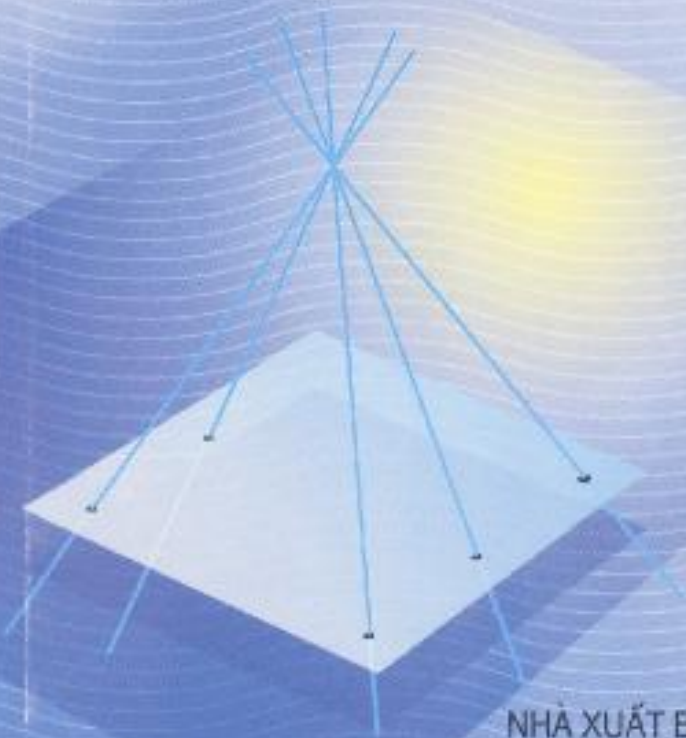


NGUYỄN HỮU ĐIỂN

GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP **ĐẠI LƯỢNG CỰC BIÊN**



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



NGUYỄN HỮU ĐIỂN

GIẢI TOÁN
BẰNG PHƯƠNG PHÁP
ĐẠI LƯỢNG CỰC BIÊN

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Trong cuốn sách *Những phương pháp điển hình trong giải toán phổ thông* [13] của tác giả có đề cập đến phương pháp phần tử cực biên. Phương pháp này đã lợi dụng phần tử gọi là *đại lượng cực biên* theo một nghĩa nào đó như nhỏ nhất, lớn nhất, các điểm đầu của đoạn thẳng, phần tử nằm ở ranh giới giữa phần trong và phần ngoài một tập, ... Nội dung cuốn sách *Giải toán bằng phương pháp đại lượng cực biên* khảo sát rất kĩ những kĩ thuật và cách sử dụng đại lượng cực biên để giải toán. Rất nhiều bài toán mới được giải bằng phương pháp đại lượng cực biên. Một số tài liệu trong nước gọi phương pháp này là phương pháp cực hạn. Để thể hiện bản chất của phương pháp, tác giả gọi nó là *phương pháp đại lượng cực biên*. Bởi vì khi giải bài toán, ta đã dùng đại lượng cực biên làm mấu chốt cho xuất phát và lý luận. Mặt khác, đại lượng cực biên trong mỗi bài toán cụ thể là khác nhau, nhưng có tính chất chung là các phần tử này nằm giữa miền xác định và miền không xác định của bài toán theo một nghĩa nào đó.

Nguyên lý thứ tự của số học là mấu chốt của phương pháp đại lượng cực biên. Ngay từ *Chương một*, ta sẽ thấy những bài toán giải được bằng phương pháp quy nạp thì đều giải được bằng phương pháp đại lượng cực biên thông qua nguyên lý thứ tự. Như vậy, ta thấy ngay được hai cách giải loại bài toán này là phương pháp quy nạp toán học và phương pháp dùng nguyên lý thứ tự. Trong phần này các bạn sẽ thấy mối liên kết giữa hai nguyên lý chặt chẽ như thế

nào. *Chương hai* trình bày các kĩ thuật chứng minh hoặc tính toán sử dụng phương pháp đại lượng cực biên, nhất là dùng lý luận phản chứng với đại lượng cực biên, sắp xếp thứ tự các phần tử, ... Những kĩ thuật này được áp dụng rất nhiều cho các chương sau. Chuyên đề của chương này là đưa thứ tự vào cho một tập hợp bất kì chứ không phải chỉ là tập hợp số nguyên. Điều quan trọng là sắp xếp như thế nào để thể hiện nguyên lý thứ tự và sử dụng giải bài toán. *Chương ba* ứng dụng phương pháp đại lượng cực biên vào hình học với các đại lượng cực biên đa dạng như số đo góc, độ dài cạnh, ... Rất nhiều bài toán hình học không thể giải bằng cách khác hay hơn. Chuyên đề của chương này là bài toán Sylvester-Gallai và những mở rộng của nó. *Chương bốn* lại là ứng dụng phương pháp đại lượng cực biên vào số học và đại số với đại lượng cực biên là số nhỏ nhất và lớn nhất. Đặc biệt, chuyên đề quan trọng là phương pháp xuống thang trong số học, phương pháp này đã có lịch sử từ thời Fermat. *Chương năm* về giải tích liên quan tới các định lý nổi tiếng như: định lý giá trị trung bình, định lý giá trị trung gian, định lý Rolle,... cho các hàm liên tục xác định trên một đoạn, mà giá trị hàm số tại hai đầu mút quyết định nội dung định lý. Từ những định lý cơ bản này, rất nhiều bài toán được giải cũng chỉ cần sử dụng giá trị hai đầu mút của đoạn thẳng là đủ... *Chương sáu* về hàm lồi và tính chất của hàm lồi đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các điểm cực biên trên miền xác định của nó. Cụ thể, nếu hàm lồi xác định trên đoạn thẳng hoặc miền đa giác, thì nó đạt cực trị tại hai đầu đoạn thẳng hoặc tại các đỉnh của đa giác. Hàng loạt bài toán dùng đại lượng cực biên của hàm lồi để giải một cách rất lý thú.

Cuốn sách dành cho học sinh phổ thông yêu toán, học sinh khá giỏi môn toán, các thầy cô giáo, sinh viên đại học ngành toán, ngành

tin học và những người yêu thích toán học phổ thông. Trong biên soạn, chúng tôi không thể tránh khỏi sai sót và nhầm lẫn, rất mong bạn đọc cho ý kiến. Mọi góp ý gửi về địa chỉ: Ban biên tập sách Toán, Nhà xuất bản Giáo dục tại Hà Nội, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

Tác giả cảm ơn ban biên tập Toán - Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội đã hết sức giúp đỡ để cuốn sách được in ra. Tác giả đặc biệt cảm ơn biên tập viên, TS. Phạm Thị Bạch Ngọc đã đọc kĩ bản thảo và bổ sung rất nhiều ý kiến có giá trị để hoàn thiện cuốn sách.

Hà Nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005

Nguyễn Hữu Điển

NHỮNG KÝ HIỆU

Trong cuốn sách này ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{N}$	tập hợp số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	tập hợp số tự nhiên khác 0
$\mathbb{Z}$	tập hợp số nguyên
$\mathbb{Q}$	tập hợp số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$\mathbb{C}$	tập hợp số phức
$\equiv$	dấu đồng dư
∞	dương vô cùng (tương đương với $+\infty$)
$-\infty$	âm vô cùng
$\emptyset$	tập hợp rỗng
C_m^k	tổ hợp chập k của m phần tử
$:$	chia hết
$\nmid$	không chia hết
$UCLN$	ước số chung lớn nhất
$BCNN$	bội số chung nhỏ nhất
$\deg$	bậc của đa thức
$\odot$	Kết thúc chứng minh
IMO	International Mathematics Olympiad
APMO	Asian Pacific Mathematics Olympiad

CHƯƠNG 1

NGUYÊN LÝ THỨ TỰ TRONG TẬP SỐ TỰ NHIÊN

1.1. Nguyên lý thứ tự	8
1.2. Nguyên lý quy nạp toán học	12
1.3. Sự tương đương giữa hai nguyên lý	23
1.4. Chuyên đề tập hợp sắp thứ tự đầy đủ	29
1.4.1. Thứ tự của một tập hợp bất kì	30
1.4.2. Tập hợp sắp thứ tự đầy đủ và ứng dụng	35
1.5. Bài tập	41

Chương này nhắc lại những khái niệm khởi đầu của lý thuyết số. Tập hợp số tự nhiên, các phép toán của nó và một thứ tự thông thường trong nó. Trọng tâm là nguyên lý thứ tự và những ứng dụng của nó, liên quan đến vấn đề này ta xét nguyên lý quy nạp toán học, phương pháp phản chứng với nguyên lý thứ tự.

1.1. NGUYÊN LÝ THỨ TƯ

Tập hợp số $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ được gọi là tập hợp số tự nhiên. Mỗi phần tử của nó được gọi là một số tự nhiên. Tập hợp số tự nhiên thường gắn với hai phép toán cộng và nhân. Với những số tự nhiên a, b và c , các phép toán trên có những tính chất sau:

1. $a + b$ và ab cũng là số tự nhiên (tính đóng).
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ và $a(bc) = (ab)c$ (tính kết hợp).
3. $a(b + c) = ab + ac$ (tính phân phối).
4. $0 + a = a + 0$ (đơn vị cộng tính).
5. $1a = a1 = a$ (đơn vị nhân tính).

Người ta còn xét thứ tự $<$ (nhỏ hơn) thường dùng trong tập số tự nhiên: $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$ Thứ tự này có tính chất sau: Nếu a, b và c là những số tự nhiên khác nhau, thì

(1) hoặc là $a < b$ hoặc là $b < a$, nhưng không đồng thời có cả hai bất đẳng thức này;

(2) nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

Người ta công nhận một tính chất quan trọng trong tập số tự nhiên như một tiên đề cơ sở:

Nguyên lý thứ tư: Mọi tập con khác rỗng những số tự nhiên luôn có phần tử nhỏ nhất.

Ví dụ: Cho tập hợp $\mathcal{S}$ được định nghĩa như sau:

$\mathcal{S} = \{x | x \text{ là tích của những số nguyên dương chẵn khác nhau}\}.$

Ta có thể viết cụ thể tập hợp này $\mathcal{S} = \{8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$. Ta thấy rằng tập hợp $\mathcal{S}$ thực sự có phần tử nhỏ nhất là 8.

Nguyên lý thứ tư đúng cho tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ nhưng không

đúng cho tập số nguyên được định nghĩa và ký hiệu như sau:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Với thứ tự $<$ thì tập con khác rỗng những số nguyên âm không có phần tử nhỏ nhất.

Định lý 1.1. Cho tập hợp khác rỗng những số tự nhiên $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ sao cho $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$. Khi đó $\mathcal{S}$ là tập hợp hữu hạn.

Chứng minh. Theo giả thiết $\mathcal{S}$ là tập hợp khác rỗng. Giả sử $\mathcal{S}$ là tập vô hạn. Từ $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ (theo giả thiết), suy ra $\mathcal{S}$ không có phần tử nhỏ nhất. Điều này trái với nguyên lý thứ tự. Do đó $\mathcal{S}$ là tập hợp hữu hạn. ☺

Phần sau đây ta sử dụng nguyên lý thứ tự để giải toán gọi là *phương pháp đại lượng cực biên*. Trước khi xét một số ví dụ sử dụng phương pháp này để giải toán, ta nhắc lại những loại số khác cần thiết. *Số hữu tỉ* là số mà nó có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{a}{b}$, ở đây a, b là hai số nguyên và $b \neq 0$. Ký hiệu tập số này là $\mathbb{Q}$. *Số vô tỉ* là số mà nó không thể biểu diễn dưới dạng tỉ số của hai số nguyên và ký hiệu tập hợp số này là $\mathbb{I}$. Tập hợp các số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi là *tập số thực* và ký hiệu là $\mathbb{R}$. Để dàng thấy mối quan hệ sau đây $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Chứng minh theo phản chứng. Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ, nghĩa là $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $b \neq 0$. Điều này suy ra tập hợp

$$\mathcal{S} = \{n\sqrt{2} \mid \text{đồng thời } n \text{ và } n\sqrt{2} \text{ là những số nguyên dương}\}$$

là tập hợp khác rỗng (vì nó chứa a). Theo nguyên lý thứ tự, $\mathcal{S}$ có phần tử nhỏ nhất, gọi nó là $j = k\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Vì $\sqrt{2} - 1 > 0$ nên $j(\sqrt{2} - 1) = j\sqrt{2} - k\sqrt{2} = (j - k)\sqrt{2}$ là một số nguyên dương. Từ $2 < 2\sqrt{2}$ và $j\sqrt{2} = 2k$, ta suy ra

$$(j - k)\sqrt{2} = k(2 - \sqrt{2}) < k\sqrt{2} = j.$$

Như vậy $(j - k)\sqrt{2}$ là một số nguyên dương trong $\mathcal{S}$, mà nó lại nhỏ hơn cả số nhỏ nhất j . Điều này vô lý với cách chọn j . Suy ra điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 1.2. Cho những số nguyên không âm a ($a \neq 0$) và b . Chứng minh rằng tồn tại những số nguyên q ($q \geq 0$) và r ($0 \leq r < a$) sao cho $b = aq + r$.

Lời giải. Ký hiệu $\mathcal{S} = \{b - ax \mid x \geq 0, b - ax \geq 0\}$. Vì $b = b - a \cdot 0$ nằm trong $\mathcal{S}$, nên tập $\mathcal{S}$ khác rỗng gồm những số nguyên không âm. Như vậy $\mathcal{S}$ có phần tử nhỏ nhất r . Ta sẽ chỉ ra rằng r thoả mãn những điều kiện của bài toán. Vì r thuộc $\mathcal{S}$ nên $r \geq 0$ và $r = b - aq$ với số $q \geq 0$. Ta phải chỉ ra rằng $r < a$. Bây giờ $r - a = b - qa - a = b - a(q + 1)$. Như vậy nếu $r \geq a$, thì $r - a = b - a(q + 1) \geq 0$ sẽ nằm trong $\mathcal{S}$. Nhưng $r - a < r$ và r là phần tử nhỏ nhất của $\mathcal{S}$. Như vậy $r - a$ không thể lớn hơn hoặc bằng 0. Vậy $r - a < 0$ hay $r < a$. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 1.3. Cho a, b, c là những số nguyên sao cho $a^6 + 2b^6 = 4c^6$. Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

Lời giải. Để thấy ta có thể chỉ cần chứng minh cho những số nguyên không âm là đủ. Ta chọn bộ ba số nguyên không âm a, b, c thoả mãn điều kiện đầu bài đã cho và với $\max(a, b, c) > 0$ có giá trị nhỏ nhất

(điều này tồn tại vì theo nguyên lý thứ tự cho tập con khác rỗng các số tự nhiên). Nếu $a^6 + 2b^6 = 4c^6$ thì a phải là số chẵn, nghĩa là $a = 2a_1$ với a_1 là một số nguyên dương. Thay vào đẳng thức đã cho, ta nhận được $32a_1^6 + b^6 = 2c^6$. Từ đây lại có $b = 2b_1$ và suy ra $16a_1^6 + 32b_1^6 = c^6$. Như vậy ta lại có $c = 2c_1$ và cuối cùng $a_1^6 + 2b_1^6 = 4c_1^6$. Vậy (a_1, b_1, c_1) là bộ ba số nguyên không âm thỏa mãn đẳng thức đầu bài đã cho, mặt khác, ta có $\max(a_1, b_1, c_1) < \max(a, b, c)$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn các số a, b, c . Suy ra $\max(a, b, c) = 0$, nghĩa là $a = b = c = 0$.



Bài toán 1.4 (IMO 1988). *Chứng minh rằng nếu a, b là những số nguyên dương sao cho $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ là một số nguyên thì $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ là một số chính phương.*

Lời giải. Giả sử số $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab} = k$ là một số nguyên, nhưng không phải là số chính phương với $\max(a, b)$ nhỏ nhất (điều này tồn tại do tiên đề thứ tự). Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng $a \leq b$. Nếu $a = b$ thì $0 < k = \frac{2a^2}{a^2 + 1} < 2$, từ đó suy ra $k = 1$ và nó là một số chính phương. Kết luận bài toán đúng.

Xét trường hợp $a < b$: Ta xét $a^2 + b^2 - k(ab + 1) = 0$ là phương trình bậc hai theo biến b . Theo công thức Viète, tổng của hai nghiệm của phương trình đang xét là ka và tích của hai nghiệm là $a^2 - k$. Ký hiệu b_1, b_2 là hai nghiệm nói trên thì $b_1 + b_2 = ka$ và $b_1 b_2 = a^2 - k$. Vì a, k là những số nguyên dương và b_1 thỏa mãn $a^2 + b_1^2 - k(ab_1 + 1) = 0$, nên ta có $b_1 \geq 0$. Nếu ngược lại thì b_1 không thể là nghiệm của phương trình đang xét.

Hơn nữa, nếu $b_1 = 0$ thì $a^2 + 0^2 = k(0 \cdot a + 1)$, mà k không phải là

số chính phương, điều này vô lý. Như vậy $b_1 > 0$ và

$$b_1 = \frac{a^2 - k}{b_2} < \frac{b^2 - k}{b} < b.$$

Như vậy ta tìm được một số nguyên b_1 thỏa mãn $\frac{a^2 + b_1^2}{1 + ab_1} = k$, mà $\max(a, b_1) < \max(a, b)$. Điều này vô lý. Vậy k phải là một số chính phương. ☺

Những ví dụ trên sử dụng nguyên lý thứ tự để giải toán. Cách chứng minh như vậy còn được áp dụng rất nhiều lần trong các chương sau.

1.2. NGUYÊN LÝ QUY NẠP TOÁN HỌC

Định lý 1.1 chỉ ra một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ có các phần tử giảm dần thì nó hữu hạn. Một tập con những số tự nhiên có một số tính chất nào đó mà từ tính chất này suy ra tập con đó trùng với tập số tự nhiên được không? Câu trả lời là có và thể hiện ở định lý sau đây.

Định lý 1.2 (Nguyên lý quy nạp toán học). *Nếu một tập hợp $\mathcal{S}$ những số nguyên không âm có tính chất:*

- 1) $\mathcal{S}$ chứa số 0;
- 2) Nếu $\mathcal{S}$ chứa số nguyên n thì nó cũng chứa số nguyên $n + 1$.

Khi đó $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{S}$ là tập con thực sự của $\mathbb{N}$, nghĩa là có số nguyên dương thuộc $\mathbb{N}$ nhưng không thuộc $\mathcal{S}$. Vậy theo nguyên lý thứ tự tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất k không nằm trong $\mathcal{S}$. Ta thấy rằng $k > 0$ vì $0 \in \mathcal{S}$. Vì $k - 1 < k$, theo cách chọn trên thì

$k - 1 \in \mathcal{S}$. Nhưng theo giả thiết thứ hai phải có $k - 1 + 1$ cũng phải thuộc $\mathcal{S}$. Vì thế $k = k - 1 + 1$ cũng nằm trong tập $\mathcal{S}$, điều này vô lý với cách chọn k . Suy ra $\mathcal{S} = \mathbb{N}$. ☺

Từ định lý trên dễ dàng suy ra những hệ quả sau.

Hệ quả 1.1. Nếu tập hợp $\mathcal{S}$ những số nguyên dương chứa số m và nó cũng chứa $n + 1$ mỗi khi nó chứa n với $n \geq m$, thì $\mathcal{S}$ chứa tất cả những số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng m .

Chú ý: Để thuận tiện cho thể hiện các bài toán sau này và theo hệ quả trên ta ký hiệu $\mathbb{N}(m) = \{m, m + 1, \dots, n, \dots\}$. Ví dụ tập số nguyên dương bắt đầu từ 3 là $\mathbb{N}(3) = \{3, 4, 5, \dots\}$. Ta ký hiệu $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ là tập hợp các số nguyên dương.

Hệ quả 1.2 (Nguyên lý quy nạp toán học mạnh). Nếu tập hợp $\mathcal{S}$ những số nguyên dương chứa số m và nó cũng chứa số $n + 1$ mỗi khi nó chứa các số $m, m + 1, m + 2, \dots, n$ với $n \geq m$, thì $\mathcal{S}$ chứa tất cả các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng m .

Chú ý: Nguyên lý quy nạp toán học được phát biểu khác với nguyên lý quy nạp ta thường dùng như trong [12], trong cuốn sách này tác giả đã đề cập tới mọi khía cạnh của việc dùng phương pháp quy nạp. Những ví dụ sau đây ứng dụng trực tiếp định lý trên và sau đó ta dẫn về dạng nguyên lý quy nạp quen thuộc.

Bài toán 1.5. Chứng minh rằng $A(n) = 7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Ta ký hiệu tập hợp $\mathcal{S} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } A(n) \div 9\}$. Ta sử dụng nguyên lý quy nạp để chứng minh, vậy ta kiểm tra các điều kiện giả thiết:

1) Với $n = 0$, ta có $A(0) = 0 \div 9$. Vậy $0 \in \mathcal{S}$.

2) Giả sử $n \in \mathcal{S}$, nghĩa là $n \in \mathbb{N}$ và $A(n) = 7^n + 3n - 1 \div 9$ với $n > 0$.
Ta xét $n + 1 \in \mathbb{N}$ và

$$\begin{aligned} A(n+1) &= 7^{n+1} + 3(n+1) - 1 = 7 \cdot 7^n + 3n + 3 - 1 \\ &= 7(7^n + 3n - 1) - 9(2n - 1) \\ &= 7A(n) - 9(2n - 1). \end{aligned}$$

Do $A(n) \div 9$ (theo giả thiết), nên $A(n+1) \div 9$, nghĩa là $n + 1 \in \mathcal{S}$.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $\mathcal{S} = \mathbb{N}$, nghĩa là với mọi $n \geq 0$, $A(n)$ chia hết cho 9. ☺

Bài toán 1.6. Chứng minh rằng

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Ta ký hiệu $T(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ và

$$\mathcal{S} = \left\{ n \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ và } T(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right\}.$$

Ta kiểm tra những điều kiện của nguyên lý quy nạp toán học:

1) Với $n = 1$, $T(1) = 1^3 = 1$ và $\left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 = 1 = T(1)$, suy ra $1 \in \mathcal{S}$.

2) Giả sử $n \in \mathcal{S}$, nghĩa là $T(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$. Ta xét $n + 1 \in \mathbb{N}$ và

$$\begin{aligned} T(n+1) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = T(n) + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $n+1 \in \mathcal{S}$. Theo nguyên lý quy nạp toán học $\mathcal{S} = \mathbb{N}^*$, nghĩa là với mọi $n \geq 1$ ta có $T(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. ☺

Bài toán 1.7. Chứng minh rằng $2^n > n$ với mọi số tự nhiên n .

Lời giải. Ta xét tập $\mathcal{S} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } 2^n > n\}$. Ta kiểm tra điều kiện của nguyên lý quy nạp toán học cho tập $\mathcal{S}$.

1) Với $n = 0$, ta có $2^0 = 1 > 0$, do đó $0 \in \mathcal{S}$.

Với $n = 1$, ta có $2^1 = 2 > 1$, do đó $1 \in \mathcal{S}$.

2) Giả sử $n \geq 1$, $n \in \mathcal{S}$ nghĩa là $n \in \mathbb{N}^*$ và $2^n > n$. Ta phải chứng minh $n+1 \in \mathcal{S}$. Thật vậy, từ $2^n > n$ nhân hai vế bất đẳng thức với 2, ta nhận được $2^{n+1} > 2n$. Mặt khác do $n \geq 1$, cộng hai vế bất đẳng thức này với n , ta nhận được $2n \geq n+1$. Do đó $2^{n+1} > 2n \geq n+1$, suy ra $2^{n+1} > n+1$, nghĩa là $n+1 \in \mathcal{S}$. Theo nguyên lý quy nạp toán học suy ra $\mathcal{S} = \mathbb{N}$. Nghĩa là, $2^n > n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. ☺

Bài toán 1.8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , luôn có

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Lời giải. Đặt

$$A(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} \text{ và } B(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} A(n+1) &= A(n) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}, \\ B(n+1) &= B(n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Đặt $\mathcal{S} = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ và } A(n) = B(n)\}$. Ta chứng minh bài toán bằng nguyên lý quy nạp:

1) Với $n = 1$, ta có $A(1) = \frac{1}{2} = B(1)$, suy ra $1 \in \mathcal{S}$.

2) Giả sử đã có $n \in \mathcal{S}$, nghĩa là $A(n) = B(n)$ là đúng. Ta xét

$$A(n+1) - B(n+1) = A(n) - B(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+2} = A(n) - B(n) = 0.$$

Do đó $n+1 \in \mathcal{S}$. Theo nguyên lý quy nạp toán học $\mathcal{S} = \mathbb{N}^*$. Nghĩa là với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta đều có $A(n) = B(n)$. ☺

Bài toán 1.9. Chứng minh rằng $(1 + \sqrt{2})^{2n} + (1 - \sqrt{2})^{2n}$ là một số nguyên chẵn và $(1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} = b\sqrt{2}$, ở đây b là một số nguyên dương nào đó, với mọi số nguyên dương n .

Lời giải. Đặt $P(n) = \{(1 + \sqrt{2})^{2n} + (1 - \sqrt{2})^{2n} \text{ là một số nguyên chẵn và } (1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} = b\sqrt{2} \text{ với } b \in \mathbb{N}^*\}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ và $\mathcal{S} = \{n | n \in \mathbb{N}^* \text{ và } P(n) \text{ đúng}\}$. Ta sử dụng nguyên lý quy nạp:

1) Với $n = 1$, thì $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = 6$ là một số chẵn và $(1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}$. Do đó $1 \in \mathcal{S}$.

2) Giả sử $n-1 \in \mathcal{S}$ với $n > 1$, nghĩa là

$$(1 + \sqrt{2})^{2(n-1)} + (1 - \sqrt{2})^{2(n-1)} = 2N$$

với một số nguyên dương N nào đó và

$$(1 + \sqrt{2})^{2(n-1)} - (1 - \sqrt{2})^{2(n-1)} = a\sqrt{2}$$

với một số nguyên dương a đã biết.

Ta xét đẳng thức

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^{2n} + (1 - \sqrt{2})^{2n} &= (1 + \sqrt{2})^2(1 + \sqrt{2})^{2n-2} + (1 - \sqrt{2})^2(1 - \sqrt{2})^{2n-2} \\ &= (3 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{2n-2} + (3 - 2\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{2n-2} \\ &= 6N + 2\sqrt{2}a\sqrt{2} = 2(3N + 2a). \end{aligned}$$

Đây là một số chẵn và tương tự ta có

$$(1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} = 3a\sqrt{2} + 2\sqrt{2}(2N) = (3a + 4N)\sqrt{2}$$

và như vậy $n \in \mathcal{S}$. Theo nguyên lý quy nạp ta có $\mathcal{S} = \mathbb{N}^*$. ☺

Giải các bài toán trên bằng nguyên lý quy nạp theo kiểu tập hợp số tự nhiên. Trong khi sử dụng nguyên lý này ta luôn luôn gặp các mệnh đề logic $P(n)$ đúng hoặc sai phụ thuộc vào biến số tự nhiên n và bằng cách đặt tập con $\mathcal{S}$ thích hợp để áp dụng được nguyên lý quy nạp. Nhưng thực chất lý luận dựa trên các mệnh đề logic đã đặt $P(n)$ từ giả thiết của bài toán. Vì vậy người ta có thể phát biểu lại nguyên lý quy nạp theo dạng mệnh đề như sau:

Định lý 1.3 (Nguyên lý quy nạp toán học dạng mệnh đề). *Cho một dãy mệnh đề $P(0), P(1), P(2), \dots$ có nghĩa và thỏa mãn:*

1) $P(0)$ đúng;

2) Nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ đúng suy ra $P(k+1)$ cũng đúng,

thì $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Đặt $\mathcal{S} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } P(n) \text{ đúng}\}$. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng $0 \in \mathcal{S}$ và $k \in \mathcal{S}$ kéo theo $k+1 \in \mathcal{S}$. Theo Định lý 1.2, ta có $\mathcal{S} = \mathbb{N}$. Từ đây suy ra kết quả cần chứng minh. ☺

Thực tế người ta sử dụng Định lý 1.3 thuận tiện hơn. Phương pháp dùng nguyên lý quy nạp toán học để chứng minh gọi là phương pháp quy nạp toán học. Đặc điểm của phương pháp này bao gồm hai bước: Bước thứ nhất gọi là *bước cơ sở*: Kiểm tra $P(0)$ đúng. Bước thứ hai gọi là *bước quy nạp*: Chứng minh nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng. Kết luận là $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vấn đề này được bàn kĩ trong cuốn sách [12]. Sau đây chỉ nêu một số ví dụ.

Bài toán 1.10. Chứng minh rằng nếu k là một số lẻ, thì $k^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+2} với mọi số n nguyên dương.

Lời giải. Cho k là một số lẻ. Đặt $P(n) = \{k^{2^n} - 1 \text{ chia hết cho } 2^{n+2}\}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

Bước cơ sở: Với $n = 1$, $k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$ chia hết cho 8 với mọi số tự nhiên k lẻ, bởi vì đồng thời cả hai số $(k - 1)$ và $(k + 1)$ chia hết cho 2 và một trong chúng chia hết cho 4.

Bước quy nạp: Giả sử $k^{2^n} - 1 : 2^{n+2}$, ta phải chứng minh $k^{2^{n+1}} - 1 : 2^{n+3}$. Thật vậy, vì $k^{2^{n+1}} - 1 = (k^{2^n} - 1)(k^{2^n} + 1)$, theo giả thiết quy nạp $k^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+2} , ta chỉ cần chứng minh $k^{2^n} + 1$ chia hết cho 2. Nhưng điều đó là hiển nhiên đúng (có thể phân tích ra thừa số), vì k^{2^n} là một số lẻ, tạo ra $k^{2^n} + 1$ là một số chẵn.

Theo nguyên lý quy nạp mệnh đề suy ra kết luận đúng với mọi $n \geq 1$. ☺

Bài toán 1.11 (Mĩ 1978). Một số nguyên n được gọi là số đẹp nếu ta có thể viết

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

ở đây $a_1, a_2, \dots, a_k$ là những số nguyên dương (có thể không khác nhau) thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Biết rằng những số nguyên từ 33 đến 73 đều là những số đẹp, chứng minh rằng với mọi số nguyên lớn hơn hoặc bằng 33 cũng đều là những số đẹp.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh rằng nếu n là số đẹp, thì $2n + 8$ và $2n + 9$ cũng là những số đẹp. Thật vậy, từ giả thiết ta có

$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ và

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Khi đó $2n + 8 = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k + 4 + 4$ và

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Tương tự, ta có $2n + 9 = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k + 3 + 6$ và

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Do đó nếu n là số đẹp thì đồng thời $2n + 8$ và $2n + 9$ đều là số đẹp.

Đặt $P(n) = \{\text{Tất cả các số } n, n+1, n+2, \dots, 2n+7 \text{ là số đẹp}\}$. Ta chứng minh mệnh đề này bằng phương pháp quy nạp theo n .

Bước cơ sở: Theo giả thiết thì với $n = 33$, $P(33)$ là đúng.

Bước quy nạp: Từ mệnh đề chứng minh ở phần đầu nếu $P(n)$ đúng suy ra $P(n+1)$ cũng đúng.

Theo nguyên lý quy nạp mệnh đề $P(n)$ đúng cho mọi số nguyên n lớn hơn hoặc bằng 33. ☺

Bài toán 1.12. Tìm các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho

(a) $f(2) = 2$;

(b) $f(n+1) = 1 + 1f(1) + 2f(2) + \cdots + nf(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Nếu $n = 1$ thì từ (b) ta nhận được $f(2) = 1 + 1f(1)$. Do đó $f(1) = 1$. Nếu $n = 2$, thì ta nhận được

$$f(3) = 1 + 1f(1) + 2f(2) = 1 + 1 + 4 = 6.$$

Tương tự, ta tính được $f(4) = 24$ và $f(5) = 120$. Vậy ta có nhận xét

$$f(1) = 1!, \quad f(2) = 2!, \quad f(3) = 3!, \quad f(4) = 4!, \quad f(5) = 5!.$$

Ta có dự đoán: $f(n) = n!$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, mệnh đề đúng như kiểm tra ở trên.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với mọi $n \leq k$, tức là $f(1) = 1!, \dots, f(k) = k!$, ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là $f(k + 1) = (k + 1)!$.

Thật vậy, từ (b) ta có

$$f(k + 1) = 1 + 1.1! + 2.2! + \dots + k.k!.$$

Mặt khác, ta luôn có đẳng thức

$$1 + 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n + 1)!.$$

đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (điều này cũng có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Do đó $f(k + 1) = (k + 1)!$.

Từ chứng minh trên suy ra chỉ có hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn (a) và (b) là $f(n) = n!$. ☺

Bài toán 1.13. Ta xét những tập con của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ mà chúng không chứa bất kì hai số tự nhiên liên tiếp nào. Chứng minh rằng tổng bình phương các tích của tất cả các số trong những tập con này là $(n + 1)! - 1$ (ví dụ: Nếu $n = 3$ thì những tập con là $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$ và tổng bình phương các tích của chúng là $1^2 + 2^2 + 3^2 + (1.3)^2 = 4! - 1$).

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

Bước cơ sở: Với $n = 1$, mệnh đề đúng.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $n \leq k$ và ta phải chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta lấy tất cả tập con của tập hợp $\{1, 2, \dots, k, k + 1\}$ mà nó không chứa hai số tự nhiên

liên tiếp. Ta chia những tập hợp con theo hai tiêu chuẩn: (1) những tập hợp con chứa số $k+1$, và (2) những tập hợp con không chứa số $k+1$.

Theo giả thiết quy nạp, tổng bình phương các tích cho loại tập hợp con thứ nhất là $(k+1)^2(k!-1) + (k+1)^2$ và cho loại tập thứ hai là $(k+1)!-1$. Vì thế tổng cần tìm là

$$(k+1)^2(k!-1) + (k+1)^2 + (k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.$$

Do đó mệnh đề vẫn đúng với $n = k+1$. Vậy nó đúng cho mọi $n \in \mathbb{N}^*$.



Bài toán 1.14. Cho x, y là hai số thực khác 0 sao cho $x + \frac{1}{x}$, $y + \frac{1}{y}$ và $xy + \frac{1}{xy}$ là những số nguyên. Chứng minh rằng $x^n y^m + \frac{1}{x^n y^m}$ cũng là số nguyên với m và n là hai số nguyên dương bất kì.

Lời giải. Ta dùng phương pháp quy nạp chứng minh rằng $y^m + \frac{1}{y^m}$ là số nguyên với mọi số nguyên dương m .

Bước cơ sở: Với $m = 1$, mệnh đề đúng (do giả thiết đã cho).

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với mọi $m = i$, $1 \leq i \leq k$, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $m = k+1$. Thật vậy, dễ thấy có đẳng thức sau:

$$y^{k+1} + \frac{1}{y^{k+1}} = \left(y + \frac{1}{y}\right) \left(y^k + \frac{1}{y^k}\right) - \left(y^{k-1} + \frac{1}{y^{k-1}}\right).$$

Vì $y + \frac{1}{y}$, $y^{k-1} + \frac{1}{y^{k-1}}$, $y^k + \frac{1}{y^k}$ là những số nguyên (theo giả thiết quy nạp), từ đó suy ra $y^{k+1} + \frac{1}{y^{k+1}}$ là số nguyên. Do đó $y^m + \frac{1}{y^m}$ là số nguyên với mọi số nguyên dương m .

Ta chứng minh rằng $xy^m + \frac{1}{xy^m}$ là số nguyên với mọi số nguyên dương m . Ta lại chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo m .

Bước cơ sở: Với $m = 1$ mệnh đề đúng, do giả thiết đã cho.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $m = i, 1 \leq i \leq k$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $m = k + 1$. Thật vậy, dễ thấy đẳng thức sau đúng:

$$xy^{k+1} + \frac{1}{xy^{k+1}} = \left(y + \frac{1}{y}\right) \left(xy^k + \frac{1}{xy^k}\right) - \left(xy^{k-1} + \frac{1}{xy^{k-1}}\right).$$

Cuối cùng ta chứng minh $x^n y^m + \frac{1}{x^n y^m}$ là số nguyên. Ta dùng phương pháp quy nạp theo n .

Bước cơ sở: Với $n = 1$, mệnh đề đúng (theo chứng minh phần trước).

