$. Do đó dãy số $\{a_n\}$ đơn điệu giảm, nó lại bị chặn dưới bởi 0, nên dãy số ấy dần tới một giới hạn l khi $n \to \infty$.

Từ hệ thức:

$a_n = \sin a_{n-1}$, suy ra rằng $l = \sin l$, do đó $l = 0$, vì $0 \le l < \frac{\pi}{2}$. Vậy $\{a_n\}$ là một dãy số giảm dần và dần tới 0 khi n tăng dần đến ∞. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Do đó R = 1. Tại x = - 1, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ hội tụ theo định lí Leibniz. Tại x = 1, ta có chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ta có $a_n > a_n^2$, $\forall n$. Ta sẽ chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ phân kì, do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. Thật vậy, từ công thức khai triển hữu hạn của hàm sinx, suy ra:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \theta(x^2) \text{ khi } x \to 0.$$

Khi $x \to \infty$, $a_n \to 0$, do đó khi $n \to \infty$,

$$\ln\frac{\sin a_n}{a_n} \sim \ln\left(1 - \frac{a_n^2}{6}\right) \sim -\frac{a_n^2}{6}.$$

Vì vậy để khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, ta xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\sin a_n}{a_n}$. Ta có:

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{\sin a_k}{a_k} = \ln\left(\frac{a_1}{a_0}.\frac{a_2}{a_1}\dots\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\frac{a_{n+1}}{a_0}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{\sin a_k}{a_k} = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_0} = -\infty.$$

Do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\sin a_n}{a_n}$ phân kì, nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ phân kì, suy ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 \le x < 1$.

4.6. 1) $(3n + 1)x^{3n}$ là đạo hàm của x^{3n+1}. Chuỗi có số hạng tổng quát là x^{3n+1} là một cấp số nhân công bội x^3, do đó nó hội tụ với $|x^3| < 1$, tức là $|x| < 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đang xét cũng là $|x| < 1$. Ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n+1} = x^4.\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{x^4}{1-x^3}.$$

Do đó với $|x| < 1$, ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)x^{3n} = \left(\frac{x^4}{1-x^3}\right) = \frac{4x^3 - x^6}{(1-x^3)^2}.$$

2) $(2^n + 3^n)x^n = (2x)^n + (3x)^n$. Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$ là một cấp số nhân có công bội 2x, nó hội tụ nếu $|2x| < 1$, tức là $|x| < \frac{1}{2}$ và có tổng là $\frac{1}{1-2x}$. Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$ là một cấp số nhân có công bội 3x, nó hội tụ nếu $|3x| < 1$, tức là $|x| < \frac{1}{3}$ và có tổng là $\frac{1}{1-3x}$. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $|x| < \frac{1}{3}$. Tổng của nó là $\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$.

3) $u_n(x) = \left(n - \frac{1}{n+3}\right)\frac{x^n}{n!} = v_n(x) - w_n(x)$, trong đó

$$v_n(x) = \frac{nx^n}{n!}, \quad w_n(x) = \frac{1}{n+3}.\frac{x^n}{n!}.$$

Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ hội tụ $\forall x \in R$ và có tổng là xe^x.

Ta có $$w_n(x) = \frac{1}{x^3}.\frac{x^{n+3}}{n+3}.\frac{1}{n!} = \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^{n+2}}{n!}dt = \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2.\frac{t^n}{n!}dt.$$

Do đó $$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^2.\frac{t^n}{n!}dt.$$

Vì chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hội tụ $\forall x \in R$ và có tổng là e^x nên ta được:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}dt = \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2 e^t dt, \ \forall x \neq 0.$$

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta được:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = \frac{1}{x^3}[e^x(x^2 - 2x + 2) - 2].$$

Tóm lại chuỗi luỹ thừa đã cho hội tụ $\forall x \neq 0$ và có tổng là:

$$xe^x - \frac{1}{x^3}[e^x(x^2 - 2x + 2) - 2].$$

4) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó a_n = chna. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{(n+1)a}+e^{-(n+1)a}}{e^{na}+e^{-na}} = e^a ..$$

Do đó $R = e^{-a}$. Với $x = \pm e^{-a}$, ta có:

$$|u_n(\pm e^{-a})| = e^{-na}\text{ch } na = e^{-na}\left[\frac{e^{na}+e^{-na}}{2}\right] \to \frac{1}{2} \neq 0$$

khi $n \to \infty$. Chuỗi phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $(-e^{-a}, e^{-a})$.

Ta có $$u_n(x) = \frac{1}{2}(e^{na}+e^{-na})x^n = \frac{1}{2}[(e^a x)^n + (e^{-a}x)^n].$$

Với $|x| < e^{-a}$, ta có $|e^a x| < 1$, $|e^{-a}x| < 1$. Chuỗi luỹ thừa đã cho là tổng của hai cấp số nhân vô hạn có công bội $e^a x$ và $e^{-a}x$, chúng hội tụ và có tổng là $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-xe^a}$ và $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-xe^{-a}}$.

Vậy tổng của chuỗi luỹ thừa đã cho là:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-xe^a}+\frac{1}{1-xe^{-a}}\right] = \frac{1}{2}\frac{2-x(e^a+e^{-a})}{(1-xe^a)(1-xe^{-a})} = \frac{1-x\text{cha}}{1+x^2-2x\text{cha}}$$

5) $u_n(x) = a_n x^{n-1}$, trong đó $a_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$. Dễ dàng thấy rằng $R = 1$.

Tại $x = -1$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, nó phân kì. Tại $x = +1$, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, nó hội tụ theo định lí Leibniz. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $-1 < x \le 1$.

Gọi f(x) là tổng của chuỗi luỹ thừa với $|x| < 1$. Ta có:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} + ...$$

Do đó $$xf(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ... = \ln(1+x)$$

Vậy $$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

4.7.

1) $f(x) = \text{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) =$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., R = \infty$$

2) $f(x) = x^2e^x =$

$$= x^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\ldots\right) = x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+2}}{n!}+\ldots, R=\infty.$$

3) $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2n!}+\ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ R=\infty.$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1} =$

$$= \frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}.$$

Nhưng $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ với $|x|<1$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right]$$

với $|x|<2$.

Do đó $f(x) = \dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)x+\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)x^2+\ldots+\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n+\ldots,\ R=1.$

5) Ta có

$$x^2-5x+6 = 6\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right).$$

Do đó $f(x) = \ln(x^2-5x+6) = \ln 6+\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$

Nhưng $\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-\ldots-\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n+\ldots, |x|<2$

$$\ln\left(1-\frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2-\ldots-\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\ldots, |x|<3.$$

4.8.

a) $u_n(x) = a_nx^n$, trong đó $a_n = \dfrac{\text{ch}n}{\text{sh}^2 n}$. Ta có:

$$a_n \sim \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Đặt $b_n = \frac{2}{e^n}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{1}{e}$.

Vậy R = e.

b) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Khi $n \to \infty$ $\arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \to 0$, do đó

$$\arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim \sin\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sqrt{1-\cos^2 \arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{n}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}\left[1-\frac{1}{4n^2}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \sim \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Bằng quy tắc D'Alembert, dễ dàng thấy rằng bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} x^n$ bằng 1, vậy bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho bằng 1.

c) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó

$$a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) = e^{\frac{1}{n}\ln n}.\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

Khi $n \to \infty$, $\frac{1}{n}\ln n \to 0$, nên $e^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$. Vì $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$ khi $n \to \infty$, nên

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Vậy $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$, mà bán kính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ bằng 1, vậy bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho bằng 1.

d) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó

$$a_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1} = \cos\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Nhưng $\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\theta\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right)$

$$= 1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Do đó $$a_n = \cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$$

khi $n \to \infty$. Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$ bằng 1, vậy bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho bằng 1.

Chương 5

5.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

1) $z = \ln xy$. Hàm số f(x, y) xác định khi $xy > 0$; vậy miền xác định của nó là tập hợp:

$\{(x, y) \in R^2 : x > 0; y > 0\} \cup \{(x, y) \in R^2: x < 0 ; y < 0\}$

2) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

Hàm số z xác định khi $x + y > 0$ và $x - y > 0$.

Vậy miền xác định của nó là tập hợp: $\{(x, y) \in R^2; x > 0; -x < y < x\}$.

3) $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Hàm số z xác định khi $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ và $4 - x^2 - y^2 \geq 0$. Miền xác định của nó là vành khuyên đóng giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$.

5.2.

1) $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ xác định với $\forall(x, y) \neq (0, 0)$.

Cho $x = 0$, ta có $f(0, y) = -1$ với $\forall y \neq 0$;

Vậy $f(x, y) \to -1$ dọc theo trục Oy.

Cho $y = 0$, ta có $f(x, 0) = 1$, với $\forall x \neq 0$;

Vậy $f(x, y) \to 1$ dọc theo trục Ox.

Hàm số f dần tới tới 2 giới hạn khác nhau theo 2 phương khác nhau, vậy không tồn tại giới hạn của f khi $(x, y) \to (0, 0)$.

2) Hàm số $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ xác định với $\forall(x, y) \neq (0, 0)$.

Ta có $|x^3 + y^3| = |(x + y)(x^2 - xy + y^2)| \leq |x + y| . (x^2 + y^2 + |xy|)$ nhưng $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ với $\forall(x, y) \in R^2$.

$\rightarrow |x^3 + y^3| \le |x + y| \,.\, \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$

$\rightarrow |f(x, y)| \le \frac{3}{2}|x + y|$. Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

3) Hàm số $f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y^2}(1 - \cos y)$ xác định với $\forall y \ne 0$. Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số ta có:

$$1 - \cos y = \frac{y^2}{2} + \theta(y^2) \quad \text{khi } y \to 0.$$

Do đó: $f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)\left(\frac{1}{2} + \theta(1)\right)$ khi $y \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$.

5.3. Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau:

1) $f'_x = \frac{x^4 - 2xy^3 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\quad f'_y = \frac{y^4 - 2yx^3 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

2) $f'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\quad f'_y = \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}$

3) $f'_x = y \,.\, \cos\frac{x}{y}$; $\quad f'_y = 2y \,.\, \sin\frac{x}{y} - x \,.\, \cos\frac{x}{y}$

4) Viết $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right) - \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)$

$f'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\quad f'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$

5) $f'_x = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}}$; $\quad f'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^4 - y^4}}$

5.4. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

1) $y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{y(3x^2 - y^2)}{x(3y^2 - x^2)}$

2) $F(x,y) = x\,e^y + y\,e^x - e^{xy} = 0$

$$y' = \frac{e^y + y.e^x - y.e^{xy}}{-x\,e^y - e^x + x.e^{xy}}$$

3) $F(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \text{arctg}\frac{y}{x} = 0$

$$y' = \frac{x + y}{x - y} \quad \text{với } x \neq y.$$

Tính y". Viết biểu thức trên thành: $(x - y)\,y' = x + y$

Lấy đạo hàm 2 vế (theo y).

$(x - y)y'' + (1 - y')y' = 1 + y'$

$(x - y)y'' = 1 + y'^2$

$$= 1 + \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2 = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^2}$$

Vậy $y'' = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$ (với $x \neq y$)

4) $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$z'_x = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy}$; $z'_y = \frac{zx - y^2}{z^2 - xy}$

5.5.

1) $f'_x(x, y) = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.2x = x.\sqrt{x^2 + y^2}$

$f'_y(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$

$f''_{x^2}(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$f''_{xy} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $f''_{y^2}(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2) $f'_x(x, y) = 2x\,.\ln(x + y) + \frac{x^2}{x + y}$; $f'_y(x, y) = \frac{x^2}{x + y}$

$f''_{x^2}(x, y) = 2\ln(x + y) + \frac{2x}{x + y} + \frac{x^2 + 2xy}{(x + y)^2}$

$f''_{xy} = \frac{2x}{x + y} - \frac{x^2}{(x + y)^2}$

$f''_{y^2}(x, y) = -\frac{x^2}{(x + y)^2}$

3) $f'_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$; $f'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; $f''_{x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f''_{xy} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $f''_{y^2} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

5.6. Vì $f''_{xy} = (f'_x)'_y = 0$ nên f'_x không phụ thuộc y hay $f'_x = f(x)$; trong đó f(x) là một hàm số tuỳ ý.

Vậy f(x, y) = F(x) + G(y) với F(x) là một hàm số khả vi tuỳ ý (vì nguyên hàm của hàm số tuỳ ý F(x); G(y) là một hàm số tuỳ ý. (G(y) đóng vai trò của hằng số tuỳ ý khi lấy tích phân đối với x).

2) Từ hệ thức $f''_{x^2} = (f'_x)'_x = 0 \Rightarrow f'_x = f(y)$

với f là hàm số tuỳ ý. Do đó (f(x,y) = x f(y) + g(y) với g là hàm tuỳ ý.

5.7.

1) $z_{max} = 8$ tại (2, - 2)

2) $z_{min} = 0$ tại (-1, 1)

3) Không có cực trị.

Ta có $p = 1 - e^y$; $q = 1 - x \cdot e^y$.

Cho p = 0 ; q = 0 ta có 1 điểm tới hạn duy nhất là điểm $M_0(1, 0)$.

Ta có r = 0 ; $s = -e^y$; $t = -x \cdot e^y$.

Tại điểm M_0 có $s^2 - rt = (-1)^2 = 1 > 0$. Vậy M_0 không có điểm cực trị, do đó hàm số không có cực trị.

5.8.

1) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2, 0) ; (- 2, 0)

Giá trị nhỏ nhất là - 4 tại (0, 2) ; (0, -2).

2) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2, 1)

Giá trị nhỏ nhất là - 64 tại (4, 2).

3) Giá trị lớn nhất là 17 tại (1, 2)

Giá trị nhỏ nhất là - 3 tại (1, 0).

4) z đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại (0, 0)

Giá trị lớn nhất = $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right)$.

5.9.

1) Theo phương pháp nhân tử Lagrange, để tìm cực trị của hàm số

$z(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ với điều kiện $g(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{a^2} = 0$.

Ta chỉ việc tìm cực trị của hàm số:

$$F(x, y, \lambda) = z(x,y) + \lambda\, g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Trong đó λ là nhân tử Lagrange.

Ta có: $F''_x(x, y, \lambda) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3}$; $F''_y(x, y, \lambda) = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3}$.

Cho F''_x ; F''_y đồng thời triệt tiêu, được $x = y = -2\lambda$.

Thế các giá trị ấy vào điều kiện $g(x,y) = 0$ ta được:

$$\frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$ Vậy có 2 điểm tới hạn:

$$M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right);\quad M_2\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$$

Xét dấu của số gia của F tại M_1 và M_2; ta kết luận:

M_1 là điểm cực đại; $z_{max} = z(M_1) = \frac{\sqrt{2}}{a}$

M_2 là điểm cực tiểu; $z_{min} = z(M_2) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$.

2) $z_{max} = \frac{1}{4}$ tại $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

5.10. a) Xét tích phân $I(\alpha) = \int_0^1 f(x,\beta)\,dx$ với $f(x, \alpha) = x^\alpha$.

$I(\alpha)$ là một hàm số liên tục đối với α. Ta có:

$$I(\alpha) = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

Đạo hàm $f'_\alpha(x, \alpha) = x^\alpha \ln x$ liên tục với $\forall x \in (0, 1]$; có điểm gián đoạn bỏ được $x = 0$ vì: $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$.

Do đó: $$I'_{(\alpha)} = -\frac{1}{(\alpha+1)^2} = \int_0^1 x^\alpha \ln x\,dx$$

Tương tự: $$I''_{(\alpha)} = \frac{1.2}{(\alpha+1)^3} = \int_0^1 x^\alpha (\ln x)^2\,dx$$

$$I'''_{(\alpha)} = -\frac{1.2.3}{(x+1)^4} = \int_0^1 x^\alpha (\ln x)^3\,dx$$

...

$$I^{(n)}_{(\alpha)} = \int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)dx = (-1)^n.\frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$$

b) $I_{(y)} = \pi . \ln(\sqrt{y+1}+1) - \pi\ln 2$.