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với mọi $n = i, 1 \leq i \leq k$, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, dễ thấy đẳng thức sau đúng:

$$x^{k+1} y^m + \frac{1}{x^{k+1} y^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^k y^m + \frac{1}{x^k y^m}\right) - \left(x^{k-1} y^m + \frac{1}{x^{k-1} y^m}\right).$$

Vì $x + \frac{1}{x}, x^k y^m + \frac{1}{x^k y^m}, x^{k-1} y^m + \frac{1}{x^{k-1} y^m}$ là những số nguyên (theo giả thiết quy nạp), từ đó suy ra $x^{k+1} y^m + \frac{1}{x^{k+1} y^m}$ là số nguyên. Do đó $x^n y^m + \frac{1}{x^n y^m}$ là số nguyên với mọi số nguyên dương m, n . ☺

Nhiều vấn đề khác về nguyên lý quy nạp loại này được trình bày trong cuốn sách [12]. Mục đích của cuốn sách này không phải nói về vấn đề này nên ta dừng lại đây.

1.3. SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG GIỮA HAI NGUYÊN LÝ

Định lý 1.2 đã chỉ ra rằng từ nguyên lý thứ tự suy ra nguyên lý quy nạp toán học. Sau đây ta sẽ chứng minh ngược lại, nếu ta có nguyên lý quy nạp thì suy ra nguyên lý thứ tự.

Định lý 1.4. *Nguyên lý quy nạp toán học kéo theo nguyên lý thứ tự.*

Chứng minh. Giả thiết đã cho nguyên lý quy nạp toán học đúng. Ta phải chứng minh rằng nếu $\mathcal{S}$ là tập con khác rỗng những số tự nhiên, thì $\mathcal{S}$ có phần tử nhỏ nhất. Tức là ta phải chứng minh: Nếu $\mathcal{S}$ không có phần tử nhỏ nhất, thì $\mathcal{S} = \emptyset$.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{S}$ không có phần tử nhỏ nhất. Ký hiệu $\overline{\mathcal{S}}$ là phần bù của $\mathcal{S}$. Nếu 0 nằm trong $\mathcal{S}$ thì 0 là phần tử nhỏ nhất của $\mathcal{S}$, điều này vô lý với giả thiết đã cho về $\mathcal{S}$. Do đó $0 \in \overline{\mathcal{S}}$.

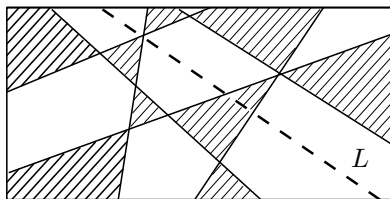
Giả sử n là số tự nhiên, $n \geq 1$ và $0, 1, 2, \dots, n-1$ nằm trong $\overline{\mathcal{S}}$. Nếu n nằm trong $\mathcal{S}$, thì n là phần tử nhỏ nhất của $\mathcal{S}$, điều này trái với giả thiết về $\mathcal{S}$. Do đó n nằm trong $\overline{\mathcal{S}}$. Theo nguyên lý quy nạp toán học suy ra $\overline{\mathcal{S}} = \mathbb{N}$, như vậy $\mathcal{S} = \emptyset$. ☺

Thực chất hai nguyên lý ta đang nghiên cứu tương đương nhau. Nghĩa là một bài toán sử dụng một nguyên lý này để giải thì có thể sử dụng nguyên lý kia cũng giải được. Ta xét một số ví dụ để thấy hai cách chứng minh dùng hai nguyên lý khác nhau có mối liên quan như thế nào.

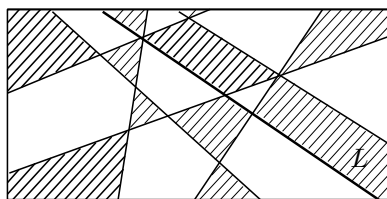
Bài toán 1.15. *Chứng minh rằng tập hợp những miền xác định bởi n đường thẳng trên mặt phẳng có thể tô chỉ bằng hai màu sao cho hai miền chung cạnh có màu khác nhau.*

Lời giải. Cách thứ 1: Chứng minh theo phương pháp quy nạp. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số đường thẳng trong mặt phẳng.

Với $n = 1$ thì mặt phẳng được chia ra thành hai miền nên ta có thể tô bằng hai màu khác nhau. Giả sử mệnh đề đúng với n đường thẳng ($n \in \mathbb{N}^*$).



Hình 1.1



Hình 1.2

Cho $n + 1$ đường thẳng trong mặt phẳng. Ta bỏ đi một đường thẳng L (Hình 1.1) và tô màu những miền do n đường thẳng còn lại tạo ra bằng hai màu sao cho hai miền chung cạnh có màu khác nhau (điều này có thể làm được do giả thiết quy nạp là đúng). Đặt trả lại đường thẳng L và đổi màu tất cả các miền nằm về một phía của đường thẳng L (Hình 1.2).

Ta xét hai miền có một đường thẳng chung. Nếu đường thẳng không phải là L thì theo giả thiết quy nạp hai miền có màu khác nhau (hoặc như cũ hoặc là ngược lại). Nếu đường thẳng là L thì hai miền được tạo ra từ một miền trước khi có L sẽ có màu khác nhau, vì ta đã đổi màu ở một bên đường thẳng L .

Cách thứ 2: Chứng minh theo phương pháp nguyên lý thứ tự. Giả sử khẳng định của bài toán không đúng và có những bộ đường thẳng trên mặt phẳng chia mặt phẳng thành những miền không thể tô màu như điều kiện bài ra. Nói chung những bộ đường thẳng có tính chất như vậy có thể có rất nhiều và số lượng đường thẳng trong các bộ có thể khác nhau. Ta xét một trong các bộ đường thẳng có số

đường thẳng nhỏ nhất (nguyên lý thứ tự) và cho đó là n . Ở đây n không thể là 1, vì với một đường thẳng sẽ chia mặt phẳng thành hai miền nên ta có thể tô hai màu khác nhau.

Trong bộ n đường thẳng nhỏ nhất trên, ta lấy đi một đường thẳng bất kì và ta xét $n - 1$ đường thẳng còn lại. Ta sẽ nhận được bộ $n - 1$ đường thẳng chia mặt phẳng thành những miền mà có thể tô được bằng hai màu với hai miền có chung cạnh thì có hai màu khác nhau (vì bộ n đường thẳng là nhỏ nhất không tô màu được). Sau đó ta trả lại đường thẳng vừa lấy đi và ta tô màu được theo cách chứng minh ở phần quy nạp trên cho n đường thẳng. Điều này vô lý, vì bộ n đường thẳng này không thể chia mặt phẳng thành những miền mà tô bằng hai màu như cách chọn trên.

Như vậy không thể có bộ đường thẳng nào mà không thỏa mãn giả thiết bài toán. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 1.16. Chứng minh rằng với mọi số nguyên nghìn đồng (tiền Việt Nam) lớn hơn 6 nghìn có thể đổi bằng những đồng tiền gồm những tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng.

Lời giải. Cách thứ 1: Chứng minh theo phương pháp quy nạp.

Bước cơ sở: Đẳng thức sau đây nói lên với $n = 7$ nghìn đồng, $n = 8$ nghìn đồng thì đổi bằng những tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng như thế nào:

$$7 = 5 + 2;$$

$$8 = 2 + 2 + 2 + 2.$$

Nếu ta thêm vào hai vế của các đẳng thức trên tờ 2 nghìn đồng, thì

$$9 = 7 + 2;$$

$$10 = 8 + 2.$$

Tiếp tục thêm 2 nghìn đồng vào hai đẳng thức sau cùng, ta có

$$11 = 9 + 2;$$

$$12 = 10 + 2.$$

Bước quy nạp: Ta thấy rằng ở bước trước có hai đẳng thức và suy ra bước sau có hai đẳng thức. Như vậy với mọi số $n (n \geq 7)$ nguyên nghìn đồng nào dù là số chẵn hoặc số lẻ thì $n - 2$ cũng rơi vào một trong hai trường hợp trước đó đã đổi được ra hai loại tiền 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng. Suy ra nó cũng đổi thành các tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng. Như vậy, khẳng định của mệnh đề là đúng với mọi $n \geq 7$.

Cách thứ 2: Chứng minh theo nguyên lý thứ tự. Giả sử có số tiền (số nguyên nghìn đồng và không nhỏ hơn 7 nghìn đồng) mà nó không thể thanh toán được bằng các tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng. Có thể có nhiều tổng như vậy, ta lấy số nhỏ nhất trong chúng (theo nguyên lý thứ tự). Ta cho đó là số n nghìn đồng. Theo giả thiết $n \geq 7$ vì thế giá trị $n < 7$ ta không xem xét. Ta cũng biết rằng n không thể là 7 nghìn đồng và 8 nghìn đồng, vì những số tiền này đều thanh toán được bằng các tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng. Nghĩa là $n \geq 9$. Khi đó $n - 2 \geq 7$ và ngoài ra $n - 2 < n$. Nghĩa là số $n - 2$ có thể thanh toán được bằng các tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng (vì ta chọn n là nhỏ nhất, số tiền mà không thể thanh toán được). Nếu ta thêm vào tờ 2 nghìn đồng, thì ta nhận được n nghìn đồng, như vậy số tiền này có thể thanh toán được bằng các tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng. Điều này vô lý vì ta đã chọn n nghìn đồng là số tiền nhỏ nhất không thể thanh toán được bằng tờ 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng. ☺

Bài toán 1.17. Cho dãy số Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

trong đó hai phần tử đầu bằng 1, bắt đầu từ phần tử thứ ba mỗi phần tử bằng hai phần tử ngay trước đó cộng lại. Chứng minh rằng hai số hạng kế nhau không cùng chia hết cho 7.

Chứng minh. Cách thứ 1: Chứng minh theo phương pháp nguyên lý thứ tự. Giả sử ngược lại tồn tại hai số hạng của dãy Fibonacci kế nhau đầu tiên cùng chia hết cho 7 là $7k, 7\ell$. Vì hai số đầu tiên của dãy Fibonacci là hai số 1, nên những số này không thể là những số đầu tiên. Nghĩa là trước những số này tồn tại số hạng a . Theo điều kiện bài toán có $7\ell = a + 7k$, nên $a = 7\ell - 7k = 7(\ell - k)$ và vì thế a cũng chia hết cho 7. Nghĩa là $7k, 7\ell$ không phải là hai số hạng kế nhau đầu tiên trong dãy chia hết cho 7 như điều giả sử trên. Điều vô lý này suy ra không thể có hai số hạng kế nhau trong dãy Fibonacci cùng chia hết cho 7.

Cách thứ 2: Chứng minh theo phương pháp quy nạp. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n mệnh đề sau: Một trong hai số hạng F_n và F_{n+1} của dãy Fibonacci không chia hết cho 7 với mọi $n = 1, 2, \dots$

Bước cơ sở: Với $n = 1$ ta dễ thấy F_1 và F_2 không chia hết cho 7.

Bước quy nạp: Giả sử một trong hai số hạng F_{n-1} và F_n (với $n \geq 2$) không chia hết cho 7, ta phải chứng minh rằng một trong hai số hạng F_n và F_{n+1} cũng không chia hết cho 7. Giả sử ngược lại F_n và F_{n+1} đều chia hết cho 7, thì $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ cũng chia hết cho 7. Như vậy F_{n-1} và F_n đều chia hết cho 7 trái với giả thiết quy nạp. ☺

Theo cách làm của những bài trên, nhiều bài toán chứng minh bằng phương pháp quy nạp ta cũng có thể chứng minh được khi áp dụng nguyên lý thứ tự. Ta xét một số ví dụ sau đây.

Bài toán 1.18. Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên.

Chúng minh rằng $x^n + \frac{1}{x^n}$ cũng là một số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Bài toán này là trường hợp đặc biệt của Bài toán 1.14, Ta trình bày hai cách chứng minh khác nhau sau đây.

1) *Phương pháp quy nạp.* Đặt $B(n) = x^n + \frac{1}{x^n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có $B(1) = x + \frac{1}{x}$ là số nguyên (theo giả thiết).

Với $n = 2$, ta có $B(2) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ cũng là một số nguyên.

Bước quy nạp: Giả sử $B(n)$ và $B(n+1)$ với $n \in \mathbb{N}^*$ là các số nguyên. Ta chứng minh $B(n+2)$ cũng là số nguyên. Thật vậy, dễ dàng có đẳng thức $B(n+2) = B(n+1)B(1) - B(n)$, suy ra điều cần chứng minh. Như vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $B(n)$ là số nguyên.

2) *Phương pháp phản tử cực biên.* Giả sử có một số giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ nào đó mà $B(n)$ không là số nguyên. Ta chọn n là số tự nhiên nhỏ nhất mà $B(n)$ không phải là số nguyên. n không thể là 1 và 2, vì theo giả thiết và tính toán đơn giản như ở phương pháp quy nạp. Vậy $n-2 > 0$. Dễ dàng kiểm tra được $B(n) = B(n-1)B(1) - B(n-2)$, mà $n-1 < n$ và $n-2 < n$ nên $B(n-1)$ và $B(n-2)$ là những số nguyên, suy ra $B(n)$ cũng là số nguyên. Điều này trái với cách chọn n là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $B(n)$ là số nguyên. Điều vô lý này cũng chỉ ra không thể có số tự nhiên n nào mà $B(n)$ không là số nguyên. ☺

Bài toán 1.19. Chứng minh rằng $S(n) = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải. 1) *Phương pháp quy nạp toán học.*

Bước cơ sở: Với $n = 0$, ta có $S(0) = 0$ chia hết 27, mệnh đề đúng.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \in \mathbb{N}$ nghĩa là $S(k) : 27$.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh $S(k + 1) \vdots 27$. Ta có

$$\begin{aligned} S(k + 1) &= 10^{k+1} + 18(k + 1) - 1 \\ &= 10 \cdot 10^k + 18k + 18 - 1 \\ &= 10(10^k + 18k - 1) - 27(6k - 1). \end{aligned}$$

Do $S(k) = 10^k + 18k - 1 \vdots 27$ (theo giả thiết quy nạp), nên $S(k + 1) \vdots 27$, ta có điều phải chứng minh.

2) *Phương pháp phần tử cực biên.* Giả sử có một số số tự nhiên n mà $S(n)$ không chia hết cho 27. Ta chọn n nhỏ nhất trong các số đó (điều này thực hiện được theo nguyên lý thứ tự). Số n không thể là 0, khi đó $S(n - 1)$ chia hết cho 27. Nhưng ta có

$$\begin{aligned} S(n) &= 10^n + 18n - 1 = 10 \cdot 10^{n-1} + 18(n - 1) + 18 - 1 \\ &= 10(10^{n-1} + 18(n - 1) - 1) - 27(6n - 7). \end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên suy ra $S(n)$ chia hết cho 27, điều này vô lý với cách chọn n . Như vậy mệnh đề khẳng định đúng. ☺

1.4. CHUYÊN ĐỀ TẬP HỢP SẮP THỨ TỰ ĐẦY ĐỦ

Chuyên đề này nghiên cứu các tập sắp thứ tự theo một cách nào đó. Cho một tập hợp các đối tượng (không nhất thiết phải là các số nguyên), ta định nghĩa một thứ tự theo quan hệ giữa các đối tượng trong tập hợp, thứ tự đưa vào có những tính chất có ích để giải toán (như thứ tự trong các số nguyên). Nhờ các định nghĩa thứ tự này mà ta có thể giải các bài toán đặt ra với các đối tượng trong tập hợp.

1.4.1. Thứ tự của một tập hợp bất kì

Phần đầu của chương này ta xét nguyên lý thứ tự và nguyên lý quy nạp cho tập số tự nhiên. Câu hỏi đặt ra là: Cho một tập bất kì những đối tượng, có cách nào đó ta sắp xếp các đối tượng theo một thứ tự quy định được không? Như vậy giữa hai phần tử của một tập hợp phải xác định quan hệ như kiểu "lớn hơn" hoặc "nhỏ hơn". Trong lý thuyết tập hợp người ta đã nghiên cứu kĩ vấn đề này. Ta nhắc lại những định nghĩa cơ bản ở đây.

Định nghĩa 1.1. Một quan hệ hai ngôi trong tập hợp $\mathcal{X}$ là một tập hợp con $\mathcal{R} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Đáng lẽ viết $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ người ta thường viết $x_1 \mathcal{R} x_2$.

Định nghĩa 1.2. Một quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên tập hợp $\mathcal{X}$ được gọi là quan hệ tương đương, nếu nó có các tính chất sau:

- $x \mathcal{R} x$ với mọi $x \in \mathcal{X}$ (tính phản xạ);
- Từ $x \mathcal{R} y$ suy ra $y \mathcal{R} x$ với mọi $x, y \in \mathcal{X}$ (tính đối xứng);
- Từ $x \mathcal{R} y$ và $y \mathcal{R} z$ suy ra $x \mathcal{R} z$ với mọi $x, y, z \in \mathcal{X}$ (tính bắc cầu).

Ta có định lý rất hay dùng sau đây.

Định lý 1.5. (a) Nếu một tập hợp $\mathcal{X}$ là hợp của những tập hợp con không giao nhau, thì quan hệ "thuộc vào một tập hợp con" là một quan hệ tương đương.

(b) Mỗi quan hệ tương đương trên $\mathcal{X}$ chia $\mathcal{X}$ thành những tập hợp con không giao nhau.

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh (b), vì (a) chứng minh được từ định nghĩa quan hệ tương đương. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{X}$. Với mỗi phần tử $x \in \mathcal{X}$ ta xét lớp tương đương của nó, nghĩa là tập hợp tất cả $y \in \mathcal{X}$ sao cho $x \mathcal{R} y$.

Ta sẽ chứng minh rằng với hai phần tử khác nhau x_1, x_2 thì hai lớp tương đương tương ứng của chúng hoặc là không giao nhau hoặc là trùng nhau. Giả sử hai lớp đó giao nhau, khi đó chúng có phần tử chung z . Từ $x_1 \mathcal{R} z$ và $x_2 \mathcal{R} z$ suy ra $z \mathcal{R} x_2$ (tính đối xứng) và $x_1 \mathcal{R} x_2$ (tính bắc cầu), cũng tương tự cho $x_2 \mathcal{R} x_1$ (tính đối xứng). Vì thế từ $x_1 \mathcal{R} v$ suy ra $x_2 \mathcal{R} v$ với mọi v (tính bắc cầu) và ngược lại, nên hai lớp tương đương chứa x_1 và x_2 trùng nhau.

Theo tính chất phản xạ mỗi phần tử $x \in \mathcal{X}$ nằm trong lớp tương đương với x , do đó tập hợp $\mathcal{X}$ được chia thành những tập hợp con (lớp) không giao nhau. ☺

Tập hợp những lớp tương đương được gọi là *tập hợp thương* của $\mathcal{X}$ theo quan hệ tương đương $\mathcal{R}$.

Định nghĩa 1.3. Một quan hệ hai ngôi (ký hiệu là $\leq$) của tập hợp $\mathcal{X}$ gọi là *quan hệ thứ tự từng phần*, nếu nó có những tính chất:

- $x \leq x$ với mọi $x \in \mathcal{X}$ (tính phản xạ);
- $x \leq y$ và $y \leq x$ suy ra $x = y$ với mọi $x, y \in \mathcal{X}$ (tính phản đối xứng);
- $x \leq y$ và $y \leq z$ suy ra $x \leq z$ với mọi $x, y, z \in \mathcal{X}$ (tính bắc cầu).

Chú ý: Do truyền thống ta ký hiệu quan hệ thứ tự từng phần là $\leq$, ta có thể dùng bất cứ một ký hiệu nào khác đều được.

Định nghĩa 1.4. Một tập hợp với quan hệ thứ tự từng phần gọi là *tập hợp sắp thứ tự từng phần*.

Định nghĩa 1.5. Ta nói rằng hai phần tử x, y của một tập hợp sắp thứ tự từng phần là *so sánh được*, nếu $x \leq y$ hoặc là $y \leq x$.

Định nghĩa 1.6. Nếu hai phần tử bất kì của tập hợp sắp thứ tự từng

phần đều so sánh được, thì tập hợp đó gọi là *tập hợp sắp thứ tự toàn phần*.

Ta chỉ ra một số ví dụ về tập hợp sắp thứ tự từng phần:

1. Tập hợp số thực với quan hệ thứ tự bình thường (chú ý đây là tập hợp sắp thứ tự toàn phần).

2. Trên tập hợp $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, với tất cả các cặp số thực có thể đưa vào thứ tự từng phần: $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ nếu $x_1 \leq y_1$ và $x_2 \leq y_2$. Tập hợp với thứ tự này không sắp thứ tự toàn phần, vì $(0, 1)$ và $(1, 0)$ không so sánh được theo thứ tự đưa vào.

3. Trên tập hợp tất cả các hàm với đối số thực và có giá trị thực, ta có thể đưa vào quan hệ thứ tự: $f \leq g$, nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tập hợp này không sắp thứ tự toàn phần.

4. Trên tập hợp tất cả những số nguyên dương có thể đưa vào quan hệ thứ tự: $x \leq y$ nếu x chia hết cho y . Tập hợp này không sắp thứ tự toàn phần.

5. Cho U là tập hợp bất kì. Khi đó tập hợp $P(U)$ gồm tất cả những tập hợp con của U , với quan hệ "bao hàm" $\subset$, là một tập hợp sắp thứ tự từng phần.

6. Bảng chữ cái tiếng Việt sắp xếp theo truyền thống từ điển: $a \leq b \leq \dots \leq y$. Quan hệ sắp xếp này cũng là sắp thứ tự từng phần. Với thứ tự này tập hợp các từ tiếng Việt là sắp thứ tự toàn phần.

7. Tập hợp các từ tiếng Việt sắp xếp theo thứ tự từ điển lần lượt theo thứ tự chữ cái của một từ. Ví dụ từ *Ang* xếp trước từ *Anh*. Nó là tập hợp sắp thứ tự toàn phần.

Trong thực tế rất nhiều ví dụ cho tập hợp với thứ tự từng phần bằng một cách định nghĩa thích hợp nào đó.

Cho x, y là hai phần tử của tập hợp sắp thứ tự từng phần $\mathcal{X}$. Ta định nghĩa quan hệ $x < y$ nếu $x \leq y$ và $x \neq y$. Quan hệ này có tính chất sau:

- (a) $x \not< x$: Không có phần tử nhỏ hơn chính nó.
- (b) $x < y$ và $y < z$ suy ra $x < z$.

Thật vậy, nếu $x < y$ và $y < z$, thì $x \leq y, x \neq y$ và $y \leq z, y \neq z$, do đó $x \leq z$ (theo tính bắc cầu); nếu $x = z$, thì ta có $x \leq y \leq x$ và suy ra $x = y$ (theo tính phản đối xứng) điều này trái với giả thiết $x \neq y$.

Định nghĩa 1.7. Phần tử của một tập hợp sắp thứ tự từng phần gọi là *lớn nhất* nếu nó lớn hơn mọi phần tử bất kì khác trong tập hợp này.

Tương tự ta cũng định nghĩa phần tử nhỏ nhất cho tập hợp sắp thứ tự từng phần. Từ những định nghĩa sắp thứ tự của một tập hợp, ta có thể áp dụng giải những bài toán tương đối khó.

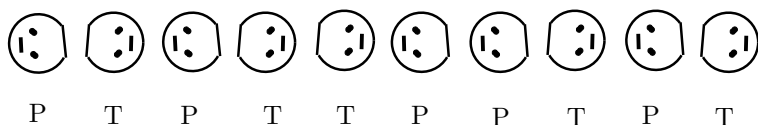
Bài toán 1.20. Mười người lính tân binh đứng theo hàng ngang quay mặt ra phía trước hàng (Hình 1.3).



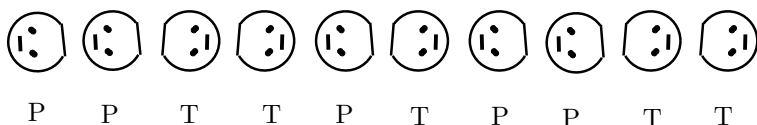
Hình 1.3

Một sĩ quan chỉ huy ra lệnh "bên trái quay". Những người tân binh mới này một số quay bên phải, một số quay bên trái (Hình 1.4).

Sau đó mỗi phút khi hai người lính đối diện với nhau nghĩ là mình lầm và đều quay về phía sau (Hình 1.5).



Hình 1.4



Hình 1.5

Những người lính này nếu đối diện với người lính khác thì họ lại thực hiện đăng sau quay và cứ tiếp tục như vậy. Chứng minh rằng sớm hay muộn trong hàng không còn ai phải thực hiện đăng sau quay nữa và hàng được xếp theo thứ tự mong muốn.

Lời giải. Ta đánh dấu vị trí của các người lính bằng những chữ cái liên tiếp P (mặt quay bên phải) và T (mặt quay bên trái). Như vậy vị trí của hàng được sắp xếp như

P T P T T P P T P T

Sau một phút thì các vị trí lại có cấu hình

P P T T P T P P T T

Sau hai phút thì các vị trí lại có cấu hình

P P T P T P T P T T

và tiếp tục...

Số cặp T P sau mỗi bước thay đổi thế nào ? Theo giả thiết của bài

toán những người đối mặt với nhau phải thực hiện đằng sau quay (trong trường hợp này chúng ta ký hiệu bằng $\underline{T P}$, nghĩa là người có mặt quay bên phải và người có mặt quay bên trái. Vậy sau phép quay những chữ cái $\underline{T P}$ đổi thành $P T$). Mỗi bước có một số sự đổi chỗ ký tự, mà số lượng đổi chỗ bằng số nhóm $\underline{T P}$.

Bây giờ ta quan sát đơn giản sau đây: "Ta coi những ký tự được ký hiệu cả hàng lính là *một từ*. Khi đó với những thay đổi các cặp ký tự như trên thì từ này giảm theo cách sắp xếp thứ tự chữ cái của tiếng Việt". Thật vậy, nhóm bên trái nhất $\underline{T P}$ đổi thành $P T$, chữ cái P đứng trước chữ cái T trong thứ tự chữ cái (những thay đổi của các nhóm khác không ảnh hưởng đến thứ tự). Vì thế, sau mỗi lần đổi nhóm $\underline{T P}$ càng ngày càng nhỏ và sớm hay muộn quá trình này cũng đến lúc dừng, bởi vì tồn tại hữu hạn độ dài của từ đã cho ($n = 10$) các chữ cái T và P (nhiều nhất có 2^{10} thay đổi).

Vậy bài toán đã được giải.



Trong khi giải bài toán trên ta đã dùng tính chất: Không tồn tại một dãy giảm đến vô cùng (theo thứ tự của bảng chữ cái) từ một từ có n chữ cái T và P . Một cách tổng quát hơn, nếu sau mỗi bước ta giảm phân tử của tập hợp thứ tự tuyến tính, thì sớm hay muộn quá trình giảm này cũng phải dừng.

1.4.2. Tập hợp sắp thứ tự đầy đủ và ứng dụng

Tương tự nguyên lý quy nạp trong tập số nguyên, trong các tập hợp sắp thứ tự cũng có khẳng định sau:

Định lý 1.6. Trong một tập hợp sắp thứ tự từng phần $\mathcal{X}$, ba tính chất sau đây tương đương:

(a) Mọi tập con khác rỗng của $\mathcal{X}$ có phần tử nhỏ nhất;

- (b) Không tồn tại dãy vô hạn giảm thực sự $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ những phần tử của tập $\mathcal{X}$;
- (c) Với tập hợp $\mathcal{X}$, nguyên lý quy nạp đúng dưới dạng sau đây : Cho mệnh đề $A(x)$ có nghĩa đối với mọi $x \in \mathcal{X}$. Nếu (với mọi $x \in \mathcal{X}$) từ $A(y)$ đúng với mọi $y < x$ suy ra $A(x)$ cũng đúng, thì tính chất $A(x)$ đúng với mọi $x \in \mathcal{X}$.

Chứng minh. 1. Ta chứng minh hai tính chất đầu tương đương:

Giả sử (a) đúng, nếu $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ là dãy giảm vô hạn, thì hiển nhiên tập hợp dãy này không có phần tử nhỏ nhất (vì mỗi phần tử có phần tử sau nhỏ hơn), điều này mâu thuẫn với (a). Vì thế từ (a) suy ra (b).

Ngược lại, nếu một tập hợp con khác rỗng $\mathcal{B}$ nào đó không có phần tử nhỏ nhất, thì dãy vô hạn giảm có thể xây dựng được như sau: Lấy một phần tử bất kì $b_0 \in \mathcal{B}$. Theo giả thiết tập này không có phần tử nhỏ nhất nên có thể tìm được $b_1 \in \mathcal{B}$ sao cho $b_0 > b_1$. Cũng như vậy ta có thể tìm được $b_2 \in \mathcal{B}$ sao cho $b_1 > b_2$ và ... Ta nhận được dãy giảm vô hạn, điều này vô lý vì ta đã có giả thiết (b).

2. Ta chứng minh (a) và (c) tương đương:

Ta giả sử (a) đúng, nghĩa là mọi tập con của $\mathcal{X}$ đều có phần tử nhỏ nhất, ta sẽ chứng minh có nguyên lý quy nạp (c). Giả sử $A(x)$ không đúng với tất cả phần tử $x \in \mathcal{X}$. Ta xét tập hợp khác rỗng $\mathcal{B}$ những phần tử $x \in \mathcal{X}$ mà $A(x)$ không đúng. Giả sử x là phần tử nhỏ nhất của $\mathcal{B}$ (ta tìm được x vì (a) đúng). Theo giả thiết những phần tử nhỏ hơn trong $\mathcal{B}$ không có nữa, vì thế mọi $y < x$ tính chất $A(y)$ đúng suy ra $A(x)$ cũng đúng, điều này vô lý với cách chọn x .

Ngược lại, giả sử (c) đúng, ta phải chứng minh rằng mọi tập con khác rỗng của $\mathcal{X}$ đều có phần tử nhỏ nhất. Tức là ta phải chứng

minh nếu $\mathcal{B}$ là một tập con không có phần tử nhỏ nhất, thì $\mathcal{B} = \emptyset$. Nói cách khác, cần chứng minh $A(x)$ đúng với mọi $x \notin \mathcal{B}$. Thật vậy, Giả sử $\mathcal{B}$ không có phần tử nhỏ nhất. Ký hiệu $\overline{\mathcal{B}}$ là phần bù của $\mathcal{B}$. Giả sử $x \in \mathcal{X}$ và $A(y)$ đúng với mọi $y < x$, mà mọi y đều thuộc $\overline{\mathcal{B}}$. Nếu x nằm trong $\mathcal{B}$, thì nó là phần tử nhỏ nhất, điều này vô lý. Suy ra $x \in \overline{\mathcal{B}}$, theo (c), $A(x)$ đúng với mọi $x \in \overline{\mathcal{B}}$. Đó là điều ta cần chứng minh. ☺

Định nghĩa 1.8. Tập hợp sắp thứ tự toàn phần $\mathcal{A}$ được gọi là *tập hợp sắp thứ tự đầy đủ* nếu không tồn tại dãy giảm vô hạn

$$x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

ở đây $x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathcal{A}$.

Ví dụ về tập hợp sắp thứ tự đầy đủ là:

1. Tập hợp tất cả các số tự nhiên với thứ tự bình thường.
2. Trong tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ các cặp số tự nhiên, ta đưa vào định nghĩa sắp thứ tự như sau: Cặp số (a_1, a_2) nhỏ hơn cặp số (b_1, b_2) , ký hiệu là $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$, nếu $a_2 < b_2$; trường hợp $a_2 = b_2$ thì $a_1 < b_1$ (thứ tự lớn hơn thì ngược lại). Với cách sắp thứ tự này thì tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ là tập hợp sắp thứ tự đầy đủ. Thật vậy, ta kiểm tra (b) theo mệnh đề tương đương: Mỗi dãy $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots$ những phần tử của tập hợp sớm hay muộn rồi cũng dừng (tất cả các phần tử đến một lúc nào đó trở đi đều bằng nhau). Mệnh đề này tương đương với (b).

Giả sử cho dãy cặp số bất kì

$$(x_0, y_0) \geq (x_1, y_1) \geq (x_2, y_2) \geq \dots$$

Theo định nghĩa về thứ tự trong $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ như đã nói thì $y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots$ và vì thế dãy số tự nhiên y_i từ một chỗ nào đó trở đi sẽ không đổi. Sau đó x_i phải giảm và đến một lúc nào đó nó cũng dừng lại. Ta có thể chứng minh khẳng định tổng quát hơn.

Định lý 1.7. Nếu $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai tập hợp sắp thứ tự đầy đủ, thì tích của chúng $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, trong đó xác định thứ tự

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow [(b_1 < b_2) \text{ hoặc } (b_1 = b_2 \text{ và } a_1 \leq a_2)],$$

cũng là một tập hợp sắp thứ tự đầy đủ.

Chú ý: Hoàn toàn tương tự tích hữu hạn k tập hợp sắp thứ tự đầy đủ cũng là tập hợp sắp thứ tự đầy đủ.

Sử dụng những định lý trên để giải những bài toán có giả thiết thao tác lặp lại như một quá trình (giống như phương pháp xuống thang ở chương 4 phần sau). Bài toán với giả thiết như một quá trình lặp vô hạn lần. Nhưng thực chất quá trình đó không thể lặp lại vô hạn lần. Ta có thể tiến hành như sau: Đưa vào một thông số tự nhiên nào đó và khẳng định rằng tại mỗi bước của quy trình thông số này giảm. Khi đó nếu xuất phát của thông số này là N , thì có thể đảm bảo được quy trình kết thúc sau N bước.

Bài toán 1.21. Hai người A và B chơi một trò chơi như sau: Người A có trong tay số tiền được sắp thành từng loại. Mỗi lần chơi người A đưa cho người B một đồng tiền với điều kiện A được nhận lại một số loại đồng tiền, nhưng tổng số tiền nhận lại này có giá trị nhỏ hơn giá trị đồng tiền đã đưa. Khi những đồng tiền lớn của A không còn nữa, thì A thua cuộc. Chứng minh rằng sớm hay muộn thì B cũng thắng dù bất cứ bộ các loại tiền của A có là như thế nào.

Lời giải. Giả sử A có k loại đồng tiền. Thông số cần xác định như sau: Tính tổng có bao nhiêu đồng tiền mỗi loại ở người A (n_1 là số đồng tiền có giá trị nhỏ nhất, n_2 là số đồng tiền có giá trị tiếp theo, ..., n_k là số đồng tiền có giá trị lớn nhất). Ta chú ý rằng kết quả mỗi lần chơi bộ số $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ giảm (theo nghĩa đưa vào thứ tự, khi ta

so sánh bắt đầu từ phần tử cuối cùng, sau đó là phần tử trước sau cùng, ...). Vì tập hợp $\mathbb{N}^k$ là tập sắp thứ tự đầy đủ, nên quá trình này phải kết thúc. ☺

Bài toán 1.22. Trên bảng ta viết dãy gồm các số 0 và 1 tùy ý. Từ dãy số này cho phép thực hiện: Thay tại vị trí nhóm 10 bằng nhóm 000...0001 (với bao nhiêu số 0 cũng được và một số 1). Chứng minh rằng cách thực hiện trên có thể thực hiện chỉ một số hữu hạn lần (nghĩa là sớm hay muộn thì ta cũng nhận được dãy số mà trong đó các số 1 đều ở bên phải và ta không thể thực hiện được nữa).

Lời giải. Ta giả thiết rằng trong dãy có hai số 1. Vì những số 1 không xuất hiện thêm và cũng không biến mất trong quá trình biến đổi, nên khi xét từ phải sang trái ta ghi nhận vị trí thứ mấy của các số 1 này và ta lập ra cặp hai số tự nhiên (số thứ hai của cặp số được ghi nhận là vị trí của số 1 đầu tiên từ phải qua trái).

Ví dụ: Nếu dãy ban đầu là 01010, thì lập được cặp số (4, 2) (tức là số 1 ở vị trí thứ tư và số 1 ở vị trí thứ hai tính từ bên phải), còn dãy số 0100000001 là kết quả thay nhóm 10 ở cuối bằng nhóm 0000001. Khi đó ta lập được cặp số (9, 1) (tức là số 1 đứng ở vị trí thứ chín và số 1 đứng ở vị trí thứ nhất tính từ bên phải).

Để giải bài toán chỉ còn chứng minh hai điều:

(a) Với mỗi lần biến đổi cặp số xác định như ở trên sẽ nhỏ đi (ở đây $(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2$ hoặc $y_1 = y_2$ và $x_1 < x_2$).

(b) Tập hợp những cặp số tự nhiên với cách sắp thứ tự như trên là tập hợp sắp thứ tự đầy đủ.

Điều này chứng minh không khó. Nếu sự biến đổi vị trí số 1 bên phải (như ví dụ đã chỉ ra ở trên), thì số 1 này tiến dần đến đầu bên phải dù có chọn bao nhiêu số 0 đi chăng nữa. Như vậy, số thứ hai

của cặp số giảm một đơn vị, còn số thứ nhất của cặp số có thể tăng (tăng bao nhiêu đơn vị phụ thuộc vào ta cho thêm bao nhiêu số 0 vào). Nhưng theo định nghĩa thứ tự của cặp số (ta so sánh số thứ hai rồi mới so sánh số thứ nhất) sự tăng của số thứ nhất trong mỗi cặp không ảnh hưởng gì đến thứ tự. Suy ra giảm số thứ hai dẫn đến giảm thứ tự của cặp số.

Nếu ta thực hiện biến đổi với số 1 bên trái, thì số 1 bên phải không thay đổi vị trí và vì thế số hạng thứ hai của cặp không thay đổi, còn số hạng thứ nhất giảm đi. Khi đó số 1 bên trái dịch về bên phải.

Như vậy, khẳng định (a) được chứng minh. Bây giờ ta chứng minh tập hợp các cặp số là tập hợp sắp thứ tự đầy đủ, nghĩa là không tồn tại dãy vô hạn

$$(a_1, b_1) > (a_2, b_2) > (a_3, b_3) > \dots$$

Giả sử dãy như vậy tồn tại. Khi đó những số hạng thứ hai của cặp số tạo thành một dãy không tăng

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

Trong dãy không tăng những số tự nhiên có phần tử nhỏ nhất. Nghĩa là đến một chỗ nào đó, chẳng hạn N , số hạng thứ hai của các cặp số đều bằng nhau:

$$b_N = b_{N+1} = b_{N+2} = \dots$$

Khi đó thứ tự của các cặp số hoàn toàn xác định theo số hạng thứ nhất và vì thế từ đó trở đi số thứ nhất phải giảm. Dãy các số tự nhiên thứ nhất giảm cũng có phần tử nhỏ nhất và đến một bước nào đó trở đi các số này đều bằng nhau.

Từ đó suy ra không tồn tại dãy các cặp số giảm vô hạn. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Nhiều bài toán giải bằng áp dụng nguyên lý thứ tự có thể tìm thấy trong [18] của tác giả, chương 1, ở mục: *Các bài toán đơn điều bất biến*. Bạn đọc có thể kiểm tra và dùng phương pháp này để giải những bài toán đó.

Vấn đề tập hợp sắp thứ tự đầy đủ có liên quan đến siêu quy nạp và siêu hồi quy trong lý thuyết tập hợp. Nội dung của các vấn đề này quá dài và cũng không nói hết được trong chủ đề này, chúng tôi dừng vấn đề này ở đây và hẹn một cuốn sách khác sẽ nói cụ thể hơn.

1.5. BÀI TẬP

▷ **1.23.** Dùng nguyên lý quy nạp toán học như định lý 1.2 để chứng minh những khẳng định sau:

(a) $7^n + 3n - 1 \vdots 9$ với $n \in \mathbb{N}$;

(b) $3^{2n+2} + 8n - 9 \vdots 16$ với $n \in \mathbb{N}$.

▷ **1.24.** Chứng minh bằng hai cách những khẳng định sau:

(a) $4^n + 15n - 1 \vdots 9$ với $n \in \mathbb{N}$;

(b) $5^n(5^n + 1) - 6^n(2^n + 3^n) \vdots 91$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ **1.25.** Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo mệnh đề các khẳng định sau:

(a) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}} < 3$ với số nguyên dương n bất kì.

(b) $\sqrt{1\sqrt{2\cdots\sqrt{n}}} < 3$ với số nguyên dương n bất kì.

▷ **1.26.** Nếu k (với $k > 1$) không phải là số chính phương thì $\sqrt{k}$ là một số vô tỉ.

► 1.27. Cho $\mathcal{M}$ là tập khác rỗng những số nguyên dương sao cho $4x$ và $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ đều nằm trong $\mathcal{M}$ khi mà x cũng nằm trong tập này. Chứng minh rằng $\mathcal{M}$ là tập số tự nhiên.

► 1.28. Một tập những số nguyên khác rỗng $\mathcal{I}$ mà thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

- (i) Nếu n và m thuộc $\mathcal{I}$, thì $n+m$ và $n-m$ cũng nằm trong $\mathcal{I}$;
- (ii) Nếu n thuộc $\mathcal{I}$ và r là một số nguyên thì rn cũng nằm trong $\mathcal{I}$.

được gọi là *ideal nguyên*.

Đặt $\mathcal{F}_m$ là tập hợp tất cả số nguyên mà chúng là bội nguyên của số nguyên cố định m . Chứng minh rằng $\mathcal{F}_m$ là một ideal nguyên.

► 1.29. Cho $\mathcal{S}$ là tập khác rỗng những số nguyên sao cho:

- (i) Nếu x và y thuộc $\mathcal{S}$, thì $x-y$ cũng thuộc $\mathcal{S}$;
 - (ii) Nếu x thuộc $\mathcal{S}$, thì tất cả các bội của x cũng thuộc $\mathcal{S}$.
- (a) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên d thuộc $\mathcal{S}$ sao cho $\mathcal{S}$ gồm tất cả bội số của d .
- (b) Chứng minh rằng d là $UCLN(a, b)$.

CHƯƠNG 2

KỸ THUẬT DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG CỰC BIÊN

2.1. Phương pháp phản chứng và đại lượng cực biên	44
2.2. Tính toán với đại lượng cực biên	53
2.3. Sắp xếp phần tử theo thứ tự	60
2.4. Chuyên đề phương pháp xuống thang	66
2.4.1. Lịch sử của phương pháp	66
2.4.2. Phương pháp xuống thang trong số học	68
2.4.3. Phương pháp xuống thang trong hình học	72
2.5. Bài tập	75

Chương trước ta đã sử dụng nguyên lý thứ tự và nguyên lý quy nạp toán học để giải toán. Chương này ta điểm lại các kỹ thuật sử dụng đại lượng cực biên làm mấu chốt trong khi giải. Đó là phương pháp phản chứng, phương pháp tính toán với đại lượng cực biên, phương pháp sắp xếp thứ tự các đại lượng đã cho trong bài toán.

2.1. PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG VÀ ĐẠI LƯỢNG CỰC BIÊN

Phương pháp chứng minh bằng phản chứng là lý luận dựa vào mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho và sau đó tìm ra sự mâu thuẫn với giả thiết hoặc các định lý đã biết. Những đại lượng cực biên là mấu chốt của lý luận phản chứng và dẫn tới sự mâu thuẫn. Do đó đại lượng cực biên và phương pháp phản chứng được ứng dụng rất nhiều để giải các bài toán khó. Trong [13] tác giả có bàn đến vấn đề này. Trong tiết này ta xét nhiều bài toán khác nữa.

Bài toán 2.1. *Trên một đường thẳng cho tập điểm $\mathcal{M}$ sao cho mỗi điểm của $\mathcal{M}$ là trung điểm của một đoạn thẳng được nối bởi hai điểm cũng thuộc $\mathcal{M}$. Chứng minh rằng $\mathcal{M}$ có vô hạn điểm.*

Lời giải. Ta sử dụng phương pháp đại lượng cực biên bằng cách chọn các phần tử cực biên theo hai cách sau:

1. *Cách thứ nhất:* Giả sử tập hợp $\mathcal{M}$ là hữu hạn, thì trong số những điểm của tập $\mathcal{M}$ có hai điểm cuối về bên trái và cuối về bên phải. Ta xét một trong những điểm cuối này, ví dụ xét điểm A là điểm cuối về phía bên trái. Khi đó điểm A không thể là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm khác thuộc $\mathcal{M}$; nghĩa là A không thuộc $\mathcal{M}$, điều này mâu thuẫn với cách chọn A . Suy ra $\mathcal{M}$ không thể là tập hữu hạn.

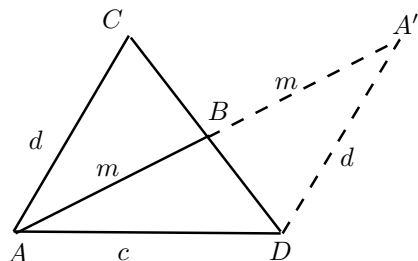
2. *Cách thứ hai:* Giả sử tập $\mathcal{M}$ là hữu hạn. Ta xét tất cả những đoạn thẳng nối hai điểm thuộc $\mathcal{M}$. Số những đoạn thẳng được nối là hữu hạn, nên ta có thể chọn được đoạn thẳng BC có độ dài lớn nhất. Rõ ràng phía ngoài đoạn thẳng BC không có điểm nào thuộc $\mathcal{M}$, nếu ngược lại thì tồn tại một đoạn thẳng lớn hơn đoạn thẳng đã chọn BC . Như vậy tất cả các điểm của tập $\mathcal{M}$ nằm trong đoạn BC ,

điều này có nghĩa là B và C không thỏa mãn điều kiện của những điểm thuộc $\mathcal{M}$. Điều vô lý này chỉ ra rằng tập $\mathcal{M}$ không thể là tập hữu hạn. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Có thể áp dụng ý tưởng trên cho bài toán trong mặt phẳng.

Bài toán 2.2. Trên mặt phẳng cho tập điểm $\mathcal{M}$ sao cho mỗi điểm của $\mathcal{M}$ đều là trung điểm của một đoạn thẳng nối hai điểm nào đó cũng thuộc $\mathcal{M}$. Chứng minh rằng $\mathcal{M}$ có vô hạn điểm.

Lời giải. Tương tự như bài trước ta có thể chứng minh bằng hai cách. Nhưng ở đây ta chỉ thể hiện cách thứ hai và cũng có đôi chút khác biệt. Giả sử $\mathcal{M}$ là tập hữu hạn điểm. Khi đó những đoạn thẳng nối hai điểm



Hình 2.1

bất kì thuộc $\mathcal{M}$ là hữu hạn. Vậy ta có thể chọn được đoạn thẳng có độ dài lớn nhất. Giả sử đoạn thẳng có độ dài lớn nhất đó được nối bởi hai điểm A và B thuộc $\mathcal{M}$. Nhưng điểm B là trung điểm của đoạn thẳng CD nào đó mà C và D đều thuộc $\mathcal{M}$ (Hình 2.1).

Khi đó dễ chứng minh được rằng hoặc là AD hoặc là AC lớn hơn AB (như gợi ý của hình vẽ ta chứng minh được trong một tam giác thì đường trung tuyến m nhỏ hơn trung bình cộng hai cạnh kề nó là c và d). Điều này mâu thuẫn với cách chọn đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất. Suy ra $\mathcal{M}$ là tập vô hạn điểm. ☺

Bài toán 2.3. Trên mỗi ô của bàn cờ có vô hạn ô người ta viết một số nguyên dương sao cho mỗi số này là trung bình cộng của các số ở bốn

ô bên cạnh: phía trên, phía dưới, bên phải và bên trái. Chứng minh rằng tất cả các số được viết trên bàn cờ đều bằng nhau.

Lời giải. Theo nguyên lý thứ tự thì mọi tập con khác rỗng của tập số tự nhiên đều có số nhỏ nhất, nên trong các số được viết trên bàn cờ có một số nhỏ nhất m . Nếu các số a, b, c, d là những số ở các ô bên cạnh ô số m thì $m = \frac{a+b+c+d}{4}$, nghĩa là $a+b+c+d = 4m$.

Mặt khác, vì m là số nhỏ nhất nên $a \geq m, b \geq m, c \geq m, d \geq m$. Giả sử ít nhất có một trong các số a, b, c, d thật sự lớn hơn m . Khi đó $a+b+c+d > 4m$, điều này trái với đẳng thức trên. Như vậy $a = b = c = d = m$.

Như vậy nếu một ô người ta viết số m , thì những ô bên cạnh nó cũng được viết số m . Từ đó suy ra các ô nằm trên hàng ngang chứa ô viết số m , đều viết số m . Nhưng mọi cột đều giao với hàng ngang này nên tất cả các ô trên các cột đều viết số m . Do đó suy ra tất cả các ô trên bàn cờ đều viết số m . ☺

Bài toán 2.4. Trên một bàn cờ vuông cỡ $n \times n$ ô vuông, người ta đặt những quân cờ theo nguyên tắc sau: Nếu một ô nào đó còn trống, thì tổng những quân cờ, đứng cùng hàng và đứng cùng cột với ô đó không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng trên bàn cờ đó có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ quân cờ.

Lời giải. Trên bàn cờ gồm n hàng và n cột. Ta chọn hàng hoặc cột có số quân cờ ít nhất. Giả sử ta chọn là hàng (trong trường hợp ngược lại thì ta xoay bàn cờ 90° sẽ thành hàng).

Số quân cờ trong hàng này ta ký hiệu là k . Nếu $k \geq \frac{n}{2}$, thì trên mỗi hàng trong số n hàng số quân cờ đều không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$, như

vậy thì trên bàn cờ sẽ có số quân cờ không nhỏ hơn $\frac{n^2}{2}$.

Giả sử $k < \frac{n}{2}$. Trên hàng này ta xét $n - k$ ô còn trống và những cột của bàn cờ đi qua các ô trống này, thì những cột này (theo điều kiện của bài ra) có số quân cờ không nhỏ hơn $n - k$ quân cờ, do đó tất cả những cột của bàn cờ như vậy có số quân cờ không nhỏ hơn $(n - k)^2$. Còn lại k cột, mỗi cột chứa không nhỏ hơn k quân cờ (vì theo cách chọn k). Từ đó suy ra trên bàn cờ có không ít hơn $(n - k)^2 + k^2$ quân cờ. Ta chỉ còn chứng minh $(n - k)^2 + k^2 \geq \frac{n^2}{2}$. Điều này có thể chứng minh bằng nhiều cách, chẳng hạn

$$\begin{aligned} [(n - k)^2 + k^2] - \frac{n^2}{2} &= \frac{n^2}{2} - 2nk + 2k^2 \\ &= 2 \left(\frac{n^2}{4} - nk + k^2 \right) = 2 \left(\frac{n}{2} - k \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nếu n là số chẵn, thì có thể tìm được điều kiện thỏa mãn cách đặt chứa đúng $\frac{n^2}{2}$ quân cờ trên bàn cờ bằng cách đặt những quân cờ trên mọi ô đen (hoặc là trên mọi ô trắng).

Nếu n là số lẻ, thì không thể đặt $\frac{n^2}{2}$ quân cờ theo điều kiện bài toán được, vì $\frac{n^2}{2}$ không phải là nguyên, nhưng với $\frac{n^2 + 1}{2}$ quân cờ thì ta có thể đặt được như sau: Một quân cờ ta đặt vào ô ở góc bàn cờ, số các quân cờ còn lại đặt ở các ô cùng màu với ô ở góc đã đặt.



Bài toán 2.5. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên khác 0:

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 0.$$

Lời giải. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên khác 0.

Không mất tính tổng quát, ta có thể chọn được nghiệm nguyên (x_0, y_0, z_0) sao cho $x_0 \neq 0$ và $|x_0|$ có giá trị nhỏ nhất trong những giá trị tuyệt đối của chúng (ta chọn được do nguyên lý thứ tự).

Ta có $x_0^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 = 0$ suy ra x_0^3 chia hết cho 3, vậy x_0 cũng chia hết cho 3. Đặt $x_0 = 3x_1$ ($x_1 \in \mathbb{Z}$).

Ta được $3^3x_1^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 = 0$, nghĩa là $3^2x_1^3 + y_0^3 + 3z_0^3 = 0$ suy ra y_0^3 chia hết cho 3, vậy y_0 cũng chia hết cho 3. Đặt $y_0 = 3y_1$ ($y_1 \in \mathbb{Z}$).

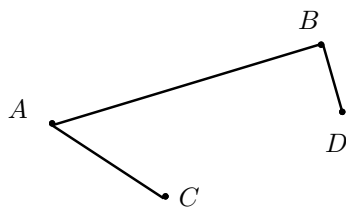
Ta được $9x_1^3 + 3^3y_1^3 + 3z_0^3 = 0$, hay là $3x_1^3 + 9y_1^3 + z_0^3 = 0$ suy ra z_0^3 chia hết cho 3, vậy z_0 cũng chia hết cho 3. Đặt $z_0 = 3z_1$ ($z_1 \in \mathbb{Z}$).

Ta được $x_1^3 + 3y_1^3 + 9z_1^3 = 0$, vậy (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm nguyên của phương trình đã cho. Nhưng $|x_1| = \frac{|x_0|}{3} < |x_0|$. Mâu thuẫn với cách chọn x_0 . Vậy phương trình không có nghiệm nguyên khác 0. ☺

Bài toán 2.6. Trên mặt phẳng cho n điểm, khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong n điểm này với điểm gần nhất trong chúng. Chứng minh rằng với cách nối như vậy không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

Lời giải. Giả sử ngược lại, với cách nối như đầu bài đã cho ta nhận được một đường gấp khúc khép kín. Gọi AB là đoạn lớn nhất trong đường gấp khúc này. Giả sử AC và BD là hai đoạn kề với AB (Hình 2.2).

Ta có



Hình 2.2

- $AC < AB$ nên B không thể là điểm gần nhất của A .
- $BD < AB$ nên A không thể là điểm gần nhất của B .

Điều này chứng tỏ rằng A và B không được nối với nhau. Do đó

mâu thuẫn với giả sử. Như vậy chúng ta chứng tỏ rằng không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín với cách nối bài đã ra. ☺

Bài toán 2.7. Có 2005 vận động viên thi đấu bóng bàn (kết quả chỉ có thể thắng hoặc thua chứ không có hòa) theo thể thức vòng tròn (mỗi đấu thủ đều đấu với tất cả các đấu thủ còn lại). Chứng minh rằng có thể sắp xếp tất cả 2005 vận động viên theo thứ tự sao cho người đứng trước thắng người đứng kế ngay sau đó.

Lời giải. Xét tất cả cách sắp xếp một số vận động viên sao cho người đứng trước thắng người đứng kế ngay sau đó (các cách xếp như vậy tồn tại, ví dụ như ta xếp hai người, người thắng đứng trước người thua đứng sau). Vì cách sắp xếp như vậy là hữu hạn nên tồn tại cách xếp T có nhiều vận động viên nhất. Ta chứng minh rằng cách xếp T có đủ 2005 vận động viên.

Giả sử trái lại, còn vận động viên A không được xếp trong cách xếp T . Giả sử cách xếp T có n người là $A_1, A_2, \dots, A_n$, ($2 \leq n < 2005$) sao cho A_1 thắng A_2 , A_2 thắng A_3 , $\dots$, A_{n-1} thắng A_n . Vì đấu vòng tròn nên A phải đấu với A_1 . Nếu A thắng A_1 thì cách xếp T_1 theo thứ tự $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ có nhiều vận động viên hơn cách xếp T , vô lý vì trái với cách chọn T . Vậy A phải thua A_1 .

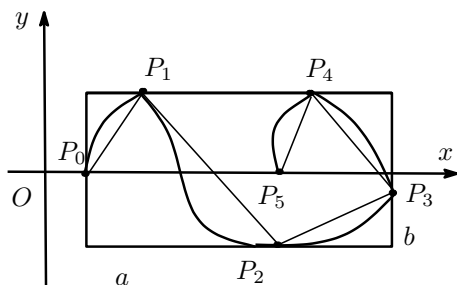
Lập luận tương tự ta suy ra A thua $A_2, A_3, \dots, A_n$. Khi đó cách xếp T_2 theo thứ tự $A_1, A_2, \dots, A_n, A$ có nhiều vận động viên hơn cách xếp T , vô lý vì trái với cách chọn T . Vậy cách xếp T phải có đủ 2005 vận động viên, ta có điều phải chứng minh. ☺

Bài toán 2.8 (Putnam¹ 1969). Chứng minh rằng đường cong liên tục bất kỳ với độ dài bằng 1 có thể phủ được bởi hình chữ nhật có diện

¹Cuộc thi giữa các đội sinh viên năm thứ nhất của các trường đại học Mỹ

tích bằng $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Ta có thể vẽ hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành đi qua hai điểm cuối của đường cong. Khi đó ta lấy hình chữ nhật nhỏ nhất với các cạnh song song với các trục tọa độ vừa dựng và nó phủ được đường



Hình 2.3

cong. Gọi a, b là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật (Hình 2.3). Giả sử P_0 và P_3 là những điểm cuối của đường cong. Giả sử có một số điểm P_1, P_2, P_3, P_4 là những điểm trên đường cong lần lượt nằm trên một trong bốn cạnh của hình chữ nhật. Đường gấp khúc $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ có độ dài lớn nhất bằng 1.

Hình chiếu xuống trục hoành của những đoạn thẳng của đường gấp khúc này cộng vào ít nhất là a , vì đường gấp khúc có những điểm bên cạnh trái và bên cạnh phải của hình chữ nhật. Những hình chiếu xuống trục tung của những đoạn của đường gấp khúc này cộng lại ít nhất là $2b$, vì những điểm cuối nằm trên trục Ox và đường gấp khúc cũng có những điểm ở trên cạnh trên và ở trên cạnh dưới của hình chữ nhật.

Vậy đường gấp khúc có độ dài ít nhất là $\sqrt{a^2 + 4b^2} \leq 1$. Dùng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có $4ab \leq a^2 + 4b^2 \leq 1$ và như vậy diện tích của hình chữ nhật lớn nhất là $\frac{1}{4}$. ☺

Bài toán 2.9. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2y^2 = z^2(z^2 - x^2 - y^2)$$

không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải. Giả sử (x, y, z) là nghiệm nguyên dương của phương trình sao cho $\frac{xy}{z}$ là nhỏ nhất trong số những nghiệm của phương trình. Từ phương trình đã cho ta suy ra $\frac{xy}{z}$ là số nguyên (do xy chia hết cho z), theo nguyên lý thứ tự ta có thể chọn được nghiệm như vậy.

Ta viết x, y, z thành dạng $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, ở đây $d = UCLN(x, y, z)$, $(x_1, y_1, z_1) = 1$. Phương trình đã cho tương đương với $x_1^2y_1^2 = z_1^2(z_1^2 - x_1^2 - y_1^2)$. Đặt $u = (x_1, z_1), v = (y_1, z_1)$, vậy $x_1 = ut$, $y_1 = vw$. Từ x_1y_1 chia hết cho z_1 , ta nhận được $z_1 = uv$. Thay những giá trị này vào phương trình sau cùng ta nhận được

$$(u^2 + w^2)(v^2 + t^2) = 2u^2v^2.$$

Hơn nữa, từ $(x_1, y_1, z_1) = 1$ suy ra $(u, w) = 1, (v, t) = 1$. Do đó

$$u^2 + w^2 = v^2, \quad v^2 + t^2 = 2u^2$$

hoặc là

$$u^2 + w^2 = 2v^2, \quad v^2 + t^2 = u^2.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử phương trình thứ nhất đúng. Dễ thấy v và u là những số nguyên lẻ. Từ phương trình $u^2 + w^2 = v^2$ và nghiệm tổng quát của phương trình Pythagoras suy ra

$$u = m^2 - n^2, w = 2mn, v = m^2 + n^2,$$

ở đây m và n là những số tự nhiên nguyên tố cùng nhau (khác tính chẵn lẻ). Thay giá trị trên vào phương trình $v^2 + t^2 = 2u^2$ cho kết quả $t^2 + (2mn)^2 = (m^2 - n^2)^2$ và như vậy $t = p^2 - q^2, mn = pq$,

$m^2 - n^2 = p^2 + q^2$ với những số tự nhiên p và q nào đó. Do đó

$$p^2 q^2 = m^2 (m^2 - p^2 - q^2),$$

điều này chỉ ra rằng (p, q, m) là nghiệm nguyên dương của phương trình ban đầu. Ta có $\frac{pq}{m} = n < d(p^2 - q^2)2mn = \frac{xy}{z}$, như vậy mâu thuẫn với cách chọn x, y, z . Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương. ☺

Bài toán 2.10. Trong không gian cho n điểm, trong đó không có bốn điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Biết rằng mọi tứ diện, mà đỉnh của nó là bốn điểm nào đó trong các điểm đã cho đều có thể tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tứ diện với thể tích không quá 27 , mà nó chứa tất cả các điểm đã cho.

Lời giải. Ký hiệu $ABCD$ là tứ diện có các đỉnh thuộc các điểm đã cho và có thể tích lớn nhất (điều này có thể chọn được vì số điểm đã cho là hữu hạn, nên số những tứ diện có đỉnh là những điểm đã cho là hữu hạn). Gọi S là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Ta lấy điểm A' trên đường thẳng SA sao cho S nằm giữa A và A' và $3AS = A'S$. Tương tự ta cũng dựng được những điểm B', C' và D' lần lượt nằm trên các đường thẳng SB, SC và SD sao cho $3BS = B'S, 3CS = C'S$ và $3DS = D'S$. Dễ thấy các điểm A', B', C' và D' không nằm trên một mặt phẳng và là những đỉnh của một tứ diện, mà nó nhận được từ tứ diện $ABCD$ bằng phép vị tự tâm S với tỉ số vị tự bằng 3. Suy ra

$$V_{A'B'C'D'} = 27V_{ABCD} \leq 27 \times 1 = 27.$$

Ngoài ra các điểm A, B, C và D lần lượt nằm trong các mặt phẳng $(B'C'D')$, $(A'C'D')$, $(A'B'D')$ và $(A'B'C')$. Vậy chỉ còn chứng minh mọi điểm trong các điểm đã cho đều không nằm ngoài tứ diện $A'B'C'D'$.

Giả sử tồn tại điểm P từ những điểm đã cho mà nằm ngoài tứ diện $A'B'C'D'$. Khi đó đoạn thẳng PS cắt một mặt phẳng nào đó chứa một mặt của tứ diện này. Giả sử PS cắt mặt phẳng $(A'B'C')$. Vì D thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$, thì $V_{ABCD} < V_{ABCP}$ điều này mâu thuẫn với cách chọn tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. ☺

2.2. TÍNH TOÁN VỚI ĐẠI LƯỢNG CỰC BIÊN

Nhiều bài toán chứng minh hoặc tính toán một đại lượng chỉ nhờ có đại lượng cực biên. Những bài toán loại này rất khó và đòi hỏi sáng tạo khi sử dụng đại lượng cực biên.

Bài toán 2.11. Một lớp có 33 học sinh, tổng số tuổi của 33 em đó là 430. Hỏi có thể tìm được trong lớp ra 20 em nào đó có tổng số tuổi lớn hơn 260 hay không?

Lời giải. Ta chọn 20 em tuổi nhiều nhất, 20 em này thỏa mãn điều kiện bài ra. Vì tuổi trung bình của 20 em này lớn hơn $\frac{430}{33} \times 20 > 260$. ☺

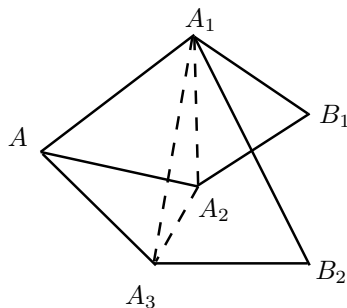
Bài toán 2.12. Trong một lớp học có ít nhất hai bạn quen nhau. Biết rằng nếu hai bạn có cùng một số lượng người quen thì không có người quen chung. Chứng minh rằng trong lớp có bạn chỉ quen đúng một người.

Lời giải. Vì số người trong lớp hữu hạn nên có thể tìm được một bạn A có số người quen nhiều nhất. Giả sử A quen $A_1, A_2, \dots, A_k$. Giả sử mỗi A_i lại quen n_i người khác ($1 \leq i \leq k$). Theo giả thiết đã cho hai người có số lượng người quen bằng nhau thì không có người quen chung, mà ở đây A_i, A_j ($1 \leq i < j \leq k$) cùng quen A , nên suy ra các số $n_1, n_2, \dots, n_k$ đôi một khác nhau.

Mặt khác $1 \leq n_i \leq k$ với mọi $1 \leq i \leq k$, suy ra tồn tại $n_i = 1$. ☺

Bài toán 2.13. Có một số người đến dự cuộc họp. Người ta nhận thấy rằng nếu hai người nào đó trong họ mà quen với nhau thì hai người này không cùng quen với một người thứ ba. Còn nếu hai người trong họ mà không quen nhau thì họ cùng quen với đúng hai người khác. Chứng minh rằng trong cuộc họp này tất cả mọi người đều có số người quen bằng nhau.

Lời giải. Vì số người là hữu hạn nên ta có thể chọn ra một người A quen nhiều người nhất. Ta chứng minh mọi người quen A cũng có số người quen như A . Giả sử các người quen của A là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Suy ra các A_i ($1 \leq i \leq n$) đôi một không quen nhau. Vì A_1, A_2 cùng



Hình 2.4

quen A nên A_1, A_2 cùng quen B_1 khác A (Hình 2.4). Vì A_1, A_3 cùng quen A nên A_1, A_3 cùng quen B_2 khác A . Do A, B_1 không quen nhau nên B_1 và A có đúng hai người quen chung là A_1 và A_2 . Do A, B_2 không quen nhau nên B_2 và A có đúng hai người quen chung là A_1 và A_3 suy ra B_2 khác B_1 .

Tương tự A_1, A_4 cùng quen B_3 (B_3 khác B_1 và B_2), $\dots$, A_1, A_n cùng quen B_{n-1} (B_{n-1} khác $B_1, B_2, \dots, B_{n-2}$). Vậy A_1 có n người quen là $A, B_1, \dots, B_{n-1}$. Tương tự ta chứng minh cho mọi người trong cuộc họp đều có n người quen. ☺

Bài toán 2.14. Sau một giải đấu bóng bàn theo thể thức vòng tròn (một đấu thủ chơi với mọi đấu thủ khác), mỗi đấu thủ được gọi tên những người thua mình và những người thua những người thua

mình. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đấu thủ được gọi tên tất cả các đấu thủ còn lại.

Lời giải. Xét đấu thủ A được gọi tên nhiều đấu thủ nhất. Ta chứng minh A được gọi tên tất cả các đấu thủ còn lại. Giả sử ngược lại A được gọi tên các đấu thủ $A_1, A_2, \dots, A_n$ và tồn tại đấu thủ B không được A gọi tên. Khi đó đấu thủ B được gọi tên tất cả $A, A_1, \dots, A_n$ (mọi đấu thủ đều giao đấu với nhau) trái với cách chọn A được gọi tên nhiều đấu thủ nhất. ☺

Bài toán 2.15. Một đất nước có 100 sân bay mà khoảng cách giữa hai sân bay đều khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kì sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.

Lời giải. Giả sử có các máy bay bay từ các sân bay $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \leq 99$) đến sân bay O thì một trong các góc $\widehat{A_iOA_j}$ không lớn hơn $\frac{360^\circ}{n}$ với $i, j \in \{1, 2, \dots, 99\}$.

Mặt khác, nếu các máy bay bay từ sân bay A_i và A_j đến sân bay O thì A_iA_j là cạnh lớn nhất trong các cạnh của tam giác A_iOA_j , do đó $\widehat{A_iOA_j} > 60^\circ$.

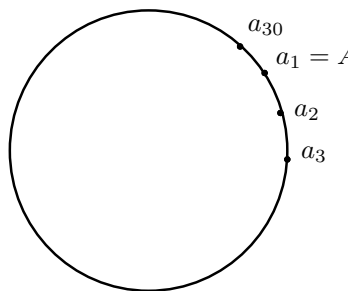
Từ đó suy ra $\frac{360^\circ}{n} \geq \widehat{A_iOA_j} > 60^\circ$. Vì vậy $n < 6$. ☺

Bài toán 2.16. Trên một đường tròn có ba mươi số, mỗi số bằng giá trị tuyệt đối của hiệu hai số đứng sau nó theo chiều kim đồng hồ. Biết rằng tổng của tất cả các số bằng 1. Hãy tìm các số trên đường tròn.

Lời giải. Vì mỗi số là giá trị tuyệt đối của hiệu hai số nên tất cả các số không âm. Giả sử số lớn nhất (hoặc một trong những số lớn

nhất) trong các số này là A và ký hiệu những số trên đường tròn là $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ theo chiều kim đồng hồ bắt đầu bằng số lớn nhất này (Hình 2.5).

Như vậy, $a_1 = A$. Theo giả thiết $a_1 = |a_2 - a_3|$. Vì các số a_2 và a_3 không âm và không lớn hơn A , nên đẳng thức $a_1 = |a_2 - a_3|$ chỉ xảy ra khi một trong hai số a_2, a_3 bằng A và số còn lại bằng 0. Do đó ta có hai trường hợp hoặc là $a_2 = A$ hoặc là $a_2 = 0$.



Hình 2.5

Trường hợp thứ nhất: Đã biết $a_1 = a_2 = A$, ta tính được $a_3 = 0, a_4 = A, a_5 = A, a_6 = 0, \dots$ các số lặp lại theo chu kì 3 số hạng.

Trường hợp thứ hai: Đã biết $a_1 = A, a_2 = 0$, ta tính được $a_3 = A, a_4 = A, a_5 = 0, a_6 = A, \dots$ các số cũng lặp lại theo chu kì 3 số hạng.

Như vậy, cả hai trường hợp trên đường tròn các số lặp lại theo chu kì 3 số hạng với $A, A, 0$. Do đó trong ba mươi số có mười số 0, còn hai mươi số bằng nhau và đều bằng A . Theo giả thiết của bài toán thì tổng tất cả các số trên đường tròn bằng 1. Ta có $20.A = 1$, từ đó suy ra $A = \frac{1}{20}$.

Kết quả, trên đường tròn có mười số 0 và hai mươi số bằng $\frac{1}{20}$. ☺

Bài toán 2.17. Trên mặt phẳng cho n điểm không thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba trong số n điểm đã cho, mà đường tròn này không chứa bất kì điểm nào trong số những điểm còn lại.

Lời giải. Nối hai điểm bất kì trong số n điểm đã cho bằng một đoạn thẳng. Vì có hữu hạn điểm nên các đoạn thẳng tạo ra là hữu hạn. Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất với A và B là hai điểm đã cho. Gọi C là điểm trong số các điểm còn lại thỏa mãn góc ACB lớn nhất trong số các góc nhìn từ $n - 2$ điểm khác đối với hai điểm A và B .

Xét tam giác ABC . Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không chứa điểm nào trong số những điểm đã cho còn lại. ☺

Bài toán 2.18. Trong mặt phẳng kẻ 1992 đường thẳng đôi một cắt nhau sao cho không có ba đường nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là "tam giác xanh" nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt ngang.

a) Chứng minh rằng số tam giác xanh không ít hơn 664;

b) Chứng minh rằng số tam giác xanh không ít hơn 1328.

Lời giải. a) Lấy đường thẳng d bất kì trong số các đường thẳng đã cho. Trong các khoảng cách từ giao điểm của các đường thẳng còn lại đến đường thẳng d luôn tồn tại một giao điểm gần d nhất, đó chính là đỉnh của một tam giác xanh (hai đỉnh còn lại nằm trên d). Như vậy ứng với mỗi đường thẳng ta có ít nhất một tam giác xanh, suy ra ứng với 1992 đường thẳng, ta có ít nhất 1992 tam giác xanh. Mỗi tam giác xanh trong số đó được tính nhiều nhất 3 lần. Vậy có ít nhất $1992 : 3 = 664$ tam giác xanh khác nhau.

b) Từ nhận xét câu a) ta suy ra nếu về hai phía của d đều có các giao điểm của các đường thẳng khác thì có ít nhất hai tam giác xanh về hai phía của d .

Ta sẽ chứng minh có nhiều nhất hai đường thẳng mà tất cả các

giao điểm của các đường thẳng khác nằm về cùng một phía so với đường thẳng đó. Giả sử trái lại có ít nhất ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 như vậy. Xét d_4 , gọi các điểm M_1, M_2, M_3 thứ tự là giao điểm của d_4 với d_1, d_2, d_3 . Giả sử M_2 nằm giữa M_1, M_3 suy ra M_1 và M_3 nằm ở hai phía của d_2 , điều này mâu thuẫn với giả sử.