Chú ý: Không thể tính tích phân $I_{(y)}$ bằng cách tìm nguyên hàm của $\ln(1 + y\sin^2 x)$.

5.11. a) Với $y > 0$; xét tích phân phụ thuộc tham số:

$$I_{(y)} = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.y^{-1/2}$$

Lấy đạo hàm 2 vế đối với y n lần, khi lấy đạo hàm vế trái, ta cứ lấy đạo hàm một cách hình thức biểu thức dưới dấu tích phân. Ta được:

$$-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^2} = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-3/2}.$$

$$(-1)(-2)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^3} = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)y^{-5/2}$$

...

$$(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}(-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{2^n}y^{-\frac{2n+1}{2}}$$

Do đó: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.y^{-n-\frac{1}{2}}$

Ta phải chứng minh rằng có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân n lần của $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y}$.

b) Xét tích phân phụ thuộc tham số:

$$I_{(\alpha)} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$$

Kết quả: $I_{(\alpha)} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx = \ln\beta - \ln\alpha = \ln\frac{\beta}{\alpha}$.

5.12.

a) Miền lấy tích phân giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 4$; $x = -2$; $x = 2$. Hai đường $y = x^2$; $y = 4$ cắt nhau tại 2 điểm $x = \pm 2$. Do đó đổi thứ tự tích phân ta có:

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy = \int_0^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$$

b) $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx = \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)dy + \int_2^6 dx \int_{x/2}^3 f(x,y)dy$.

c) Miền lấy tích phân giới hạn bởi $x = 2 - y$; $x = 1 + \sqrt{1+y^2}$.

Đường thẳng $x = 2 - y$ và đường tròn $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$ cắt nhau tại 2 điểm $y = 0$; $y = 1$. Vậy khi đổi thứ tự tích phân, ta được:

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$$

d) Miền lấy tích phân giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2ax - x^2}$; $y = \sqrt{2ax}$; $x = 0$; $x = a$. Để đổi thứ tự tích phân, ta dựng đường thẳng $y = a$; nó tiếp xúc với đường tròn $y = \sqrt{2ax - x^2}$ và chia miền ấy thành 3 miền nhỏ:

$$D_1 = \{(x,y) : \frac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2 - y^2}\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : a + \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le 2a ; 0 \le y \le a\}$$

$$D_3 = \{(x,y) : \frac{y^2}{2a} \le x \le 2a ; a \le y \le 2a\}$$

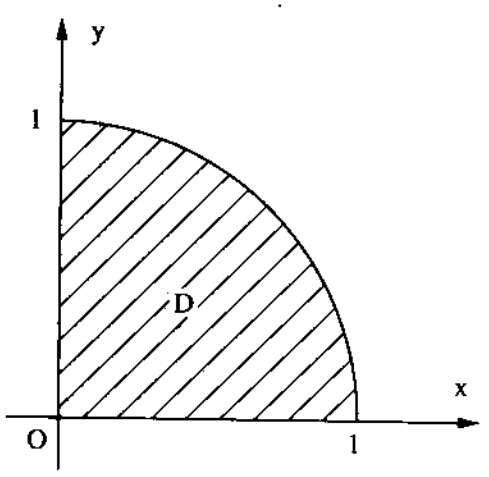
Do đó:

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x,y)dx .$$

5.13. $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3} = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = \int_1^{3-x} \left(\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{18} \right) dx = \frac{1}{36}$.

5.14.

D là một phần tư hình tròn đơn vị (nằm trong góc phần tư thứ nhất). Ta có:



$$I = \iint_D \frac{ydxdy}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy$$

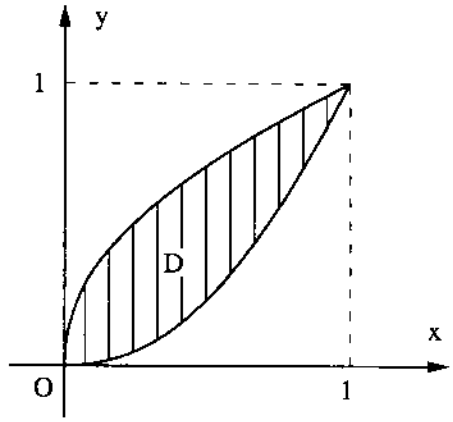
$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{1-x^2}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-x^2+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x^2+1} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \text{arctg}x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

5.15.

D là lá (giao của 2 parabol $y = x^2$ và $x = y^2$)



Vậy $I = \iint\limits_D x^2(y - x)dxdy$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2y - x^3)dy = \int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y\right)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}$$

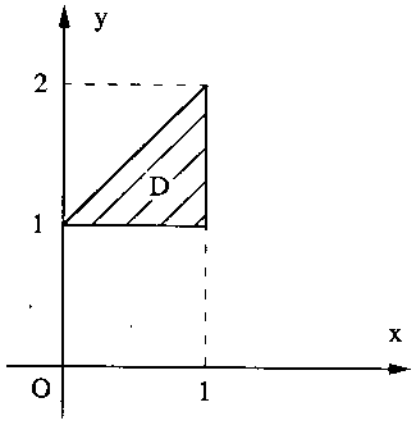
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^3\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^6 + x^5\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{6}x^6\right)\Big|_0^1$$

$$= = \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{504}$$

5.16.

D là miền tam giác. Ta có:



$$I = \iint\limits_D \ln(x + y)dxdy = \int_0^1 dx \int_1^{1+x} \ln(x + y)dy$$

Bằng cách phân tích phân đoạn, ta được

$$\int_1^{1+x} \ln(x + y)dy = y\ln(x + y)\Big|_{y=1}^{y=1+x} - \int_1^{1+x} y\frac{dy}{x + y} =$$

$$= (1 + x)\ln(1 + 2x) - \ln(1 + x) - \int_1^{1+x} \left(1 - \frac{x}{x + y}\right)dy$$

$$= (1 + x)\ln(1 + 2x) - \ln(1 + x) - x + x\ln(1 + 2x) - x\ln(1 + x)$$

$$= (1 - 2x)\ln(1 + 2x) - (1 + x)\ln(1 + x) - x$$

Do đó:

$$I = \int_0^1 [(1 + 2x)\ln(1 + 2x) - (1 + x)\ln(1 + x) - x]dx.$$

Lại dùng phương pháp tích phân phân đoạn, ta được:

$$I = \frac{(1+2x)^2}{4}.\ln(1+2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+2x)^2}{4}.\frac{2}{1+2x}dx - \frac{(1+x)^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1 +$$

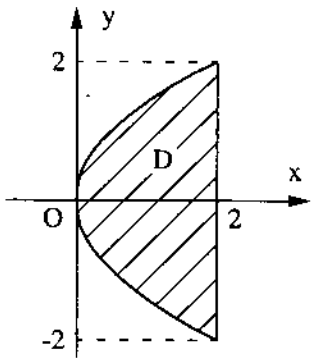
$$+\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{9}{4}\ln 3 - \frac{1}{8}(1+2x)^2\Big|_0^1 - 2\ln 2 + \frac{1}{4}(1+x)^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{9}{4}\ln 3 - 1 - 2\ln 2 + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9}{4}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

5.17.

Miền D nhận Ox làm trục đối xứng, hàm số dưới dấu tích phân là chẵn đối với y, do đó:



$$I = \iint_D \frac{xdxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 2\iint_D \frac{xdxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Trong đó D_1 nằm trên trục Ox. Để tính tích phân kép này, ta tính tích phân theo x trước, rồi tính tích phân theo y sau. Ta được:

$$I_2 = \int_0^2 \sqrt{(\frac{y^2}{2}+1)^2}\,dy - \int_0^2 (\frac{y^2}{2}+1)dy = (\frac{y^3}{6}+y)\Big|_0^2 = \frac{8}{6}+2 = \frac{10}{3}$$

Để tính I_1, ta đổi biến số $y = \sqrt{5}\,\text{sht}$, do đó:

$$dy = \sqrt{5}\,\text{chtdt},\ \sqrt{5+y^2} = \sqrt{5}\,\text{cht}$$

Khi y biến thiên từ 0 đến 2, t biến thiên từ 0 đến $\text{argsh}\frac{2}{\sqrt{5}}$

Đặt $\alpha = \text{argsh}\ \frac{2}{\sqrt{5}}$, ta được:

$$I_1 = \int_0^\alpha 5\text{ch}^2 t dt = \frac{5}{2}\int_0^\alpha (1+\text{ch}2t)dt$$

$$= \frac{5}{2}(t + \frac{\text{sh}2t}{2})\Big|_0^\alpha = \frac{5}{2}(t + \text{sht}\,\text{cht})\Big|_0^\alpha = \frac{5}{2}(\alpha + \text{sh}\alpha\,\text{ch}\alpha)$$

Nhưng $\text{sh}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\text{ch}\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\alpha = \ln(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{2}\ln 5$

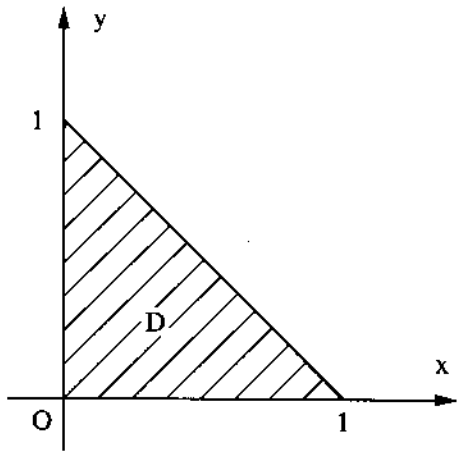
Vậy $$I_1 = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{6}{5}\right) = \frac{5}{4}\ln 5 + 3$$

Do đó $$I = \frac{5}{2}\ln 5 + 6 - \frac{20}{3} = \frac{5}{2}\ln 5 - \frac{2}{3}.$$

5.18.

D là miền tam giác

Ta có



$$I = \iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

$$= \int_0^1 x.\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\ln(2x^2-2x+1)dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 x\ln(x^2)dx = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

Tính I_1 bằng tích phân đoạn, ta được:

$$I_1 = \int_0^1 x\ln(2x^2-2x+1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(2x^2-2x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.\frac{4x-2}{2x^2-2x+1}dx =$$

$$= -\int_0^1 \frac{2x^3-x^2}{2x^2-2x+1}dx$$

$$= -\int_0^1 (x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-4x+2})dx$$

Ta có $4x^2 - 4x + 2 = (2x - 1)^2 + 1$. Do đó:

$$I_1 = -\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\text{arctg}(2x-1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-1$$

Cũng tính I_2 bằng tích phân phân đoạn, ta được:

$$I_2 = \int_0^1 2x\ln xdx = x^2\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 xdx = -\frac{1}{2}$$

Vậy $$I = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

5.19.

Đường $y = 2 - x^2$ là đường parabol có đỉnh tại điểm (0, 2) nhận Oy làm trục đối xứng, đường $y = 2x - 1$ là đường thẳng, chúng cắt nhau tại hai điểm (-3, 7) và (1, 1). Ta có:

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy =$$

$$= \int_{-3}^1 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=2x-1}^{y=2-x^2} dx$$

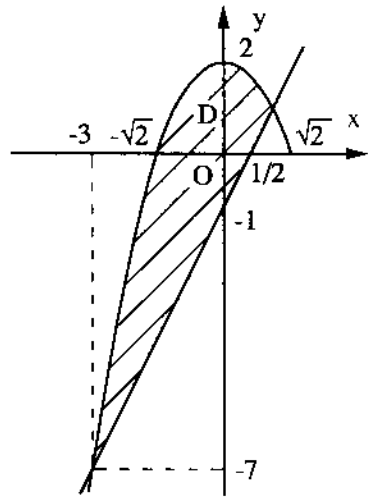
$$= \int_{-3}^{1}[x(2-x^2)-x(2x-1)-\frac{1}{2}(2-x^2)^2$$

$$+\frac{1}{2}(2x-1)^2]dx = \int_{-3}^{1}(2x-x^3-2x^2+x-2-$$

$$-\frac{1}{2}x^4+2x^2+2x^2+\frac{1}{2}-2x)dx =$$

$$= \int_{-3}^{1}(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2})dx$$

$$= (-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x)\Big|_{-3}^{1} = \frac{64}{15}$$



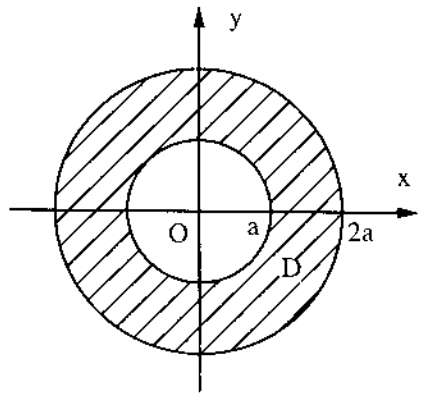
5.20. a) Miền D là hình vành khăn. Chuyển sang toạ độ cực, miền lấy tích phân D' tương ứng trong mặt phẳng (r, φ) được xác định bởi các bất đẳng thức $0 \le \varphi \le 2\pi$, $a \le r \le 2a$.

Vậy:

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{D'} r^2 drd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_a^{2a}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{7a^3}{3} d\varphi = \frac{14\pi a^3}{3}$$

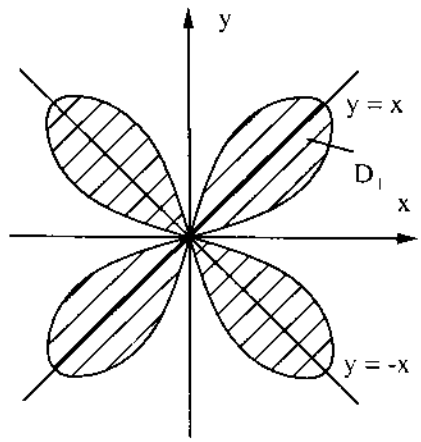


b) Miền D được cho ở hình bên, nó nhận các trục Ox, Oy và các đường phân giác y = x, y = -x làm trục đối xứng. Hàm số dưới dấu tích phân là chẵn đối với x, chẵn đối với y và không đổi khi ta thay (x, y) bởi (y, x) hoặc thay (x, y) bởi (y, - x) nên:

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = 8\iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

với D_1 là phần của miền D được chỉ ra ở hình bên. Chuyển sang toạ độ cực, miền D'_1 tương ứng trong mặt phẳng (r, φ) được xác định bởi các bất đẳng thức:

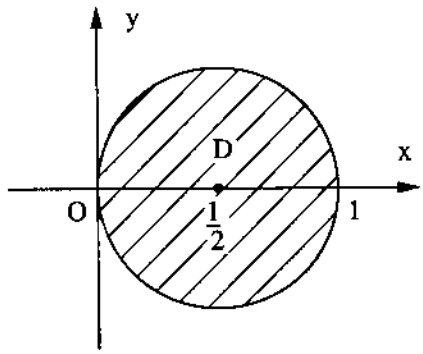
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le r \le a\sin 2\varphi$$



Vậy $$I = 8\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} r^2 dr = 8\int_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=a\sin 2\varphi} d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/4} \sin^3 2\varphi d\varphi$$

Đổi biến số $u = 2\varphi$. Ta có $d\varphi = \frac{du}{2}$. Vậy: $I = \frac{8a^3}{2.3}\int_0^{\pi/2} \sin^3 u du = \frac{4a^3}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8a^3}{9}$

5.21.