Như vậy ứng với 1992 đường thẳng thì có ít nhất $1990 \cdot 2 + 2 = 3982$ tam giác xanh. Mỗi tam giác xanh được tính nhiều nhất 3 lần. Vậy có ít nhất $\left\lceil \frac{3982}{3} \right\rceil = 1328$ tam giác xanh khác nhau.



Bài toán 2.19. Trong một buổi dạ hội, mỗi nữ sinh đều nhảy với ít nhất một nam sinh và không có nam sinh nào nhảy với tất cả nữ sinh. Chứng minh rằng có thể tìm được một nhóm gồm 2 nam sinh và 2 nữ sinh sao cho mỗi người trong bọn họ chỉ nhảy với một người khác giới cùng nhóm.

Lời giải. Ta chia tất cả nam sinh thành những nhóm theo tiêu chuẩn họ đã có thể nhảy với cùng số lượng nữ sinh (nghĩa là mỗi người trong nhóm đều có số bạn nhảy nữ sinh bằng nhau). Giả sử F_1 là một trong những nam sinh đã nhảy với nhiều nữ sinh nhất. Vì theo giả thiết F_1 không nhảy với tất cả nữ sinh, nên tồn tại hữu hạn số nữ sinh không nhảy với F_1 , ta chọn trong đó một nữ sinh L_1 . Nhưng vì mỗi nữ sinh đều nhảy với ít nhất một nam sinh, vì thế tồn tại một nam sinh F_2 nhảy với L_1 .

Nam sinh F_1 đã được chọn sao cho số nữ sinh không nhảy với F_2 không nhỏ hơn số nữ sinh nhảy với F_1 . Từ đây suy ra F_2 không nhảy với tất cả số nữ sinh nhảy với F_1 : Trường hợp ngược lại, số nữ sinh nhảy với F_2 sẽ lớn hơn số nữ sinh nhảy với F_1 ; vì F_2 nhảy với L_1 , còn F_1 không nhảy với L_1 . Như vậy tồn tại nữ sinh L_2 nhảy với F_1 , nhưng

không nhảy với F_2 .

Cặp nam sinh F_1, F_2 và cặp nữ sinh L_1, L_2 tạo thành một bộ bốn tham gia dạ hội, thỏa mãn các điều kiện của bài toán, vì cặp F_1, L_1 , cũng như cặp F_2, L_2 không nhảy với nhau mà chỉ có F_1 nhảy với L_2 và F_2 nhảy với L_1 . ☺

Cuối cùng dựa vào tính toán trên các đại lượng cực biên ta có thể chứng minh "bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân" của một dãy số không âm. Định lý này cũng được chứng minh như một hệ quả ở chương 6 về hàm lồi.

Định lý 2.1 (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân). Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm, thì

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh. Ta có thể giả thiết rằng $x_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$, vì nếu có một số nào đó trong chúng bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Ta xét trung bình nhân $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ và trung bình cộng $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Nếu tất cả x_i không bằng nhau thì ta thay số lớn nhất x_M và số nhỏ nhất x_m bằng cùng một số $\frac{1}{2}(x_M + x_m)$. Khi đó tổng của hai số mới thay bằng

$$\frac{1}{2}(x_M + x_m) + \frac{1}{2}(x_M + x_m) = x_M + x_m$$

và tích của chúng là $\left[\frac{1}{2}(x_M + x_m)\right]^2 > x_M x_m$. Kết quả của sự thay thế này là trung bình nhân tăng trong khi trung bình cộng không thay đổi gì. Nếu tập hợp n số mới tất cả không bằng nhau, thì ta lại lặp

lại quá trình trên. Tại mỗi giai đoạn của quá trình, trung bình nhân đều tăng thực sự và trung bình cộng không thay đổi gì. Đến lúc tất cả các số trở thành bằng nhau, thì hai trung bình cộng và nhân này trùng nhau. Do đó trung bình nhân luôn nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các số đều bằng nhau.

Ta có thể lấy ví dụ về quá trình này, xét trường hợp $x_1 = 2$, $x_2 = 3, x_3 = 8, x_4 = 11$. Quá trình tiến hành được liệt kê theo dãy sau đây:

$$\{2, 3, 8, 11\} \rightarrow \left\{ \frac{13}{2}, 3, 8, \frac{13}{2} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{13}{2}, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2} \right\} \rightarrow \{12, 12, 12, 12\}.$$

Trung bình nhân của tập số tương ứng tăng đến 12; trung bình cộng luôn luôn cố định là 12. ☺

2.3. SẮP XẾP PHẦN TỬ THEO THỨ TỰ

Một kỹ thuật giải toán là sắp xếp thứ tự những phần tử trong bài toán. Khi sắp xếp thứ tự của hữu hạn các phần tử trong bài toán ta đã xác định được những phần tử nhỏ nhất hoặc lớn nhất. Nhờ phần tử nhỏ nhất và lớn nhất này ta có thể giải được bài toán.

Bài toán 2.20. Cho 7 số nguyên dương khác nhau sao cho tổng của chúng bằng 100. Chứng minh rằng có ba số mà tổng của chúng ít nhất là 50.

Lời giải. Giả sử 7 số nguyên dương được sắp xếp theo thứ tự $a < b < c < d < e < f < g$. Ta sẽ chứng minh rằng $e + f + g \geq 50$.

Nếu $e > 15$, thì suy trực tiếp $e + f + g \geq 16 + 17 + 18 = 51$, điều cần chứng minh.

Nếu $e \leq 15$ thì $a + b + c + d \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, vì thế $e + f + g = 100 - a - b - c - d \geq 50$, điều khẳng định cũng đúng. ☺

Bài toán 2.21. Chứng minh rằng các chữ số của một số có sáu chữ số có thể hoán vị sao cho số nhận được có tính chất: Tổng ba chữ số đầu tiên của nó khác với tổng ba chữ số còn lại nhiều nhất là 9.

Lời giải. Cho a, b, c, d, e, f là sáu chữ số của số đã cho sắp xếp theo thứ tự tăng. Chọn f, c, a làm ba chữ số đầu tiên của số mới và e, d, b làm ba chữ số cuối cùng. Khi đó

$$f + c + a - e - d - b = (f - e) + (c - d) + (a - b) \leq f - e \leq 9,$$

vì $c - d$ và $a - b$ là số âm hoặc bằng không. Tương tự,

$$e + d + b - f - c - a = (e - f) + (b - c) + (d - a) \leq d - a \leq 9.$$

Vì thế số $\overline{fcaedb}$ thỏa mãn tính chất cần thiết. ☺

Bài toán 2.22. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ số thực có tính chất là tổng của n số bất kì trong chúng nhỏ hơn tổng của $n + 1$ số còn lại, thì tất cả những số này là số dương.

Lời giải. Ta sắp xếp $2n + 1$ số thực này theo thứ tự tăng $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2n+1}$. Theo giả thiết ta có

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n+1} < a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}.$$

Điều này kéo theo

$$a_1 > (a_{n+2} - a_2) + (a_{n+3} - a_3) + \dots + (a_{2n+1} - a_{n+1}).$$

Vì tất cả hiệu trong dấu ngoặc tròn đều không âm, suy ra $a_1 > 0$, đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 2.23. Cho 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 1706. Chứng minh rằng tồn tại ba số trong chúng, giả sử là a, b, c , sao cho $a < b + c < 4a$.

Lời giải. Ta sắp xếp 7 số theo thứ tự tăng

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_7 \leq 1706.$$

Nếu $a_{i+1} < 4a_i - a_1$ với một số i nào đó thuộc $\{2, 3, \dots, 6\}$, thì $a_i < a_1 + a_{i+1} < 4a_i$ và ta đã chứng minh xong.

Giả sử ngược lại, $a_{i+1} \geq 4a_i - a_1$ với mọi $i = 2, 3, \dots, 6$. Khi đó

$$a_3 \geq 4a_2 - a_1 \geq 4(a_1 + 1) - a_1 = 3a_1 + 4,$$

$$a_4 \geq 4a_3 - a_1 \geq 4(3a_1 + 4) - a_1 = 11a_1 + 16,$$

$$a_5 \geq 4a_4 - a_1 \geq 4(11a_1 + 16) - a_1 = 43a_1 + 64,$$

$$a_6 \geq 4a_5 - a_1 \geq 4(43a_1 + 64) - a_1 = 171a_1 + 256,$$

$$a_7 \geq 4a_6 - a_1 \geq 4(171a_1 + 256) - a_1 = 683a_1 + 1024 \geq 1707,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. ☺

Bài toán 2.24. Cho a là số nhỏ nhất và A là số lớn nhất của n số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng bội chung nhỏ nhất của những số này lớn hơn hoặc bằng na và ước chung lớn nhất của chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{A}{n}$.

Lời giải. Ta sắp xếp n số nguyên dương khác nhau như sau:

$$a = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n = A$$

và cho m là bội số chung nhỏ nhất của chúng, d là ước số chung lớn nhất của chúng. Khi đó

$$\frac{m}{a_n} < \frac{m}{a_{n-1}} < \cdots < \frac{m}{a_1} = \frac{m}{a};$$

$$\frac{a_1}{d} < \frac{a_2}{d} < \cdots < \frac{a_n}{d} = \frac{A}{d}.$$

Vì những số trong hai dãy trên là những số nguyên dương, đồng

thời $\frac{m}{a}$ và $\frac{A}{d}$ phải lớn hơn hoặc bằng n , điều này kéo theo $m \geq na$ và $d \leq \frac{A}{n}$. ☺

Bài toán 2.25. Ta xét $2n$ số nguyên dương khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, mỗi số không lớn hơn n^2 ($n > 2$). Chứng minh rằng tồn tại ba hiệu $a_i - a_j$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ và $i \neq j$) bằng nhau.

Lời giải. Ta có thể giả thiết rằng $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n}$. Ta xét hiệu $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{2n} - a_{2n-1}$. Giả sử không có ba hiệu nào bằng nhau, thì chỉ có nhiều nhất hai hiệu bằng nhau và có bất đẳng thức

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1}) \geq 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + (n-1) + (n-1) + n = n^2.$$

Nghĩa là $a_{2n} - a_1 \geq n^2$. Mặt khác, theo giả thiết của bài toán ta có đánh giá $a_{2n} - a_1 \leq n^2 - 1$, hai điều này mâu thuẫn nhau. ☺

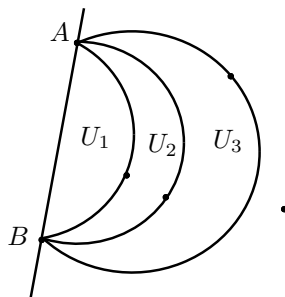
Bài toán 2.26. Cho $4n$ điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng người ta có thể tạo ra n tứ giác đôi một không giao nhau (không nhất thiết phải là tứ giác lồi) với các đỉnh là những điểm đã cho.

Lời giải. Tồn tại hữu hạn những đường thẳng nối các cặp điểm đã cho. Ta chọn đường thẳng ℓ không song song với bất cứ đường thẳng nối giữa hai điểm nào sao cho tất cả các điểm nằm về một phía của ℓ . Ta thực hiện di chuyển ℓ song song với chính nó. ℓ sẽ gặp mỗi điểm đã cho một lần. Ta gán nhãn cho những điểm này $A_1, A_2, \dots, A_{4n}$ theo thứ tự đếm được. Khi đó $A_1A_2A_3A_4, A_5A_6A_7A_8, \dots, A_{4n-3}A_{4n-2}A_{4n-1}A_{4n}$ là n tứ giác đôi một không giao nhau. ☺

Bài toán 2.27. Cho $2n+3$ điểm trong mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào nằm trên cùng

đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại đường tròn đi qua ba điểm trong đó sao cho đúng n điểm nằm trong đường tròn và n điểm nằm ngoài nó.

Lời giải. Từ $2n + 3$ điểm ta chọn hai điểm A và B sao cho đường thẳng đi qua hai điểm này là bờ của nửa mặt phẳng chứa tất cả những điểm còn lại. Ta vẽ $2n + 1$ đường tròn đi qua hai điểm đã chọn và điểm thứ ba trong $2n + 1$ điểm còn lại. Gọi $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$ là các hình viên phân chứa A, B và điểm thứ ba trong $2n + 1$ điểm còn lại. Ta thấy các viên phân này lồng nhau (Hình 2.6).



Hình 2.6

Giả sử $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{2n+1}$. Khi đó viên phân U_{n+1} chứa đúng n điểm ở bên trong nó. Đường tròn của viên phân U_{n+1} sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ☺

Bài toán 2.28. Cho 69 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không vượt quá 100. Chứng minh rằng người ta có thể chọn được 4 số a, b, c, d sao cho $a < b < c$ và $a + b + c = d$. Mệnh đề còn đúng cho 68 số không?

Lời giải. Những số đã cho có thể sắp xếp thành

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{69} \leq 100.$$

Hiển nhiên $a_1 \leq 32$. Ta xét dãy

$$a_3 + a_1 < a_4 + a_1 < \dots < a_{69} + a_1 \text{ và } a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < \dots < a_{69} - a_2.$$

Mỗi số hạng của hai dãy trên là một số nguyên dương không vượt quá $100 + 32 = 132$. Từ hai dãy này gộp lại có $67 + 67 = 134$ số

nguyên dương, do đó tồn tại hai chỉ số $i, j \in \{3, 4, \dots, 69\}$ sao cho $a_i + a_1 = a_j - a_2$ (nguyên lý Dirichlet). Ta có $a_1 < a_2 < a_i$ và $a_1 + a_2 + a_i = a_j$. Vậy, ta chọn 4 số a_1, a_2, a_i, a_j thỏa mãn bài toán.

Mệnh đề không còn đúng cho trường hợp 68 số nguyên dương khác nhau.

Ví dụ: Tập hợp $\{33, 34, 35, \dots, 100\}$ có $33 + 34 + 35 > 100$ nên không chọn được số nào thỏa mãn bài toán. ☺

Bài toán 2.29. Chứng minh rằng từ 25 số nguyên dương khác nhau người ta có thể chọn được hai số mà tổng và hiệu của chúng không trùng với bất kì số nào trong 23 số còn lại.

Lời giải. Giả sử tồn tại 25 số sao cho có thể chọn được hai số bất kì trong chúng có tổng hoặc hiệu trùng với một số trong 23 số còn lại. Ta sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần như sau: $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{25}$. Vì x_{25} là số lớn nhất nên tổng $x_{25} + x_k$ không nằm trong tập hợp số đã cho với $k \in \{1, 2, \dots, 12\}$. Như vậy hiệu của chúng phải trùng với một số trong 23 số còn lại và ta có thể chỉ có $x_{25} - x_1 = x_{24}$, $x_{25} - x_2 = x_{23}$, $\dots$, $x_{25} - x_{12} = x_{13}$. Từ đó suy ra với $k > 1$ thì $x_{24} + x_k > x_{25}$, do đó $x_{24} - x_k$ nằm trong tập hợp các số còn lại. Vì $x_2 + x_{23} = x_{25}$ suy ra $x_{24} - x_2 < x_{23}$, nghĩa là $x_{24} - x_2 \leq x_{22}$. Tương tự, ta thiết lập được các bất đẳng thức

$$x_{24} - x_2 \leq x_{22}, x_{24} - x_3 \leq x_{21}, \dots, x_{24} - x_{12} \leq x_{11}, \dots, x_{24} - x_{22} \leq x_1.$$

Suy ra tổng và hiệu của hai số x_{24} và x_{23} không trùng với số nào trong 23 số còn lại. Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu về những số này. ☺

2.4. CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG PHÁP XUỐNG THANG

Một phương pháp giải toán phát sinh từ nguyên lý thứ tự - đó là *phương pháp xuống thang*.

2.4.1. Lịch sử của phương pháp

Nhà toán học lớn P. Fermat (1601 - 1655) viết rằng "Do những phương pháp bình thường đã có trong các sách không đủ để chứng minh những mệnh đề khó và quan trọng, vì thế tôi đã hoàn thiện một cách đặc biệt để giải quyết những bài toán này. Tôi gọi cách chứng minh đặc biệt này là *xuống thang không xác định hoặc là xuống thang đến vô cùng*"².

Ban đầu Fermat chỉ dùng phương pháp này chứng minh cho những mệnh đề phủ định. Ví dụ như "*Không tồn tại một tam giác vuông có số đo các cạnh là những số tự nhiên, mà số đo diện tích của nó là một số chính phương*". Để chứng minh mệnh đề này Fermat đã dùng phương pháp sau: Nếu tồn tại một tam giác có số đo các cạnh là những số tự nhiên mà số đo diện tích của nó là một số chính phương, thì tồn tại một tam giác khác nhỏ hơn tam giác ban đầu và có cùng tính chất. Nếu tam giác thứ hai nhỏ hơn tam giác ban đầu và có cùng tính chất, thì lý luận tương tự ta nhận được tam giác thứ ba nhỏ hơn tam giác thứ hai và cũng có cùng tính chất, quá trình này tiếp tục tìm được các tam giác thứ tư, thứ năm, ... giảm đến vô cùng. Số đo một cạnh của tam giác vuông xuất phát là một số tự nhiên, mỗi bước thực hiện trên số đo cạnh này giảm thành số tự nhiên nhỏ hơn, tạo ra một dãy số tự nhiên giảm, nhưng một dãy số tự nhiên giảm thực sự không thể giảm vô hạn lần. Từ đó suy ra

²trong cuốn Oeuvres, tập II, trang 431 của P. Fermat

không tồn tại một tam giác vuông có số đo các cạnh là những số tự nhiên, mà số đo diện tích của nó là một số chính phương.

Sau đó Fermat có nói rằng (sau một thời gian dài suy nghĩ) đã có thể ứng dụng phương pháp này vào việc chứng minh những mệnh đề khẳng định. Ví dụ như: "Mọi số nguyên tố dạng $4n + 1$ đều biểu diễn thành tổng của hai số chính phương". Nhưng để ứng dụng phương pháp này vào việc chứng minh những mệnh đề khác như: "Mọi số có thể biểu diễn thành tổng của không quá bốn số chính phương", thì Fermat không để lại chi tiết áp dụng phương pháp này như thế nào. Hơn nữa, hàng loạt các định lý của Fermat được chứng minh bằng phương pháp này cũng không để lại tính toán chi tiết. Trong số đó có định lý lớn Fermat cho trường hợp $n = 3$. Sau này Euler đã áp dụng có kết quả phương pháp này vào bài toán giải phương trình vô định và từ đó việc chứng minh định lý lớn Fermat cho $n = 3$ được phục hồi. Fermat khẳng định rằng phương pháp này là của mình đưa ra lần đầu tiên và trước đó không ai biết phương pháp này. Nhưng ta nhớ lại rằng những cố gắng chứng minh không thể phân tích một lập phương của số nguyên thành tổng lập phương của hai số nguyên, được nghiên cứu khoảng năm 1000 ở phương đông với các nhà toán học Ả Rập đã có nói tới phương pháp này. Phương pháp xuống thang thời hiện đại giữ một vai trò quan trọng trong giải tích Diophant với những công trình của J. H. Poincaré³ và A. Baile. Ngày nay phương pháp này vẫn còn được ứng dụng trong lý thuyết số của toán học.

³Jules Henri Poincaré (1854-1912): Nhà toán học người Pháp

2.4.2. Phương pháp xuống thang trong số học

Nội dung cơ bản của phương pháp xuống thang thực hiện qua các bước:

1. Giả sử bài toán có nghiệm (hoặc những đại lượng đã thỏa mãn điều kiện bài toán);

2. Từ giả thiết đã cho của bài toán ta lại xây dựng được đại lượng giảm thực sự cũng thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho. Một cách lặp lại như vậy ta xây dựng được một dãy đại lượng giảm thực sự.

3. Từ dãy giảm vô hạn trên suy ra điều vô lý vì dãy số của ta xây dựng không thể giảm vô hạn được, mà chỉ hữu hạn (có thể áp dụng nguyên lý thứ tự, các đại lượng bị chặn dưới, ...). Vậy điều giả sử là sai và suy ra kết luận của bài toán.

Để hiểu phương pháp xuống thang ta chứng minh lại bài toán ở ngay đầu cuốn sách này, nhưng với nội dung mới.

Bài toán 2.30. Chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ.

Lời giải. Giả sử $\sqrt{3} = \frac{r}{s}$, ở đây r và s là những số nguyên dương.

Khi đó

$$3s^2 = r^2. \quad (2.1)$$

Như vậy về phải của (2.1) là một số chia hết cho 3, suy ra r^2 chia hết cho 3. Điều này nghĩa là r chia hết cho 3 (vì r không chia hết cho 3, thì khi đó r^2 cũng không chia hết cho 3, điều này vô lý). Ta đặt $r = 3r_1$ ($r_1 \in \mathbb{N}^*$) và thay vào (2.1) ta nhận được $3s^2 = 9r_1^2$, nghĩa là

$$s^2 = 3r_1^2. \quad (2.2)$$

Lý luận tương tự cho phương trình (2.2) tìm được $s = 3s_1$ ($s_1 \in \mathbb{N}^*$), sau đó thay vào (2.2) cho kết quả

$$3s_1^2 = r_1^2. \quad (2.3)$$

Từ $r = 3r_1, s = 3s_1$ ta suy ra đẳng thức $r > r_1$. Phương trình (2.3) tương tự như phương trình (2.1). Ta lại sử dụng cùng lý luận cho phương trình (2.3) ta nhận được dãy số nguyên dương vô hạn

$$r > r_1 > r_2 > \cdots > r_n > \cdots > 0. \quad (2.4)$$

Điều kiện (2.4) là vô lý, vì tập hợp những số tự nhiên dương nhỏ hơn r là hữu hạn. Điều vô lý này chỉ ra rằng phương trình (2.1) không có nghiệm nguyên dương, vậy $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ. ☺

Bài toán 2.31. Chứng minh rằng phương trình

$$6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2 \quad (2.5)$$

không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải. Giả sử phương trình (2.5) có nghiệm nguyên dương, (x_0, y_0, z_0, t_0) . Do đó

$$6(x_0^2 + y_0^2) = z_0^2 + t_0^2. \quad (2.6)$$

Vế phải của (2.6) chia hết cho 3, nghĩa là $z_0^2 + t_0^2$ chia hết cho 3. Để chứng minh được rằng điều này xảy ra khi và chỉ khi z_0 và t_0 đều chia hết cho 3. Ta đặt $z_0 = 3z_1$ và $t_0 = 3t_1$ ($t_1, z_1 \in \mathbb{N}^*$). Vì thế $z_0 > z_1$ và $t_0 > t_1$, suy ra $z_0^2 + t_0^2 > z_1^2 + t_1^2$. Thay những giá trị này vào phương trình (2.6), ta nhận được

$$2(x_0^2 + y_0^2) = 3(z_1^2 + t_1^2).$$

Vế trái của phương trình trên chia hết cho 3, suy ra $x_0^2 + y_0^2$ chia hết cho 3. Tương tự phần trên x_0 và y_0 đều chia hết cho 3. Ta đặt $x_0 = 3x_1$ và $y_0 = 3y_1$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{N}^*$). Khi đó ta nhận được phương trình

$$6(x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 + t_1^2.$$

Phương trình này giống như phương trình (2.6), chỉ có khác chỉ số. Như vậy ta lặp lại quy trình xây dựng nghiệm như phương trình

(2.6), cho nghiệm $x_1 = \frac{x_0}{3}$, $y_1 = \frac{y_0}{3}$, $z_1 = \frac{z_0}{3}$, $t_1 = \frac{t_0}{3}$ và tạo ra dãy số nguyên dương vô hạn $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > 0$. Điều này vô lý vì dãy số tự nhiên nhỏ hơn t_0 chỉ có hữu hạn. ☺

Bài toán 2.32. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz \quad (2.7)$$

không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải. Giả sử phương trình (2.7) có nghiệm nguyên dương (x_0, y_0, z_0) . Nghĩa là

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2x_0y_0z_0. \quad (2.8)$$

Vế phải của phương trình (2.8) chia hết cho 2, suy ra vế trái của nó cũng chia hết cho 2. Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi tất cả x_0, y_0, z_0 đều chẵn hoặc một số trong đó là số chẵn còn hai số kia là số lẻ. Điều sau cùng không thể được, vì khi đó vế phải của (2.8) chia hết cho 4, còn vế trái của (2.8) chia hết cho 2. Như vậy chỉ còn khả năng tất cả x_0, y_0, z_0 là số chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1$ (x_1, y_1, z_1 nguyên dương). Thay các giá trị này vào (2.8), ta nhận được

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1. \quad (2.9)$$

Sử dụng lý luận tương tự của phương trình (2.8) cho phương trình (2.9), ta tìm được $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$ (x_2, y_2, z_2 nguyên dương) và lại có

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2.$$

Tiếp tục quá trình này ta nhận được một dãy vô hạn những bộ ba nguyên dương: (x_k, y_k, z_k) có tính chất $x_k = 2x_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$ và

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_k > x_{k+1} > \dots > 0.$$

Điều này vô lý vì dãy số tự nhiên nhỏ hơn x_0 chỉ có hữu hạn, suy ra phương trình không có nghiệm nguyên dương. ☺

Bài toán 2.33. Hãy tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Lời giải. Hiển nhiên $x_1 = 3, y_1 = 2$ là một nghiệm của phương trình. Ta chứng minh rằng nếu x và y là một nghiệm của phương trình, thì cặp $3x + 4y$ và $2x + 3y$ cũng là nghiệm của phương trình. Thật vậy,

$$(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2 = 1.$$

Như vậy

$$x_2 = 3.3 + 4.2 = 17,$$

$$y_2 = 2.3 + 3.2 = 12.$$

Tương tự ta tính được $x_3 = 99, y_3 = 70, \dots$ Như vậy ta xây dựng được dãy nghiệm $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ Ta sẽ chứng minh rằng phương trình không có nghiệm khác ngoài dãy số trên.

Giả sử x_0, y_0 là một nghiệm nào đó. Trong trường hợp đó $3x_0 - 4y_0, 3y_0 - 2x_0$ cũng là nghiệm, vì

$$(3x_0 - 4y_0)^2 - 2(3y_0 - 2x_0)^2 = x_0^2 - 2y_0^2 = 1.$$

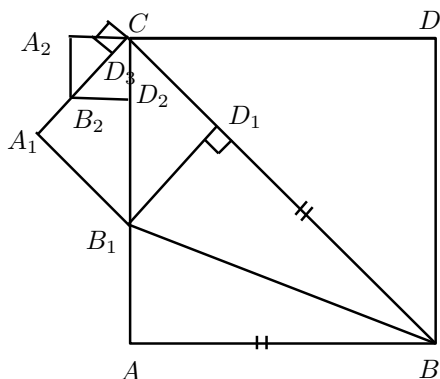
Từ phương trình ta có $9 = 9x_0^2 - 18y_0^2 > -2y_0^2$ suy ra $3x_0 > 4y_0$; với $y_0 > 2$ và từ phương trình ta có $4 = 4x_0^2 - 8y_0^2 < y_0^2$ suy ra $3y_0 > 2x_0$. Như vậy với $y_0 > 2$ từ nghiệm x_0, y_0 ta nhận được nghiệm x_1, y_1 nguyên dương sao cho $x_1 < x_0$ và $y_1 < y_0$. Quá trình này không thể kéo dài vô tận (do tiên đề thứ tự), đến một lúc nào đó ta nhận được nghiệm x_n, y_n , ở đây $y_n \leq 2$. Bởi vì y_n không thể bằng 1, nên suy ra $y_n = 2$. Nghĩa là $x_n = 3$. Điều này có nghĩa là số x_n, y_n nằm trong dãy đã dựng ở phần trước. ☺

2.4.3. Phương pháp xuống thang trong hình học

Trong hình học có khái niệm *cùng đo được* như sau: Hai đoạn thẳng có độ dài tương ứng a và b gọi là *cùng đo được*, nếu tồn tại một đoạn thẳng có độ dài d và những số nguyên dương m và n sao cho $a = md$ và $b = nd$.

Bài toán 2.34. Chứng minh rằng đường chéo của một hình vuông không cùng đo được với cạnh của nó.

Lời giải. Cho hình vuông $ABCD$. Ta đặt trên đường chéo hình vuông một đoạn có độ dài bằng cạnh của nó $BD_1 = AB$ (Hình 2.7). Từ điểm nhận được D_1 dựng đường thẳng vuông góc với đường chéo của hình vuông và cắt cạnh hình vuông tại B_1 và nối B_1 với B . Hai tam giác AB_1B và D_1B_1B bằng nhau, vì chúng là những tam giác vuông có cạnh BB_1 chung và $BD_1 = BA$ (theo cách dựng). Suy ra $AB_1 = D_1B_1$.



Hình 2.7

Trong tam giác vuông B_1CD_1 có $\widehat{B_1CD_1} = 45^\circ$ (do BC là đường chéo của hình vuông). Suy ra $\widehat{CB_1D_1} = 45^\circ$ và vì thế $B_1D_1 = D_1C$. Ta đã chứng minh được $AB_1 = B_1D_1 = D_1C$, từ đó suy ra $D_1C < CD$.

Ta lại vẽ đường vuông góc với đường chéo CB tại C và đặt đoạn thẳng $CA_1 = D_1B_1$ rồi nối điểm A_1 với B_1 . Tứ giác $A_1B_1D_1C$ là hình vuông có đường chéo là B_1C .

Quá trình dựng những hình vuông như vậy lặp lại nhiều lần. Vì thế ta nhận được dãy vô hạn những đoạn thẳng

$$CD_1 > CD_2 > CD_3 > \dots > 0.$$

Mỗi đoạn thẳng này là hiệu giữa đường chéo và cạnh của một và chỉ một hình vuông. Theo cách dựng trên, ta tính được

$$CD_1 = CB - AB, CD_2 = CB_1 - A_1B_1, CD_3 = CB_2 - A_2B_2, \dots$$

Giả sử đường chéo và cạnh của hình vuông ban đầu cùng đo được, thì tồn tại một đoạn thẳng đơn vị e mà đường chéo BC và cạnh hình vuông AB đều biểu diễn được bằng những số nguyên lần đoạn thẳng đơn vị. Trong trường hợp như vậy $CD_1 = CB - AB$ cũng biểu diễn thành số nguyên lần đoạn thẳng đơn vị và đường chéo CB_1 của hình vuông $A_1CD_1B_1$ bằng hiệu $AC - AB_1 = AB - CD_1$ cũng là số nguyên lần đoạn thẳng đơn vị.

Như vậy ta đã dựng được dãy vô hạn những số nguyên dương giảm

$$CD > CD_1 > CD_2 > \dots > CD_k > \dots > 0.$$

(ở đây CD_i là độ dài của đoạn CD_i). Không thể có dãy số nguyên dương vô hạn giảm tới 0. Điều vô lý này chỉ ra rằng không cùng đo được đường chéo và cạnh của cùng một hình vuông. ☺

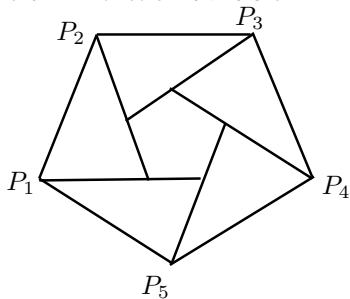
Bài toán 2.35. Cho một lưới ô vuông với các nút lưới là giao của các đường ngang và các đường dọc trên giấy (ta coi các nút lưới là điểm có tọa độ nguyên). Chứng minh rằng với $n \neq 4$ không tồn tại một n -giác đều nào có các đỉnh là các nút lưới trong lưới đã cho.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh rằng không tồn tại một tam giác đều với các đỉnh là các nút lưới. Thật vậy, giả sử tồn tại một tam giác đều với các đỉnh là các nút lưới và gọi a là độ dài của cạnh tam

giác này. Khi đó a^2 là một số nguyên. Diện tích của tam giác bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên nó là một số vô tỉ. Mặt khác, hiển nhiên diện tích của một tam giác bất kì có đỉnh là các nút lưới là một số hữu tỉ. Điều này vô lý. Vậy không thể có tam giác đều có các đỉnh là các nút lưới.

Vì một lục giác đều có thể ghép bởi các tam giác đều, nên trường hợp $n = 6$ bài toán được chứng minh.

Giả sử $P_1, P_2, \dots, P_n$ là đỉnh của n -giác đều trên các nút lưới (với $n \neq 3, 4, 6$). Ta đặt từ các điểm $P_1, P_2, \dots, P_n$ những vectơ bằng những vectơ tương ứng $\overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \dots, \overrightarrow{P_1P_2}$ (Hình 2.8 chỉ là trường hợp $n = 5$). Những điểm mới cũng rơi



Hình 2.8

vào nút lưới và tạo ra một n -giác đều nằm bên trong n -giác đều trước đó. Từ n -giác đều mới ta có thể tiếp tục như vậy. Bình phương độ dài của cạnh n -giác đều là một số nguyên dương, theo cách dựng trên thì độ dài cạnh của n -giác đều giảm thực sự. Quá trình dựng trên tạo ra một dãy số

nguyên dương của bình phương độ dài cạnh giảm đến vô hạn, điều này vô lý. Vậy không thể có n -giác đều ($n \neq 4$) có đỉnh là các nút lưới.



Bài toán 2.36. Cho những số nguyên x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 với $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$ và được đặt trên đường tròn. Nếu $x_i < 0$, thì các số x_{i-1}, x_i, x_{i+1} được phép đổi thành $x_{i-1} + x_i, -x_i, x_{i+1} + x_i$ (ta quy ước $x_{i+5} \equiv x_i$). Chứng minh rằng sau hữu hạn bước thực hiện như vậy tất cả các số trên đường tròn trở thành các số nguyên không âm.

Lời giải. Ta chú ý rằng với cách thực hiện như bài toán đã cho thì tổng của các số không đổi. Mỗi bộ số $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ta đặt

$$F(X) = \sum_{i=1}^5 (x_i - x_{i+2})^2. \text{ Cho } x_i < 0 \text{ và}$$

$$Y = (x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, -x_i, x_{i+1} + x_i, x_{i+2}).$$

Tính toán không phức tạp cho kết quả

$$F(X) - F(Y) = -2x_i(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) > 0.$$

Nghĩa là $F(Y) < F(X)$. Điều này có nghĩa là sau mỗi lần thực hiện số nguyên không âm $F(X)$ giảm thực sự. Quá trình như vậy không thể tiếp tục đến vô hạn. Như vậy sau hữu hạn bước các số trở thành các số nguyên không âm. 😊

Những bài toán như Bài toán 2.36 đã được giải bằng phương pháp đại lượng bất biến trong [18]. Trong cuốn sách này bạn đọc có thể tìm thấy hàng loạt các bài toán có cách giải tương tự.

2.5. BÀI TẬP

► 2.37. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$7(x^2 + y^2) = z^2 + t^2.$$

► 2.38. Cho n^2 số nguyên không âm được đặt vào các ô trong bảng bao gồm n hàng và n cột. Với việc thực hiện phân bố số vào ô phải thỏa mãn điều kiện sau đây: Nếu một ô nào đó trong bảng viết số 0, thì tổng những số trong cột và trong hàng chứa ô này, không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng tổng tất cả n^2 số đã cho không nhỏ hơn $\frac{n^2}{2}$.

▷ **2.39.** Trong một mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 5$). Mỗi điểm là tâm một đường tròn đi qua một điểm cố định O . Chứng minh rằng từ những hình tròn được tạo ra bởi các đường tròn đó có thể chọn được 5 hình tròn mà chúng phủ tất cả n điểm.

▷ **2.40.** Giải phương trình tìm nghiệm nguyên

$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4u^4). \quad (2.10)$$

▷ **2.41.** Bằng phương pháp của Bài toán 2.40 tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

(a) $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 0$;

(b) $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$;

(c) $x^3 = 2y^3 + 4z^3$.

▷ **2.42.** Cho $2n + 2$ điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong chúng sao cho đường thẳng đi qua hai điểm này chia mặt phẳng thành hai miền mà mỗi miền chứa đúng n điểm đã cho.

▷ **2.43.** Trong một bảng cỡ 10×10 người ta viết các số nguyên từ 1 đến 100. Từ mỗi hàng ta chọn số lớn thứ ba. Chứng minh rằng tổng của những số này không nhỏ hơn tổng của những số thuộc một hàng nào đó của bảng.

▷ **2.44.** Cho n số nguyên dương, ta xét tất cả khả năng của tổng được tạo bởi một hoặc một vài số của n số này. Chứng minh rằng những tổng này có thể chia thành n nhóm sao cho trong mỗi nhóm tỉ số giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá 2.

Bài tập dành cho phần chuyên đề (bạn đọc tự giải)

► **2.45.** Chứng minh rằng nếu một số tự nhiên p không phải là lũy thừa bậc n của một số tự nhiên, thì $\sqrt[n]{p}$ là một số vô tỉ.

► **2.46.** Có sử dụng phương pháp xuống thang để chứng minh phương trình

$$5(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$$

không có nghiệm nguyên dương hay không?

► **2.47.** Chứng minh rằng cạnh đáy và cạnh bên của một tam giác cân có góc ở đỉnh là 36° không cùng đo được cùng đơn vị.

► **2.48.** Chứng minh rằng số 7 không thể biểu diễn dưới dạng tổng các bình phương của ba số hữu tỉ.

► **2.49.** Chứng minh rằng phương trình

$$x^4 + y^4 = z^4$$

không có nghiệm nguyên dương.

► **2.50.** Giải phương trình sau trong tập số nguyên dương:

a) $x^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$;

b) $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$;

c) $(x+1)^3 - y^3 = z^3$.

► **2.51.** Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là một bộ những số tự nhiên đôi một khác nhau ($n > 2$). Từ đó ta nhận được bộ số mới

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2}.$$

Từ bộ số này lại theo quy tắc trên tạo bộ số sau đó và quá trình tiếp tục như vậy... Chứng minh rằng sau một số bước chắc chắn nhận được bộ số, mà trong đó không phải tất cả các số đều là số tự nhiên.

► **2.52.** Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$ là bộ những số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng nếu tạo từ nó bộ số mới $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ theo nguyên tắc $b_k = |a_{k+1} - a_k|, k = 1, 2, \dots, 2^n, a_{2^n+1} = a_1$, sau đó từ bộ $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ theo nguyên tắc trên tạo ra bộ số $c_1, c_2, \dots, c_{2^n}$ quá trình tiếp tục như vậy. . . , thì sau một số bước ta đưa về bộ số gồm toàn số 0.

CHƯƠNG 3

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

3.1. Góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất	80
3.2. Khoảng cách lớn nhất hoặc nhỏ nhất	84
3.3. Diện tích và chu vi lớn nhất hoặc nhỏ nhất	89
3.4. Bao lồi và đường thẳng tựa	93
3.5. Chuyên đề về bài toán Sylvester-Gallai	97
3.5.1. Giới thiệu bài toán Sylvester-Gallai	97
3.5.2. Tổng quát hóa bài toán Sylvester-Gallai	99
3.5.3. Số những đường thẳng trong định lý Gallai .	102
3.5.4. Tổng quát hóa định lý Gallai trong lý thuyết thiết kế khối	106
3.6. Bài tập	108

Ta nhận thấy rằng nhiều bài toán được giải với việc xét các phần tử cực biên. Trong hình học thì những phần tử cực biên là gì ? Trong chương này ta xem xét các phần tử cực biên là các góc lớn nhất hoặc nhỏ nhất, độ dài các cạnh hoặc đoạn thẳng lớn nhất hoặc nhỏ nhất, diện tích của các hình lớn nhất hoặc nhỏ nhất, rồi các điểm đầu mút của đoạn thẳng, ... Việc xem xét bài toán với quan điểm của những đại lượng cực biên cho ta lời giải nhanh gọn và đẹp. Một số

bài toán đã được mô tả trong [13] của tác giả. Chương này liệt kê thêm những bài toán khác có dùng phương pháp đại lượng cực biên để giải.

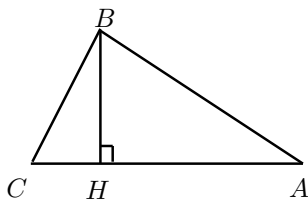
3.1. GÓC LỚN NHẤT HOẶC GÓC NHỎ NHẤT

Bài toán 3.1. Chứng minh rằng nếu tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

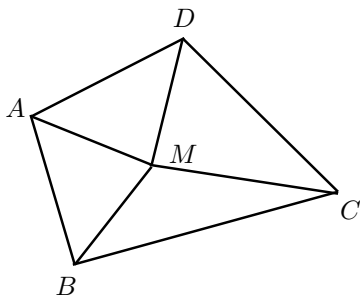
Lời giải. Gọi A là góc nhỏ nhất của tam giác ABC , suy ra $\widehat{BAC} \leq 60^\circ$ (Hình 3.1). Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot AC$. Do đó

$$S_{ABC} \leq \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 60^\circ \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Đó là điều ta cần chứng minh.



Hình 3.1



Hình 3.2

Bài toán 3.2. Chứng minh rằng bốn hình tròn có đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi $ABCD$ phủ kín miền tứ giác đó.

Lời giải. Gọi M là điểm bất kì trong tứ giác $ABCD$ (Hình 3.2). Ta có

$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^\circ.$$

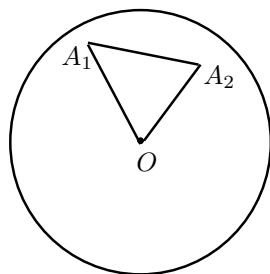
Do đó góc lớn nhất trong bốn góc này không nhỏ hơn 90° . Không mất tính tổng quát, giả sử góc $\widehat{BMC}$ lớn nhất. Suy ra $\widehat{BMC} \geq 90^\circ$. Do đó M thuộc hình tròn đường kính BC . ☺

Bài toán 3.3. Bên trong đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ có 8 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm trong chúng mà khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn 1.

Lời giải. Ta chú ý rằng ít nhất có 7 điểm trong số 8 điểm đã cho khác với tâm O . Gọi các điểm đã cho là $A_1, A_2, \dots, A_8$.

Ta có góc nhỏ nhất trong số các góc $\widehat{A_iOA_j}$ ($i \neq j, 1 \leq i, j \leq 8$) là không lớn hơn $\frac{360^\circ}{7} < 60^\circ$.

Giả sử $\widehat{A_1OA_2}$ là bé nhất (Hình 3.3). Xét tam giác A_1OA_2 , vì $\widehat{A_1OA_2} < 60^\circ$ suy ra hoặc $\widehat{OA_1A_2} > 60^\circ$ hoặc $\widehat{OA_2A_1} > 60^\circ$. Suy ra hoặc $OA_2 > A_1A_2$ hoặc $OA_1 > A_1A_2$. Mà $OA_1 \leq 1$ và $OA_2 \leq 1$ suy ra $A_1A_2 < 1$. ☺



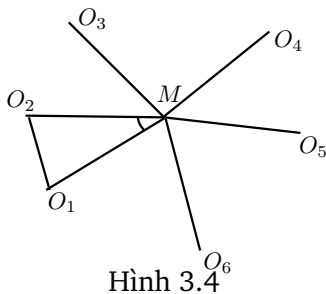
Hình 3.3

Bài toán 3.4. Trong một mặt phẳng cho 6 hình tròn bằng nhau và có điểm chung. Chứng minh rằng ít nhất một trong những hình tròn này chứa tâm của một hình tròn khác trong chúng.

Lời giải. Gọi 6 hình tròn đã cho có tâm $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ và bán kính r , còn M là điểm chung của các hình tròn này. Chỉ cần chứng minh rằng ít nhất có hai tâm hình

tròn có khoảng cách không lớn hơn r . Ta nối M với các tâm $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$. Nếu hai trong những đoạn thẳng vừa nối nằm trên cùng một tia có gốc là M , chẳng hạn O_1, O_2 nằm trên tia gốc M thì $O_1O_2 < r$.

Trong trường hợp ngược lại, ta có 6 góc đỉnh M không có miền trong chung, không giảm tính tổng quát giả sử $\widehat{O_1MO_2}, \widehat{O_2MO_3}, \dots, \widehat{O_6MO_1}$. Ta xét góc nhỏ nhất trong những góc đó, giả sử đó là góc $\widehat{O_1MO_2}$ (Hình 3.4).



Hình 3.4

Bởi vì tổng những góc này là 360° , nên $\widehat{O_1MO_2} \leq 60^\circ$. Khi đó trong tam giác O_1MO_2 có $\widehat{MO_1O_2} \geq 60^\circ$ hoặc $\widehat{MO_2O_1} \geq 60^\circ$. Suy ra $MO_2 \geq O_1O_2$ hoặc $MO_1 \geq O_1O_2$. Do đó $O_1O_2 \leq r$. ☺

Bài toán 3.5. Cho tam giác nhọn ABC . Lấy một điểm P bất kì trong tam giác. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

Lời giải. Ta dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với các cạnh BC, CA, AB (Hình ??). Vì tam giác ABC là nhọn nên A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trong đoạn BC, CA và AB . Nối PA, PB, PC ta có

$$\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^\circ.$$

Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn 60° . Không mất tính tổng quát, giả sử góc $\widehat{APC_1}$ là lớn nhất, do đó $\widehat{APC_1} \geq 60^\circ$.

Xét tam giác APC_1 vuông tại C_1 , ta có

$$\frac{PC_1}{AP} = \cos \widehat{APC_1} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

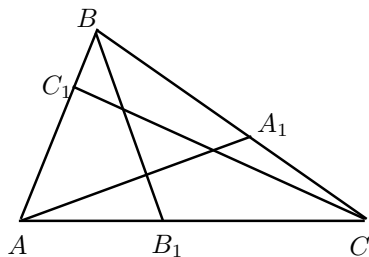
Từ đó ta có $AP \geq 2PC_1$. Nếu thay PA bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 bằng khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách từ P đến các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn. ☺

Bài toán 3.6. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy điểm C_1 thuộc AB , A_1 thuộc BC và B_1 thuộc CA . Biết rằng độ dài các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 không lớn hơn 1. Chứng minh rằng $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{C} \leq \widehat{B} \leq \widehat{A}$ (Hình 3.6).

Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp thứ nhất : Tam giác ABC có ba góc nhọn. Khi đó $60^\circ \leq \widehat{A} < 90^\circ$. Ta có $h_b \leq BB_1 \leq 1$ và $h_c \leq CC_1 \leq 1$, ở đây h_b, h_c là độ dài đường cao



Hình 3.6

tương ứng của tam giác hạ từ đỉnh B và C . Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}c.h_c = \frac{1}{2}h_b h_c \leq \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Trường hợp thứ hai : Tam giác ABC không là tam giác có ba góc nhọn. Khi đó $\widehat{A} \geq 90^\circ$ suy ra $AB \leq BB_1 \leq 1$, và $AC \leq CC_1 \leq 1$. Suy ra

$$S_{ABC} \leq \frac{1}{2}AB.AC \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \text{☺}$$

Bài toán 3.7. Những độ dài của các đường phân giác trong một tam giác không vượt quá 1. Chứng minh rằng diện tích của nó không vượt quá $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải. Ta xét góc tại đỉnh A có độ lớn α là nhỏ nhất trong các góc của tam giác ABC . Cho AD là một đường phân giác. Khi đó một trong các cạnh AB và AC không vượt quá $\frac{AD}{\cos \frac{\alpha}{2}}$, nếu ngược lại thì đoạn thẳng BC không đi qua điểm D . Giả sử đó là cạnh AB , khi đó $AB \leq \frac{AD}{\cos \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{AD}{\cos 30^\circ} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó

$$S_{ABC} = \frac{h_c AB}{2} \leq \frac{\ell_c AB}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(ở đây h_c và ℓ_c là độ dài đường cao và đường phân giác thuộc đỉnh C). ☺

3.2. KHOẢNG CÁCH LỚN NHẤT HOẶC NHỎ NHẤT

Bài toán 3.8. Chứng minh rằng ít nhất một trong những chân đường vuông góc hạ từ một điểm bất kì trong một đa giác lồi xuống các cạnh của nó, nằm trên cạnh mà không nằm trên cạnh kéo dài của nó.

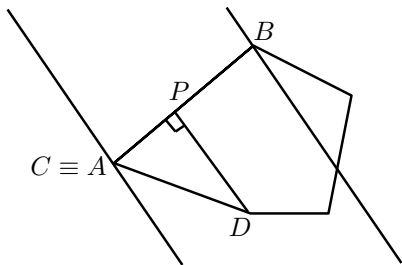
Lời giải. Cho điểm O trong đa giác lồi. Ta kẻ các đường thẳng đi qua các cạnh của đa giác và ta chọn đường thẳng nằm gần O nhất (vì số đường thẳng hữu hạn nên ta có thể chọn được một đường như vậy). Giả sử rằng trên đường thẳng vừa chọn đó chứa cạnh AB .

Ta sẽ chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ O xuống cạnh AB thì nằm trong cạnh này.

Thật vậy, giả sử chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB là điểm P nằm ngoài cạnh AB . Bởi vì điểm O nằm trong đa giác lồi, nên đường thẳng qua OP cắt một cạnh nào đó chẳng hạn là cắt cạnh CB của đa giác tại Q (Hình ?? thể hiện một ngũ giác). Dễ thấy rằng $OQ < OP$, khoảng cách từ O đến đường thẳng CB không lớn hơn OQ . Suy ra đường thẳng đi qua CB có khoảng cách tới O nhỏ hơn khoảng cách của đường thẳng AB tới O , điều này vô lý với việc chọn AB có khoảng cách nhỏ nhất tới O . ☺

Bài toán 3.9. Từ mỗi đỉnh của một đa giác hạ những đường vuông góc xuống các cạnh không chứa đỉnh này. Chứng minh rằng tồn tại một đỉnh, mà từ đó có ít nhất một chân đường vuông góc nằm trong một cạnh mà không nằm trên cạnh kéo dài.

Lời giải. Ta lấy cạnh lớn nhất AB của đa giác đã cho và xét dải điểm gồm những điểm nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với AB và lần lượt đi qua điểm A và B (Hình 3.8). Dải điểm này phải chứa một cạnh CD nào đó của đa giác mà



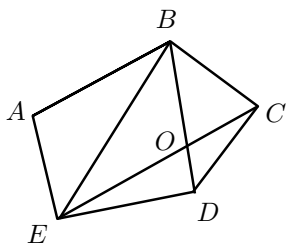
Hình 3.8

khác AB (một trong những đỉnh C và D có thể trùng với A hoặc B). Bất đẳng thức $CD \leq AB$ chỉ ra rằng một trong những đỉnh C và D nằm bên trong hoặc trên biên của dải điểm (nếu $C \equiv A$ hoặc B thì đỉnh D nằm bên trong dải điểm). Đỉnh nằm bên trong hoặc trên biên dải điểm mà khác A và B có tính chất của bài toán cần tìm. ☺

Bài toán 3.10. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi bất kì tồn tại ba đường chéo, mà chúng có thể dựng được một tam giác.

Lời giải. Giả sử BE là đường chéo lớn nhất của ngũ giác lồi $ABCDE$.

Ta sẽ chứng minh rằng khi đó các đoạn thẳng BE , EC và BD tạo thành các cạnh một tam giác (Hình 3.9). Để chứng minh ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức $BE < EC + BD$. Thật vậy, gọi O là giao điểm của BD và EC .



Hình 3.9

Ta có $BE < BO + OE < BD + EC$. ☺

Bài toán 3.11. Chứng minh rằng một đa giác không phủ được bằng hai đa giác vị tự với nó với hệ số k , ở đây $0 < k < 1$.

Lời giải. Cho O_1 và O_2 là hai tâm vị tự hệ số k biến đa giác M thành hai đa giác M_1 và M_2 . Khi đó điểm của đa giác M cách xa đoạn thẳng O_1O_2 nhất không được phủ bởi hai đa giác M_1 và M_2 . Thật vậy, gọi P là điểm cách xa O_1O_2 nhất. Nếu P thuộc một trong hai đa giác M_1 hoặc M_2 , thì có một điểm P' khác thuộc đa giác M vị tự tới nó theo hệ số $k < 1$. Điểm P' có khoảng cách tới O_1O_2 lớn hơn khoảng cách từ P tới O_1O_2 . Điều này mâu thuẫn với P là điểm cách xa O_1O_2 nhất.

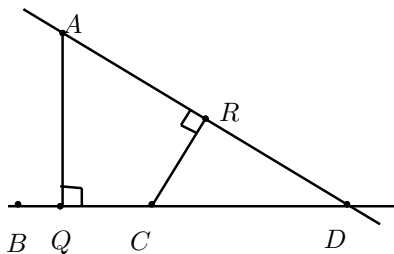
☺

Bài toán 3.12. Trên mặt phẳng cho n điểm (với $n \geq 3$) sao cho ba điểm bất kì trong chúng đều thẳng hàng. Chứng minh rằng n điểm đã cho thẳng hàng.

Lời giải. Giả sử ngược lại n điểm đã cho không thẳng hàng. Dựng qua mỗi cặp điểm trong số n điểm này một đường thẳng. Số các đường thẳng được nối như trên là hữu hạn. Xét các khoảng cách khác 0 nhỏ nhất từ n điểm đã cho đến các đường thẳng

vừa dựng. Số các khoảng cách như vậy tồn tại và hữu hạn nên tồn tại một khoảng cách nhỏ nhất. Giả sử khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là nhỏ nhất (chú ý A, B, C là ba trong n điểm đã cho). Theo giả thiết của bài toán, đường thẳng đi qua B và C còn đi qua một điểm thứ ba là D khác với B và C .

Ta vẽ $AQ \perp BC$, khoảng cách AQ là bé nhất (theo giả sử). Trong ba điểm thẳng hàng B, C, D phải có ít nhất hai điểm nằm cùng một phía của điểm Q , cho đó là C và D (Hình 3.10).

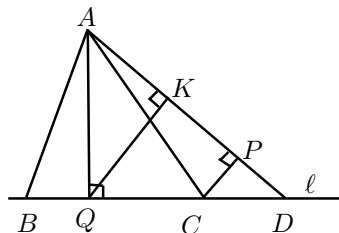


Hình 3.10

Giả sử $CQ < DQ$, ta vẽ $CR \perp AD$, dễ thấy $CR < AQ$. Điều này vô lý với AQ là nhỏ nhất. Từ đó suy ra n điểm đã cho phải thẳng hàng. ☺

Bài toán 3.13. Cho n đường thẳng (với $n \geq 3$) khác nhau sao cho ba đường thẳng bất kì trong chúng đều đồng quy tại một điểm. Chứng minh rằng tất cả n đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại các đường thẳng đã cho không cùng đi qua một điểm. Xét tập hợp các giao điểm của n đường thẳng đã cho. Lại xét tất cả các khoảng cách khác 0 hạ từ các điểm này đến các đường thẳng đã cho. Tập hợp những khoảng cách này là hữu hạn, nên tồn tại một khoảng cách nhỏ nhất. Giả sử



Hình 3.11

A là một giao điểm trong các giao điểm của các đường thẳng mà AQ là khoảng cách nhỏ nhất trong số các khoảng cách trên, AQ là khoảng cách từ A đến đường thẳng ℓ .

Qua A theo giả thiết phải có ba đường thẳng đi qua và lần lượt cắt ℓ tại B, C và D . Khi đó hai trong ba điểm B, C, D nằm về cùng phía của điểm Q , cho đó là C và D .

Giả sử $QC < QD$, ta vẽ các đường vuông góc $CP \perp AD$ và $QK \perp AD$ (Hình 3.11). Suy ra $CP < QK < AQ$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn AQ là khoảng cách nhỏ nhất (ở đây lại có CP là khoảng cách từ giao điểm hai đường thẳng đến một đường thẳng khác nhỏ hơn). Điều này chứng tỏ n đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm. ☺

Bài toán 3.14. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 2$) và đánh dấu trung điểm của tất cả các đoạn thẳng có những điểm cuối là những điểm đã cho. Chứng minh rằng những điểm đã đánh dấu không ít hơn $2n - 3$ điểm khác nhau.

Lời giải. Giả sử hai điểm A và B có khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách mỗi cặp điểm đã cho. Ta xét những trung điểm của các đoạn thẳng nối A với các điểm còn lại. Tất cả các trung điểm này khác nhau, nằm trong đường tròn tâm A bán kính $\frac{AB}{2}$ và có số lượng $n - 2$ điểm.

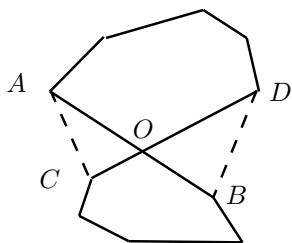
Tương tự, các trung điểm đoạn thẳng nối B với các điểm còn lại. Tất cả các trung điểm này nằm trong đường tròn tâm B bán kính $\frac{AB}{2}$ và có số lượng $n - 2$ điểm.

Hai đường tròn trên tiếp xúc tại trung điểm của AB , vì thế số trung điểm được đánh dấu ít nhất $2(n - 2) + 1 = 2n - 3$ điểm. ☺

Bài toán 3.15. Cho một đường dích dắc đóng, hơn nữa mọi đường dích dắc đóng khác có cùng số đỉnh với đường trên có độ dài lớn hơn nó. Chứng minh rằng đường dích dắc này không thể tự cắt nhau.

Lời giải. Giả sử đường dích dắc có độ dài ngắn nhất có đoạn cắt nhau. Ta gọi hai đoạn thẳng cắt nhau này là AB và CD (Hình 3.12).

Cho O là giao của AB và CD , ta có $OA + OC > AC$ và $OD + OB > DB$, cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên ta được $AB + CD > AC + DB$, như vậy ta có thể thay AB bằng AC và CD bằng DB thì tạo ra một đường dích dắc mới có tổng độ dài nhỏ hơn đường dích dắc có độ dài ngắn nhất đã cho, điều này vô lý.



Hình 3.12

Vậy không thể có đoạn nào trong đường dích dắc cắt nhau khi độ dài của nó là nhỏ nhất. ☺

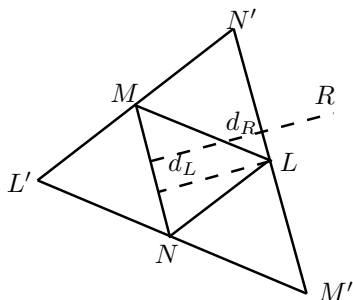
3.3. DIỆN TÍCH VÀ CHU VI LỚN NHẤT HOẶC NHỎ NHẤT

Bài toán 3.16. Cho P là tập hợp những điểm trên mặt phẳng sao cho ba điểm bất kì là ba đỉnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tất cả những điểm của P nằm trong một tam giác có diện tích không lớn hơn 4.

Lời giải. Ta vẽ các tam giác có các đỉnh là ba trong n điểm đã cho. Khi đó sẽ có hữu hạn tam giác, nên giữa chúng có một tam giác có diện tích lớn nhất. Kí hiệu tam giác đó là MNL . Qua mỗi đỉnh của tam giác MNL ta dựng những đường song song với cạnh đối diện.

Bằng cách dựng này ta được tam giác $M'N'L'$ có M, N, L là trung điểm tương ứng của các cạnh $N'L', L'M'$ và $M'N'$ (Hình 3.13). Diện tích của tam giác $M'N'L'$ bằng 4 lần diện tích tam giác MNL , do đó nó không lớn hơn 4. Ta chứng minh rằng không có điểm nào trong P nằm ngoài tam giác $M'N'L'$.

Thật vậy, giả sử tồn tại điểm R thuộc P nằm ngoài tam giác $M'N'L'$. Khi đó có một đỉnh của tam giác $M'N'L'$ nằm khác phía với R ngăn cách bởi cạnh đối diện của $M'N'L'$ (nghĩa là nối R với đỉnh này thì cắt cạnh đối diện của nó). Không mất tính tổng quát



Hình 3.13

ta có thể giả thiết $M'N'$ ngăn cách R với đỉnh L' . Điều này kéo theo khoảng cách d_R từ R đến MN lớn hơn khoảng cách d_L từ L đến MN . Những khoảng cách d_R và d_L là những đường cao của các tam giác RMN và LMN , hai tam giác này có cạnh chung MN . Nhưng $d_R > d_L$, kéo theo

$$S_{RMN} = \frac{1}{2}MN \cdot d_R > \frac{1}{2}MN \cdot d_L = S_{LMN}.$$

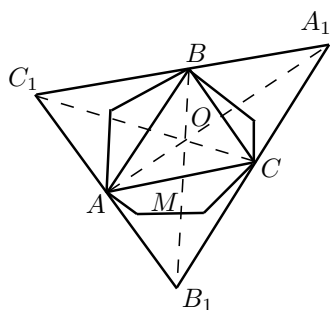
Bất đẳng thức sau cùng dẫn đến vô lý, vì MNL là tam giác có diện tích lớn nhất trong những tam giác có đỉnh thuộc P . Vậy R không thể nằm ngoài tam giác $M'N'L'$. ☺

Bài toán 3.17. Một đa giác M' là vị tự của đa giác M với hệ số vị tự $-\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại phép tịnh tiến song song chuyển đa giác M' vào trong đa giác M .

Lời giải. Chọn tam giác ABC có diện tích lớn nhất với các đỉnh là các đỉnh của đa giác M . Khi đó đa giác M nằm bên trong tam giác

$A_1B_1C_1$, mà các trung điểm các cạnh của nó là những điểm A, B và C (Hình 3.14) (điều này có thể chứng minh tương tự như bài 3.16).

Với phép vị tự có tâm tại trọng tâm của tam giác ABC và hệ số vị tự là $-\frac{1}{2}$ thì tam giác $A_1B_1C_1$ trở thành tam giác ABC , vì thế đa giác M vị tự vào trong tam giác ABC với hệ số $-\frac{1}{2}$ và khi đó M' có thể tịnh tiến song song đến nó. ☺



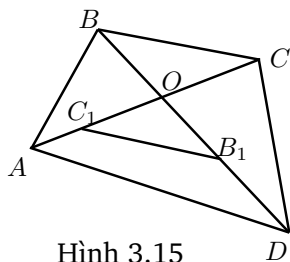
Hình 3.14

Bài toán 3.18. Gọi O là giao điểm của các đường chéo tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng nếu các tam giác AOB, BOC, COD, DOA có các chu vi bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $AO \geq CO$ và $DO \geq BO$ (Hình 3.15). Gọi B_1 và C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua tâm O , suy ra $OB = OB_1$, $OC = OC_1$. Tam giác B_1OC_1 nằm trong tam giác AOD . Ta có

$$p_{AOD} \geq p_{B_1OC_1} = p_{BOC} = p_{AOD},$$

ở đây ký hiệu p_{AOD} là chu vi của tam giác AOD . Dấu bằng của những bất đẳng thức trên chỉ xảy ra khi và chỉ khi $B_1 \equiv D$ và $C_1 \equiv A$.



Hình 3.15

Khi đó tứ giác $ABCD$ có $OA = OC$ và $OB = OD$, suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Mặt khác,

$$p_{AOB} = AB + BO + OA,$$

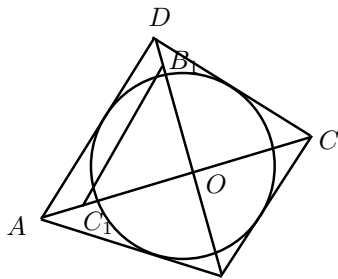
$$p_{BOC} = BC + BO + OC.$$

Suy ra $AB = BC$. Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thoi. ☺

Bài toán 3.19. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O . Chứng minh rằng nếu các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $OC \leq OA$ và $OB \leq OD$ (Hình 3.16).

Gọi B_1 và C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của B và C qua O . Suy ra $OB = OB_1$, $OC = OC_1$. Bởi vì BC là tiếp tuyến của đường tròn (O) suy ra B_1C_1 cũng tiếp xúc với (O) . Mặt khác AD cũng tiếp xúc với (O) suy ra $A \equiv C_1$, $D \equiv B_1$. Do đó $OA = OC$ và $OB = OD$, suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Mặt khác, tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) suy ra $AB + CD = AD + BC$, vậy $2AB = 2AD$, nghĩa là $AB = AD$. Do đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi. ☺

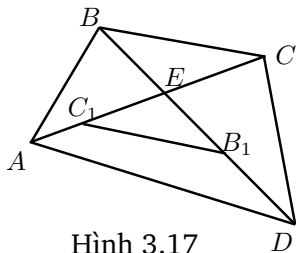


Hình 3.16

Bài toán 3.20. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E . Chứng minh rằng nếu các bán kính của bốn đường tròn nội tiếp các tam giác EAB , EBC , ECD , EDA mà bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Lời giải. Không mất tính tổng quát có thể giả sử rằng $CE \leq AE$, $BE \leq DE$ (Hình 3.17).

Gọi B_1 và C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua tâm E , ta có tam giác C_1EB_1 nằm trong miền tam giác AED .



Hình 3.17

Giả sử đoạn thẳng AD không trùng với đoạn thẳng C_1B_1 . Khi đó đường tròn nội tiếp tam giác C_1EB_1 nằm bên trong đường tròn

nội tiếp tam giác AED , đồng dạng với đường tròn này với tâm đồng dạng tại E , hệ số đồng dạng lớn hơn 1. Như vậy $r_{AED} > r_{C_1EB_1} = r_{CEB}$, ở đây ký hiệu r_{AED} là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AED . Điều này vô lý, vì theo giả thiết ta có $r_{AED} = r_{CEB}$. Điều vô lý này chứng tỏ $A \equiv C_1$ và $D \equiv B_1$. Khi đó $EA = EC$, $EB = ED$, suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Trong hình bình hành $ABCD$ có $p_1r = S_{AEB} = S_{BEC} = p_2r$, ở đây p_1, p_2 tương ứng là nửa chu vi của các tam giác AEB và BEC . Suy ra $p_1 = p_2$, tức là $\frac{AB+BE+EA}{2} = \frac{BC+CE+EB}{2}$, do đó $AB = BC$ (vì $AE = CE$). Hình bình hành $ABCD$ có $AB = BC$ nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi. ☺

3.4. BAO LỒI VÀ ĐƯỜNG THẲNG TỰA

Bao lồi của một tập hợp hữu hạn điểm trong mặt phẳng là đa giác lồi nhỏ nhất mà nó chứa tất cả những điểm đã cho (thuật ngữ "nhỏ nhất" nghĩa là nó không chứa trong nó bất cứ một đa giác nào có tính chất chứa tất cả các điểm đã cho). Một hệ thống hữu hạn điểm trong mặt phẳng tồn tại duy nhất một bao lồi.

Đường thẳng tựa của một đa giác lồi là một đường thẳng mà nó đi qua một đỉnh của đa giác và có tính chất sao cho đa giác nằm về một bên của nó. Dễ thấy rằng với một đa giác lồi bất kỳ tồn tại hai đường thẳng tựa song song với một đường thẳng đã cho.

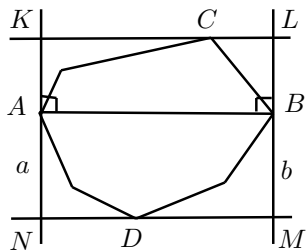
Bài toán 3.21. *Chứng minh rằng mọi đa giác lồi diện tích 1 có thể đặt vào một hình chữ nhật có diện tích 2.*

Lời giải. Giả sử AB là đường chéo lớn nhất (hoặc cạnh lớn nhất) của đa giác. Vẽ qua A và B hai đường thẳng a và b vuông góc với

đường thẳng AB . Nếu X là một đỉnh của đa giác thì $AX \leq AB$ và $XB \leq AB$, vì thế đa giác nằm trong một dải tạo bởi hai đường thẳng a và b . Ta vẽ hai đường thẳng tựa của đa giác song song với AB . Giả sử những đường thẳng này đi qua C, D và cùng với các đường thẳng a và b tạo ra một hình chữ nhật $KLMN$ (Hình 3.18). Khi đó $S_{KLMN} = 2S_{ABC} + 2S_{ABD}$. Bởi vì tứ giác $ACBD$ chứa trong đa giác ban đầu, nên diện tích của nó nhỏ hơn 1. Từ bất đẳng thức trên suy ra $S_{KLMN} \leq 2$. ☺

Bài toán 3.22. Trong mặt phẳng cho hữu hạn điểm. Chứng minh rằng từ các điểm này có thể chọn được một điểm, mà những điểm cùng khoảng cách gần nhất với nó không nhiều hơn ba điểm đã cho.

Lời giải. Ta xét các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong số các điểm đã cho. Vì những đoạn thẳng này hữu hạn nên ta có thể chọn được một đoạn thẳng nối hai điểm có độ dài ngắn nhất. Ta xét những điểm có khoảng cách ngắn nhất này đối với các điểm bên cạnh. Ta chứng

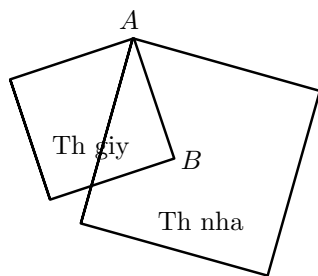


Hình 3.18

minh khẳng định của bài toán đối với những điểm này là đủ. Cho P là một đỉnh của bao lồi các điểm này. Nếu A_i và A_j là những điểm gần P sao cho $A_i A_j \geq A_i P$ và $A_i A_j \geq A_j P$, thì $\widehat{A_i P A_j} \geq 60^\circ$. Suy ra ở tại P không thể có bốn điểm có cùng khoảng cách ngắn nhất với nó, vì ngược lại thì do P là đỉnh của bao lồi nên bốn điểm này nằm trên nửa mặt phẳng có đường thẳng tựa đi qua P . Do đó trong bốn điểm có hai điểm A_i và A_j tạo ra góc $\widehat{A_i P A_j} < \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ (trái với phần lý luận ở trên). Vì thế P là điểm ta cần. ☺

Bài toán 3.23. Trên mặt bàn đặt n thẻ giấy vuông và n thẻ nhựa vuông, hơn nữa không có hai thẻ giấy và không có hai thẻ nhựa không có điểm chung, kể cả những điểm ở biên. Biết rằng tập hợp những đỉnh của thẻ giấy vuông trùng với tập hợp tất cả những đỉnh của thẻ nhựa. Có chắc chắn không mỗi thẻ giấy vuông trùng với một thẻ nhựa vuông nào đó ?

Lời giải. Giả sử tồn tại một thẻ giấy vuông không trùng với một thẻ nhựa vuông nào. Câu hỏi đặt ra là xét tất cả những hình vuông trùng nhau và xét bao lồi của các đỉnh của những hình vuông. Cho A là một đỉnh của bao lồi đóng này. Khi đó A là đỉnh của hai hình vuông khác nhau : thẻ giấy và thẻ nhựa vuông.



Hình 3.19

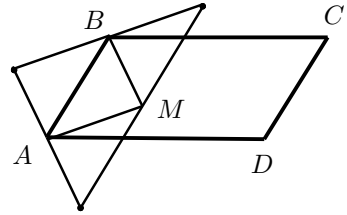
Dễ dàng kiểm tra được rằng một trong những đỉnh của hình vuông nhỏ hơn nằm bên trong hình vuông lớn hơn (Hình 3.19). Giả sử đỉnh B của thẻ giấy nằm trong thẻ nhựa. Khi đó đỉnh B nằm trong thẻ nhựa vuông và là đỉnh của một thẻ nhựa vuông khác, điều này theo giả thiết không thể được. Điều vô lý này dẫn đến mỗi thẻ giấy vuông trùng với một thẻ nhựa vuông nào đó. ☺

Bài toán 3.24. Trong mặt phẳng cho n điểm (với $n \geq 4$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng nếu với mọi bộ ba điểm trong chúng luôn tìm được điểm thứ tư (cũng trong những điểm đã cho) sao cho chúng tạo ra những đỉnh của một hình bình hành, thì $n = 4$.

Lời giải. Ta xét bao lồi của những điểm đã cho. Có khả năng hai

trường hợp xảy ra:

(1) Bao lồi là một hình bình hành $ABCD$. Nếu điểm M nằm trong hình bình hành $ABCD$, thì một đỉnh của tất cả những hình bình hành có đỉnh A, B và M nằm ngoài $ABCD$ (Hình 3.20). Nghĩa là, trong trường hợp này ngoài A, B, C và D không còn điểm nào khác.

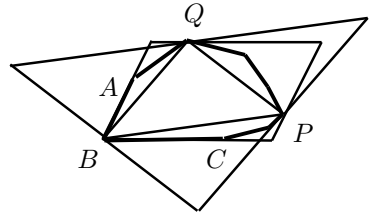


Hình 3.20

(2) Bao lồi không phải là một hình bình hành. Cho AB và BC là các cạnh của bao lồi. Ta kẻ các đường thẳng tựa của bao đóng song song với AB và BC lần lượt đi qua hai đỉnh P và Q .