Đường $x^2 + y^2 - x = 0$ là đường tròn có tâm tại điểm $(\frac{1}{2}, 0)$, có bán kính bằng $\frac{1}{2}$. Chuyển sang toạ độ cực, phương trình của đường đó là $r = \cos\varphi$. Vậy miền lấy tích phân D' tương ứng trong mặt phẳng (r, φ) được xác định bởi:

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le \cos\varphi$$

Do đó:

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy = \iint_{D'} (r^2 + 1)rdrd\varphi =$$

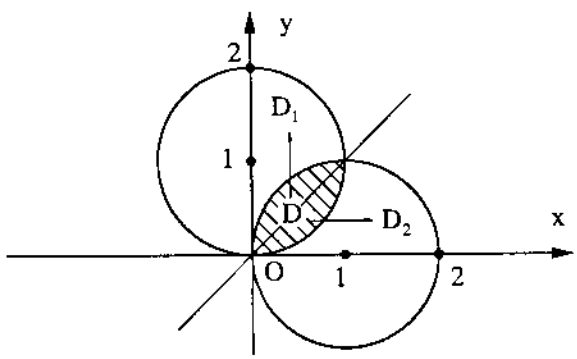
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} (r^3 + r)dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos^4\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{8} + 1\right) = \frac{11\pi}{32}.$$

5.22.



Gọi I là giao điểm khác O của hai đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 2x$. Đoạn OI chia miền D thành hai miền D_1 và D_2.

Chuyển sang hệ toạ độ cực, phương trình của hai đường tròn trên theo thứ tự là:

$$r = 2\sin\varphi, \quad r = 2\cos\varphi$$

Các miền D_1', D_2' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D_1, D_2 được xác định bởi:

$$D'_1 = \{(r, \varphi): 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ \ 0 \le r \le 2\sin\varphi\};$$

$$D'_2 = \{(r, \varphi): \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\varphi\}.$$

Vậy

$$I = \iint_D (x + 2y + 1)dxdy = \iint_{D'_1 \cup D'_2} [r(\cos\varphi + 2\sin\varphi) + 1]rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \left[r^2(\cos\varphi + 2\sin\varphi) + r\right]dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \left[r^2(\cos\varphi + 2\sin\varphi) + r\right]dr =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[(\cos\varphi + 2\sin\varphi)\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\sin\varphi} d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[(\cos\varphi + 2\sin\varphi)\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{8}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{16}{3}\sin^4\varphi + 2\sin^2\varphi\right)d\varphi +$$

$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{8}{3}\cos^4\varphi + \frac{16}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi + 2\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \left[\frac{8}{3}\frac{\sin^4\varphi}{4} + \frac{16}{3}\left(\frac{3}{8}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32}\right) + \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4} +$$

$$+ \left[\frac{8}{3}\left(\frac{3}{8}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32}\right) - \frac{16}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4} + \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

5.23.

D là miền hình vuông. Đổi biến số:

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

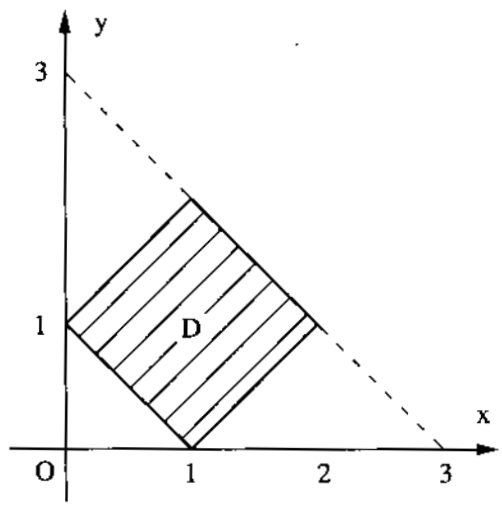
Do đó $x = \frac{1}{2}(v + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' xác định bởi:

$$1 \le u \le 3,\ -1 \le v \le 1$$

Ta có:

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$



0.0.1 downloaded 60906.pdf at Fri Mar

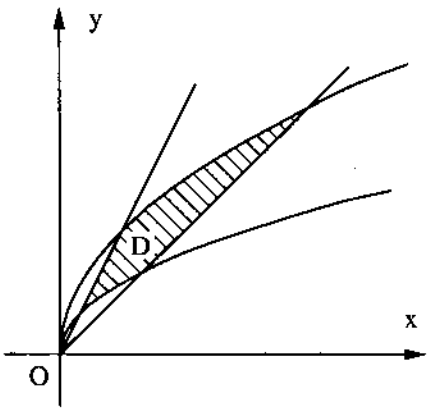
Do đó

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D u^3v^2\,dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 u^3du.\int_{-1}^1 v^2dv = \frac{1}{2}.\frac{u^4}{4}\Big|_1^3.\frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}.\frac{80}{4}.\frac{2}{3} = \frac{20}{3}.$$

5.24.

Miền D được cho ở hình vẽ. Thực hiện phép đổi biến số:



$$\frac{y^2}{x} = u, \quad \frac{y}{x} = v$$

Do đó $\qquad x = \dfrac{u}{v^2}, \quad y = \dfrac{u}{v}$

Đó là một song ánh biến miền D lên miền D' trong mặt phẳng (u, v) xác định bởi các bất đẳng thức:

$$1 \le u \le 3, \quad 1 \le v \le 2$$

Ta có

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v^2} & -\dfrac{2u}{v^3} \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4}$$

Do đó

$$\iint_D xydxdy = \iint_{D'} \frac{u}{v^2}.\frac{u}{v}.\frac{u}{v^4}\,dudv$$

$$= \iint_{D'} \frac{u^3}{v^7}\,dudv = \int_1^3 u^3du\int_1^2 \frac{dv}{v^7}$$

$$= \frac{u^4}{4}\Big|_1^3.\left(-\frac{1}{6v^6}\right)\Big|_1^2 = 20.\frac{1}{6}.\frac{63}{64} = \frac{105}{32}.$$

5.25.

a) Đường $x = 4y - y^2$ là đường parabol có đỉnh tại điểm (4, 2), có trục song song với trục Ox, cắt trục Oy tại hai điểm (0, 0) và (0, 4). Đường $x + y = 6$ là đường thẳng cắt các trục Ox, Oy theo thứ tự tại các điểm (6, 0) và (0, 6). Hai đường ấy giao nhau tại các điểm có tung độ thoả mãn phương trình.

$$4y - y^2 = 6 - y \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2, y = 3$$

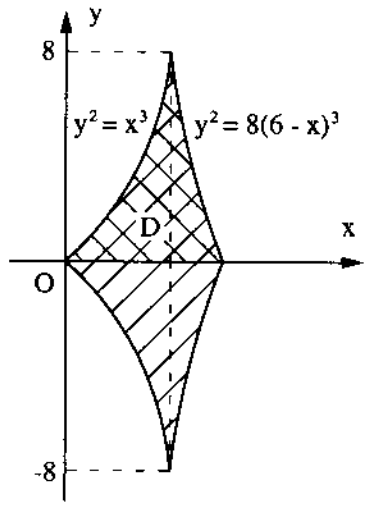
tức là tại điểm (4, 2), (3, 3). D là miền giới hạn bởi hai đường đó. Diện tích của miền D bằng:

$$S = \iint_D dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 (4y - y^2 - 6 + y)dy$$

$$= \int_2^3 (y^2 + 5y - 6)dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y\right)\Big|_2^3$$

$$= -\frac{1}{3}(27 - 8) + \frac{5}{2}(9 - 4) - 6 = \frac{1}{6}$$

b) Đường $y^2 = x^3$ là đường parabol bậc 3/2 có điểm lùi tại gốc 0, còn đường $y^2 = 8(6 - x)^3$ là đường parabol bậc $\frac{3}{2}$ có điểm lùi tại điểm (6, 0). Hai đường ấy cắt nhau tại điểm có hoành độ thoả mãn phương trình



$$x^3 = 8(6 - x)^3 \Leftrightarrow x = 4,$$

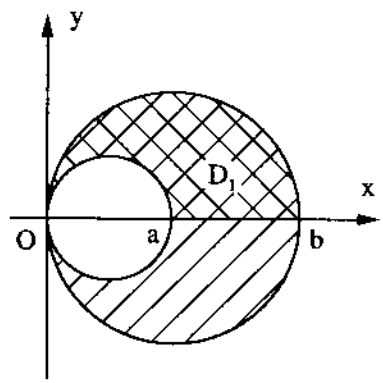
tức là chúng cắt nhau tại hai điểm (4, 8) và (4, -8). Diện tích của miền D giới hạn bởi đường cong ấy, vì lý do đối xứng, bằng:

$$S = 2\iint_{D'} dxdy = 2\int_0^8 dy \int_{y^{2/3}}^{6-\frac{y^{2/3}}{2}} dx$$

$$= 2\int_0^8 \left(6 - \frac{3}{2}y^{2/3}\right)dy = 2\left(6y - \frac{3}{2}.\frac{3}{5}y^{5/3}\right)\Big|_0^8$$

$$= 2\left(48 - \frac{9}{10}.32\right) = \frac{192}{5}.$$

c) Gọi D là miền giới hạn bởi hai đường $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$ $(0 < a < b)$. D_1' là phần của miền D nằm trên trục Ox. Vì lý do đối xứng, diện tích của miền D bằng:

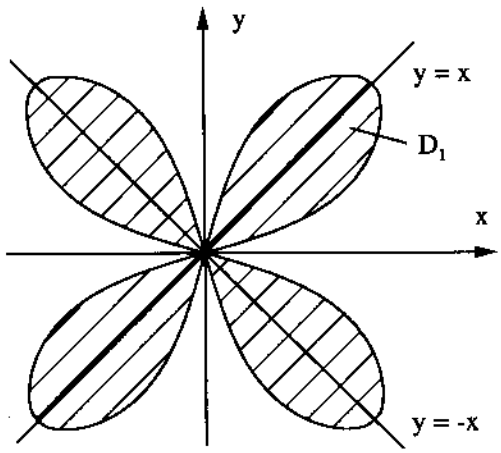


$$S = 2\iint_{D_1'} rdrd\varphi = 2.\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} rdr =$$

$$= 2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (b^2 - a^2)\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= (b^2 - a^2)\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2).$$

d) Đường $r = a\sin 2\varphi$ nhận các trục Ox, Oy và các đường phân giác $y = x$, $y = -x$ làm trục đối xứng. Gọi D là miền giới hạn bởi đường $r = a\sin 2\varphi$, D_1 là phần của miền D nằm giữa hai tia $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ta có:

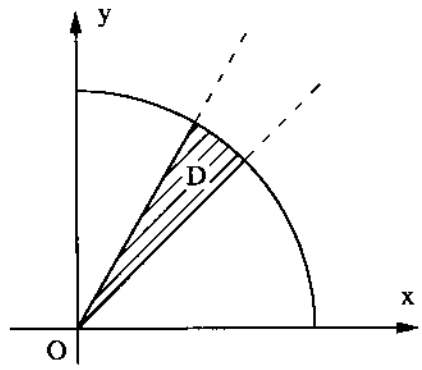


$$\frac{S}{8} = \iint_{D'_1} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{2} d\varphi = a^2 . \frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^2\pi}{2}.$$

5.26.

a) Mặt $z = 1 - x^2 - y^2$ là mặt parabôlôit tròn xoay có đỉnh tại điểm (0, 0, 1), nhận Oz làm trục, quay bề lõm về phía $z < 0$, nó cắt mặt phẳng $z = 0$ theo đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Vậy thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, nằm trong góc phần tám thứ nhất bằng:



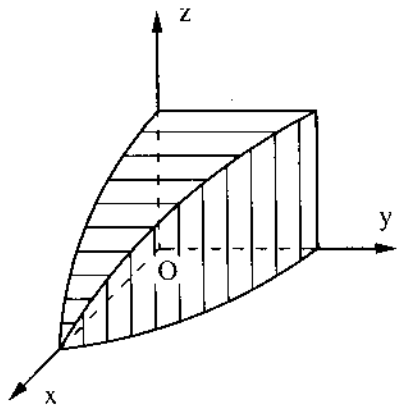
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy$$

trong đó D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng x0y. Chuyển sang toạ độ cực, ta được:

$$V = \iint_{D'} (1 + r^2) r dr d\varphi$$

Trong toạ độ cực, phương trình của đường $x^2 + y^2 = 1$ là $r = 1$, của các đường thẳng $y = x$, $y = x\sqrt{3}$ theo thứ tự là $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Do đó $V = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{\pi}{12} . \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{48}$.



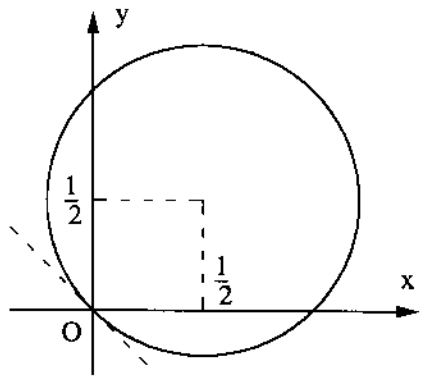
b) Mặt $x^2 + y^2 = a^2$ là mặt trụ có đường sinh song song với Oz, cắt mặt phẳng xOy theo đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$; mặt $x^2 + z^2 = a^2$ là mặt trụ có đường sinh song song với Oy, cắt mặt phẳng xOz theo đường tròn $x^2 + z^2 = a^2$. Vì lý do đối xứng, thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt ấy bằng 8 lần thể tích của phần vật thể ấy nằm trong góc phần tám thứ nhất. Vậy:

$$\frac{V}{8} = \iint_D z\,dxdy = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2}\,dxdy$$

trong đó D là phần của miền tròn $x^2 + y^2 \le a^2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất trên mặt phẳng xOy. Do đó:

$$V = 8\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 8\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a = \frac{16}{3}a^3.$$

c) Mặt $z = x^2 + y^2$ là mặt parabôlôit tròn xoay có đỉnh tại gốc toạ độ, nhận Oz làm trục đối xứng, quay bề lõm về phía $z > 0$.



Mặt $z = x + y$ là mặt phẳng đi qua gốc toạ độ. Hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của giao tuyến của hai mặt trên có phương trình là:

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \text{hay}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Đó là phương trình của đường tròn có tâm tại điểm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, có bán kính bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Gọi D là miền trong mặt phẳng xOy giới hạn bởi đường tròn trên. Thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = x + y$ bằng:

$$V = \iint_D [x + y - (x^2 + y^2)]dxdy$$

chuyển sang toạ độ cực, phương trình của đường tròn $x^2 + y^2 = x + y$ là $r = \cos\varphi + \sin\varphi$. Miền D' trong mặt phẳng (r, φ) tương ứng với D được xác định bởi các bất đẳng thức:

$$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le 3\frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \cos\varphi + \sin\varphi.$$

Vậy

$$V = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{\cos\varphi + \sin\varphi} [r(\cos\varphi + \sin\varphi) - r^2]rdr$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left[\frac{r^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\cos\varphi+\sin\varphi} d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{(\cos\varphi + \sin\varphi)^4}{12} d\varphi = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{(\sqrt{2})^4 \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}{12} d\varphi$$

Đổi biến số $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, ta được:

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

d) Mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ là mặt cầu đi qua gốc toạ độ, có tâm tại điểm (0, 0, 1). Mặt $x^2 + y^2 = z^2$ là mặt nón tròn xoay, có đỉnh tại gốc toạ độ, nhận trục Oz làm trục đối xứng. Ngoài gốc toạ độ, hai mặt ấy cắt nhau tại những điểm có cao độ z thoả mãn phương trình

$$2z - z^2 = z^2 \Rightarrow z = 1.$$

Vậy phương trình của hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của giao tuyến của hai mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ và $x^2 + y^2 = z^2$ là:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Gọi D là miền trong mặt phẳng xOy giới hạn bởi đường tròn ấy. Từ các phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ và $x^2 + y^2 = z^2$ ta lần lượt rút ra:

$$z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ và } z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vậy thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2+y^2 = z^2$ bằng:

$$V = \iint_D (1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$$

chuyển sang toạ độ cực, ta được:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - r^2} - r)rdr$$

$$= 2\pi.\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \pi$$

5.27.

a) Những điểm trên giao tuyến của phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ ứng với $z \geq 0$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ có cao độ z thoả mãn phương trình z = 1. Vậy phương trình của hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của giao tuyến ấy là:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Gọi D là miền phẳng giới hạn bởi đường tròn đó. Phương trình của phần mặt nón ứng với $z \geq 0$ là:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Do đó $\quad p = z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Vậy diện tích phải tìm bằng:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy.$$

Nhưng $\iint_D dxdy$ = diện tích miền D = π. Vậy $S = \pi\sqrt{2}$.

b) Phương trình của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ xác định một hàm số ẩn z(x, y). Lấy đạo hàm hai vế phương trình ấy đối với x, ta được:

$$2x + 2zp = 0 \Rightarrow p = -\frac{x}{z}.$$

Tương tự, ta được: $q = -\dfrac{y}{z}$.