Khi đó một đỉnh của tất cả những hình bình hành có đỉnh B, P và Q nằm ngoài bao lồi (Hình 3.21).

Thậm trí chúng còn nằm ngoài hình bình hành tạo bởi các đường thẳng tựa, trừ trường hợp P và Q là đỉnh của chính hình bình hành này. Trong trường hợp này đỉnh thứ tư không nằm trong bao lồi, vì nó chính là hình bình hành như trường hợp (1) đã xét.



Hình 3.21

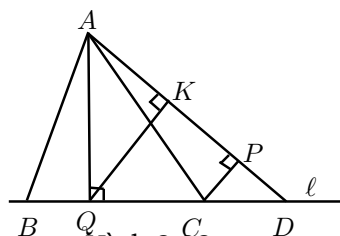


Bài toán 3.25. Trong mặt phẳng cho một số điểm, khoảng cách đôi một giữa chúng không vượt quá 1. Chứng minh rằng những điểm này có thể phủ được bởi một tam giác đều có cạnh $\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta xét ba đường thẳng đôi một tạo với nhau một góc 60° và vẽ ba cặp đường thẳng tựa của tập hợp điểm đã cho thứ tự song

song với ba đường thẳng đã chọn (Hình 3.22). Những đường thẳng tựa tạo ra hai tam giác đều, mỗi tam giác này đều phủ những điểm đã cho. Ta sẽ chứng minh rằng cạnh của một trong những tam giác này không quá $\sqrt{3}$.

Trên mỗi đường thẳng tựa có ít nhất một điểm trong các điểm đã cho. Khoảng cách giữa những cặp điểm bất kì đã cho không vượt quá 1, vì thế khoảng cách giữa hai cặp đường thẳng tựa không vượt quá 1.



Hình 3.22

Ta lấy một trong những điểm đã cho. Cho a_1, b_1 và c_1 là khoảng cách từ nó đến các cạnh của một tam giác đều; a_2, b_2 và c_2 là khoảng cách đến cạnh của một tam giác đều còn lại. Khi đó $a_1 + a_2, b_1 + b_2$ và $c_1 + c_2$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng tựa song song với nhau (Hình 3.22). Như đã chỉ ra ở trên ta có $a_1 + a_2 \leq 1, b_1 + b_2 \leq 1, c_1 + c_2 \leq 1$. Mặt khác, ta có $a_1 + b_1 + c_1 = h_1, a_2 + b_2 + c_2 = h_2$, ở đây h_1 và h_2 là đường cao của hai tam giác đều đã dựng (bạn đọc tự chứng minh kết luận này). Suy ra $h_1 + h_2 \leq 3$, nghĩa là một trong những đường cao không quá $\frac{3}{2}$. Nhưng khi đó cạnh của tam giác tương ứng không vượt quá $\sqrt{3}$. ☺

3.5. CHUYÊN ĐỀ VỀ BÀI TOÁN SYLVESTER-GALLAI

3.5.1. Giới thiệu bài toán Sylvester-Gallai

Vào năm 1893 Sylvester¹ công bố một bài toán sau đây.

¹James Joseph Sylvester (1814-1897) : Nhà toán học người Anh.

Bài toán 3.26 (Định lý Gallai). Cho $\mathcal{P}$ là tập gồm hữu hạn những điểm trên mặt phẳng, tất cả những điểm này không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng đi qua đúng hai điểm trong số những điểm đã cho.

Không có lời giải cho bài toán đặt ra trên trong tạp chí và người ta không biết Sylvester giải nó như thế nào. Bốn mươi năm sau, tuy không biết câu hỏi của Sylvester đã đặt ra, Erdős² đã phát biểu đúng bài toán này và đưa ra giả thuyết rằng câu trả lời là khẳng định đúng. Giả thuyết của Erdős được chứng minh lần đầu tiên bởi Gallai³ vào năm 1933. Bài toán được phát biểu như trên gọi là định lý Gallai.

Đến năm 1943 Erdős công bố lời giải bài toán trên trong tạp chí *American Mathematical Monthly*. Trong thời gian này cũng nhận được một số lời giải khác; trong số đó có lời giải của Helly⁴ là thông minh nhất. Sau đây là cách chứng minh của Helly (Bạn đọc cũng có thể xem một cách chứng minh khác trong [13] của tác giả, những vấn đề trong tiết này tác giả lấy trong [8]).

Lời giải. Kí hiệu $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả những đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm thuộc $\mathcal{P}$. Ta xét những khoảng cách từ tất cả các điểm của $\mathcal{P}$ đến tất cả những đường thẳng của $\mathcal{L}$ và ký hiệu khoảng cách nhỏ nhất trong tất cả những khoảng cách này là d .

Giả sử $P \in \mathcal{P}$ và $\ell \in \mathcal{L}$ là cặp điểm-đường thẳng sao cho có khoảng cách nhỏ nhất d . Lấy P' là chân đường vuông góc từ P đến ℓ . Vì $\ell \in \mathcal{L}$, nên tồn tại ít nhất hai điểm P_1, P_2 thuộc $\mathcal{P}$ trên ℓ . Một trong những điểm này khác P' , ta cho đó là P_1 .

Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng $P' \notin \mathcal{P}$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng $P' \in \mathcal{P}$. Đường thẳng PP_1 đi qua hai điểm khác nhau P và

²Paul Erdős (1913-1996) : Nhà toán học người Hungari.

³Tibor Gallai : Nhà toán học người Hungari thế kỉ XX.

⁴Eduard Helly (1884-1943) : Nhà toán học sinh ở Áo, làm việc tại Mỹ

P_1 của $\mathcal{P}$ nên đường thẳng PP_1 thuộc $\mathcal{L}$. Kí hiệu chân đường vuông góc từ P' đến PP_1 bằng P'' và khoảng cách $P'P''$ từ P' đến PP_1 bằng d' (Hình 3.23). Từ tam giác vuông $PP'P''$ suy ra rằng

$$d' = P'P'' < PP' = d.$$

Như vậy khoảng cách từ P' đến PP_1 nhỏ hơn khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm của $\mathcal{P}$ đến một đường thẳng ℓ . Điều vô lý này chỉ ra rằng giả thiết $P' \in \mathcal{P}$ là sai.

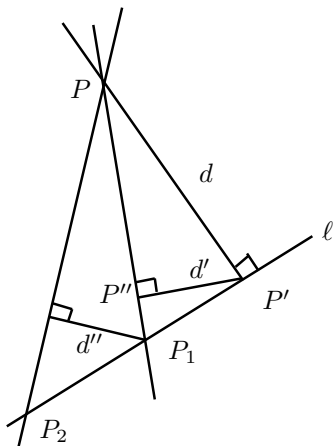
Ta chứng minh tiếp rằng trên đường thẳng ℓ không thể chứa ba điểm khác nhau của $\mathcal{P}$. Thật vậy, giả sử ngược lại thì ℓ chứa ít nhất hai điểm của $\mathcal{P}$ về cùng một phía của P' . Giả sử P_2 là một điểm của $\mathcal{P}$ cùng phía đối với P' như P_1 . Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng P_1 nằm giữa P' và P_2 (Hình 3.23).

Kí hiệu khoảng cách từ P_1 đến đường thẳng PP_2 bằng d'' . Từ

$$\sin \widehat{P_1P_2P} = \frac{d''}{P_2P_1} = \frac{d}{PP_2} \text{ và } P_2P_1 < P_2P' < PP_2$$

suy ra $d'' < d$, điều này vô lý với d là khoảng cách nhỏ nhất.

Như vậy đường thẳng ℓ chứa đúng hai điểm của $\mathcal{P}$, mỗi điểm ở một bên điểm P' . ☺



Hình 3.23

3.5.2. Tổng quát hóa bài toán Sylvester-Gallai

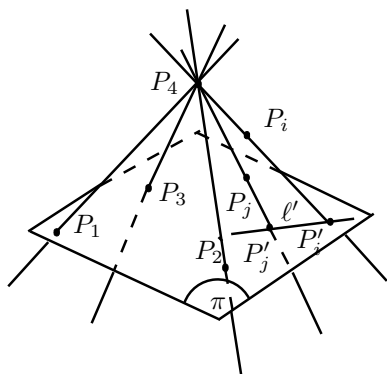
Kết quả tổng quát hóa bài toán Sylvester-Gallai cho các điểm và các mặt phẳng trong không gian ba chiều. Kết quả tổng quát sau đây là của Motzkin.

Bài toán 3.27. Cho $\mathcal{P}$ là tập hữu hạn những điểm trong không gian sao cho không phải tất cả cùng nằm trên một mặt phẳng.

(a) Chứng minh rằng tồn tại mặt phẳng trong không gian sao cho những điểm thuộc $\mathcal{P}$ trên mặt phẳng đó đều nằm trên không quá hai đường thẳng.

(b) Chứng minh bằng cách xây dựng phản ví dụ rằng mệnh đề sau đây nói chung là sai : Tồn tại một mặt phẳng trong không gian chứa đúng ba điểm không thẳng hàng thuộc $\mathcal{P}$.

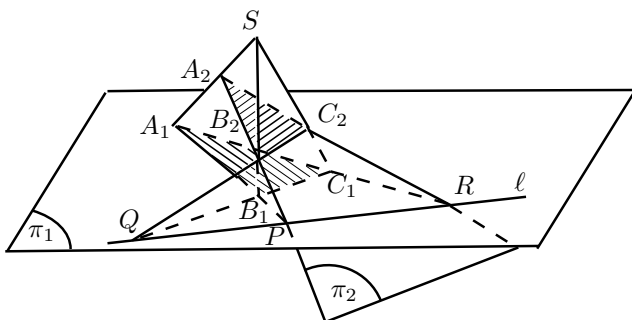
Lời giải. (a) Vì những điểm thuộc $\mathcal{P}$ không nằm trên một mặt phẳng, nên $\mathcal{P}$ phải có ít nhất bốn điểm P_1, P_2, P_3 và P_4 không nằm trên một mặt phẳng chung (điều này kéo theo mọi ba trong bốn điểm P_1, P_2, P_3 và P_4 không nằm trên một đường thẳng).



Hình 3.24

Gọi π là một mặt phẳng chứa ba điểm P_1, P_2 và P_3 (Hình 3.24). Với mọi điểm $P \in \mathcal{P}$, khác P_4 , ký hiệu P' là giao điểm của đường thẳng P_4P với mặt phẳng π . Gọi $\mathcal{P}'$ là tập hợp tất cả những điểm P' . Tập hợp $\mathcal{P}'$ khác rỗng, vì chúng chứa các điểm $P'_1 = P_1, P'_2 = P_2$ và $P'_3 = P_3$. Hơn nữa, do P_1, P_2 và P_3 không nằm trên một đường thẳng, nên tất cả những điểm thuộc $\mathcal{P}'$ không nằm trên một đường thẳng chung. Theo kết quả bài toán Sylvester-Gallai trên, tồn tại một đường thẳng ℓ' trên π đi qua đúng hai điểm, cho đó là P'_i và P'_j thuộc $\mathcal{P}'$. Do đó trong mặt phẳng đi qua P_4, P'_i và P'_j , thì tất cả những điểm thuộc $\mathcal{P}$ ở trên mặt phẳng

$(P_4P'_iP'_j)$ phải nằm trên một (hoặc hai) đường thẳng $P_4P'_i$ và $P_4P'_j$.



Hình 3.25

(b) Hình 3.25 chỉ ra hình chóp với đỉnh S và đáy $A_1B_1C_1$. Đáy $A_1B_1C_1$ nằm trong mặt phẳng π_1 . Mặt phẳng π_2 giao với các cạnh SA_1, SB_1, SC_1 và mặt phẳng π_1 theo thứ tự tại các điểm A_2, B_2, C_2 và đường thẳng ℓ tương ứng. Những đường thẳng A_2B_2 và A_1B_1 giao nhau tại điểm P , các đường thẳng B_2C_2 và B_1C_1 giao nhau tại điểm Q , các đường thẳng C_2A_2 và C_1A_1 giao nhau tại điểm R . Những điểm P, Q và R nằm trên đường thẳng ℓ . Để kiểm tra thấy rằng tập hợp $\mathcal{P} = \{S, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, P, Q, R\}$ có tính chất: Không tồn tại một mặt phẳng trong không gian chứa đúng ba điểm không thẳng hàng thuộc $\mathcal{P}$. ☺

Tổng quát thứ hai của bài toán Sylvester-Gallai do Erdos thực hiện bằng cách thay đường thẳng bằng đường tròn trong lời phát biểu bài toán.

Bài toán 3.28. Cho $\mathcal{P}$ là một tập hữu hạn những điểm trong mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và tất cả chúng không cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại ít

nhất một đường tròn trên mặt phẳng đi qua đúng ba điểm của $\mathcal{P}$.

Lời giải. Ta dùng phép nghịch đảo để giải bài này. Cho P_1 là một điểm thuộc $\mathcal{P}$ và c là một đường tròn bất kì trong mặt phẳng với tâm là P_1 . Cho α là phép nghịch đảo tương ứng của c . Với phép biến đổi α những điểm của $\mathcal{P}$ khác P_1 được ánh xạ vào những điểm mà chúng tạo thành tập hữu hạn $\mathcal{P}'$, tất cả các điểm không thẳng hàng. Theo định lý Gallai tồn tại đường thẳng ℓ trong mặt phẳng chứa đúng hai điểm, gọi hai điểm đó là P'_2 và P'_3 thuộc $\mathcal{P}'$. Vì không có ba điểm nào thuộc $\mathcal{P}$ là thẳng hàng, nên ℓ không đi qua P_1 (nếu ngược lại ảnh ℓ' của ℓ với phép biến đổi α đường thẳng này sẽ chứa P_1, P_2 và P_3). Do đó ℓ' là một đường tròn đi qua P_1 , nó đi qua đúng ba điểm thuộc $\mathcal{P} : P_1, P_2$ và P_3 . ☺

3.5.3. Số những đường thẳng trong định lý Gallai

Bài tập sau có thể suy ra từ định lý Gallai.

Bài toán 3.29. Cho $\mathcal{P}$ là tập hợp n điểm trong mặt phẳng, tất cả không nằm trên một đường thẳng và tập hợp $\mathcal{L}$ gồm những đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm thuộc $\mathcal{P}$. Chứng minh rằng số lượng những đường thẳng trong $\mathcal{L}$ ít nhất là n .

Lời giải. Theo định lý Gallai, tồn tại đường thẳng $\ell \in \mathcal{L}$ đi qua đúng hai điểm thuộc $\mathcal{P}$. Ta bỏ đi một trong hai điểm này, giả sử là P_1 và bỏ đi từ $\mathcal{L}$ tất cả các đường thẳng đi qua P_1 chứa đúng một điểm thuộc $\mathcal{P}$ và khác P_1 . Kí hiệu tập hợp các điểm còn lại là $\mathcal{P}_1$ và tập các đường thẳng là $\mathcal{L}_1$. Số lượng $|\mathcal{L}_1|$ những đường thẳng trong $\mathcal{L}_1$ nhiều nhất bằng $|\mathcal{L}| - 1$, nghĩa là

$$|\mathcal{L}_1| \leq |\mathcal{L}| - 1.$$

Nếu những điểm thuộc $\mathcal{P}_1$ nằm trên một đường thẳng, thì trong $\mathcal{L}$ tồn tại đúng $n - 1$ đường thẳng nối P_1 với những điểm của $\mathcal{P}_1$. Do đó $|\mathcal{L}| = (n - 1) + 1 = n$.

Nếu những điểm thuộc $\mathcal{P}_1$ không nằm trên một đường thẳng, thì theo định lý Gallai, tồn tại đường thẳng $\ell_1 \in \mathcal{L}_1$ chứa đúng hai điểm thuộc $\mathcal{P}_1$. Bỏ đi một trong hai điểm này, giả sử đó là P_2 thuộc $\mathcal{P}_1$ và bỏ đi trong $\mathcal{L}_1$ tất cả các đường thẳng đi qua P_2 có chứa đúng một điểm thuộc $\mathcal{P}_1$ mà khác P_2 . Ta gọi tập hợp các điểm còn lại sau lần bỏ đi này là $\mathcal{P}_2$ và tập các đường thẳng là $\mathcal{L}_2$. Nếu những điểm thuộc $\mathcal{L}_2$ cùng nằm trên một đường thẳng thì $|\mathcal{L}_1| = n - 1$ và $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{L}_1| - 1 = n$.

Nếu những điểm thuộc $\mathcal{P}_2$ là không tuyến tính, thì ta xây dựng như trên $\mathcal{P}_3$ và $\mathcal{L}_3$. Tiếp tục quá trình bỏ các điểm và các đường thẳng từ $\mathcal{P}_3$ và $\mathcal{L}_3$ để xây dựng $\mathcal{P}_4, \mathcal{L}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{L}_5, \dots$ cho tới khi tập hợp $\mathcal{P}_k$ chỉ còn những điểm nằm trên cùng một đường thẳng (nhiều nhất có thể là $n - 2$ bước làm như vậy). Trong trường hợp đó $|\mathcal{L}_{k-1}| = n - (k - 1)$.

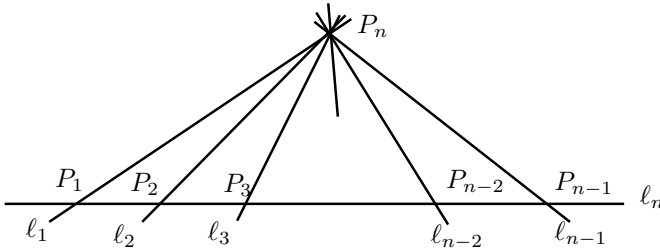
Từ $|\mathcal{L}_{k-1}| \leq |\mathcal{L}| - (k - 1)$, suy ra

$$|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{L}_{k-1}| + k - 1 = n - (k - 1) + (k - 1) = n. \quad \text{☺}$$

Nếu tập $\mathcal{P}$ gồm n điểm sao cho tất cả các điểm nằm trên một đường thẳng trừ một điểm, thì số những đường thẳng trong $\mathcal{L}$ cũng là n (Hình 3.26)

Erdős đưa ra giả thuyết rằng kết quả tương tự còn đúng cho số lượng những đường tròn đi qua ít nhất ba điểm thuộc tập hợp hữu hạn những điểm trong mặt phẳng. Nếu tất cả các điểm trừ một điểm nằm trên một đường tròn chung, thì tồn tại

$$C_{n-1}^2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$



Hình 3.26

đường tròn đi qua ba điểm hoặc nhiều hơn trong tập điểm đã cho. Do đó Erdős chứng minh mệnh đề sau đây :

Nếu $\mathcal{P}$ là tập n điểm trong mặt phẳng, không cùng nằm trên một đường tròn, không có ba điểm nào thẳng hàng và $\mathcal{C}$ là tập hợp những đường tròn đi qua ít nhất ba điểm thuộc $\mathcal{P}$, thì $\mathcal{C}$ có ít nhất $C_{n-1}^2 + 1$ phần tử.

Segre chỉ ra rằng mệnh đề trên là sai bằng một phản ví dụ.

Bài toán 3.30. Cho $\mathcal{K}$ là khối lập phương, $\mathcal{P}'$ là tập những đỉnh của chúng và $\mathcal{C}'$ là tập những đường tròn chứa ít nhất ba điểm thuộc $\mathcal{P}'$. Hãy dựng một phép chiếu nổi biến $\mathcal{P}$ thành $\mathcal{P}'$ và $\mathcal{C}$ thành $\mathcal{C}'$ trên mặt phẳng sao cho $|\mathcal{C}'| < C_{|\mathcal{P}'|-1}^2 + 1$.

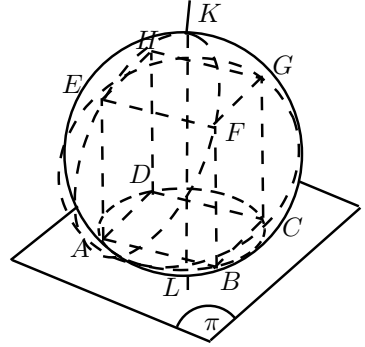
Lời giải. Tập hợp $\mathcal{C}'$ gồm ba loại đường tròn :

- (1) Những đường tròn ngoại tiếp các mặt của $\mathcal{K}$ (ví dụ như đường tròn đi qua A, B, C và D);
- (2) Những đường tròn đi qua hai đường chéo của $\mathcal{K}$ (ví dụ như đường tròn đi qua A, C, G và E);
- (3) Những đường tròn đi qua đúng ba đỉnh của $\mathcal{K}$ (ví dụ như

đường tròn đi qua A, F và H).

Có 6 đường tròn loại (1), có 6 đường tròn loại (2) và 8 đường tròn loại (3). Như vậy tổng cộng có 20 đường tròn trong $\mathcal{C}'$.

Cho S là hình cầu ngoại tiếp $\mathcal{K}$ và KL là đường kính của S đi qua tâm của hình vuông $ABCD$ và $EFGH$. Kí hiệu π mặt phẳng tiếp xúc với S tại L (Hình 3.27).



Hình 3.27

Những điểm thuộc $\mathcal{P}'$ và những đường tròn thuộc $\mathcal{C}'$ đều nằm trên S . Ta dựng phép chiếu nổi của chúng lên mặt phẳng π từ tâm K . Hình chiếu của $\mathcal{P}$ là tập hợp $\mathcal{P}'$ gồm 8 điểm. Ta biết rằng hình chiếu nổi của đường tròn trên S không chứa tâm của phép chiếu K là một đường tròn trên π . Vì K không nằm trên bất cứ đường tròn nào của $\mathcal{C}'$, nên ảnh của $\mathcal{C}'$ tạo ra tập $\mathcal{C}$ gồm 20 đường tròn trên π .

Những đường tròn thuộc $\mathcal{C}$ chính là những đường tròn trên π mà nó có ít nhất ba điểm thuộc $\mathcal{P}$. Những điểm thuộc $\mathcal{P}$ không nằm trên cùng một đường tròn. Vì

$$C_{|\mathcal{P}|-1}^2 + 1 = C_7^2 + 1 = 22,$$

ta có quan hệ

$$|\mathcal{C}| \geq C_{|\mathcal{P}|-1}^2 + 1$$

là sai.



3.5.4. Tổng quát hóa định lý Gallai trong lý thuyết thiết kế khối

Lý thuyết về thiết kế khối khởi đầu từ lý thuyết thông kê. Nó là một nhánh quan trọng của tổ hợp hiện đại. Tồn tại những loại thiết kế khối khác nhau. Phần này ta xét thiết kế khối $\mathcal{D}$ như sau.

$\mathcal{D}$ bao gồm n phần tử, được gọi là **điểm**, và một tập con bất kì những điểm được gọi là **khối** sao cho :

- Mỗi khối chứa ít nhất hai điểm khác nhau;
- Hai điểm khác nhau bất kì được chứa trong đúng một khối.

Tập hợp $\mathcal{D}$ và $\mathcal{L}$ trong định lý Sylvester-Gallai là những điểm và khối tương ứng của thiết kế khối, ở đây những khối khác nhau không cần chứa cùng số các điểm.

Năm 1938 Hanani chứng minh một tổng quát hóa của kết quả Gallai cho thiết kế khối $\mathcal{D}$.

Bài toán 3.31 (Định lý Hanani). Nếu thiết kế khối $\mathcal{D}$ gồm n điểm và m khối sao cho $m > 1$, thì $m \geq n$.

Lời giải. Kí hiệu những điểm của $\mathcal{D}$ bằng $P_1, P_2, \dots, P_n$ và các khối bằng $b_1, b_2, \dots, b_m$. Hơn nữa, ký hiệu số những khối chứa P_i bằng r_i với $i = 1, 2, \dots, n$, và số những điểm trong b_j bằng k_j với $j = 1, 2, \dots, m$. Theo định nghĩa thiết kế khối, ta có $1 < k_j < n$ và $1 < r_i < m$.

Số lượng I những cặp điểm-khối P_i, b_j sao cho P_i thuộc b_j có thể đếm bằng hai cách :

1. Bằng cách đếm các khối thông qua những điểm, mà nó cho

$$I = r_1 + r_2 + \dots + r_n;$$

2. Bằng cách đếm các điểm trên các khối, mà nó cho

$$I = k_1 + k_2 + \cdots + k_m.$$

Từ hai cách đếm trên ta suy ra

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m. \quad (3.1)$$

Không mất tính tổng quát ta có thể gán nhãn cho các điểm sao cho

$$r_j \leq r_i \quad \text{nếu } j > i. \quad (3.2)$$

Hơn nữa, gán nhãn cho các khối chứa các điểm sao cho các khối đi qua P_n là $b_1, b_2, \dots, b_{r_n}$.

Mục đích của chúng ta là tìm những mối liên kết giữa những số k_j và r_i . Ta tiến hành như sau :

Nếu P_i là một điểm bất kì và b_j là khối bất kì không chứa P_i , thì qua điểm bất kì của b_j có đúng một khối chứa P_i đi qua. Hơn nữa, những khối đi qua P_i mà nó đi qua những điểm khác nhau của b_j là khác nhau; Bởi vì hai điểm bất kì của $\mathcal{D}$ được chứa trong đúng một khối. Như vậy

$$k_j \leq r_i. \quad (3.3)$$

Sử dụng (3.3) cho P_n và cho mỗi khối trong các khối $b_{r_n+1}, b_{r_n+2}, \dots, b_m$, ta thấy rằng

$$k_{r_n+i} \leq r_n \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, m - r_n. \quad (3.4)$$

Cộng tất cả bất phương trình ở (3.4) lại với nhau ta nhận được

$$k_{r_n+1} + k_{r_n+2} + \cdots + k_m \leq (m - r_n)r_n. \quad (3.5)$$

$k_1, k_2, \dots, k_{r_n}$ có thể được đánh giá như sau :

Khối b_1 đi qua ít nhất một điểm khác P_n , cho đó là P_1 . Trong trường hợp này $b_2, b_3, \dots, b_{r_n}$ không thể đi qua P_1 . Do đó, theo (3.3)

$$r_1 \geq k_2.$$

Khối b_2 cũng chứa một điểm khác với P_n (và cả khác với P_1), cho đó là P_2 . Điểm P_2 cũng không nằm trong $b_3, \dots, b_{r_n}$. Như vậy

$$r_i \geq k_{i+1} \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, r_n - 1. \quad (3.6)$$

Cuối cùng, tồn tại một điểm P_{r_n} thuộc b_{r_n} , mà không chứa trong b_1 . Do đó

$$r_{r_n} \geq k_1. \quad (3.7)$$

Cộng các bất đẳng thức trong (3.6) và (3.7) với nhau, ta nhận được

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} \geq k_1 + k_2 + \dots + k_{r_n}. \quad (3.8)$$

Kết hợp (3.8) và (3.5) cho kết quả

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} + (m - r_n)r_n \geq k_1 + k_2 + \dots + k_m. \quad (3.9)$$

Từ (3.9), (3.1) và (3.2) kéo theo

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} + (m - r_n)r_n &\geq r_1 + r_2 + \dots + r_n \\ &\geq r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} + (n - r_n)r_n, \end{aligned}$$

nghĩa là

$$m \geq n.$$

Đó là điều cần chứng minh. 

3.6. BÀI TẬP

► 3.32. Trong đường tròn ta kẻ một số dây cung (hữu hạn dây cung) khác nhau sao cho mỗi dây cung trong chúng đều đi qua trung điểm của một dây cung nào đó đã vẽ. Chứng minh rằng mọi dây cung đều là đường kính của đường tròn.

► 3.33. Cho n điểm ($n > 4$) trong mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Vẽ n tam giác có đỉnh trong n điểm đã cho. Chứng minh rằng ít nhất có hai tam giác trong chúng có đúng một đỉnh chung.

- **3.34.** Trong mặt phẳng cho tập M gồm n điểm ($n \geq 3$). Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một đa giác lồi mà các đỉnh của nó thuộc tập M và nó chứa toàn bộ tập M .
- **3.35.** Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 4$), từ chúng mọi bộ bốn điểm đều là đỉnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng tất cả những điểm này đều là đỉnh của một đa giác lồi.
- **3.36.** Trong mặt phẳng cho tập hợp hữu hạn những đa giác (không nhất thiết tất cả phải lồi) trong đó mọi cặp đa giác đều nào cũng có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng có điểm chung với tất cả những đa giác đã cho.
- **3.37.** Trên mặt phẳng có thể đặt 1000 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng mà các đầu mút của nó thực sự nằm bên trong những đoạn thẳng khác được không ?
- **3.38.** Trong mặt phẳng cho bốn điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một trong những tam giác có các đỉnh từ những điểm đã cho mà không là một tam giác nhọn.
- **3.39.** Trong mặt phẳng cho tập hợp vô hạn những tam giác, mà những đỉnh của mọi tam giác nằm tại điểm có tọa độ $(0,0)$, $(0,m)$, $(n,0)$, (n,m) , ở đây n và m là những số nguyên dương. Chứng minh rằng từ những tam giác này có thể chọn được hai tam giác sao cho một tam giác nằm trong tam giác kia.
- **3.40.** Trong mặt phẳng cho n điểm (với $n > 3$), hơn nữa mọi bộ ba điểm trong chúng có thể phủ được bởi hình tròn bán kính 1. Chứng minh rằng khi đó tất cả n điểm có thể phủ được bởi hình tròn bán kính 1.

► **3.41.** Cho đa giác lồi $A_1, A_2, \dots, A_n$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn ngoại tiếp tam giác có các đỉnh thuộc đỉnh của đa giác lồi và chứa toàn bộ đa giác.

CHƯƠNG 4

CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC VÀ ĐẠI SỐ

4.1. Các bài toán số học.....	112
4.2. Một số bài toán đại số.....	123
4.3. Chuyên đề phương trình hàm trên tập số nguyên.....	127
4.3.1. Sử dụng nguyên lý thứ tự của số tự nhiên...	128
4.3.2. Dùng phương pháp quy nạp toán học.....	133
4.4. Bài tập.....	139

Chương 1 và chương 2 có rất nhiều bài toán điển hình của số học và đại số đã được giải thể hiện sức mạnh của phương pháp dùng đại lượng cực biên. Chương này tiếp tục ý tưởng giải các bài toán khó hơn và cần kiến thức số học và đại số nhiều hơn. Cuối cùng là chuyên đề phương trình hàm trong tập số nguyên. Phương pháp tìm nghiệm của loại phương trình hàm này có sử dụng đại lượng cực biên.

4.1. CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

Bài toán 4.1. Chứng minh rằng tích của n số nguyên liên tiếp luôn luôn chia hết cho $n!$.

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh cho n số nguyên dương liên tiếp là đủ. Kết quả hiển nhiên đúng nếu một trong những số nguyên là 0, còn khi tất cả các số nguyên âm thì ta chứng minh giá trị tuyệt đối của tích chia hết cho $n!$.

Bây giờ giả sử tồn tại n số nguyên dương liên tiếp mà tích của chúng không chia hết cho $n!$. Trong tất cả những số n như vậy ta chọn số nhỏ nhất và cho đó là n_0 . Chú ý rằng $n_0 > 2$, vì tích hai số nguyên liên tiếp đều là số chẵn và chia hết cho 2. Ta giả thiết rằng tồn tại số nguyên không âm m sao cho $(m+1)(m+2)\dots(m+n_0)$ không chia hết cho $n_0!$. Từ những số m như vậy ta lại chọn m_0 nhỏ nhất. Chú ý $m_0 > 0$ vì ta luôn có $n_0!$ chia hết cho $n_0!$. Ta có

$$\begin{aligned} (m_0+1)(m_0+2)\dots(m_0+n_0-1)(m_0+n_0) = \\ m_0[(m_0+1)(m_0+2)\dots(m_0+n_0-1)] \\ + n_0[(m_0+1)(m_0+2)\dots(m_0+n_0-1)]. \end{aligned}$$

Theo cách chọn m_0 , thì $m_0[(m_0+1)(m_0+2)\dots(m_0+n_0-1)]$ chia hết cho $n_0!$. Theo cách chọn n_0 thì $[(m_0+1)(m_0+2)\dots(m_0+n_0-1)]$ chia hết cho $(n_0-1)!$. Do đó $n_0[(m_0+1)(m_0+2)\dots(m_0+n_0-1)]$ chia hết cho $n_0!$. Kết hợp lại hai thừa số ở vế phải đẳng thức trên chia hết cho $n_0!$. Điều này trái với cách chọn n_0 . Bài toán đã được giải. ☺

Bài toán 4.2. Từ bộ n số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ người ta tạo ra bộ n số mới $b_1, b_2, \dots, b_n$ bằng cách đặt

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, b_{n-1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, b_n = \frac{a_n + a_1}{2}.$$

Sau đó từ bộ n số nhận được người ta lại tạo ra bộ n số mới bằng cách tương tự và tiếp tục như vậy. Chứng minh rằng nếu trong quá trình tạo ra bộ n số mới luôn luôn nhận được bộ n số nguyên, thì $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Lời giải. Nếu tất cả các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ bằng nhau thì bài toán hiển nhiên đúng. Giả sử không phải tất cả các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ đều bằng nhau. Gọi số lớn nhất trong các số này bằng M , hơn nữa số lớn nhất này có thể bắt gặp k lần. Khi đó trong dãy mới tạo ra không có số nào lớn hơn M , ngoài ra số M bắt gặp không quá $k - 1$ lần. Vì thế sau một số lần thực hiện tạo dãy, giá trị lớn nhất sẽ nhỏ đi. Dễ thấy rằng giá trị lớn nhất không thể nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất trong dãy ban đầu. Vì thế sau hữu hạn bước thực hiện tất cả các số trở thành bằng nhau.

Giả sử bộ số kết quả bằng nhau nhận được từ bộ số trước đó $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó $x_1 = x_3, x_2 = x_4, \dots, x_{n-1} = x_1, x_n = x_2$. Nếu n là số lẻ thì tất cả các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ bằng nhau. Nếu n là số chẵn thì $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} = a$ và $x_2 = x_4 = x_6 = \dots = x_n = b$. Chỉ còn lại kiểm tra rằng nếu $a \neq b$ thì bộ số $x_1, x_2, \dots, x_n$ không thể nhận được từ bất cứ bộ số $y_1, y_2, \dots, y_n$ nào. Thật vậy, giả sử

$$\begin{aligned}\frac{y_1 + y_2}{2} &= \frac{y_3 + y_4}{2} = \dots = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} = a, \\ \frac{y_2 + y_3}{2} &= \frac{y_4 + y_5}{2} = \dots = \frac{y_n + y_1}{2} = b.\end{aligned}$$

Khi đó $y_1 + y_2 + \dots + y_n = na$ và $y_2 + y_3 + \dots + y_n + y_1 = nb$. Vì thế $a = b$.



Bài toán 4.3. Lấy ba số x, y, z . Đặt $x_1 = |x - y|$, $y_1 = |y - z|$, $z_1 = |z - x|$. Từ những số x_1, y_1, z_1 , theo cách đặt trên ta được các số x_2, y_2, z_2 và tiếp tục như vậy nữa. Kết quả tới một bước thứ n nào đó thì $x_n = x, y_n =$

$y, z_n = z$. Biết rằng $x = 1$, hãy tính y và z .

Lời giải. Những số x_n, y_n, z_n là những số không âm, suy ra x, y, z cũng là những số không âm. Nếu tất cả các số x, y, z là số dương, thì số lớn nhất trong các số x_1, y_1, z_1 là nhỏ hơn thực sự số lớn nhất trong các số x, y, z , khi đó cả số lớn nhất của x_n, y_n, z_n thực sự nhỏ hơn số lớn nhất của các số x, y, z . Vì thế giữa các số x, y, z có số 0 (vì ta có $x_n = x, y_n = y, z_n = z$). Tương tự cũng chứng minh được giữa những số x_1, y_1, z_1 có số 0 (với $n = 1$ việc chứng minh không cần thiết, vì khi đó $x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z$). Điều đó có nghĩa là hai trong các số x, y, z bằng nhau (do lấy hiệu hai số). Khi đó ta nhận được nếu không xét thứ tự của x, y, z thì chúng có thể hoặc là 0, 0, 1, hoặc 0, 1, 1. Thử lại, ta thấy bộ số 1, 0, 0 không có tính chất mong muốn, còn bộ số 0, 1, 1 thỏa mãn. Vậy $y = 0, z = 1$ hoặc $y = 1, z = 0$. ☺

Bài toán 4.4. Từ hai trăm số $1, 2, 3, \dots, 199, 200$ ta chọn một số nhỏ hơn 16 và chọn thêm 99 số khác. Chứng minh rằng giữa những số đã chọn luôn tìm được hai số sao cho một số trong chúng chia hết cho số kia.

Lời giải. Giả sử từ những số $1, 2, 3, \dots, 199, 200$ chọn được 100 số, mà không có một số nào chia hết cho số còn lại nào cả. Ta sẽ chứng minh rằng giữa những số đã chọn không có số nào nhỏ hơn 16. Ta xét ước số lẻ lớn nhất của các số đã chọn. Nếu những ước số lẻ lớn nhất của hai số trùng nhau, thì một số đã chọn chia hết cho một số khác. Vì thế những ước số lẻ lớn nhất của các số đã chọn là đúng tất cả các số $1, 3, 5, \dots, 199$.

Giả sử trong các số đã chọn mọi cặp số không chia hết cho nhau. Ta xét trường hợp: Giữa những số đã chọn có những số với ước số lẻ lớn nhất là $1, 3, 9, 27, 81$. Để những số có ước số lớn nhất $1, 3, 9, 27, 81$

không chia hết cho nhau thì số đã chọn với ước số lẻ lớn nhất 27 chia hết cho 2, với ước số lẻ lớn nhất 9 chia hết cho 2^2 , với ước số lẻ lớn nhất 3 chia hết cho 2^3 , với ước số lẻ lớn nhất 1 chia hết cho 2^4 . Suy ra giữa những số được chọn không có các số 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 và 12, vì các số này có ước số lẻ lớn nhất như kết luận rút ra ở trên, nhưng không chia hết cho 2^k với k là 1, 2, 3, 4 tương ứng.

Ta xét giữa các số đã chọn với ước số lẻ lớn nhất là 5, 15, 45. Để những số có ước số lớn nhất 5, 15, 45 không chia hết cho nhau thì số đã chọn với ước số lẻ lớn nhất 15 chia hết cho 2, số đã chọn với ước số lẻ lớn nhất 5 chia hết cho 2^2 . Suy ra những số được chọn không thể có các số 5, 10, 15 vì không thỏa mãn kết luận vừa rút ra.

Tương tự, ta xét các số đã chọn với ước số lẻ lớn nhất 7, 21, 63 suy ra trong các số đã chọn không có 7 và 14; Lại xét những số đã chọn với ước số lẻ lớn nhất 11, 33 suy ra trong các số đã chọn không có 11; Lại xét những số đã chọn với ước số lẻ lớn nhất 13, 39 suy ra trong các số đã chọn không có số 13. Vậy trong các số đã chọn không có số nào nhỏ hơn 16, điều này trái với cách chọn của bài toán, suy ra điều giả sử là sai. Từ đây suy ra kết luận bài toán. ☺

Bài toán 4.5. Người ta kẻ trên giấy một bảng những ô vuông, trên mỗi ô người ta viết một số bằng trung bình cộng của những số ở các ô có chung cạnh. Biết rằng tất cả các số trong bảng đều khác nhau. Chứng minh rằng số lớn nhất trong bảng nằm ở ô bên cạnh của bảng (ô bên cạnh là ô thuộc bảng và có ít nhất một cạnh không là cạnh của một ô khác).

Lời giải. Giả sử số lớn nhất a trong bảng không nằm ở cạnh bảng. Khi đó nó có đầy đủ các ô bên cạnh, bao gồm bốn ô a_1, a_2, a_3, a_4 và có $a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$. Nhưng $a > a_1, a > a_2, a > a_3, a > a_4$. Điều này

vô lý.



Bài toán 4.6. Chứng minh rằng một dãy bất kì gồm $mn + 1$ số đôi một khác nhau chứa hoặc là dãy tăng gồm $m + 1$ số, hoặc là dãy giảm gồm $n + 1$ số.

Lời giải. Ta đặt tương ứng số hạng a_k của dãy đã cho với hai số x_k và y_k , ở đây x_k là độ dài lớn nhất của dãy tăng bắt đầu từ số a_k , y_k là độ dài lớn nhất của dãy giảm cũng bắt đầu từ a_k . Giả thiết rằng $x_k \leq m$ và $y_k \leq n$ với mọi k . Khi đó số lượng những cặp khác nhau (x_k, y_k) không vượt quá mn . Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại chỉ số $k \neq \ell$ sao cho $x_k = x_\ell$ và $y_k = y_\ell$. Nhưng điều này không thể được. Thật vậy, giả sử cho cụ thể $k < \ell$. Khi đó nếu $a_k < a_\ell$, thì $x_k > x_\ell$, còn nếu $a_k > a_\ell$, thì $y_k > y_\ell$. ☺

Bài toán 4.7. Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố lớn hơn 3, thì p^n không thể là tổng của hai số dương lập phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Trường hợp $p = 2$ hoặc $p = 3$ thì kết luận trên còn đúng không?

Lời giải. Giả sử n là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho p^n là tổng của hai số lập phương, ta cho đó là

$$p^n = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Khi đó $a + b = p^k$ và $a^2 - ab + b^2 = p^{n-k}$. Từ $a + b \geq 2$, nên $k > 0$. Từ $a^2 - ab + b^2 \geq ab > 1$, suy ra $n > k$.

Ta có $3ab = (a + b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = p^{2k} - p^{n-k}$ và $0 < k < n$, suy ra $3ab \vdots p$. Từ $p > 3$, suy ra $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$. Từ $a + b = p^k$, suy ra $a \vdots p$ và $b \vdots p$, nghĩa là $a = pA$ và $b = pB$. Khi đó $A^3 + B^3 = p^{n-3}$, trái với việc chọn n là số nhỏ nhất có tính chất này.

Trường hợp $p = 2$ hoặc $p = 3$ thì kết luận bài toán không đúng. Ta chỉ ra bằng các phản ví dụ.

Với $p = 2$, giả sử $a^3 + b^3 = 2^n$. Nếu $a + b > 2$, thì $a \geq 2$ và $b \geq 2$ và $\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^3 = 2^{n-3}$. Do đó ta chọn $a = b = 2^k$ và $n = 3k + 1$. Kết luận của bài toán sai.

Với $p = 3$, giả sử $a^3 + b^3 = 3^n$. Nếu $a + b = 3^k$ và $a^2 - ab + b^2 = 3^{n-k} \geq 3^2$, thì $3ab \geq 9$ kéo theo $a \geq 3, b \geq 3$ và $\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 3^{n-3}$. Ngược lại ta có $3 = a^2 - ab + b^2 \geq ab$ và khi đó $a + b = 3$. Do đó trong trường hợp này a, b là $2.3^k, 3^k$ và $n = 3k + 2$. Kết luận của bài toán sai. ☺

Bài toán 4.8. Chứng minh rằng nếu n là một số tự nhiên lớn hơn 1, thì $2^n - 1$ không chia hết cho n .

Lời giải. Giả sử $2^n - 1 \vdots n$ với $n > 1$ nào đó. Từ $2^n - 1$ là một số lẻ, suy ra n cũng là số lẻ (để đảm bảo tính chia hết). Cho p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n . Khi đó $2^n - 1 \vdots p$, do đó $2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Theo định lý Fermat nhỏ, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Cho k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^k \equiv 1 \pmod{p}$. Khi đó $n \vdots k$ (vì ngược lại thì $n = kq + r$ với $0 < r < k$ và $1 \equiv 2^n = (2^k)^q 2^r \equiv 2^r \pmod{p}$, trái với k là số nhỏ nhất). Tương tự $p - 1 \vdots k$. Do đó $UCLN(n, p - 1) \vdots k$. Đặt $d = UCLN(n, p - 1)$ khi đó nó phải bằng 1, vì $n \vdots d, d \leq p - 1$ và p là số nguyên tố nhỏ nhất của n . Do đó $k = 1$ và $2 = 2^k \equiv 1 \pmod{p}$, điều này vô lý. ☺

Bài toán 4.9. Với $k \geq 2$, cho $n_1, n_2, \dots, n_k$ là những số nguyên dương sao cho

$$(2^{n_1} - 1) \vdots n_2, (2^{n_2} - 1) \vdots n_3, \dots, (2^{n_{k-1}} - 1) \vdots n_k, (2^{n_k} - 1) \vdots n_1.$$

Chứng minh rằng $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$.

Lời giải. Ta nhận xét nếu $n_i = 1$ với i nào đó, thì $n_{i+1} = 1$ và hiệu quả dây chuyền từ giả thiết suy ra tất cả $a_j = 1$ với mọi $1 \leq j \leq k$. Do đó giả sử không có n_i nào bằng 1. Lấy p_k là số nguyên tố nhỏ nhất, mà $n_k : p_k$. Khi đó $2^{n_{k-1}} - 1 : p_k$ (từ điều kiện của bài toán). Do đó $2^{n_{k-1}} \equiv 1 \pmod{p_k}$.

Lấy m_k là số nguyên dương nhỏ nhất trong các số nguyên dương m thỏa mãn $2^m \equiv 1 \pmod{p_k}$. Ta chứng minh nếu có một số n thỏa mãn $2^n \equiv 1 \pmod{p_k}$ thì $n : m_k$. Thật vậy, giả sử ngược lại $n = m_k p_k + r$ với $0 < r < m_k$. Khi đó $1 \equiv 2^n \pmod{p_k}$ và $2^n = (2^{m_k})^{p_k} 2^r \equiv 2^r \pmod{p_k}$, suy ra $2^r \equiv 1 \pmod{p_k}$. Điều này vô lý với m_k là số nhỏ nhất.

Theo định lý nhỏ Fermat ta có $2^{p_k-1} \equiv 1 \pmod{p_k}$, suy ra $p_k - 1 : m_k$. Từ $2^{n_{k-1}} \equiv 1 \pmod{p_k}$ cũng suy ra $n_{k-1} : m_k$. Do đó $1 < m_k \leq p_k - 1 < p_k$ và vì vậy ước số nguyên tố nhỏ nhất p_{k-1} của n_{k-1} nhỏ hơn p_k . Khi đó $p_k > p_{k-1} > \dots > p_1 > p_k$, điều này vô lý. ☺

Bài toán 4.10. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + y^2 + 1 = xyz$ có nghiệm nguyên dương x, y, z , thì $z = 3$.

Lời giải. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương (x, y, z) với $z \neq 3$. Khi đó $x \neq y$ (nếu ngược lại thì $2x^2 + 1 = x^2 z$ cho ta $x^2(z-2) = 1$ và do đó $x = 1, z = 3$, vô lý). Vì phương trình đối xứng với x, y nên ta có thể giả thiết $x > y$. Giữa tất cả những nghiệm nguyên dương của phương trình (x, y, z) với $x > y$ và $z \neq 3$, ta chọn (x_0, y_0, z_0) là nghiệm với x_0 nhỏ nhất (điều này làm được do nguyên lý thứ tự). Ta xét phương trình bậc hai theo x là $x^2 - y_0 z_0 x + (y_0^2 + 1) = 0$ có nghiệm x_0 . Một nghiệm khác của phương

trình này là $x_1 = y_0 z_0 - x_0 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0}$. Ta có

$$0 < x_1 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0} \leq \frac{y_0^2 + 1}{y_0 + 1} \leq y_0.$$

Ta biết rằng (y_0, x_1, z_0) cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình ban đầu với $y_0 \geq x_1$ và $z_0 \neq 3$. Tuy nhiên $y_0 < x_0$, trái với x_0 là số nhỏ nhất đã chọn. ☺

Bài toán 4.11 (Bungarri 1995). Cho $n \geq 2$ và $0 \leq x_i \leq 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

ở đây $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x .

Lời giải. Khi $x_2, x_3, \dots, x_n$ cố định, thì vế trái bất đẳng thức đã cho là hàm tuyến tính đối với biến x_1 , do đó giá trị lớn nhất đạt được khi $x_1 = 0$ hoặc 1. Tương tự như vậy cho mỗi biến khác x_i . Do đó khi vế trái đạt giá trị lớn nhất với mỗi x_i nhận một trong hai giá trị 0 và 1 và giá trị của vế trái là một số nguyên. Ta có

$$\begin{aligned} 2((x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1)) &= \\ &= n - (1 - x_1)(1 - x_2) - (1 - x_2)(1 - x_3) - \dots \\ &\quad - (1 - x_n)(1 - x_n) - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \dots - x_n x_1. \end{aligned}$$

Vì $0 \leq x_i \leq 1$, biểu thức trên lớn nhất là bằng n . Do đó chia hai vế của đẳng thức cho 2 và lấy kết quả nguyên lớn nhất, ta có

$$\max((x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1)) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 4.12. Cho k là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số chính phương dạng $n2^k - 7$ với n là một số nguyên dương.

Lời giải. Ta chứng minh tồn tại một dãy $\{a_k\}$ những số nguyên sao cho $a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$ và không là số lớn nhất là đủ. Đặt $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Với $k \geq 3$, giả sử $a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$. Khi đó hoặc là $a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^{k+1}}$ hoặc là $a_k^2 \equiv 2^k - 7 \pmod{2^{k+1}}$.

Trong trường hợp thứ nhất, đặt $a_{k+1} = a_k$.

Trong trường hợp thứ hai, đặt $a_{k+1} = a_k + 2^{k-1}$. Khi đó từ $k \geq 3$ và a_k là số lẻ, ta có

$$\begin{aligned} a_{k+1}^2 &= a_k^2 + 2^k a_k + 2^{2k-2} \\ &= a_k^2 + 2^k(a_k + 1) - 2^k + 2^{2k-2} \equiv a_k^2 - 2^k \equiv -7 \pmod{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Cả hai trường hợp trên đều có $a_k^2 \geq 2^k - 7$ với mọi k , nên dãy đã cho không có số lớn nhất. ☺

Bài toán 4.13. Cho a, b, c là các số nguyên sao cho $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$. Chứng minh rằng abc là lập phương của một số nguyên.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $UCLN(a, b, c) = 1$ (ngược lại, nếu $d = UCLN(a, b, c)$, thì với $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$, $c' = \frac{c}{d}$, đẳng thức trên vẫn còn đúng cho a', b', c' và $a'b'c'$ là lập phương của một số nguyên khi và chỉ khi abc là lập phương). Nhân hai vế của đẳng thức đã cho với abc , ta nhận được đẳng thức mới $a^2c + b^2a + c^2b = 3abc$.

Nếu $abc = \pm 1$, thì ta có điều cần chứng minh. Nếu $abc \neq \pm 1$, thì ta lấy p là một ước số nguyên tố của abc . Vì $UCLN(a, b, c) = 1$, đẳng thức mới ở trên kéo theo có đúng hai số trong a, b, c chia hết cho p . Ta giả thiết rằng a, b chia hết cho p nhưng c không chia hết cho p . Giả sử số bội lớn nhất của p mà a, b chia hết cho nó, lần lượt là m, n .

Nếu $n < 2m$, thì $n + 1 \leq 2m$ và các số $a^2c, b^2c, 3abc$ đều chia hết

cho p^{n+1} . Do đó $c^2b \vdots p^{n+1}$ suy ra $c \vdots p$, điều này vô lý.

Nếu $n > 2m$ thì $n \geq 2m + 1$ và các số $a^2b, b^2a, 3abc$ đều chia hết cho p^{2m+1} . Do đó $a^2c \vdots p^{2m+1}$ suy ra $c \vdots p$, điều này vô lý.

Do đó, $n = 2m$ và abc chia hết cho p^{3m} , do p là ước số nguyên tố bất kì của a, b, c nên suy ra abc phải là số lập phương. ☺

Bài toán 4.14. Chứng minh rằng với mọi bộ ba hàm số $f, g, h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ đều tồn tại các số x, y, z trong $[0, 1]$ sao cho

$$|f(x) + g(y) + h(z) - xyz| \geq \frac{1}{3}.$$

Lời giải. Giả sử ngược lại với tất cả x, y, z trong $[0, 1]$, ta có $|f(x) + g(y) + h(z) - xyz| < \frac{1}{3}$. Khi đó ta xét với các điểm biên

$$\begin{aligned} |f(0) + g(0) + h(0)| &< \frac{1}{3}, & |f(0) + g(y) + h(z)| &< \frac{1}{3}, \\ |f(x) + g(0) + h(z)| &< \frac{1}{3}, & |f(x) + g(y) + h(0)| &< \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Từ

$$\begin{aligned} f(x) + g(y) + h(z) &= \frac{f(0) + g(y) + h(z)}{2} + \frac{f(x) + g(0) + h(z)}{2} \\ &\quad + \frac{f(x) + g(y) + h(0)}{2} + \frac{-f(0) - g(0) - h(0)}{2}, \end{aligned}$$

theo bất đẳng thức tam giác, $\frac{f(x) + g(y) + h(z)}{2} < \frac{2}{3}$.

$$\text{Do đó } f(1) + g(1) + h(1) < \frac{2}{3}.$$

Ta lại có $|1 - f(1) - g(1) - h(1)| < \frac{1}{3}$ (theo giả sử trên).

Cộng hai bất đẳng thức sau cùng và áp dụng bất đẳng thức tam giác nhận được $1 < 1$, điều này vô lý. Vậy bài toán đúng. ☺

Bài toán 4.15. Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương sao cho tích của hai số trong bộ số cộng với 1 chia hết cho số còn lại.

Lời giải. Ta có thể giả sử ba số cần tìm có thứ tự $a \geq b \geq c \geq 1$. Theo giả thiết đã cho thì $ab + 1 : c$, $bc + 1 : a$ và $ca + 1 : b$. Suy ra $(ab + 1)(bc + 1)(ca + 1) : abc$. Do đó $ab + bc + ca + 1 : abc$, nghĩa là

$$ab + bc + ca + 1 = k \cdot abc, \quad (4.1)$$

ở đây $k \in \mathbb{Z}$.

Do a, b, c là những số nguyên lớn hơn 1 nên ta có bất đẳng thức $ab + bc + ca + 1 \leq 4 \cdot abc$, suy ra $k \leq 4$.

- Trường hợp $k = 4$: Suy ra $a = b = c = 1$ thỏa mãn (4.1).
- Trường hợp $k = 3$: Từ (4.1) suy ra $3abc \leq 4ab$, nghĩa là $c \leq 1$, nên chỉ có $c = 1$. Thay $c = 1$ vào (4.1) ta có $ab + a + b + 1 = 3ab$, tương đương với $(2a - 1)(2b - 1) = 3$. Vậy chỉ có $a = 2, b = 1$.
- Trường hợp $k = 2$: Từ (4.1) suy ra $2abc \leq 4ab$, nghĩa là $c \leq 2$, nên có $c = 1$ hoặc $c = 2$. Thay $c = 1$ vào (4.1) ta có $ab + a + b + 1 = 2ab$, tương đương với $(a - 1)(b - 1) = 2$. Vậy chỉ có $a = 3, b = 2$. Trường hợp $c = 2$ phương trình không có nghiệm nguyên.
- Trường hợp $k = 1$: Từ (4.1) suy ra $abc \leq 4ab$, nghĩa là $c \leq 4$. nên ta xét $c = 1$. Thay $c = 1$ vào (4.1) ta có $ab + a + b + 1 = ab$ trường hợp này không có nghiệm. Xét $c = 2$ ta có $ab + 2a + 2b + 1 = 2ab$, suy ra $(a - 2)(b - 2) = 5$, vậy ta tìm được $a = 7$ và $b = 3$. Còn các trường hợp $c = 3$ và $c = 4$ phương trình không có nghiệm.

Vậy nghiệm của bài toán là $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 2, 1)$ và $(7, 3, 2)$. ☺

4.2. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

Khi vai trò của các ẩn số như nhau ta có thể sắp xếp lại các ẩn số để giảm bớt được độ phức tạp của bài toán. Chính nhờ sự sắp xếp ta đi xét những phần tử nhỏ nhất hoặc lớn nhất để giải bài toán.

Bài toán 4.16. Cho x, y, z là những số thực sao cho $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng $x + y + z \leq xyz + 2$.

Lời giải. Nếu một trong các số x, y, z là số không dương, giả sử đó là z , thì

$$2 + xyz - x - y - z = (2 - x - y) - z(1 - xy) \geq 0,$$

vì $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq 2$ và $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \leq 1$. Vì thế ta có thể giả thiết x, y, z là các số dương và sắp xếp theo thứ tự $0 < x \leq y \leq z$.

Nếu $z \leq 1$, thì

$$2 + xyz - x - y - z = (1 - x)(1 - y) + (1 - z)(1 - xy) \geq 0.$$

Nếu $z > 1$, thì

$$(x + y) + z \leq \sqrt{2((x + y)^2 + z^2)} = 2\sqrt{xy + 1} \leq xy + 2 \leq xyz + 2.$$



Bài toán 4.17. Tìm tất cả nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy + yz + zx = xyz + 2.$$

Lời giải. Vì tính đối xứng của ẩn số ta giả sử rằng $x \leq y \leq z$. Chia hai vế của phương trình cho xyz , ta nhận được $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{2}{xyz}$. Do đó

$$1 < 1 + \frac{2}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \leq \frac{3}{x}.$$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = 2$. Nếu $x = 1$, thì suy ra $y = z = 1$. Nếu $x = 2$, thì $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{yz}$. Do đó $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y}$. Suy ra $y < 4$. Bằng cách kiểm tra đơn giản ta có $y = 3, z = 4$. Tóm lại nghiệm của phương trình là $(x, y, z) = (1, 1, 1), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2)$. ☺

Bài toán 4.18. *Tìm những nghiệm nguyên dương của phương trình sau*

$$4(x + y + z) = xyz.$$

Lời giải. Vai trò của x, y, z như nhau nên ta có thể giả thiết là $x \geq y \geq z$. Từ phương trình đã cho ta có $xyz = 4(x + y + z) \leq 12x$, suy ra $yz \leq 12$. Từ thứ tự các biến lại suy ra $z^2 \leq 12$. Số bình phương từ 1 đến 12 chỉ có $\{1, 4, 9\}$, vậy khả năng z chỉ có thể là $\{1, 2, 3\}$.

Nếu $z = 1$, thì $xy = 4(x + y + 1)$, hay là $(x - 4)(y - 4) = 20$. Cho $x - 4$ và $y - 4$ là ước số của 20 với điều kiện là $x - 4 \geq y - 4 \geq -3$, ta được các cặp (x, y) như sau $(24, 5), (14, 6), (9, 8)$. Khi đó ta có các nghiệm của phương trình đã cho $(24, 5, 1), (14, 6, 1), (9, 8, 1)$.

Nếu $z = 2$, thì $2xy = 4(x + y + 2)$, phân tích ra thừa số $(x - 2)(y - 2) = 8$. Cho $x - 2$ và $y - 2$ là những ước số của 8 với chú ý là $x - 2 \geq y - 2$, ta nhận được (x, y) là $(10, 3)$ và $(6, 4)$. Khi đó có thêm nghiệm $(10, 3, 2), (6, 4, 2)$.

Nếu $z = 3$, thì $3xy = 4(x + y + 3)$, phương trình không có nghiệm nguyên. ☺

Bài toán 4.19. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Lời giải. Vai trò của y, z như nhau nên ta có thể giả thiết $y \geq z$. Bình

phương hai vế của phương trình, ta nhận được

$$x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz}$$

suy ra

$$(x - y - z)^2 + 4\sqrt{3}(x - y - z) = 4yz - 12. \quad (4.2)$$

Từ (4.2) suy ra $x - y - z = 4yz - 12 = 0$ vì nếu $x - y - z \neq 0$ thì vế trái là một số vô tỉ, còn vế phải là biểu thức hữu tỉ, điều này không thể được. Suy ra $yz = 3$, vậy $y = 3$ và $z = 1$. Ta có $x = y + z = 4$. Nghiệm của phương trình đã cho là $(4, 3, 1)$ và $(4, 1, 3)$. ☺

Bài toán 4.20. *Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau sao cho biểu thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$ nhận giá trị nguyên dương.*

Lời giải. Đặt $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$. Ta có

$$T \cdot abc = ab + bc + ca + a + b + c. \quad (4.3)$$

Từ (4.3) suy ra không thể có: Một trong ba số là số lẻ còn hai số kia là số chẵn. Thật vậy, nếu một trong ba số là số lẻ còn hai số kia là số chẵn thì vế trái (4.3) là một số chẵn, còn vế phải của nó là một số lẻ, điều này vô lý.

Tương tự, nếu hai số trong bộ số là lẻ và một số kia là chẵn thì hai vế của (4.3) cũng có tính chẵn lẻ khác nhau, vô lý.

Từ đó suy ra tất cả a, b, c phải có cùng tính chẵn lẻ.

Vì vai trò của a, b, c như nhau và đôi một khác nhau nên ta có thể giả thiết rằng $a < b < c$.

Nếu $a \geq 3$ thì $b \geq 5, c \geq 7$ suy ra $T < 1$, điều này không thể xảy ra vì T phải là số nguyên. Vậy chỉ còn $a = 1$ hoặc $a = 2$.

Với $a = 1$ thì $b \geq 3, c \geq 5$ suy ra $1 < T < 3$, vậy chỉ còn $T = 2$.

Thay $a = 1$ và $T = 2$ vào (4.3) ta nhận được $2(b+c) + 1 = bc$, nghĩa là $(b-2)(c-2) = 5$. Từ đó suy ra $b = 3, c = 7$.

Với $a = 2$ thì $b \geq 4, c \geq 6$ suy ra $1 \leq T < 2$, vậy $T = 1$. Thay $a = 2$ và $T = 1$ vào (4.3) ta nhận được $bc = 3b + 3c + 2$, biến đổi thành tích $(b-3)(c-3) = 11$. Từ đó suy ra $b = 4, c = 14$.

Tóm lại, bài toán có nghiệm $(1, 3, 7)$ và $(2, 4, 14)$. ☺

Bài toán 4.21. Tìm các số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $3x + 1 \vdots y$ và $3y + 1 \vdots x$.

Lời giải. Vai trò của x, y như nhau nên ta có thể giả sử $x \geq y$. Khi đó xảy ra các trường hợp sau :

- Nếu $x = y$ thì $3x + 1 \vdots x$ suy ra $1 \vdots x$, do đó $x = 1$, điều này trái với giả thiết $x > 1$, nên x, y không thể bằng nhau.
- Xét $x > y$ thì tồn tại số nguyên p sao cho $3y + 1 = px$. Mặt khác, vì $3x > 3y$ suy ra $3x \geq 3y + 1 = px$. Dấu bằng không xảy ra vì $3y + 1$ không chia hết cho 3, nên ta chỉ có $3x > px$. Từ đây chỉ có $p = 1$ hoặc $p = 2$.

Nếu $p = 1$ thì $3y + 1 = x$ suy ra $3(3y + 1) \vdots y$, do đó $4 \vdots y$ suy ra $y = 2$ hoặc $y = 4$.

Nếu $p = 2$ thì $2x = 3y + 1$ suy ra $9y + 5 \vdots y$, nghĩa là $5 \vdots y$. Suy ra $y = 5$.

Tóm lại bài toán có nghiệm: $(7, 2), (13, 4), (2, 7), (4, 13), (8, 5), (5, 8)$.

☺

Bài toán 4.22. Tìm ba số nguyên dương đôi một khác nhau x, y, z thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2.$$

Lời giải. Các số cần tìm đôi một khác nhau và có vai trò như nhau nên ta giả thiết $x < y < z$. Sử dụng bất đẳng thức $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ với mọi $x, y, z \geq 0$. Ta suy ra $x+y+z \leq 9$. Dấu bằng không thể xảy ra vì x, y, z đôi một khác nhau vậy chỉ còn $x+y+z \leq 8$. Mặt khác, $x+y+z \geq 1+2+3=6$. Suy ra $6 \leq x+y+z \leq 8$. Từ đẳng thức $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^2$ suy ra không thể có $z \geq 4$, vì khi đó vế trái của đẳng thức đã cho lớn hơn 64 còn vế phải là bình phương của một trong các số $\{6, 7, 8\}$ đều nhỏ hơn hoặc bằng 64. Vậy chỉ còn $x=1, y=2, z=3$, ta thử vào phương trình đã cho thì nó thỏa mãn. ☺

4.3. CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN

Phương trình hàm là phương trình có ẩn là hàm số. Đặc biệt hàm số có miền xác định và miền giá trị là những tập hợp con của $\mathbb{N}$ hoặc $\mathbb{Z}$. Đối với phương trình hàm loại này, phương pháp đại lượng cực biên cũng phát huy tác dụng giải rất tốt. Ta nhắc lại một số khái niệm về hàm số sẽ dùng trong phần này.

Định nghĩa 4.1. Cho X là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$. Một hàm số f từ X vào $\mathbb{R}$ là một phép tương ứng với mỗi x thuộc X cho ứng với duy nhất một số thực, kí hiệu là $f(x)$, mà nó gọi là *ảnh* của x thông qua f . Ta thường kí hiệu hàm số $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Tập hợp X được gọi là *miền xác định* của hàm f . Tập hợp $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ được gọi là *miền giá trị* của hàm f .

Ví dụ: 1. Mỗi $x \in \mathbb{R}$ cho tương ứng với $f(x) = x^2$. Sự tương ứng này xác định một hàm số từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

2. Mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1 cho tương ứng với số $f(n)$ là ước

số nguyên tố lớn nhất của nó. Sự tương ứng này xác định một hàm số từ $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ vào $\mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 4.2. Cho hàm số $f : X \rightarrow Y$. Hàm số f được gọi là *hàm toàn ánh* (còn gọi là hàm lên) từ X vào Y nếu $Y = f(X)$, nghĩa là mọi $y \in Y$ phải là ảnh của một điểm nào đó của X .

Hàm số f được gọi là *hàm đơn ánh* từ X vào Y nếu với mọi $y \in Y$ không thể là ảnh của hơn một điểm đối với f . Trong thực tế dấu hiệu nhận biết hàm số f là hàm đơn ánh như sau : Với mọi $a, b \in X$, nếu $f(a) = f(b)$ thì $a = b$.

Hàm số f là một *hàm song ánh* từ X vào Y nếu nó vừa là hàm lên vừa là hàm đơn ánh.

Ví dụ: Hàm số $f(x) = x^2$ không phải là hàm lên từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, vì -1 không là ảnh của điểm nào trên $\mathbb{R}$ thông qua f . Nhưng hàm số $f(x) = x^2$ là hàm lên từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}^+$.

Hàm số f không phải là hàm đơn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, cũng như từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}^+$, vì luôn có $f(1) = 1 = f(-1)$. Ngược lại hàm số f là hàm đơn ánh từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}$, cũng như vậy từ $\mathbb{R}^-$ vào $\mathbb{R}$.

Hàm số f là hàm song ánh từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$ (hoặc $\mathbb{R}^-$ vào $\mathbb{R}^+$).

4.3.1. Sử dụng nguyên lý thứ tự của số tự nhiên

Bài toán 4.23 (Rumania 1986). Cho $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ là hàm lên và $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ là hàm đơn ánh sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$, thỏa mãn $f(n) \geq g(n)$. Chứng minh rằng $f(n) = g(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử tồn tại một số nguyên k sao cho $f(k) \neq g(k)$. Khi đó tập hợp $\mathcal{A} = \{n | n \in \mathbb{N}, f(n) \neq g(n)\}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$, vì thế tập

hợp con $\mathcal{B} = \{g(n) | n \in \mathcal{A}\}$ cũng là tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$. Theo nguyên lý thứ tự $\mathcal{B}$ có phần tử nhỏ nhất, kí hiệu đó là $g(m)$ với $m \in \mathcal{A}$. Ta sẽ chứng minh rằng không thể có $g(m) < f(m)$.

Thật vậy, vì f là hàm lên, nên tồn tại một số nguyên ℓ sao cho $f(\ell) = g(m) < f(m)$. Thực tế, $\ell \neq m$. Vì g là hàm đơn ánh, nên khi đó $g(\ell) \neq g(m) = f(\ell)$, từ đó suy ra $\ell \in \mathcal{A}$ và $g(\ell) < f(\ell) = g(m)$, điều này trái với cách chọn $g(m)$ là phần tử nhỏ nhất của $\mathcal{B}$.

Vì thế, mọi số tự nhiên k đều có $f(k) = g(k)$. ☺

Bài toán 4.24. Cho $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ là hàm song ánh. Chứng minh rằng tồn tại ba số tự nhiên k, m, n sao cho $k < m < n$ và

$$f(k) + f(n) = 2f(m).$$

Lời giải. Do f là hàm song ánh từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ nên tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f(0) < f(n)$ (nếu ngược lại thì $f(0) + 1$ sẽ trùng với một giá trị khác của f).

Từ đó ta suy ra tập hợp $\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N} | f(0) < f(n)\}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{N}^*$. Vậy tập hợp này có phần tử nhỏ nhất, kí hiệu đó là m . Suy ra $0 < m$ và $f(0) < f(m)$.

Đặt $\ell = 2f(m) - f(0)$. Vì f là hàm song ánh, nên tồn tại một số tự nhiên n để $f(n) = \ell$. Vì vậy, ta có $f(n) + f(0) = 2f(m)$. Do đó $f(n) = f(m) + f(m) - f(0) > f(m) > f(0)$. Suy ra $n \in \mathcal{E}$. Do m là phần tử nhỏ nhất nên $m < n$.

Chọn $k = 0$, ta có $k < m < n$ và $f(k) + f(n) = 2f(m)$. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 4.25 (Rumania 1986). Tìm tất cả những hàm lên $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ có tính chất sau: Với mọi $n \in \mathbb{N}$, bất đẳng thức sau đúng

$$f(n) \geq n + (-1)^n.$$

Lời giải. Nếu ta đặt $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $g(n) = n + (-1)^n$, thì g thỏa mãn bất đẳng thức đã cho. Hơn nữa, hàm số g là song ánh. Ta chứng minh rằng với mọi hàm f cần tìm thì phải có $f = g$.

Thật vậy, ta chứng minh một khẳng định tổng quát hơn : Nếu f và g là hai hàm xác định trên tập số tự nhiên sao cho $f(n) \geq g(n)$ với mọi n , f là hàm lên và g là hàm song ánh, thì $f = g$. Chứng minh dựa trên cơ sở nguyên lý thứ tự.

Giả sử $f \neq g$, khi đó tồn tại n_0 sao cho $f(n_0) > g(n_0)$. Nếu ta đặt $M = g(n_0)$, thì tập hợp $\mathcal{A} = \{k \mid k \in \mathbb{N}, g(k) \leq M\}$ có đúng $M + 1$ phần tử, vì g là hàm song ánh. Mặt khác, từ $f \geq g$ và n_0 nằm trong $\mathcal{A}$, tập hợp $\mathcal{B} = \{k \mid k \in \mathbb{N}, f(k) \leq M\}$ nằm trong $\mathcal{A}$, nhưng có ít nhất một phần tử, đó là n_0 . Do đó giá trị của f không vét cạn được tất cả các số nhỏ hơn $M + 1$, điều này trái với giả thiết f là hàm lên.

Vì vậy, $f(n) = g(n) = n + (-1)^n$ là nghiệm duy nhất. ☺

Bài toán 4.26. Tìm tất cả cặp hàm số $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(n) + f(n + g(n)) = f(n + 1).$$

Lời giải. Một khả năng nghiệm thấy ngay là hàm số f trùng với hàm hằng 0 và hàm số g bất kì. Một khả năng khác là hàm số g trùng với hàm hằng 0 và $f(n) = 2^n f(0)$.

Ta đi tìm những cặp hàm số còn lại khác. Từ phương trình đã cho ta có $f(n + 1) > f(n)$ với mọi n , nghĩa là f là hàm tăng ngặt. Nếu $g(n) \geq 1$ thì $f(n + 1) \leq f(n + g(n))$, do đó $f(n) = 0$. Bằng quy nạp ngược ta chỉ ra rằng $f(n - 1) = f(n - 2) = \dots = f(0) = 0$.

Do đó, để f không đồng nhất với 0 phải tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $g(k) = 0$ với mọi $k \geq m$. Giả sử m là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $g(m - 1) \neq 0$. Khi đó $f(k) = 0$ với $k \leq m - 1$ và $f(k) = 2^{k-m} f(m)$ với

$k > m$, như vậy với $k \geq m$ hàm số f tăng ngặt. Tính chất này của hàm f cùng với $f(n) + f(n+g(n)) = f(n+1)$ kéo theo $n+g(n)$ không thể đạt tới m . Do đó $g(n) \leq m-n$. Như vậy, tất cả nghiệm của f, g thỏa mãn $f(0) = f(1) = \dots = f(m-1) = 0, f(k) = 2^{(k-m)}a$ với mọi $k \geq m$, a bất kỳ; và $g(k) \leq m-k$ với $k \leq m, g(k) = 0$ với $k \geq m$. ☺

Bài toán 4.27 (IMO 1996). Tìm các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho

$$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

với mọi số tự nhiên m, n .