Do đó: $$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{a^2}{z^2}.$$

Vì lý do đối xứng, diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong hình trụ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ bằng 8 lần diện tích của phần của mặt ấy trong góc phần tám thứ nhất. Gọi D là diện tích của miền trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng xOy, giới hạn bởi đường lemnixcat $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Diện tích phải tìm bằng:

$$S = 8\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

chuyển sang toạ độ cực, phương trình của đường lemnixcat là $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. Vậy:

$$S = 8\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,rdr = 8a\int_0^{\pi/4}\left[-\frac{1}{2}.\frac{2}{1}\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi/4}(1 - \sqrt{2}\sin\varphi)d\varphi = 8a^2(\varphi + \sqrt{2}\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/4} = 8a^2\left(\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}\right).$$

5.28.

Ta có

$$\iiint_V (1 - x - y - z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y}(1 - x - y - z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-z}\left[(1 - x - y)z - \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1 - x - y)^2}{2}\,dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{(1-x-y)^3}{2.3}\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{3!}\int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{3!}\frac{(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4!}.$$

5.29.

Ta có:

$$I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} (x^2+y^2+z^2)dz$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left[(x^2+y^2)z+\frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^{z=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dy$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left[c(x^2+y^2)\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+\frac{1}{3}c^3\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3\right] dy$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left[cx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)+cy^2\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{c}{b}(x^2y+y^3)+\frac{c^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3\right] dy$$

$$= \int_0^a \left[cx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)y+\frac{1}{3}cy^3\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{c}{b}\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4\right)-\frac{1}{12}c^3b\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^4\right]_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx$$

$$= \int_0^a \left[bcx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}cb^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^4-\frac{bc}{2}x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{1}{4}cb^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^4+\frac{c^3b}{12}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4\right] dx$$

$$= \frac{bc}{2}\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx + \frac{bc^3+cb^3}{12}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^4 dx.$$

Nhưng:

$$\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \int_0^a \left(x^2-\frac{2x^3}{a}+\frac{x^4}{a^2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-2\frac{x^4}{4a}+\frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{30}$$

$$\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^4 dx = -\frac{a}{5}\left(1-\frac{x}{a}\right)^5\Bigg|_0^a = \frac{a}{5}.$$

Vậy

$$I = \frac{a^3bc + abc^3 + ab^3c}{60}$$

$$= \frac{abc}{60}(a^2 + b^2 + c^2).$$

5.30.

a) Gọi V là vật thể giới hạn bởi các mặt parabôlôit tròn xoay $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, mặt phẳng $y = x$ và mặt trụ $y = x^2$. Hình chiếu xuống mặt phẳng xOy của miền V là miền giới hạn bởi đường thẳng $y = x$ và đường parabol $y = x^2$, hai đường này giao nhau tại $x = 0$ và $x = 1$. Vậy miền V được xác định bởi các bất đẳng thức:

$$0 \le x \le 1,\ \ x^2 \le y \le x,\ \ x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2).$$

Do đó thể tích của miền V bằng:

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)dy$$

$$= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4\,\frac{1}{3}x^6 \right)dx$$

$$= \left(\frac{4}{12}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{35}.$$

b) Gọi V là vật thể giới hạn bởi mặt parabôlôit tròn xoay $z = x^2 + y^2$ và mặt nón tròn xoay $z^2 = x^2 + y^2$. Những điểm thuộc giao tuyến của hai mặt ấy có cao độ z thoả mãn phương trình $z^2 = z$ tức là $z = 0$, $z = 1$. Vậy hình chiếu của giao tuyến của hai mặt ấy xuống mặt phẳng xOy có phương trình là $x^2 + y^2 = 1$. Vật thể V lại nhận các mặt phẳng toạ độ $x = 0$, $y = 0$ làm mặt phẳng đối xứng. Do đó, chuyển sang toạ độ trụ để tính thể tích của vật thể V, ta được:

$$4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{r^2}^{r} dz = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (r - r^2)rdr = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 4.\frac{\pi}{2}.\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

c) Gọi V là vật thể xác định bởi các bất đẳng thức:

$$0 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ \ -h \le z \le h.$$

Thể tích của vật thể ấy bằng:

$$I = \iiint_V dxdydz = \int_{-h}^{h} dz \iint_{S(z)} dxdy$$

trong đó S(z) là thiết diện của vật thể V bởi mặt phẳng đi qua điểm (0, 0, z) vuông góc với trục Oz. Hình chiếu của S(z) xuống mặt phẳng xOy là miền xác định bởi:

$$\frac{z^2}{c^2} \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

tức là miền nằm giữa hai đường elip:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \text{ và } \frac{x^2}{\left(\frac{az}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\frac{z}{c}\right)^2} = 1.$$

Do đó diện tích của S(z) bằng $\pi ab(1 + \frac{z^2}{c^2}) - \pi ab\frac{z^2}{c^2} = \pi ab$.

Vậy thể tích của vật thể V bằng $I = \int_h^h \pi abdz = 2\pi abh$.

Chương 6

6.1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly:

a) Phân ly biến số, ta được: $\frac{xdx}{(1+x^2)^2} + \frac{ydy}{(1+y^2)^2} = 0$.

Lấy tích phân hai vế, ta được: $-\frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2(1+y^2)} = C$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = K$, trong đó K = - 2C là hằng số tuỳ ý.

b) * $xy \neq 0$, phương trình có thể viết là: $\frac{(1-y)dy}{y^2} + \frac{1+x}{x^2}dx = 0$.

Lấy tích phân hai vế, ta được: $-\frac{1}{y} - \ln|y| - \frac{1}{x} + \ln|x| = C$,

C là hằng số tuỳ ý. Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C, (xy \neq 0).$$

* y = 0 cũng là nghiệm của phương trình.

c) Ta có

* $\sin y \neq 0$: $dx = \frac{\cos 2y}{\sin y}dy = \frac{1-2\sin^2 y}{\sin y}dy$.

Do đó: $x = \int \frac{dy}{\sin y} - 2\int \sin y dy = \ln\left|tg\frac{y}{2}\right| + 2\cos y + C$.

*$\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi$ ($k \in Z$) cũng là nghiệm.

d) Ta có $(\ln x + 1)dx = (\ln y + 1)\, dy$.

Do đó $\int(\ln x + 1)dx = \int(\ln y + 1)dy$.

Hay $x\ln x = y\ln y + C$.

e) Lấy tích phân hai vế phương trình $\frac{e^y - 1}{e^y - 2}dy = \frac{dx}{x}$

Ta được: $\int \frac{e^y - 1}{e^y - 2}dy = \ln|x|$.

Trong tích phân ở vế trái, ta đổi biến số $t = e^y$, do đó $y = \ln t$, $dy = \frac{dt}{t}$.

Do đó:

$$\int \frac{e^y - 1}{e^y - 2}dy = \int \frac{t-1}{t-2}.\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}\ln|t-2| + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(y + \ln\left|e^y - 2\right|\right) + C$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\ln|e^y - 2| + y - 2\ln|x| + C = 0.$$

f) Ta có $\frac{dy}{dx} + \sin(x + y) - \sin(x - y) = \frac{dy}{dx} + 2\sin y\cos x = 0$.

Do đó:

* $\sin y \neq 0$ ($y \neq k\pi$) thì: $\frac{dy}{\sin y} + 2\cos x dx = 0$.

Lấy tích phân hai vế, ta được: $\ln\left|tg\frac{y}{2}\right| + 2\sin x = C$ ($y \neq k\pi$).

* $\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi$ ($k \in Z$) cũng là nghiệm.

g) Ta có

* Nếu $\cos y = \sin y - 1 \neq 0$ thì:

$$\frac{dy}{\cos y - \sin y - 1} = \frac{dx}{\cos x - \sin x + 1}$$

Do đó: $I_1 = \int \frac{dy}{\cos y - \sin y - 1} = \int \frac{dx}{\cos x - \sin x + 1} = I_2$.

Trong tích phân I_1, đặt $t = \operatorname{tg}\frac{y}{2}, -\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{2} \le \frac{\pi}{2}$ do đó:

$$y = 2\operatorname{arctg}t, \quad dy = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ta có $$I_1 = -\int\frac{dt}{t(t+1)} = \int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \ln|1+t| - \ln|t| + \ln|C_1| = \ln\left|\frac{C_1(1+\operatorname{tg}\frac{y}{2})}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}\right|$$

Trong tích phân I_2, đặt $\tau = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, -\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2}$, ta được:

$$I_2 = \int\frac{d\tau}{1-\tau} = -\ln|1-\tau| + \ln|C_2| = \ln\left|\frac{C_2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = C(1+\operatorname{tg}\frac{y}{2})(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2})$$

Trong đó $C = \frac{C_1}{C_2}$ là hằng số tuỳ ý.

* Nếu $\cos y - \sin y - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + y) = 1 \Rightarrow y = 2k\pi$; $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ cũng là nghiệm.

h) Đặt $z = x - y$. Ta có $z' = 1 - y'$. Phương trình đã cho trở thành:

$$z' = 1 - \cos z = 2\sin^2\frac{z}{2}$$

* Nếu $\sin\frac{z}{2} \ne 0$ ($z = x - y \ne 2\pi$) thì:

$$dx = \frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}}$$

lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $x = -\operatorname{cotg}\frac{z}{2} + C$

Vậy $x + \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2} = C$, ($y \ne x + 2k\pi$, $k \in Z$).

* Nếu $\sin z = 0 \Rightarrow z = x - y = 2k\pi \Rightarrow y = x - 2k\pi$ cũng là nghiệm

i) Ta có: $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2 = (x + y)^2 - 1$

Đặt $x + y = z$. Ta có $z' = 1 + y'$. Phương trình được viết lại thành:

$$z' = z^2 \text{ hay } \frac{dz}{z^2} = dx \text{ (nếu } z = x + y \neq 0)$$

Do đó $$x = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{x+y} + C$$

Suy ra $$x + y = \frac{1}{C - x} \qquad (x + y \neq 0)$$

* Nếu $z = x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ cũng là nghiệm.

j) Đặt $x - y = z$. Ta có $z' = 1 - y'$. Phương trình đã cho được viết lại thành:

$$1 - z' = \frac{1}{z} + 1 \text{ hay } zdz + dx = 0$$

Do đó $$\frac{z^2}{2} + x = C$$

Hay $(x - y)^2 + 2x = C_1$, $\quad C_1 = 2C$ là hằng số tuỳ ý.

6.2.

a) Phân ly biến số, ta được $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Do điều kiện $y|_{x=0} = 1$, ta được $C = 1 + \sqrt{2}$

Vậy tích phân riêng của phương trình là:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{2} + 1$$

b) Phương trình đã cho có thể viết là:

$$y^2dy = \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta có $\dfrac{y^3}{3} = \text{arctge}^x + C$, C là hằng số tuỳ ý. Từ điều kiện

$y|_{x=0} = 0$, ta được $0 = \dfrac{\pi}{4} + C$, hay $C = -\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy tích phân riêng của phương trình là:

$$y^3 = 3\,\text{arctge}^x = -\frac{3\pi}{4}.$$

c) Phân ly biến số, ta được $\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$

Vì $\frac{dy}{y}$ = d(lny) nên lấy tích phân hai vế, ta được:

$$\ln(|\ln y|) = \ln(|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|) + \ln|C|$$

hay $$\ln y = C.\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Từ điều kiện $y|_{x=0} = 1$, ta được $0 = C.0$

Điều kiện này được thoả mãn với mọi C. Điều đó chứng tỏ rằng mọi nghiệm của phương trình đều thoả mãn điều kiện ấy. Nói cách khác mọi đường tích phân của phương trình đều đi qua điểm (0, 1). Vậy điều kiện duy nhất nghiệm của phương trình không được thoả mãn tại điểm đó.

6.3. a) Phương trình $x = y' + y'^3$ khuyết y. Đặt y' = t, ta có $x = t + t^3$

Vì $\frac{dy}{dx} = t$, ta có: $dy = tdx = t(1 + 3t^2)dt = (t + 3t^3)dt$.

Do đó $y = \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{4} + C$.

Vậy phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là:

$$x = t + t^3, \quad y = \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{4} + C.$$

b) Phương trình $x = y' + e^{y'}$ khuyết y. Đặt y' = t, ta có: $x = t + e^t$, do đó:

$$dy = tdx = t(1 + e^t)dt.$$

Vậy $y = \int tdt + \int te^t dt = \frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C$.

Phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là:

$$x = t + e^t, \quad y = \frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C.$$

c) Phương trình $y = y'^2\sin y'$ khuyết x. Đặt y' = t, ta có: $y = t^2\sin t$.

Do đó $dx = \frac{dy}{t} = \frac{2t\sin t + t^2\cos t}{t} = 2\sin t + t\cos t$

Vậy $x = -2\cos t + \int t\cos t dt = -2\cos t + t\sin t - \int \sin t dt = -\cos t + t\sin t + C$

Phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là:

$$x = -\cos t + t\sin t + C, \quad y = t^2\sin t.$$

d) Phương trình $y^3 + y'^3 - yy' = 0$, khuyết x, nhưng phương trình ấy không giải ra được đối với y, hoặc đối với y'. Dạng của phương trình ấy gợi cho ta đưa tham số t vào bằng cách đặt $y' = ty$ (xem ví dụ lá Descartes, mục 2, chương 5, quyển toán học cao cấp tập 2). Ta được:

$$y = \frac{t}{t^3 + t}, \qquad y' = \frac{t^2}{t^3 + 1}$$

Nhưng $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{t^3 + 1 - 3t^3}{(t^3 + 1)^2}.\frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{t^3 + 1}.$$

Do đó $$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - 2t^3}{t^2(t^3 + 1)'}, \qquad x = \int \frac{1 - 2t^3}{t^2(t^3 + 1)} dt.$$

Để tính tích phân ấy, ta phải phân tích phân thức hữu tỷ dưới dấu tích phân thành tổng của các phân thức hữu tỷ đơn giản. Nhưng ta có thể trước hết đổi biến số $t = \frac{1}{u}$, do đó $dt = -\frac{du}{u^2}$, vậy

$$x = \int \frac{2 - u^3}{u^3 + 1} du = \int \left(\frac{3}{u^3 + 1} - 1 \right) du = 3 \int \frac{du}{u^3 + 1} - u$$

Ta có $$\frac{3}{u^3 + 1} \equiv \frac{A}{u + 1} + \frac{Bu + C}{u^2 - u + 1}$$

Nhân hai vế của (*) với (u + 1) rồi cho u = - 1, ta được A = 1. Nhân hai vế của (*) với u rồi cho $u \to \infty$, ta được

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

Cho u = 0 trong hai vế của (*), ta được $A + C = 0 \Rightarrow C = 2$.

Vậy $$\int \frac{3du}{u^3 + 1} = \int \frac{du}{u + 1} - \int \frac{u - 2}{u^2 - u + 1} du = \ln|u + 1| - \int \frac{1}{2} \frac{2u - 1 - 3}{u^2 - u + 1} du$$

$$= \ln|u + 1| - \frac{1}{2} \ln(u^2 - u + 1) + \frac{3}{2} \int \frac{d\left(u - \frac{1}{2}\right)}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(u + 1)^2}{u^2 - u + 1} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Vậy phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là:

$$\begin{cases} x = -u + \frac{1}{2} \ln \frac{(u + 1)^2}{u^2 - u + 1} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} + C \\ y = \frac{u^2}{u^3 + 1} \end{cases}$$

e) Đặt x + y - 1 = z. Ta có 1 + y' = z'. Phương trình đã cho trở thành:

$$z' - 1 = \frac{z-2}{z^2} \quad \text{hay} \quad z' = \frac{z^2+z-2}{z^2}$$

$$dx = \frac{z^2 dz}{z^2+z-2}$$

Vậy $$x = \int\left(1+\frac{2-z}{z^2+z-2}\right)dz = z + \int\frac{2-z}{z^2+z-2}dz$$

$$= z + \int\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{z-1} - \frac{4}{3}\frac{1}{z+2}\right)dz = z + \frac{1}{3}\ln|z-1| - \frac{4}{3}\ln|z+2| + C$$

Suy ra $x = x + y - 1 + \frac{1}{3}\ln|x+y| - \frac{4}{3}\ln|x+y+1| + C$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$y + \frac{1}{3}\ln|x+y| - \frac{4}{3}\ln|x+y-1| + C_1 = 0$$

trong đó $C_1 = C - 1$ là hằng số tuỳ ý.

f) Đặt $\sqrt{xy} = u$. Ta có $xy = u^2$, do đó $xy' + y = 2uu'$, phương trình đã cho trở thành:

$$(u + 1)(2uu' - y) - (y - 1)y = 0$$

Hay $$2uu'(u + 1) - 2uy = 0$$

Hay $$u'(u + 1) - \frac{u^2}{x} = 0$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{(u+1)du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân hai vế, ta có:

$$\ln|u| - \frac{1}{u} = \ln|x| + C$$

Do đó $$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{1}{2}\ln|x| - C = 0.$$

6.4. a) Có thể viết phương trình đã cho dưới dạng:

$$y' = \frac{x-y}{x+y}$$

Đặt y = ux, u là một hàm số của x. Ta có:

$$xu' + u = \frac{1-u}{1+u}$$

Hay $$\frac{dx}{x} + \frac{(u+1)du}{u^2 + 2u - 1} = 0$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\ln|x|\sqrt{u^2 + 2u - 1} = \ln|C|$$

Do đó $$x\sqrt{u^2 + 2u - 1} = C$$

Bình phương hai vế, thay u bởi $\frac{y}{x}$, ta được:

$$y^2 + 2xy - x^2 = C^2$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình.

Cũng có thể xem $x = \frac{C}{\sqrt{u^2 + 2u - 1}}$, $y = \frac{Cu}{\sqrt{u^2 + 2u - 1}}$ là phương trình tham số của họ đường tích phân tổng quát.

b) Ta có $$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

Đặt y = xu, ta được với x > 0

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

Phân ly biến số $$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Do đó $\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln|Cx|$, C là hằng số tuỳ ý,

hay $$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$$

Bình phương hai vế đẳng thức $\sqrt{1 + u^2} = Cx - u$, rồi thế $u = \frac{y}{x}$, ta được:

$$1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$$

Với x < 0, ta cũng được kết quả tương tự.

c) Đặt y = xu, thế vào phương trình, ta được

$$xu\frac{du}{dx} + 1 - u^2 = 0$$

* Nếu $u \neq \pm 1$ tức $y \neq \pm x$ thì: $\frac{udu}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$

Do đó $\ln\sqrt{u^2 - 1} = \ln|Cx|$, C là hằng số tuỳ ý. Do đó:

$$\frac{y^2 - x^2}{x^2} = C^2x^2$$

Suy ra $\qquad y = \pm x\sqrt{1 + C^2x^2} \qquad (y \neq \pm x)$

* Nếu $u = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$ là nghiệm.

d) Đặt $y = xu$, phương trình trở thành:

$$(u^2 - 1)\, x\frac{du}{dx} + 2u^3 + 2u = 0$$

Hay
$$\frac{u^2 - 1}{2u(u^2 + 1)}du + \frac{dx}{x} = 0 \qquad (*)$$

Phân tích $\dfrac{u^2 - 1}{2u(u^2 + 1)}$ thành tổng các phân thức hữu tỷ đơn giản, ta được:

$$\frac{u^2 - 1}{2u(u^2 + 1)} = -\frac{1}{2u} + \frac{u}{u^2 + 1}$$

Do đó lấy nguyên hàm hai vế phương trình (*), ta được:

$$\ln\frac{|x|\sqrt{u^2 + 1}}{\sqrt{u}} = \ln|C|$$, C là hằng số tuỳ ý, suy ra:

$$\frac{x^2(u^2 + 1)}{u} = C^2$$

Hay $\qquad x(x^2 + y^2) - C^2y = 0$

Chú thích: Chuyển sang toạ độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, phương trình của đường tích phân tổng quát là:

$$r^2 = C^2 tg\varphi$$

Từ nhận xét này, ta thấy rằng cũng có thể giải phương trình đã cho rằng cách chuyển sang toạ độ cực. Ta có:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dfrac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được $\dfrac{dr}{r} = \dfrac{d\varphi}{\sin 2\varphi}$

Nghiệm tổng quát của nó là $r^2 = C^2 tg\varphi$.

e) Chuyển sang toạ độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, và ký hiệu $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\varphi}$, ta có:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

Ta được

$$2(x + yy')^2 = 2\left(r\cos\varphi + r\sin\varphi\frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}\right) = \frac{2r^2\dot{r}^2}{(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)^2},$$

$$y^2(1 + y'^2) = r^2\sin^2\varphi\left[1 + \left(\frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2\right] = r^2\sin^2\varphi\frac{\dot{r}^2 + r^2}{(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)^2}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$r^2\dot{r}^2\sin^2\varphi + r^4\sin^2\varphi = 2r^2\dot{r}^2$$

Hay $$r^2\sin^2\varphi = r^2(2 - \sin^2\varphi) = r^2(1 + \cos^2\varphi)$$

$$R^2 = \pm r\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{dr}{r} = \pm\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$\ln r = \pm\ln(\cos\varphi + \sqrt{1 + \cos^2\varphi}) + \ln|C|$, C là hằng số tuỳ ý, do đó

$$r = C(\sqrt{1 + \cos^2\varphi} \pm \cos\varphi)$$

Trở về toạ độ Đềcác, ta được

$$x^2 + y^2 + 2Cx - C^2 = 0$$

Họ đường tích phân tổng quát là họ đường tròn suy ra từ đường tròn tâm tại điểm (1, 0), bán kính $\sqrt{2}$ bằng phép vị tự tâm 0.

6.5. a) Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{dy}{y} = -2xdx$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\ln\left|\frac{y}{K}\right| = -x^2 = \ln e^{-x^2}$, trong đó K là một hằng số tuỳ ý. Do đó $y = Ke^{-x^2}$.

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Để tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất, ta cho hằng số K biến thiên, tức là xem K là hàm số của x rồi thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K'e^{-x^2} - 2xKe^{-x^2} + 2xKe^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

Hay $\quad K' = x$

Do đó $\quad K = \dfrac{x^2}{2} + C$, C là hằng số tuỳ ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$$

b) Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1 + x^2}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \ln(1 + x^2) ,$$

K là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = K(1 + x^2)$$

Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K' = 1 \Rightarrow K = x + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = (x + C)(1 + x^2)$$

c) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x + 1} = 0, \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x + 1}$$

nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = K(x + 1)^2$$

K là hằng số tuỳ ý. Cho K biến thiên, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K'(x + 1)^2 + 2K(x + 1) - \frac{2K(x + 1)^2}{x + 1} = (x + 1)^3$$

Suy ra $\quad K' = x + 1$

Do đó $\quad K = \dfrac{x^2}{2} + x + C$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = (\frac{x^2}{2} + x + C)(x + 1)^2$$

Từ điều kiện $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$, ta được $C = \frac{1}{2}$. Vậy ta được nghiệm riêng của phương trình đã cho là:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)^2$$

d) Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$(1 = x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0, \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} + \frac{xdx}{1 + x^2} = 0$$

nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = \frac{K}{\sqrt{1 + x^2}}$$

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$(1 + x^2)\left(\frac{K'}{\sqrt{1 + x^2}} - K\frac{x}{\sqrt{1 + x^2)^3}}\right) + x\frac{K}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$$

Hay $\quad K' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Do đó $\quad K = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$,

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Từ điều kiện $y|_{x=0} = 0$, ta được C = 0. Vậy nghiệm riêng của phương trình thoả mãn điều kiện trên là:

$$y = \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

e) Phương trình đã cho không phải là phương trình tuyến tính đối với y. Nhưng nếu ta viết nó dưới dạng:

$$2y\frac{dx}{dy} - 6x + y^2 = 0$$

thì ta được một phương trình tuyến tính đối với x(y). Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$2y\frac{dx}{dy} - 6x = 0 \qquad \text{hay} \qquad \frac{dx}{x} = 3\frac{dy}{y}$$

nghiệm tổng quát của nó là: $x = Ky^3$,

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$2y\,(K'y^3 + 3Ky^2) + y^2 - 6Ky^3 = 0$$

Suy ra $\quad K' = -\dfrac{1}{2y^2}$

Do đó $\quad K = \dfrac{1}{2y} + C$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$x = \left(\frac{1}{2y} + C\right)y^3 = Cy^3 + \frac{y^2}{2}$$

f) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = Kx$,

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của x và thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$x(K'x + K) - Kx = x^2\text{arctg}x$$

Hay $\quad K' = \text{arctg}x$

Do đó $\quad K = \int \text{arctg}x dx = x\text{arctg}x - \int x\dfrac{dx}{1+x^2} = x\,\text{arctg}x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$,

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = [x\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C]x$$

$$= x^2\text{arctg}x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + Cx.$$

g) Phương trình có nghĩa khi $x > 0$. Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\ln x} \qquad \text{hay} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|$$

K là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = K\ln x$.

Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K'\ln x + \frac{K}{x} - \frac{K\ln x}{x\ln x} = x\ln x$$

Suy ra $\quad K' = x$

Do đó $\quad K = \frac{x^2}{2} + C,$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\ln x$$

Từ điều kiện $y\big|_{x=e} = \frac{e^2}{2}$, ta được C = 0. Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho thoả mãn điều kiện trên là:

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x.$$

6.6. a) Giả sử $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, là nghiệm của phương trình đã cho. Thế vào phương trình ấy, ta được đồng nhất thức:

$$x(x^2 + 1)(2ax + b) - (2x^2 + 3)(ax^2 + bx + c) = 3$$

Hay $\quad -bx^3 - (a + 2c)x^2 - 2bx - 3c = 3$

Đồng nhất các hệ số, ta được:

$$b = 0, \quad a + 2c = 0, \quad -3c = 3$$

Suy ra $\quad b = 0, \quad c = -1, \quad a = 2$

Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là:

$$y = 2x^2 - 1\ .$$

Muốn tìm nghiệm tổng quát của nó, ta chỉ cần tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

$$x(x^2 + 1)y' - (2x^2 + 3)y = 0$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 1)}dx = \frac{3}{x}dx - \frac{xdx}{x^2 + 1}$$

Do đó $\quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = 3\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) = \ln\frac{|x|^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\ .$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình phải tìm là:

$$y = 2x^2 - 1 + C\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} .$$

b) Bằng cách đồng nhất hệ số sau khi thế $y = ax^2 + bx + c$ vào phương trình đã cho, ta được một nghiệm riêng của nó là:

$$y = 2x^2 - 1 .$$

Vậy chỉ cần tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$$(x^3 - x)\frac{dy}{dx} + (1 - 2x^2)y = 0$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}dx = \frac{dx}{x} + \frac{xdx}{x^2-1}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| = \ln(|x|\sqrt{|x^2-1|})$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý, vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = Cx\sqrt{|x^2-1|}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = 2x^2 - 1 + Cx\sqrt{|x^2-1|} .$$

6.7. a) Đặt $y^2 = z$. Ta có $2yy' = z'$. Phương trình đã cho trở thành:

$$xz + \frac{1}{2}x^2(x+1)z' + 3x - 5 = 0$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z. Phương trình thuần nhất tương ứng với nó là:

$$xz + \frac{1}{2}x^2(x+1)\frac{dz}{dx} = 0$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{dz}{z} = \frac{-2dx}{x(x+1)} = -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx .$$

Do đó $$\ln\left|\frac{z}{K}\right| = -2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

K là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$z = K\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K' = \frac{10-6x}{(x+1)^3}$$

Do đó $$K = \int\frac{10-6x}{(x+1)^3}dx = \int\frac{16-6(x+1)}{(x+1)^3}dx$$

$$= 16\int\frac{dx}{(x+1)^3} - 6\int\frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{8}{(x+1)^2} + \frac{6}{x+1} + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$z = \left(-\frac{8}{(x+1)^2} + \frac{6}{(x+1)} + C\right)\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

Nhưng $z = y^2$, vậy

$$y^2 = -\frac{8}{x^2} + 6\frac{x+1}{x} + C\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 .$$

b) Phương trình đã cho là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho y^3 và đặt $y^{-2} = z$, ta được:

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = x^3 .$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z. Phương trình thuần nhất tương ứng với nó là:

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = 0$$

Phân ly biến số, ta được $\frac{dz}{z} = 2xdx$

Nghiệm tổng quát của nó là $z = Ke^{x^2}$

K là hằng số tuỳ ý. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta được:

$$K' = -2x^3e^{-x^2}$$

Do đó $$K = -\int 2x^3e^{-x^2}dx .$$

Đổi biến số $x^2 = u$, ta được:

$$K = -\int ue^{-u}du = ue^{-u} + e^{-u} + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$z = (x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c)e^{x^2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$ Vì $z = \frac{1}{y^2}$, nên ta có:

$$y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1.$$

c) Phương trình đã cho có nghĩa khi $x > 0$ và được viết là:

$$xy' = y^2\ln x - 2y$$

Đó là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho y^2, ta được :

$$xy^{-2}y' = \ln x - 2y^{-1}$$

Đặt $y^{-1} = z$. Ta có $z' = -y^{-2}y'$. Do đó $-xz' + 2z = \ln x$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z. Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$-xz' + 2z = 0$$

Nghiệm tổng quát của nó là $z = Kx^2$

K là hằng số tuỳ ý. Bằng phương pháp biến thiên hằng số, ta được:

$$K' = -\frac{\ln x}{x^3}$$

$$K = -\int\frac{\ln x dx}{x^3} = -\left(-\frac{1}{2x^2}\ln x + \int\frac{1}{2x^2}\frac{dx}{x}\right) = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$z = \left(\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C\right)x^2 = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + Cx^2$$

Nhưng $z = y^{-1}$, nên ta được:

$$y\left(\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + Cx^2\right) = 1.$$

d) Phương trình đã cho là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho $y^{1/2}$ rồi đặt $z = y^{1/2}$, ta được phương trình tuyến tính đối với z:

$$2z' + z = e^{x/2}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$z = Ke^{-x/2}$$

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K' = \frac{1}{2}e^x$$

Do đó $$K = \frac{1}{2}e^x + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$z = \left(\frac{1}{2}e^x + C\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

Vậy $$y^{1/2} = \left(\frac{1}{2}e^x + C\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

Từ điều kiện $y|_{x=0} = \frac{9}{4}$, ta được C = 1. Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho thoả mãn điều kiện trên là:

$$y = \left(\frac{1}{2}e^x + 1\right)^2 e^{-x}.$$

e) Viết phương trình đã cho dưới dạng:

$$y\frac{dx}{dy} + x + x^2y = 0$$

Đó là phương trình Bernoully đối với x(y). Chia hai vế cho x^2, rồi đặt $z = x^{-1}$, ta được phương trình tuyến tính đối với z(y):

$$-y\frac{dx}{dy} + z + y = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$z = Ky$$

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của y, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$\frac{dK}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Do đó $$K = \ln|y| + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$z = (\ln|y| + C)y$$

Vậy $$\frac{1}{x} = (\ln|y| + C)y.$$

6.8. a) $\alpha(x)$ là thừa số tích phân của phương trình đã cho nếu:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(x)(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})\right] = \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(x)(x^2 + y^2)] .$$

Hay $\alpha(x)(2x + x^2 + y^2) = \alpha(x) . 2x + \alpha'(x)(x^2 + y^2)$.

Hay $\alpha(x) = \alpha'(x)$.

Do đó $\alpha(x) = Ke^x$

K là hằng số tuỳ ý. Vậy phương trình:

$$e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Nó tương đương với phương trình đã cho. Tích phân tổng quát của nó được cho bởi:

$$\int_0^y e^x(x^2 + y^2)dy = e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) + C .$$

b) Phương trình đã cho có một nghiệm là $y = 0$. Bây giờ ta xét $y \neq 0$. Ta cần tìm hàm số $\alpha(y)$ sao cho:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(y)(y + xy^2)\right] = \frac{\partial}{\partial x}[-\alpha(y)x] .$$

Hay $\alpha'(y)(y + xy^2) + \alpha(y)(1 + 2xy) = -\alpha(y)$.

Hay $y(1 + xy)\alpha'(y) + 2(1 + xy)\alpha(y) = 0$

Vì $y = -\frac{1}{x}$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, ta có thể giả thiết rằng $1 + xy \neq 0$. Từ phương trình trên ta suy ra:

$$y\frac{d\alpha}{dy} + 2\alpha = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} + 2\frac{dy}{y} = 0$$

Do đó $\alpha(y) = \frac{K}{y^2}$

K là hằng số tuỳ ý. Vậy phương trình:

$$\frac{1 + xy}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Có thể viết nó như sau:

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} + xdx = d\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\right) = 0 .$$

Với $y \neq 0$, nó tương đương với phương trình đã cho. Tích phân tổng quát của nó là:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C, \qquad \text{C là hằng số tuỳ ý.}$$

c) Phương trình đã cho có nghĩa khi $x > 0$. $y = 0$ là một nghiệm của nó. Bây giờ ta xét với $y \neq 0$. Hàm số $\alpha(xy)$ là thừa số tích phân của phương trình nếu:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(y)(y - xy^2 \ln x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(xy)x] .$$

Nếu đặt $z = xy$, ta được:

$$\frac{d\alpha(z)}{dz}.x(y - xy^2 \ln x) + (1 - 2xy \ln x)\alpha(z) = \frac{d\alpha(z)}{dz}xy + \alpha(xy)$$

Do đó với $\ln x \neq 0$ (tức là $x \neq 1$) ta được:

$$z^2 \frac{d\alpha}{dz} + 2\alpha z = 0 \qquad \text{hay} \qquad \frac{d\alpha}{\alpha} + 2\frac{dz}{z} = 0 .$$

Suy ra $$\alpha = \frac{K}{z^2} = \frac{K}{x^2y^2}$$

K là hằng số tuỳ ý. Vậy phương trình:

$$\frac{xdy + ydx}{x^2y^2} - \frac{1}{x}\ln x dx = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Vì

$$\frac{xdy + ydx}{x^2y^2} - d(\frac{1}{xy}), \quad \frac{1}{x}\ln x dx = d(\frac{1}{2}\ln^2 x)$$

nên có thể viết phương trình ấy như sau:

$$d\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = 0 .$$

Với $x > 0$, $y \neq 0$, nó tương đương với phương trình đã cho. Tích phân tổng quát của nó rõ ràng là:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}\ln^2 x = C, \qquad \text{C là hằng số tuỳ ý.}$$

6.9. a) Phương trình đã cho là phương trình Bernoully. Chia hai vế cho y^5, rồi đặt $y^{-4} = z$, ta được phương trình tuyến tính đối với z:

$$-\frac{z'}{4} - \frac{z}{2x} = 5x^2$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất là:

$$z = \frac{K}{x^2}$$

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K = C - 4x^5$$

C là hằng số tuỳ ý. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$z = \frac{C - 4x^5}{x^2}$$

Do đó $$y^4 = \frac{x^2}{C - 4x^5}$$

b) Phương trình đã cho là phương trình thuần nhất.

Đặt y = xu, thế vào phương trình, ta được:

$$x\frac{du}{dx} = -\cos^2 u \qquad \text{hay} \qquad \frac{dx}{x} = -\frac{du}{\cos^2 u}$$

Do đó $$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = -\text{tg}u = -\text{tg}\frac{y}{x}$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậy $y = -x\text{arctg}\ln\left|\frac{x}{C}\right|$.

c) Phương trình đã cho là phương trình thuần nhất.

Đặt y = xu, thế vào phương trình, ta được:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-2u^3)}{u^4+u}du = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} + \frac{1-2u}{u^2-u+1}\right)du .$$

Do đó $$\ln|x| = \ln|u| - \ln|u+1| - \ln(u^2 - u + 1) + \ln|C| = \ln\frac{|Cu|}{|u^3+1|}$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Suy ra $x = \frac{Cu}{u^3+1}$

Thế $u = \frac{y}{x}$, ta được $xy = C(x^3 + y^3)$.

d) Phương trình có nghĩa khi $xy \neq 0$. Đặt z = xy, ta có z' = xy' + y. Do đó phương trình trở thành:

$$z' = \frac{1}{z^2} \qquad \text{hay} \qquad z^2 z' = 1$$

$$\frac{z^3}{3} = x + C$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$x^3y^3 = 3x + C_1 . \qquad C_1 = 3C \text{ là hằng số tuỳ ý.}$$

e) Phương trình có nghĩa khi $xy > 0$. Đặt $z = \ln(\frac{y}{x})$, ta có $y = xe^z$. Thế vào phương trình, ta được:

$$xz' + 2z = \frac{1}{x}.$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với z. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$z = \frac{K}{x^2}$$

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K' = 1 \Rightarrow K = x + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Vậynghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đối với z là:

$$z = \frac{x + C}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$

Do đó $\qquad y = xe^{\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}}.$

6.10. a) Phương trình đã cho là phương trình khuyết y. Đặt $y' = p$, ta được:

$$xp' - p = x^2e^x.$$

Đó là phương trình tuyến tính cấp một đối với p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$p = Kx.$$

Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta được:

$$K = e^x + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Do đó:

$$p = y' = (e^x + C)x = xe^x + Cx.$$

Suy ra $\qquad x = \int xe^x dx + C\frac{x^2}{2} = e^x(x - 1) + C_1x^2 + C_2$

$C_1 = \frac{C}{2}$ và C_2 là những hằng số tuỳ ý.

b) Phương trình đã cho khuyết y. Đặt $y' = p$, ta được:

$$p' = -\frac{p}{x-1} = x(x-1)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$p = K(x - 1)$$

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được:

$$K = \frac{x^2}{2} + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Do đó:

$$p = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)(x-1) .$$

Từ điều kiện $y'|_{x=2} = -1$, ta được C = -3. Vậy:

$$y' = p = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 3x + 3$$

Do đó $$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + D .$$

Từ điều kiện $y|_{x=2} = 1$, ta được $D = \frac{1}{3}$. Do đó nghiệm phải tìm là:

$$y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8) .$$

c) Phương trình đã cho khuyết x. Đặt y' = p, ta có:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} .$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$p\left[\frac{dp}{dy} + 2(1-2y)\right] = 0$$

Nếu p = 0 thì y = C, C là hằng số tuỳ ý, cũng là một nghiệm của phương trình đã cho, nhưng nó không thoả mãn điều kiện đặt ra. Vậy ta xét phương trình:

$$\frac{dp}{dy} + 2(1 - 2y) = 0.$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{dp}{2} + (1 - 2y)dy = 0 .$$

Do đó $$\frac{P}{2} + y - y^2 = C_1$$

C_1 là hằng số tuỳ ý. Từ điều kiện $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$, ta rút ra $C_1 = \frac{1}{4}$. Do đó từ phương trình trên, ta được:

$$2dx = \frac{dy}{y^2 - y + \frac{1}{4}} = \frac{dy}{(y - \frac{1}{2})^2}$$

Vậy $$2x + C_2 = -\frac{1}{y - \frac{1}{2}}$$

C_2 là hằng số tuỳ ý. Từ điều kiện $y|_{x=0} = 0$, ta được $C_2 = 2$. Vậy nghiệm riêng của phương trình thoả mãn các điều kiện đã cho là:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x+1)}$$

d) Phương trình đã cho khuyết y. Đặt $y' = p$, ta được:

$$xp' - p = x^2\ln x$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$p = Kx,$$

K là hằng số tuỳ ý. Bằng phương pháp biến thiên hằng số, ta được:

$$K' = \ln x \Rightarrow K = x\ln x - x + C$$

C là hằng số tuỳ ý. Do đó:

$$p = y' = x^2\ln x - x^2 + Cx$$

Từ điều kiện $y'|_{x=1} = -1$, ta được $C = 0$. Vậy:

$$y = \int x^2 \ln x dx - \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^3}{3} + C_1$$

C_1 là hằng số tuỳ ý. Từ điều kiện $y|_{x=1} = -\frac{4}{9}$, ta được $C_1 = 0$. Vậy nghiệm riêng của phương trình thoả mãn các điều kiện trên là:

$$y = \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{4}{3})$$

e) Phương trình đã cho khuyết x. Đặt $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Phương trình trở thành:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 + p^3 = 0$$

Nếu $p = 0$, ta được $y = C$, C là hằng số tuỳ ý. Vậy $y = C$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $p \neq 0$, chia hai vế của phương trình trên cho p, ta được:

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 - p = 0$$

hay
$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dp}{1-p} + \frac{dp}{p}$$

Do đó
$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C_1 p}{p-1}\right|,$$

C_1 là hằng số tuỳ ý. Vậy $y = \dfrac{C_1 p}{p-1} \Rightarrow p = \dfrac{y}{y - C_1}$

Nhưng $p = \dfrac{dy}{dx}$, do đó ta có $\dfrac{y - C_1}{y}dy = dx$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:

$$y - C_1\ln|y| = x + C_2$$

6.11. a) Giả sử $y_1 = x^\alpha$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

Ta có $y'_1 = \alpha x^{\alpha-1}$, $y''_1 = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức:

$$(\ln x - 1)\alpha(\alpha - 1)x^\alpha - \alpha x^\alpha + x^\alpha = x^\alpha[\alpha(\alpha - 1)\ln x - \alpha^2 + 1] = 0$$

Do đó
$$\begin{cases}\alpha(\alpha - 1) = 0\\ \alpha^2 - 1 = 0\end{cases}$$

Suy ra $\alpha = 1$. Ta thử lại dễ dàng rằng $y = x$ là nghiệm của phương trình.

Bây giờ tìm nghiệm y_2 của phương trình, độc lập tuyến tính với y_1 bằng cách đặt $y_2 = xu$.

Ta có $\quad y'_2 = xu' + u, \quad y''_2 = xu'' + 2u'$

Thế vào phương trình, ta được:

$$x(\ln x - 1)u'' + (2\ln x - 3)u' = 0$$

Đó là một phương trình cấp hai đối với u, khuyết u. Đặt u' = p, ta được:

$$x(\ln x - 1)\frac{dp}{dx} + (2\ln x - 3)p = 0$$

Phân ly biến số, ta được:

$$\frac{dp}{p} + \frac{2\ln x - 3}{x(\ln x - 1)}dx = 0$$

Do đó $$\ln|p| = -\int\frac{2\ln x - 3}{x(\ln x - 1)}dx = -\int\frac{2v - 3}{v - 1}dv$$

Với v = lnx. Vậy

$$\ln|p| = -\int(2 - \frac{1}{v - 1})dv = -2v + \ln|v - 1|$$

$$= -2\ln x + \ln|\ln x - 1| = \ln\frac{|\ln x - 1|}{x^2}$$

Ở đây ta chọn hằng số tuỳ ý của tích phân bằng 0. Suy ra

$$p = u' = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

Do đó $$u = \int\frac{\ln x - 1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}$$

Vậy $$y_2 = xu = -\ln x$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính là x và - lnx, do đó nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = C_1x + C_2\ln x \quad , \quad C_1, C_2 \text{ là những hằng số tuỳ ý.}$$

Chú thích: Ta biết rằng nếu biết nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình cấp hai tuyến tính:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

thì một nghiệm riêng $y_2(x)$ độc lập tuyến tính với y_1 của nó được cho bởi công thức Liouville:

$$y_2(x) = y_1(x) \,.\, \int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$$

Trong bài toán này, ta có $p(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$. Do đó:

$$-\int p(x)dx = \int\frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \ln|\ln x - 1|$$

Suy ra $$y_2(x) = x\int\frac{\ln x - 1}{x^2}dx = x.\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = -\ln x \;.$$

b) Thế $y = e^{\alpha x}$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$e^{\alpha x}[(2\alpha^2 + 4x)x + (\alpha^2 - 2\alpha - 8)] = 0.$$

Đẳng thức ấy là một đồng nhất thức khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\alpha = -2$. Vậy $y_1 = e^{-2x}$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Ta tìm nghiệm riêng y_2 của phương trình độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng:

$$y_2 = e^{-2x} . u$$

Thế vào phương trình, ta được:

$$(2x + 1)u'' - (4x + 6)u' = 0$$

Đặt $u' = p$, ta được:

$$\frac{dp}{p} = \frac{4x+6}{2x+1}dx = \left(2 + \frac{4}{2x+1}\right)dx \ .$$

Do đó $\ln|p| = 2x + \ln(2x + 1)^2 = \ln(e^{2x} . (2x + 1)^2)$.

Suy ra $p = u' = (2x + 1)^2 . e^{2x}$.

Dùng tích phân phân đoạn hai lần liên tiếp, ta được:

$$u = \left[\frac{(2x+1)^2}{2} - 2x\right]e^{2x}.$$

Vậy $$y_2 = \frac{(2x+1)^2}{2} - 2x \ .$$

Và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2\left[\frac{(2x+1)^2}{2} - 2x\right]$$

C_1, C_2 là hằng số tuỳ ý.

c) Giả sử $y_1 = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ là một nghiệm riêng của phương trình:

$$(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$$

Thế y_1 vào phương trình ấy, ta được:

$$[n(n - 1) - 6]x^n + [(n - 1)(n - 2)a_1 - 6a_1]x^{n-2} + ... = 0.$$

Do đó $n(n - 1) - 6 = n^2 - n - 6 = 0$.

Phương trình ấy có hai nghiệm $n = 3$ và $n = -2$. Bậc của đa thức phải là số nguyên dương, nên chỉ lấy $n = 3$. Vậy y_1 là đa thức bậc 3 có dạng:

$$y_1 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Thế biểu thức ấy vào phương trình đã cho, ta được:

$$- 6ax^2 + (2a - 6b - 6)x + (2a + 6c) = 0.$$

Phương trình ấy là đồng nhất thức nếu:

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a - 6b - 6 = 0 \\ 2a + 6c = 0 \end{cases}$$

suy ra a = 0, b = - 1, c = 0. Tóm lại $y_1 = x^3 - x$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Bây giờ ta tính nghiệm y_2 của phương trình độc lập tuyến tính với y_1 theo công thức Liouville. Vì p(x) = 0, ta có:

$$y_2(x) = (x^3 - x)\int\frac{dx}{(x^3 - x)^2} = (x^3 - x)\int\frac{dx}{x^2(x-1)^2(x+1)^2}$$

Ta có $$\frac{1}{x^2(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1} \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với x^2 rồi cho x = 0, ta được A = 1.

Nhân hai vế của (*) với $(x - 1)^2$ rồi cho x = 1, ta được $C = \frac{1}{4}$.

Nhân hai vế của (*) với $(x + 1)^2$ rồi cho x = -1, ta được $E = \frac{1}{4}$.

Nhân hai vế của (*) với x rồi cho $x \to \infty$, ta được B + D + F = 0.

Thế x = 2 vào hai vế của (*), ta được $\frac{B}{2} + D + \frac{F}{3} = -\frac{1}{2}$.

Giải hệ 3 phương trình đối với B, D, F, ta được:

$$B = 0, \quad D = -\frac{3}{4}, \quad F = \frac{3}{4}.$$

Do đó

$$y_2(x) = (x^3 - x)\left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]$$

$$= (x^3 - x)\left[\frac{2 - 3x^2}{2x(x^2 - 1)} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right] = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3(x^3 - x)}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1(x^3 - x) + C_2\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3(x^3 - x)}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right].$$

d) Rõ ràng $y_1 = e^x$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho. Ta tìm nghiệm y_2 của phương trình ấy độc lập tuyến tính đối với y_1 bằng công thức Liouville. Ta có:

$$-\int p(x)dx = \int \frac{x^2-2}{x^2-2x}dx = \int\left(1+\frac{2x-2}{x^2-2x}\right)dx$$

$$= x + \ln|x^2-2x| = \ln e^x|x^2-2x|$$

Do đó $$y_2(x) = c^x\int\frac{|x^2-2x|}{e^x}dx = e^x\int\frac{x^2-2x}{e^x}dx.$$

Sai khác dấu ±. Bằng tích phân phân đoạn 2 lần liên tiếp, ta được:

$$y_2(x) = e^x.(-x^2.e^{-x}) = -x^2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^x + C_2x^2 \quad , \quad C_1, C_2 \text{ là các hằng số tuỳ ý.}$$

Do đó $$y' = C_1e^x + 2C_2x.$$

Thế các điều kiện $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$, ta được:

$$\begin{cases} C_1e + C_2 = 0 \\ C_1e + 2C_2 = 1 \end{cases}$$

Từ đó, ta được $C_2 = 1$, $C_1 = -\frac{1}{e}$. Vậy nghiệm phải tìm là $y = -e^{x-1} + x^2$.

e) Dễ dàng thấy rằng $y_1 = 1$ và $y_2 = x$ là hai nghiệm của phương trình:

$$(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2 \qquad (*)$$

Từ nguyên lý chồng chất nghiệm đối với phương trình tuyến tính, ta suy ra rằng hiệu $Y_1 = x - 1$ là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất

$$(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0 \qquad (**)$$

Ta tìm một nghiệm riêng Y_2 của phương trình ấy độc lập tuyến tính đối với Y_1 theo công thức Liouville.

$$Y_2 = (x-1)\int\frac{1}{(x-1)^2}e^{\int\frac{2x-2}{x^2-2x}dx}dx$$

$$= (x-1)\int\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx = (x-1)\int\left(1-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= (x-1)\left(x+\frac{1}{x-1}\right) = x^2 - x + 1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (**) là:

$$y = K_1(x-1) + K_2(x^2 - x + 1)$$

$$= (K_1 - K_2)(x-1) + K_2x^2$$

$$= C_1(x-1) + C_2x^2$$

trong đó $C_1 = K_1 - K_2$, $C_2 = K_2$ là những hằng số tuỳ ý. Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$y = C_1(x - 1) + C_2x^2 + 1 .$$

6.12. a) Phương trình đã cho là phương trình cấp hai tuyến tính hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $k^2 - 1 = 0$ nó có 2 nghiệm thực $k = \pm 1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

C_1, C_2 là những hằng số tuỳ ý. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta thấy rằng biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất nếu C_1, C_2 là những hàm số của x thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 e^{-x} = 0 \\ C'_1 e^x - C'_2 e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ấy, ta được:

$$C'_1 = \frac{1}{2(e^x + 1)} \quad ; \quad C'_2 = -\frac{e^{2x}}{2(e^x + 1)}$$

Do đó $$C_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{2}\left[x - \ln(e^x + 1) + K_1\right]$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}dx}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\left[e^x - \ln(e^x + 1) + K_2\right]$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \frac{1}{2}e^x\left[x - \ln(e^x + 1) + K_1\right] - \frac{1}{2}e^{-x}\left[e^x - \ln(e^x + 1) + K_2\right]$$

b) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

Nó có 1 nghiệm kép $k = -1$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Biểu thức ấy trong đó C_1 và C_2 là những hàm số là nghiệm của phương trình không thuần nhất nếu C_1, C_2 thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} C'_1 e^{-x} + C'_2 xe^{-x} = 0 \\ -C'_1 e^{-x} + C'_2 e^{-x} - C'_2 xe^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{1 + x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 + C'_2 x = 0 \\ -C'_1 - C'_2 x - C'_2 = 3\sqrt{1 + x} \end{cases}$$

Giải hệ ấy, ta được:

$$C'_2 = 3\sqrt{1+x} \quad , \qquad C'_1 = -3x\sqrt{1+x}$$

Do đó $\qquad C_2 = 2(1+x)^{3/2} + K_1 , \quad C_1 = 2(1+x)^{3/2} - \frac{6}{5}(1+x)^{5/2} + K_2$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{-x}\left[K_1 + K_2 x + \frac{4}{5}(1+x)^{5/2}\right].$$

c) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ là $k = \pm i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Biểu thức ấy, trong đó C_1, C_2 là các hàm số của x, là nghiệm của phương trình đã cho nếu C_1, C_2 thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Nghiệm của hệ ấy là:

$$C'_2 = \sin x$$

$$C'_1 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}$$

Do đó $\qquad C_2 = -\cos x + K_2$

$$C_1 = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + K_1$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = -\cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + K_1 \cos x + K_2 \sin x \ .$$

d) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 5k + 6 = 0$ là $k = -2$, $k = -3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, ta thấy rằng biểu thức trên, trong đó C_1, C_2 là các hàm số, là nghiệm của phương trình đã cho nếu C'_1, C'_2 thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} C'_1 e^{-2x} + C'_2 e^{-3x} = 0 \\ -2C'_1 e^{-2x} - 3C'_2 e^{-3x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases}$$

Giải hệ ấy, ta được:

$$C'_2 = \frac{-e^{3x}}{1+e^{2x}}, \quad C'_1 = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Do đó $$C_1 = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + K_1,$$

$$C_2 = -\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{2x}} = -e^x + \text{arctg}e^x + K_2,$$

K_1, K_2 là các hằng số tuỳ ý. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{K}_1 e^{-2x} + K_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) + e^{-3x}\text{arctg}e^x,$$

trong đó $\overline{K}_1 = K_1 - 1$.

e) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất nếu C_1, C_2 là hai hàm số của x thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} C'_1\cos x + C'_2\sin x = 0 \\ -2C'_1\sin x + C'_2\cos x = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}} \end{cases}$$

Do đó $$C'_2 = \frac{\cos x}{(\cos 2x)^{3/2}}, \quad C'_1 = -\frac{\sin x}{(\cos 2x)^{3/2}}$$

Suy ra $$C_2 = \int \frac{\cos x}{(\cos 2x)^{3/2}}dx = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} + K_2$$

$$C_1 = -\int \frac{\sin x}{(\cos 2x)^{3/2}}dx = -\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} + K_1$$

K_1, K_2 là những hằng số tuỳ ý. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = K_1\cos x + K_2\sin x - \sqrt{\cos 2x}.$$

6.13. a) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$k^2 - 7k + 6 = 0.$$

Nó có hai nghiệm k = 1, k = 6. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x}.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_n(x)\sin\beta x$, $P_n(x)$ là đa thức bậc n. Ở đây $n = 0$, $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = A\cos x + B\sin x .$$

Do đó $\quad Y' = -A\sin x + B\cos x$

$$Y'' = -A\cos x - B\sin x .$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức:

$$(5A - 7B)\cos x + (5B + 7A)\sin x = \sin x .$$

Suy ra $\begin{cases} 5A - 7B = 0 \\ 7A + 5B = 1 \end{cases}$

Nghiệm của hệ đó là: $A = \dfrac{7}{74}$, $B = \dfrac{5}{74}$. Vậy:

$$Y = \frac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x) .$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^x + c_2e^{6x} + \frac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x) .$$

b) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$k^2 + 9 = 0 .$$

Nó có hai nghiệm phức liên hợp là $k = \pm 3i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x .$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_0(x)$, trong đó $\alpha = 3$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vậy ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $Y = Ae^{3x}$. Thế vào phương trình ấy, ta được $A = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $Y = \dfrac{1}{3}e^{3x}$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x} .$$

c) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $k^2 - 3k = 0$. Nó có hai nghiệm $k = 0$, $k = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1 + C_2e^{3x} .$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$, trong đó $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức:

$$2A - 3B - 6Ax = 2 - 6x$$

Do đó $$\begin{cases} 2A - 3B = 2 \\ -6A = -6 \end{cases}$$

Vậy A = 1, B = 0. Suy ra $y = x^2$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2 .$$

d) Đặt $y = e^{-x}z$ thế vào phương trình:

$$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$$

Ta được $$z'' - 4z' + 6z = \cos x \qquad (*)$$

Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (*) là $k^2 - 4k + 6 = 0$. Nó có 2 nghiệm phức liên hợp $k = 2 \pm \sqrt{2}\,i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$z = e^{2x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x)$$

Vế phải của (*) có dạng $e^{\alpha x}\cos\beta x$, trong đó $\alpha = 0$, $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình (*) có dạng:

$$Z = A\cos x + B\sin x$$

Thế vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức:

$$(5A - 4B)\cos x + (4A + 5B)\sin x = \cos x$$

Do đó $$\begin{cases} 5A - 4B = 1 \\ 4A + 5B = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ ấy là: $A = \dfrac{5}{41}$, $B = -\dfrac{4}{41}$. Vậy:

$$Z = \frac{5\cos x - 4\sin x}{41}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$z = e^{2x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x) + \frac{5\cos x - 4\sin x}{41}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{-x}z = e^{x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x) + e^{-x}\,\frac{5\cos x - 4\sin x}{41} .$$

e) Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $k^2 + 4 = 0$, nó có 2 nghiệm phức liên hợp $k = \pm 2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_0(x)\sin\beta x$, $\beta = 2$. Vì $\pm i\beta = \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Ta có $$Y' = (A + 2Bx)\cos 2x + (B - 2Ax)\sin 2x$$

$$Y'' = (4B - 4Ax)\cos 2x - (4A + 4Bx)\sin 2x$$

Thế vào phương trình ta được đồng nhất thức:

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 2\sin 2x .$$

Do đó $4B = 0$, $-4A = 2$.

Vậy $B = 0$, $A = -\frac{1}{2}$. Suy ra $Y = -\frac{x}{2}\cos 2x$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x$$

f) Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k = -1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^{-x} .$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_0(x)e^{\beta x}$, $\beta = -1$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = Ax^2e^{-x} .$$

Ta có $$Y' = Ae^{-x}(2x - x^2)$$

$$Y'' = Ae^{-x}(x^2 - 4x + 2) .$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức

$$2Ae^{-x} = 4e^{-x} .$$

Do đó $A = 2$. Vậy $Y = 2x^2e^{-x}$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = (C_1 + C_2x + 2x^2)e^{-x} .$$

g) Phương trình đặc trưng $k^2 - 9k + 20 = 0$ có 2 nghiệm $k = 4$, $k = 5$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} .$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_2(x)e^{\beta x}$, $\beta = 4$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = x(Ax^2 + Bx + C)e^{4x} .$$

Ta có $$Y' = e^{4x}[4Ax^3 + (3A + 4B)x^2 + (2B + 4C)x + C]$$

$$Y'' = e^{4x}[(16Ax^3 + (24A + 16B)x^2 + (6A + 16B + 16C)x + (2B + 8C)].$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được đồng nhất thức:

$$-3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C = x^2.$$

Do đó $\quad -3A = 1, \quad 6A - 2B = 0, \quad 2B - C = 0.$

Suy ra $\quad A = -\frac{1}{3}, \quad B = -1, \quad C = -1.$

Vậy $\quad Y = -(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x)e^{4x}.$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} - (\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x)e^{4x}.$$

h) Phương trình đặc trưng $k^2 + 4k - 5 = 0$ có hai nghiệm $k = 1$, $k = -5$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-5x}.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_0(x)e^{\beta x}$, $\beta = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vậy ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$Y = Axe^x.$$

Thế vào phương trình, ta được $A = \frac{1}{3}$. Vậy $Y = \frac{1}{3}xe^x$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^x.$$

i) Đặt $y = e^{-x}z$. Thế vào phương trình đã cho, ta được:

$$z'' + 4z = 2x\cos 2x \qquad (*)$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi, nhưng vế phải đơn giản hơn vế phải của phương trình đã cho.

Phương trình đặc trưng của (*) là $k^2 + 4 = 0$, nó có hai nghiệm phức liên hợp là $k = \pm 2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất ứng với (*) là:

$$z = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

Vế phải cả (*) có dạng $P_1(x)\cos\beta x$, $\pm i\beta = \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của (*) có dạng:

$$Z = x[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$$

Ta có

$$Z' = [2Cx^2 + 2(A + D)x + B]\cos 2x + [-2Ax^2 + 2(C - B)x + D]\sin 2x$$

$$Z'' = [-4Ax^2 + 4(2C - B)x + 2(A + 2D)]\cos 2x +$$

$$+ [-4Cx^2 - 4(2A + D)x + 2(C - 2B)]\sin 2x.$$

Thế vào phương trình (*) ta được đồng nhất thức:

$$8Cx\cos 2x - 8Ax\sin 2x + 2(A + 2D)\cos 2x + 2(C - 2B)\sin 2x = 2x\cos 2x.$$

Do đó $\quad 8C = 2, \quad A = 0, \; A + 2D = 0, \; C - 2B = 0$

Suy ra $\quad C = \frac{1}{4}, \; A = 0, \; D = 0, \; B = \frac{1}{8}$. Vậy

$$Z = \frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$z = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{-x}z = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x\right).$$

j) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ là $k = \pm i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Vế phải của phương trình đã cho là:

$$x^2\cos^2 x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2\cos 2x}{2}$$

Áp dụng nguyên lý chồng nghiệm, trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình:

$$y'' + y = \frac{x^2}{2} \qquad (*)$$

Có dạng $Y_1 = Ax^2 + Bx + C$, vì vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_2(x)$, $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_1 vào phương trình (*), ta được đồng nhất thức:

$$Ax^2 + Bx + 2A + C = \frac{x^2}{2}$$

Do đó $\quad A = \frac{1}{2}, \; B = 0, \; C = -1$

Vậy $\quad Y_1 = \frac{x^2}{2} - 1$

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng của phương trình:

$$y'' + y = \frac{x^2}{2}\cos 2x \qquad (**)$$

Có dạng $\quad Y_2 = (A_1x^2 + B_1x + C_1)\cos 2x + (A_2x^2 + B_2x + C_2)\sin 2x$

Thế vào phương trình (**), ta được đồng nhất thức:

$$[-3A_1x^2 + (8A_2 - 3B_1)x + 2A_1 + 4B_2 - 3C_1]\cos 2x +$$

$$+ [-3A_2x^2 - (8A_1 + 3B_2)x + 2A_2 - 3C_2]\sin 2x = \frac{x^2}{2}\cos 2x$$

Do đó

$$\begin{cases} -3A_1 = \frac{1}{2} \\ 8A_2 - 3B_1 = 0 \\ 2A_1 + 4B_2 - 3C_1 = 0 \\ -3A_2 = 0 \\ 8A_1 + 3B_2 = 0 \\ 2A_2 - 4B_1 - 3C_2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\quad A_1 = -\frac{1}{6},\ B_1 = 0,\ C_1 = \frac{13}{17},\ A_2 = 0,\ B_2 = \frac{4}{9},\ C_2 = 0$

Vậy $\quad Y_2 = \left(\frac{13}{27} - \frac{x^2}{6}\right)\cos 2x + \frac{4x}{9}\sin 2x$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x^2}{2} - 1 + \left(\frac{13}{27} - \frac{x^2}{6}\right)\cos 2x + \frac{4x}{9}\sin 2x .$$

k) Nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 - 3k = 0$ là $k = 0$, $k = 3$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1 + C_2e^{3x}$$

Theo nguyên lý chồng nghiệm, trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' - 3y' = e^{3x}$ dưới dạng $Y_1 = Axe^{3x}$, vì vế phải có dạng $e^{\beta x}$, $\beta = 3$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_1 vào phương trình, ta được $A = \frac{1}{3}$, do đó $Y_1 = \frac{1}{3}xe^{3x}$.

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' - 3y' = -18x$ dưới dạng $Y_2 = x(Bx + C)$, vì vế phải có dạng $e^{\beta x}P_1(x)$, $\beta = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_2 vào phương trình ta được đồng nhất thức:

$$-6Bx + 2B - 3C = -18x$$

Do đó $\quad -6B = -18,\ 2B - 3B = 0$

suy ra $\quad B = 3,\ C = 2,\ Y_2 = x(3x + 2).$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 + C_2e^{3x} + x(3x + 2) + \frac{x}{3}e^{3x}.$$

l) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Vì $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$, nên theo nguyên lý chồng nghiệm trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = \frac{1}{4}\cos 3x$ dưới dạng:

$$Y_1 = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Thế vào phương trình ta được đồng nhất thức:

$$-8A\cos 3x - 8B\sin 3x = \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Do đó $\quad -8A = \frac{1}{4},\ 8B = 0$

Suy ra $\quad A = -\frac{1}{32},\ B = 0,\ Y_1 = -\frac{1}{32}\cos 3x$

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng của phương trình:

$$y'' + y = \frac{3}{4}\cos x$$

dưới dạng $Y_2 = x(C\cos x + D\sin x)$, vì vế phải của phương trình có dạng $e^{\beta x}P_0(x)$, $\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Thế Y_2 vào phương trình, ta được

$$(2D - Cx)\cos x - (2C + Dx)\sin x + Cx\cos x + Dx\sin x = \frac{3}{4}\cos x.$$

Do đó $\quad 2D = \frac{3}{4},\ 2C = 0$

Suy ra $\quad D = \frac{3}{8},\ C = 0,\ Y_2 = \frac{3x}{8}\sin x.$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{32}\cos 3x + \frac{3}{8}x\sin x.$$

m) Đặt $y = e^{2x}z$. Thế vào phương trình:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos^2 x .$$

Ta được $\quad z'' = \cos^2 x$.

Do đó $\quad z' = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1$

Vậy $\quad z = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x + C_2$.

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{2x}\left(C_1 x + C_2 + \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8}\right) .$$

n) Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + (1 + \alpha^2) = 0$ có 2 nghiệm phức liên hợp $k = 1 \pm \alpha i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = e^x(C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x) .$$

Vế phải của phương trình có dạng $P_0(x)\cos\alpha x$, $\pm i\alpha$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x .$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức:

$$(-2B\alpha + A)\cos\alpha x + (2A\alpha + B)\sin\alpha x = (1 + 4\alpha^2)\cos\alpha x .$$

Do đó $\quad \begin{cases} A - 2B\alpha = 1 + 4\alpha^2 \\ 2A\alpha + B = 0 \end{cases}$

Suy ra $\quad A = 1,\ B = -2\alpha$. Vậy

$$Y = \cos\alpha x - 2\alpha\sin\alpha x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^x(C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x) + \cos\alpha x - 2\alpha\sin\alpha x .$$

Do đó

$$y' = e^x(C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x - C_1\sin\alpha x + C_2\alpha\cos\alpha x) - \alpha\sin\alpha x - 2\alpha^2\cos\alpha x.$$

Từ các điều kiện $y|_{x=0} = 1,\ y'|_{x=0} = 0$, ta được:

$$C_1 + 1 = 1 ,\ C_1 + C_2\alpha - 2\alpha^2 = 0 .$$

Do đó $\quad C_1 = 0,\ C_2 = 2\alpha$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là:

$$y = \cos\alpha x + 2\alpha(e^x - 1)\sin\alpha x .$$

6.14. a) Ta có:

$$u = \frac{\varphi(r)}{r},\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Do đó $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{r\varphi' - \varphi}{r^2}.\frac{x}{r} = \frac{r\varphi' - \varphi}{r^3}x$$

Vậy
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r\varphi' - \varphi}{r^3} + x\frac{r^3.r\varphi'' - (r\varphi' - \varphi)3r^2}{r^6}.\frac{x}{r} =$$
$$= \frac{r\varphi' - \varphi}{r^3} + x^2\frac{r^4\varphi'' - 3r^3\varphi' + 3r^2\varphi}{r^7}$$

vì vai trò đối xứng của x, y, z, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, (hoặc $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$) được suy ra từ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bằng cách thay trong biểu thức của nó x bởi y (hoặc z). Vậy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3\frac{r\varphi' - \varphi}{r^3} + \frac{r^2}{r^7}(r^4\varphi'' - 3r^3\varphi' + 3r^2\varphi) =$$
$$= \frac{3\varphi}{r^2} - \frac{3\varphi}{r^3} + \frac{\varphi''}{r} - \frac{3\varphi'}{r^2} + \frac{3\varphi}{r^3} = \frac{\varphi''}{r}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\varphi'' - 4\varphi = 0$$

Đó là một phương trình cấp hai tuyến tính hệ số không đổi. Nghiệm tổng quát của nó là:

$$\varphi = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý.

b) Ta có

$$u(x, y = \varphi(r),\ r^2 = x^2 + y^2$$

Do đó $$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(r).\frac{x}{r} = x.\frac{\varphi'}{r}$$

Suy ra $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = x.\frac{r\varphi'' - \varphi'}{r^2}.\frac{y}{r} = xy.\frac{r\varphi'' - \varphi'}{r^3}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{r\varphi'' - \varphi'}{r^3} = \frac{1}{r^\alpha}$$

Hay $$r\varphi'' - \varphi' = r^{3-\alpha}$$

Đó là một phương trình cấp hai của $\varphi(r)$, khuyết φ .

Đặt $p = \varphi'$, ta được:

$$rp' - p = r^{3-\alpha} \qquad (*)$$

Đó là phương trình tuyến tính cấp một về p. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$p = Kr$$

K là hằng số tuỳ ý. Xem K là hàm số của r, thế biểu thức ấy vào phương trình (*), ta được:

$$K' = r^{1-\alpha}$$

có 2 trường hợp $\alpha \neq 2$ và $\alpha = 2$. Xét trường hợp $\alpha \neq 2$. Ta có

$$K = \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + C_1$$

C là hằng số tuỳ ý. Do đó:

$$p = \varphi' = \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + C_1 r$$

Suy ra

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{r^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} + C_1\dfrac{r^2}{2} + C_2 & \text{nếu } \alpha \neq 4 \\ -\dfrac{1}{2}\ln r + C_1\dfrac{r^2}{2} + C_2 & \text{nếu } \alpha = 4 \end{cases}$$

Bây giờ ta xét trường hợp $\alpha = 2$. Khi đó:

$$K' = r^{-1} \Rightarrow K = \ln r + C_1$$

C_1 là hằng số tuỳ ý. Do đó

$$p = \varphi' = r\ln r + C_1 r$$

Suy ra

$$\varphi = \int r\ln r dr + C_1\frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4} + C_1\frac{r^2}{2} + C_2$$

Tóm lại:

- Nếu $\alpha \neq 2, \alpha \neq 4$, $\varphi(r) = \dfrac{r^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} + Ar^2 + B$

- Nếu $\alpha = 4$, $\varphi(r) = -\dfrac{1}{2}\ln r + Ar^2 + B$

- Nếu $\alpha = 2$, $\varphi(r) = \dfrac{r^2}{2}\ln r + Ar^2 + B$.

6.15. a) Giả sử chuỗi luỹ thừa:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

có bán kính hội tụ R, là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta có $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ...$

$$y'' = 2a_2 + 2.3a_3x + ... + (n - 1)na_nx^{n-2} + ...$$

Thế vào phương trình, ta được đồng nhất thức:

$$(- a_0 + 2a_1) + (- a_1 + 12a_2)x + (- a_2 + 30a_3)x^2 + ...$$

$$... + [- a_{n-1} + (2n - 1)2na_n]x^{n-1} + ... =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[-a_{n-1} + (2n-1)2an_n]n^{n-1} = 0 \ .$$

Do đó ta có $\forall n \geq 1$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1).2n}$$

Suy ra $$a_1 = \frac{a_0}{1.2}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{3.4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{5.6}$$

.....

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1).2n}$$

Nhân các đẳng thức ấy với nhau từng vế một, ta được:

$$a_n = \frac{a_0}{(2n)!} \ .$$

Vậy nghiệm phải tìm là:

$$y = a_0\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + ... + \frac{x^n}{(2n)!} + ...\right) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = a_0 f(x)$$

a_0 là hằng số tuỳ ý. Dùng quy tắc D'Alembert đối với chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$, ta thấy ngay rằng bán kính hội tụ của nó là $R = \infty$. Do đó f(x) xác định trên R.

Chú thích: Ta nhận xét rằng:

$$\text{ch}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

- Nếu $x \geq 0$, đặt $x = t^2$ với $t = \sqrt{x}$, ta được $f(x) = \text{ch}\sqrt{x}$.

- Nếu $x < 0$, đặt $x = - t^2$ với $t = \sqrt{-x}$, ta được:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos t = \cos\sqrt{-x} \ .$$

Như vậy:

$$f(x) = \begin{cases} \text{ch}\sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

vì f(x) là tổng của một chuỗi luỹ thừa hội tụ trên R, nên f(x) khả vi vô hạn lần trên R, do đó nó cũng khả vi vô hạn lần tại x = 0. Bạn đọc có thể kiểm tra lại điều này.

Có thể tìm được, chẳng hạn bằng công thức Liouville nghiệm g(x) độc lập tuyến tính với f(x) của phương trình. Ta được:

$$g(x) = \begin{cases} \text{sh}\sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \sin\sqrt{-x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Nhưng hàm số g(x) lại không khai triển được thành chuỗi luỹ thừa, vì nó không khả vi tại x = 0.

b) Giả sử

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ..., |x| \leq R$$

là nghiệm của phương trình:

$$2x(1 - x)y' + (1 - 2x)y = 1 \ .$$

Thế biểu thức của y vào phương trình, ta được đồng nhất thức:

$$a_0 + (3a_1 - 2a_0)x + (5a_2 - 4a_1)x^2 + ... + [(2n + 1)a_n - 2na_{n-1}]x^n + ...$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(2n+1)a_n - 2na_{n-1}]x^n = 1$$

Do đó $\quad a_0 = 1$

$$a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}, \forall n \geq 1 \ .$$

Suy ra $\quad a_0 = 1$

$$a_n = \frac{2.4.6....(2n)}{1.3.5.7....(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \ , \forall n \geq 1 \ .$$

Nghiệm phải tìm là:

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n \ .$$

Bán kính hội tụ của nó là:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n} = 1 \ .$$

Bây giờ xét tại 2 mút $x = \pm 1$.

- Tại $x = 1$, ta có chuỗi số:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{với } a_n > \frac{2.4.6....(2n)}{2.4.6....(2n+2)} = \frac{1}{2n+2}$$

Vậy chuỗi số phân kỳ.

- Tại $x = -1$, ta có chuỗi số đan dấu $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Rõ ràng a_n giảm khi n tăng vì $0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n}{2n+1} < 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Thật vậy:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)...\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Vì $\ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \sim \left(-\frac{1}{2n+1}\right) \sim \left(-\frac{1}{2n}\right)$ khi $n \to \infty$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$ phân kỳ. Chuỗi số ấy lại có toàn số hạng âm, vậy $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$, do đó $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Theo định lý Leibniz chuỗi đan dấu $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hội tụ. Vậy nghiệm khai triển được thành chuỗi luỹ thừa của phương trình đã cho hội tụ với $-1 \le x < 1$.

MỤC LỤC

Lời giới thiệu 3

Chương 1. Tập hợp - Ánh xạ - Số phức

1.1. Mệnh đề toán học và các ký hiệu logic 5
1.2. Tập hợp và phần tử 6
1.3. Các phép toán trên tập hợp 8
1.4. Ánh xạ 9
1.5. Số phức 12
Câu hỏi ôn tập 20
Bài tập 20

Chương 2. Ma trận - Định thức - Hệ phương trình tuyến tính

2.1. Ma trận, các khái niệm về ma trận 22
2.2. Định thức 28
2.3. Ma trận nghịch đảo 33
2.4. Hệ phương trình tuyến tính 38
2.5. Hạng của ma trận - hệ phương trình tuyến tính tổng quát 47
Câu hỏi ôn tập 52
Bài tập 52

Chương 3. Hàm số một biến số

3.1. Giới hạn và sự liên tục của hàm số 56
3.2. Đạo hàm và vi phân hàm số một biến 65
3.3. Các định lý về hàm khả vi 71
3.4. Nguyên hàm và tích phân bất định 82
3.5. Tích phân xác định 88
Câu hỏi ôn tập 104
Bài tập 104

Chương 4. Chuỗi

4.1. Đại cương về chuỗi số 108
4.2. Chuỗi số dương (hay chuỗi số có số hạng dương) 111
4.3. Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ 115

Câu hỏi ôn tập 127
Bài tập 127

Chương 5. Hàm số nhiều biến số

5.1. Những khái niệm mở đầu 130
5.2. Đạo hàm và vi phân 132
5.3. Cực trị 137
5.4. Hàm số ẩn. Cực trị có điều kiện 139
5.5. Tích phân bội 141
Câu hỏi ôn tập 154
Bài tập 154

Chương 6. Phương trình vi phân

6.1. Các định nghĩa 158
6.2. Phương trình vi phân cấp 1 159
6.3. Phương trình vi phân cấp 2 165
Câu hỏi ôn tập 169
Bài tập 169

Đáp số và lời giải vắn tắt 175

GIÁO TRÌNH
TOÁN CAO CẤP

Chịu trách nhiệm xuất bản :
BÙI HỮU HẠNH

Biên tập : ĐÀO NGỌC DUY
Chế bản : PHẠM HỒNG LÊ
Sửa bản in : ĐÀO NGỌC DUY
Bìa : NGUYỄN HỮU TÙNG

In 1000 cuốn khổ 19 × 27cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 621/XB-QLXB-13, ngày 29-4-2005. In xong nộp lưu chiểu tháng 10-2005.

¥265 283

5 - 517
XD- 2005 621 - 2005

Giá : 45.000đ