Lời giải. Dễ thấy $f \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình. Sau đây ta đi tìm nghiệm f không trùng với 0. Thay $m = n = 0$ vào phương trình ta nhận được $f(0) = 0$. Nếu ta chỉ cho $n = 0$ thì $f(f(m)) = f(m)$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Đặt $\mathcal{T}$ là miền xác định của f . Theo chú ý trên, $\mathcal{T}$ bao gồm các số nguyên n , mà $f(n) = n$.

Nếu $m, n \in \mathcal{T}$, thì phương trình hàm kéo theo $f(m+n) = m+n$, do đó $m+n \in \mathcal{T}$. Ngược lại, nếu $m, n \in \mathcal{T}$ và $n \geq m$, thì $f(m) + f(n-m) = f(n) = n$, nên $f(n-m) = n-m$, do đó $n-m \in \mathcal{T}$.

Từ đó, ta chứng minh $\mathcal{T}$ bao gồm tất cả bội của một số tự nhiên k nào đó. Thật vậy, ta lấy k là phần tử khác 0 nhỏ nhất trong $\mathcal{T}$ (phần tử như vậy tồn tại vì f không trùng với hàm hằng 0). Khi đó mọi bội của k đều nằm trong $\mathcal{T}$. Ngược lại, mọi số nguyên $m \in \mathcal{T}$ có thể biểu diễn dưới dạng $qk+r$ với $0 \leq r < k$. Vì m và qk thuộc $\mathcal{T}$, suy ra r cũng thuộc $\mathcal{T}$. Mặt khác, k là số khác 0 nhỏ nhất thuộc $\mathcal{T}$ và $r < k$, vì thế ta phải có $r = 0$. Do đó $\mathcal{T}$ bao gồm chỉ có các bội số của k .

Vì $f(n)$ là bội số của k với mọi n , ta có thể viết $f(r) = n_r.k$ với

$r = 0, 1, \dots, k-1$, ở đây $n_0 = 0$. Khi đó với mọi số m biểu diễn như $qk + r$ với $0 \leq r < k$,

$$f(m) = f(qk + r) = f(r + f(qk)) = f(f(r)) + f(qk) = (n_r + q)k.$$

Mặt khác, hàm số bất kì dạng $f(qk + r) = (n_r + q)k$ thỏa mãn phương trình đã cho. Thật vậy, nếu $m = qk + r$ và $n = sk + t$ với $0 \leq r, t < k$, khi đó

$$\begin{aligned} f(m + f(n)) &= f(qk + r + sk + n_t k) = f((q + s + n_t)k + r) \\ &= (q + s + n_t)k + n_r k = (q + n_r)k + (s + n_t)k \\ &= f(qk + r) + f(sk + t) = f(m) + f(n) \\ &= f(f(m)) + f(n). \end{aligned}$$

Do đó hàm số cần tìm là $f \equiv 0$ và tất cả hàm số có dạng $f(r) = n_r \cdot k$ với $r = 0, 1, \dots, k-1$, ở đây $n_0 = 0$ và k là số nhỏ nhất thuộc $\mathcal{T}$. ☺

Bài toán 4.28 (IMO 1977). Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(n+1) > f(f(n))$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. *Phương pháp 1:* Ta dùng nguyên lý thứ tự để giải bài toán này. Ta xét tập hợp

$$\{f(f(1)), f(2), f(f(2)), f(3), f(f(3)), \dots, f(n), f(f(n)), \dots\}.$$

Chú ý rằng đây là những số mà chúng xuất hiện trong bất đẳng thức $f(f(n)) < f(n+1)$, nên nó là tập con của tập số nguyên dương khác rỗng. Tập hợp này có phần tử nhỏ nhất, nhưng phần tử nhỏ nhất này không thể có dạng $f(n+1)$ vì khi đó nó lại lớn hơn $f(f(n))$. Vậy nó chỉ có thể là dạng $f(f(n))$. Lý luận tương tự cũng chỉ ra rằng cho giá trị nhỏ nhất với n này, $f(n) = 1$ (nếu n là một số lớn hơn 1, thì

ta nhận được $1 = f(n) > f(f(n-1))$, điều này vô lý). Do đó $f(1) = 1$ và $f(n) > 1$ với $n > 1$.

Đặt $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}$. Ta xét hàm số $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Chứng minh tương tự phần trên cho hàm f này, ta cũng nhận được $f(2) = 2$ và $f(n) > 2$ với $n > 2$. Bằng phương pháp quy nạp ta cũng chứng minh được $f(k) = k$ và $f(n) > k$ với $n > k$, như vậy chỉ có nghiệm $f(n) = n$ duy nhất của bài toán.

Phương pháp 2: Giả sử f là nghiệm của phương trình đã cho. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $f(n+1) > f(f(n)) \geq 0$ và khi đó vì $f(n+1)$ là số nguyên nên $f(n+1) \geq 1$. Đặt $f_2(n) = f(n+1) - 1$. Khi đó f_2 là hàm số từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$.

$$f_2(n) + 1 = f(n+1) > f(f(n)) = f(f_2(n-1) + 1) = f_2(f_2(n-1)) + 1,$$

nghĩa là $f_2(n+1) > f_2(f_2(n))$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, như vậy f_2 cũng là nghiệm của bài toán. Thực tế, $f_2(n+1) \geq 1$ thì $f(n+2) \geq 2$.

Từ điều kiện của bài toán, ta cũng có thể chứng minh được, với mọi số nguyên dương n và số tự nhiên k , ta có $f(n+k) \geq k$. Cụ thể, với $k = 0$ thì $f(n) \geq n$ với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó ta nhận được $f(n+1) > f(f(n)) \geq f(n)$, điều này chỉ ra rằng f là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{N}^*$, nên bất đẳng thức trên cho ta $n+1 > f(n) \geq n$, nhưng $f(n)$ có giá trị nguyên nên suy ra chỉ có thể $f(n) = n$. Thử lại đồng nhất thức đúng là nghiệm bài toán. ☺

4.3.2. Dùng phương pháp quy nạp toán học

Bài toán 4.29 (IMO* 1995). Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 95)$$

với các số nguyên dương m, n . Tính giá trị của hàm số $\sum_{k=1}^{19} f(k)$.

Lời giải. Giả sử f là nghiệm của bài toán. Đặt $g(n) = f(n) - 95$ và $m + 95 = k$. Khi đó với mọi số nguyên n và k ($n \geq 1, k \geq 96$), ta có

$$g(k + g(n)) = n + g(k). \quad (4.4)$$

Cộng hai vế đẳng thức trên với k và tác dụng hàm số g lên hai vế ta nhận được $g(k + g(k + g(n))) = g(k + n + g(k))$. Nhưng theo (4.4), một vế của phương trình có kết quả

$$g(k + g(k + g(n))) = k + g(n) + g(k)$$

và một vế khác có $g(k + n + g(k)) = k + g(k + n)$. Suy ra

$$g(k + n) = g(n) + g(k). \quad (4.5)$$

với mọi số nguyên n và k ($n \geq 1, k \geq 96$).

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp : Với mọi số nguyên $p \geq 1$, luôn có đẳng thức $g(p) = pg(1)$. Thật vậy, dễ thấy đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử đẳng thức đúng với $p \geq 1$ cố định nào đó, khi đó từ (4.5) và giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} g(p + 1 + 96) &= g(97) + g(p) = g(96) + g(1) + g(p) \\ &= g(96) + (p + 1)g(1). \end{aligned}$$

Mặt khác theo (4.5), ta có

$$g(p + 1 + 96) = g(p + 1) + g(96).$$

So sánh hai đẳng thức trên ta nhận được $g(p + 1) = (p + 1)g(1)$. Mệnh đề được chứng minh.

Với mọi số nguyên $n \geq 1$ và $k \geq 96$, ta có

$$g(k + g(n)) = (k + g(n))g(1) = (k + ng(1))g(1) = kg(1) + n(g(1))^2$$

và theo (4.4), $g(k + g(n)) = n + g(k) = n + kg(1)$. So sánh hai đẳng thức và rút gọn còn $(g(1))^2 = 1$ và do đó $g(1) = 1$.

Suy ra, với mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có $g(n) = n$, nghĩa là $f(n) = n + 95$. Thử lại với phương trình ban đầu thì đây thực sự là nghiệm.

$$\text{Để tính được } \sum_{k=1}^{19} f(k) = 19 \times 95 + \frac{19 \times 20}{2} = 1995. \quad \text{☺}$$

Bài toán 4.30 (Putnam 1963). Cho $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là hàm số tăng ngặt sao cho $f(2) = 2$ và $f(mn) = f(m)f(n)$ đối với mọi cặp số nguyên tố cùng nhau m và n . Chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n .

Lời giải. Giả sử $f(n)$ thỏa mãn những tính chất đã cho. Chứng minh dựa vào sự phân tích ra thừa số của số nguyên dương.

Tính giá trị $f(3)$: Vì hàm số tăng, ta có

$$f(3)f(5) = f(15) < f(18) = f(2)f(9),$$

do đó $f(3)f(5) < 2f(9)$ và $f(9) < f(10) = f(2)f(5) = 2f(5)$. Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta nhận được $f(3)f(5) < 4f(5)$. Do đó $f(3) < 4$. Ta lại có $f(3) > f(2) = 2$. Vì vậy $f(3) = 3$.

Từ 2 và 3 là các số nguyên tố cùng nhau, ta suy ra $f(6) = 6$, và tính đơn điệu của hàm số suy ra $f(4) = 4$ và $f(5) = 5$. Ta chứng minh bằng quy nạp $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy, với $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ khẳng định trên đúng, như phần trên đã chỉ ra. Cho $n > 6$ và giả sử rằng $f(k) = k$ với $k < n$. Ta cần chứng minh rằng $f(n) = n$. Ta xét $2^r(2m+1)$ là số nguyên chẵn nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng n mà nó không phải là lũy thừa của 2. Số này là một trong các số $n, n+1, n+2, n+3$, và từ $n > 6$ nên cả hai số

2^r và $2m+1$ thực sự nhỏ hơn n . Do đó

$$f(2^r(2m+1)) = f(2^r)f(2m+1) = 2^r(2m+1)$$

(theo giả thiết quy nạp). Từ tính tăng ngặt của hàm số kết hợp với $f(n-1) = n-1$, suy ra $f(k) = k$ với $k \leq 2^r(2m+1)$. Nghĩa là $f(n) = n$ và đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 4.31 (IMO* 1995). Tìm hàm song ánh $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho với mọi m, n ,

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n).$$

Lời giải. Cách giải tương tự như bài trước, cũng dùng phân tích ra thừa số của một số nguyên dương. Giả sử hàm số f là nghiệm của bài toán. Đặt $\mathcal{A} = \{3n+1 | n \in \mathbb{N}\}$ và $\mathcal{B} = \{4n+1 | n \in \mathbb{N}\}$. Định nghĩa hàm số $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ theo f bằng công thức

$$g(k) = 4f\left(\frac{k-1}{3}\right) + 1.$$

Hàm số này hoàn toàn xác định và có thể kiểm tra được ngay hàm số này là hàm song ánh từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$, với hàm ngược được cho bởi

$$g^{-1}(\ell) = 3f^{-1}\left(\frac{\ell-1}{4}\right) + 1.$$

Với $m, n \in \mathbb{N}$, dùng định nghĩa của hàm số f và g , ta nhận được

$$\begin{aligned} g((3m+1)(3n+1)) &= g(3(3mn+m+n)+1) = 4f(3mn+m+n) + 1 \\ &= 4(4f(m)f(n) + f(m) + f(n)) + 1 \\ &= (4f(m)+1)(4f(n)+1) = g(3m+1)g(3n+1). \end{aligned}$$

Như vậy g có tính chất nhân tính, theo nghĩa $g(xy) = g(x)g(y)$ với mọi $x, y \in \mathcal{A}$.

Ngược lại, cho một hàm song ánh có tính chất nhân tính từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$, ta có thể xây dựng hàm f có tính chất như bài toán đã ra bằng cách đặt $f(x) = \frac{g(3x+1)-1}{4}$.

Phần còn lại ta chỉ còn biểu diễn cụ thể hàm song ánh này. Kí hiệu hai tập hợp $\mathcal{A}_1$ và $\mathcal{A}_2$ là những số nguyên tố tương ứng ở các dạng $3n+1$ và $3n+2$ và các tập hợp $\mathcal{B}_1$ và $\mathcal{B}_2$ là các tập số nguyên tố tương ứng có dạng $4n+1$ và $4n+3$. Vì mỗi tập hợp trên đều là vô hạn, nên tồn tại hàm song ánh h từ $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ vào $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ mà nó ánh xạ $\mathcal{A}_1$ song ánh lên $\mathcal{B}_1$ và $\mathcal{A}_2$ song ánh lên $\mathcal{B}_2$. Ta định nghĩa g như sau: $g(1) = 1$ và với $n > 1$, $n \in \mathcal{A}$, ta phân tích n ra thừa số nguyên tố $n = \prod p_i$ (có thể p_i lặp lại nhiều lần), khi đó định nghĩa $g(n) = \prod h(p_i)$.

Chú ý rằng g được hoàn toàn xác định, vì nếu $n \in \mathbb{A}$, thì phải có số chẵn số nguyên tố trong $\mathcal{P}_2$ mà n chia hết cho chúng. Mỗi một trong các số nguyên tố này, hàm h cho giá trị một số nguyên tố trong $\mathcal{B}_2$ và vì tồn tại số chẵn số nguyên tố như vậy, nên tích của chúng nằm trong $\mathcal{B}$. Tính chất nhân tính của g suy ra dễ dàng. ☺

Bài toán 4.32 (IMO* 1999). Có tồn tại hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi số nguyên dương n , $f(f(n)) = n^2 - 19n + 99$ không?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh không tồn tại hàm số thỏa mãn tính chất của bài toán. Đặt $P(n) = n^2 - 19n + 99$, chú ý $P(n) = P(19-n)$ và $P(n) \geq 19$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta đặt $f(9) = f(10) = 9$ và $f(8) = f(11) = 11$. (người ta cũng có thể đặt $f(9) = f(10) = 11$ và $f(8) = f(11) = 9$).

Ta kí hiệu $P^{(k)}(n)$ là k phép lặp của P . Nghĩa là $P^{(0)}(n) = n$ và $P^{(k+1)}(n) = P(P^{(k)}(n))$. Với $n \geq 12$, đặt $g(n)$ là số nguyên nhỏ nhất k sao cho n không nằm trong ảnh của $P^{(k)}$. Số nguyên k như vậy tồn

tại vì ngoài 9 và 11, mọi số nguyên trong ảnh của $P^{(k)}(n)$ với $k > 0$ lớn hơn hoặc bằng $P^{(k)}(12)$ và dễ dàng bằng quy nạp chứng minh được rằng $P^{(k)}(n) \geq n + k$ với $n \geq 12$.

Giả sử $12 = s_1 \leq s_2 \leq \dots$ là những số nguyên lớn hơn hoặc bằng 12 không nằm trong ảnh của P theo thứ tự tăng dần. Khi đó với mọi số nguyên $n \geq 12$, tồn tại duy nhất số nguyên $h(n)$ sao cho $n = P^{(g(n))}(s_{h(n)})$. Với $n \geq 12$, ta đặt

$$f(n) = \begin{cases} P^{(g(n))}(s_{h(n)} + 1) & \text{nếu } h(n) \text{ là số lẻ,} \\ P^{(g(n)+1)}(s_{h(n)} - 1) & \text{nếu } h(n) \text{ là số chẵn.} \end{cases}$$

Với $n \leq 7$, đặt $f(n) = f(19 - n)$. Để chứng minh rằng

$$f(f(n)) = P(n),$$

ta chỉ phải xét với $n \geq 12$, và ta có thể chia thành hai trường hợp sau: Nếu $h(n)$ là số lẻ, thì $g(f(n)) = g(n)$ và $h(f(n)) = h(n) + 1$ là số chẵn, vì vậy

$$f(f(n)) = f(P^{(g(n))}(s_{h(n)} + 1)) = P^{(g(n)+1)}(s_{h(n)}) = P(n).$$

Tương tự, nếu $h(n)$ là số chẵn, thì $g(f(n)) = g(n + 1)$ và $h(f(n)) = h(n) - 1$ là số lẻ, do đó

$$f(f(n)) = f(P^{(g(n)+1)}(s_{h(n)} - 1)) = P^{(g(n)+1)}(s_{h(n)}) = P(n). \quad \text{☺}$$

Bài toán 4.33 (Czech-Slovak 1998). *Tìm các hàm số*

$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *sao cho*

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 168$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng với $n = 1, 2, \dots$ thì $(f(2n), f(2n+1)) = (a, b) = (14, 14)$ hoặc $(2, 170)$ hoặc $(170, 2)$.

Từ $f(n) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $f(n) \geq 2$ và

$$(f(n+2) - 2)(f(n+3) - 2) \geq 0$$

$$2(f(n+2) + f(n+3)) \leq f(n+2)f(n+3) + 4.$$

Suy ra

$$2(f(n+2) + f(n+3)) \leq f(n) + f(n+1) + 172.$$

Như vậy, $f(n) + f(n+1) \leq 172$ với mọi n lớn hơn một giá trị N nào đó. Do đó $f(n) < 172$ với mọi $n > N$. Tồn tại hữu hạn bộ ba số tự nhiên liên tiếp nhỏ hơn 172, do đó có bộ ba gồm các phần tử liên tiếp được lặp lại. Nhưng vì ba số hạng liên nhau bất kì đều xác định tất cả những giá trị khác của $f(i)$, dãy giá trị phải là dãy tuần hoàn. Do đó ta có thể tìm được $x \geq 3$ sao cho $f(x) = M = \max\{f(n)\}$. Khi đó

$$f(x-2) + f(x-1) = Mf(x+1) - 168,$$

$$f(x-1) + M = f(x+1)f(x+2) - 168,$$

điều này kéo theo

$$0 \leq M - f(x-2) = f(x+1)(f(x-2) - M) \leq 0.$$

Vậy $f(x-2) = f(x+2) = M$. Như vậy mọi số hạng khác của dãy số $\{f(n)\}$ bằng giá trị cực đại M . Tương tự, ta có thể chứng minh rằng mọi số hạng khác của dãy $\{f(n)\}$ bằng giá trị cực tiểu m .

Như vậy, $\{f(n)\}$ bằng $a, b, a, b, \dots$ với $a + b = ab - 168$ điều này tương đương với $(a-1)(b-1) = 169$, từ đây suy ra những nghiệm được liệt kê ở phần đầu. ☺

4.4. BÀI TẬP

► 4.34. Tại các đỉnh của một 100-giác đặt các số sao cho mỗi số đều là trung bình cộng của hai số bên cạnh. Chứng minh rằng tất cả các

số đều bằng nhau.

► 4.35. Mỗi nghị sĩ ở một quốc hội có không lớn hơn ba người bạn. Chứng minh rằng quốc hội có thể chia làm hai nhóm sao cho mỗi nghị sĩ trong một nhóm sẽ có không lớn hơn một người bạn (Biết rằng nếu B là bạn của nghị sĩ A , thì A là bạn của nghị sĩ B).

► 4.36. Cho một số điểm tô màu đỏ và một số điểm tô màu xanh. Một số trong chúng nối thành các đoạn thẳng. Một điểm được gọi là "đặc biệt" nếu hơn một nửa đường nối với những điểm khác màu với nó. Những điểm "đặc biệt" cho phép tô màu lại: Tại mỗi bước chọn một điểm "đặc biệt" bất kì và tô lại màu bằng màu khác nó. Chứng minh rằng sau một số bước không còn lại một điểm "đặc biệt" nào.

► 4.37. Trong mỗi ô của bảng hình chữ nhật người ta viết một số. Cho phép đồng thời đổi dấu tất cả các số trên một dòng hoặc một cột nào đó. Chứng minh rằng phép thực hiện này có thể đưa bảng đã cho thành một bảng sao cho tổng của các số trên mỗi hàng hoặc trên mỗi cột là không âm.

► 4.38. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

(a) $f(n + f(n)) = f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

(b) Tồn tại n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}^*$) sao cho $f(n_0) = 1$.

Chứng minh rằng $f(n) = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

► 4.39. Tìm các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ với tính chất

$$\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(f(n))}{f(n+1)}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

CHƯƠNG 5

CÁC BÀI TOÁN GIẢI TÍCH

5.1. Định lý giá trị trung gian của hàm số.....	142
5.1.1. Hàm số liên tục	142
5.1.2. Định lý giá trị trung gian	146
5.1.3. Đạo hàm của hàm số	149
5.2. Định lý Rolle	151
5.3. Định lý giá trị trung bình	164
5.3.1. Các ứng dụng trực tiếp định lý giá trị trung bình ..	165
5.3.2. Các ứng dụng từ hệ quả định lý giá trị trung bình .	169
5.4. Bài tập.....	178

Một số định lý trong giải tích thực có ứng dụng liên quan tới những điểm cực biên. Nhất là những hàm thực xác định trên một đoạn thẳng đóng và dựa vào giá trị tại hai đầu đoạn thẳng của hàm này, ta có một số kết quả để giải toán rất tốt. Trong chương này ta quan tâm đến tính liên tục của hàm số, tính khả vi của một hàm, tính khả tích, ... Những định lý quan trọng làm cơ sở để giải toán như định lý giá trị trung gian của hàm số, định lý giá trị trung bình, đặc biệt định lý Rolle và một số định lý quan trọng trong giải tích. Ta

cố gắng chứng minh các định lý này bằng các kiến thức phổ thông và những định nghĩa đơn giản nhất.

5.1. ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG GIAN CỦA HÀM SỐ

5.1.1. Hàm số liên tục

Trong phần này ta dùng một định nghĩa thông thường về hàm số liên tục. Để nghiên cứu hàm số liên tục và các tính chất của nó một cách chặt chẽ phải có một chuyên đề riêng. Ta không nhắc lại khái niệm giới hạn của một dãy số thực và giới hạn của một hàm số thực.

Cho a, b là hai số thực và $a < b$. Tập hợp tất cả các số x sao cho $a < x < b$ được gọi là *khoảng mở* giữa a và b , kí hiệu là (a, b) . Tập hợp tất cả các số x sao cho $a \leq x \leq b$ được gọi là *khoảng đóng* giữa a và b , kí hiệu là $[a, b]$. Tập hợp tất cả các số x sao cho $a \leq x < b$ hoặc $a < x \leq b$ được gọi là *khoảng nửa đóng* hoặc *khoảng nửa mở* của đoạn thẳng, kí hiệu là $[a, b)$ hoặc $(a, b]$.

Trong chương này ta xét hàm số thực $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Định nghĩa 5.1. Một hàm số thực f được gọi là *hàm số liên tục tại điểm* x_0 nếu $f(x) \rightarrow f(x_0)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Thực chất của định nghĩa trên là nếu một hàm thực f được gọi là *hàm liên tục tại điểm* x_0 , nếu nó phải thỏa mãn ba điều:

- (i) $f(x_0)$ được xác định ;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tồn tại ;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nếu một hàm số f liên tục tại mọi điểm $c \in [a, b]$, thì f gọi là

hàm liên tục trên miền xác định $[a, b]$.

Ta có thể chứng minh được: Hàm số f liên tục tại c khi và chỉ khi với mọi dãy số $\{x_n\}$ hội tụ tới c thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới $f(c)$.

Thế thì có tồn tại hàm số không liên tục tại một điểm trong miền xác định không? Có rất nhiều hàm số không liên tục, sau đây là một ví dụ:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Đây là hàm số f đứt đoạn tại $x = 0$, bởi vì, cụ thể cho $\{x_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\}$ hội tụ tới 0, trong khi đó $\{f(x_n)\} = \left\{ \sin(2\pi n + \frac{1}{2}\pi) \right\}$ hội tụ tới $1 \neq 0 = f(0)$.

Toán học cao cấp có một định nghĩa khác theo ngôn ngữ δ - ε như sau: Một hàm số f được gọi là liên tục tại điểm c trên miền xác định $[a, b]$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|x - c| < \delta$ kéo theo $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Đây không phải tài liệu nói về hàm liên tục, ta chấp nhận định nghĩa theo giới hạn của hàm số như ở trên. Còn định nghĩa theo kiểu δ - ε không sử dụng trong tài liệu này.

Thực tế người ta còn xét những trường hợp liên tục theo từng phía của một điểm.

Định nghĩa 5.2. Hàm số f được gọi là *liên tục phải* (hoặc gọi là liên tục từ phía phải) tại điểm x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Tương tự, hàm số f được gọi là *liên tục trái* (hoặc gọi là liên tục từ

phía trái) tại điểm x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Để cho hàm số f là liên tục phải tại x_0 , cần thiết là hàm số f xác định trong khoảng $[x_0, x_0 + \eta)$ với $\eta > 0$. Còn hàm số f là liên tục trái tại x_0 , cần thiết là hàm số f phải xác định trong khoảng $(x_0 - \eta, x_0]$ với $\eta > 0$. Cũng vậy, hàm số f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi f đồng thời liên tục trái và liên tục phải tại x_0 .

Từ định nghĩa ta suy ra hai định lý quan trọng sau đây.

Định lý 5.1. Nếu f và g là hai hàm số liên tục tại x_0 , thì $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ là hai hàm liên tục tại x_0 và $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cũng là hàm liên tục tại x_0 với điều kiện $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 5.2. Nếu f là hàm liên tục tại x_0 và g là hàm liên tục tại $f(x_0)$ thì $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ là hàm liên tục tại x_0 .

Trước khi xét một số tính chất của hàm liên tục ta đưa ra khái niệm hàm bị chặn.

Định nghĩa 5.3. Hàm số $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm bị chặn nếu tồn tại một số thực $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in I$ (ở đây I là tập con của $\mathbb{R}$).

Ví dụ hàm số $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$ và $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0, 1)$ là những hàm không bị chặn. Nhưng ngược lại, mỗi hàm liên tục trên khoảng đóng (cụ thể là đoạn thẳng $[a, b]$) đều là những hàm bị chặn.

Định nghĩa 5.4. Hàm số $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là bị chặn trên (hoặc bị chặn dưới) nếu tồn tại một số thực M sao cho $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq M$) với mọi $x \in I$.

Định nghĩa 5.5. Giả sử f là hàm bị chặn trên (hoặc bị chặn dưới) trong tập hợp I . Số thực M nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) thỏa mãn $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq M$) với mọi $x \in I$ gọi là *số chặn trên* (hoặc *số chặn dưới*) của hàm số f và được kí hiệu là $M = \sup_{x \in I} f(x)$ (hoặc $m = \inf_{x \in I} f(x)$).

Định lý 5.3. Nếu f là hàm liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$, thì f là hàm bị chặn trên $[a, b]$.

Ta nhắc lại là một hàm đa thức là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, vì vậy nó bị chặn trên mọi khoảng đóng. Tất nhiên hàm đa thức chỉ là một phần nhỏ của tập các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chú ý: Có thể M và m không phải là giá trị nào của hàm số f trên miền I .

Ví dụ về giá trị M và m :

1. Cho hàm số $f(x) = x^2$ trên $(0, 2)$. Dễ thấy f là hàm liên tục và bị chặn trên $(0, 2)$. Khi đó $M = 4$ và $m = 0$ nhưng ở đây không có $x_1, x_2 \in (0, 2)$ với $f(x_1) = 4$ và $f(x_2) = 0$.

2. Cho $f(x) = \frac{x|x|}{1+x^2}$ trên $\mathbb{R}$. Chú ý f là hàm lẻ, liên tục và bị chặn trên $\mathbb{R}$. Hàm này có $M = 1$ và $m = -1$, nhưng không tồn tại điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ với $f(x_1) = 1$ và $f(x_2) = -1$.

Như vậy các giá trị M, m nhiều khi không trùng với giá trị của hàm số f tại các điểm trong miền xác định. Định lý sau đây cho ta điều kiện để những giá trị cực biên trùng với giá trị của hàm số.

Định lý 5.4 (Định lý giá trị cực biên). Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$, thì tồn tại các điểm $x_1, x_2 \in [a, b]$ sao cho $f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$ với mọi $x \in [a, b]$.

Chứng minh. Giả sử f là hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó f là hàm bị chặn trên $[a, b]$ và như vậy $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ và $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ tồn tại.

Giả sử rằng giá trị M không trùng với giá trị nào của hàm số $f(x)$. Khi đó $f(x) < M$ với mọi $x \in [a, b]$. Ta đặt $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ trên $[a, b]$.

Dễ thấy $g(x) > 0$ với mọi $x \in [a, b]$ và theo Định lý 5.1, g là hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó theo Định lý 5.3, g là hàm bị chặn trên $[a, b]$, và như vậy tồn tại số thực $k > 0$ sao cho $g(x) \leq k$ với mọi $x \in [a, b]$. Nghĩa là, với mọi $x \in [a, b]$,

$$k \geq g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

và như vậy $M - f(x) \geq \frac{1}{k} > 0$. Do đó $f(x) \leq M - \frac{1}{k}$ trên $[a, b]$. Điều này trái với định nghĩa M là số chặn trên nhỏ nhất của f trên $[a, b]$. Do đó tồn tại $x_1 \in [a, b]$ sao cho $f(x_1) = M$. Để chứng minh tồn tại $x_2 \in [a, b]$ với $f(x_2) = m$, áp dụng cùng lý luận với hàm số $-f$. ☺

5.1.2. ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG GIAN

Định lý 5.5 (Định lý giá trị trung gian). Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ và nếu $f(a) < y < f(b)$ (hoặc $f(b) < y < f(a)$), thì tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = y$.

Chứng minh. Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và giả sử $f(a) < f(b)$ (chứng minh tương tự cho trường hợp $f(b) < f(a)$). Cho $y \in (f(a), f(b))$. Ta cần tìm được $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = y$. Quy trình tìm điểm c được mô tả theo những bước sau đây:

Lấy $a_0 = a, b_0 = b$ và x_1 là trung điểm của đoạn thẳng $[a, b]$. Nếu $f(x_1) < y$ thì đặt $a_1 = x_1, b_1 = b$, ngược lại nếu $y \leq f(x_1)$ thì đặt $a_1 = a, b_1 = x_1$. Cả hai trường hợp trên ta đều có $f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$ và độ

dài của $[a_1, b_1]$ bằng nửa độ dài của $[a, b]$.

Lấy x_2 là trung điểm của đoạn thẳng $[a_1, b_1]$. Nếu $f(x_2) < y$ thì đặt $a_2 = x_2, b_2 = b_1$ và nếu $y \leq f(x_2)$ thì đặt $a_2 = a_1, b_2 = x_2$.

Quá trình trên tiếp tục lặp lại. Kết quả sẽ tạo ra một dãy những đoạn thẳng đóng

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset \cdots$$

Dãy số những độ dài của các đoạn thẳng trên hội tụ tới 0 (vì ta có $b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}$). Điều này kéo theo hai dãy $\{a_i\}$ và $\{b_i\}$ mỗi dãy đều hội tụ tới cùng một số thực trong $[a, b]$, cho đó là số c .

Do f là hàm liên tục, nên $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = f(c)$ và $\lim_{i \rightarrow \infty} f(b_i) = f(c)$. Hơn nữa, với mỗi i , $f(a_i) \leq y \leq f(b_i)$ và do đó (theo nguyên lý dãy bị kẹp giữa hai dãy), suy ra

$$f(c) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) \leq y \leq \lim_{i \rightarrow \infty} f(b_i) = f(c).$$

Từ đó suy ra $f(c) = y$ và định lý được chứng minh. ☺

Bài toán 5.1. Một người chạy việt dã 6 km đường đua trong 30 phút. Chứng minh rằng ở đâu đó trên đường đua người chạy việt dã đã chạy 1 km đúng 5 phút.

Lời giải. Kí hiệu x là khoảng cách theo đường đua, đo bằng kilômét từ vạch xuất phát. Với mỗi x trong $[0, 5]$, kí hiệu $f(x)$ là thời gian chạy 1 km từ điểm x đến điểm $x+1$. Hàm số f là hàm liên tục. Theo giả thiết đã cho thì

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 30.$$

Từ đó suy ra không phải tất cả $f(0), \dots, f(5)$ nhỏ hơn 5, và tương tự không phải tất cả $f(0), \dots, f(5)$ lớn hơn 5. Do đó tồn tại các điểm a

và b trong $[0, 5]$ sao cho $f(a) \leq 5 \leq f(b)$. Như vậy theo định lý giá trị trung gian, tồn tại một số c giữa a và b sao cho $f(c) = 5$, điều này nói lên rằng quãng đường từ c đến $c + 1$ đã được chạy đúng 5 phút.



Bài toán 5.2. Cho $\mathcal{A}$ là tập hợp $2n$ điểm trong mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Giả sử n điểm tô màu đỏ và n điểm còn lại tô màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại n đoạn thẳng trong đó không có hai đoạn nào cắt nhau, sao cho những điểm đầu của những đoạn thẳng này thuộc $\mathcal{A}$ và mỗi đoạn có hai đầu khác màu nhau.

Lời giải. Bài này là một trong những bài toán khó trong hình học tổ hợp và có nhiều phương pháp giải khác nhau. Sau đây là một cách giải có sử dụng định lý giá trị trung gian.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n . Khẳng định đúng khi $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với $n = 1, 2, \dots, k$, và ta xét tập hợp $\mathcal{A}$ với $2(k + 1)$ điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, mà $k + 1$ điểm tô màu đỏ và $k + 1$ điểm tô màu xanh. Xét hai trường hợp :

1. Giả sử tồn tại hai đỉnh liên tiếp của bao lồi của $\mathcal{A}$ có màu khác nhau. Khi đó tồn tại hai đỉnh liên tiếp theo cạnh của bao lồi, cho đó là đỉnh P và đỉnh Q , mà nó có hai màu khác nhau. Theo giả thiết quy nạp, tập hợp các điểm $\mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$ có k đoạn thẳng nối giữa hai màu khác nhau. Do không có một đoạn thẳng nào cắt đoạn thẳng PQ và theo cách chọn P và Q có màu khác nhau, suy ra khẳng định của bài toán đúng cho tập $\mathcal{A}$.

2. Trường hợp tất cả các đỉnh của bao lồi có cùng một màu, cho đó là màu đỏ. Nếu ℓ là đường thẳng bất kì không nằm ngang trong mặt phẳng và kí hiệu $\mathcal{B}(\ell)$ là số những điểm màu xanh thuộc $\mathcal{A}$

nằm bên trái của ℓ ; $\mathcal{R}(\ell)$ là số những điểm màu đỏ thuộc $\mathcal{A}$ nằm bên trái của ℓ và đặt $\mathcal{D}(\ell) = \mathcal{B}(\ell) - \mathcal{R}(\ell)$. Ta chọn đường thẳng ℓ không nằm ngang về phía bên trái đối với tất cả các điểm thuộc $\mathcal{A}$ và mà nó không song song với bất cứ đoạn thẳng nào được tạo bởi nối hai điểm của $\mathcal{A}$. Tại vị trí này $\mathcal{D}(\ell) = 0$. Bằng cách di chuyển song song, liên tục ℓ về phía phải, nó sẽ đi qua mỗi điểm của $\mathcal{A}$ một lần, và mỗi lần đi qua một điểm thì $\mathcal{D}(\ell)$ sẽ thay đổi $+1$ nếu điểm đó là màu xanh và -1 nếu điểm đó là màu đỏ. Vì ℓ di chuyển về bên phải, giá trị đầu tiên của $\mathcal{D}(\ell)$ sẽ là số âm (khi qua điểm đầu tiên của $\mathcal{A}$, do ta giả thiết các đỉnh của bao lồi màu đỏ). Do điểm cuối cùng mà ℓ đi qua cũng là màu đỏ (do đỉnh bao lồi đều màu đỏ), vậy giá trị $\mathcal{D}(\ell)$ là số dương (trước khi đi qua điểm cuối cùng của $\mathcal{A}$).

Từ đó suy ra $\mathcal{D}(\ell)$ sẽ bằng 0 tại điểm đầu đó nằm giữa hai điểm đầu và điểm cuối đã tính ở trên của $\mathcal{A}$ (chú ý rằng $\mathcal{D}(\ell)$ là hàm giá trị nguyên). Khi ℓ tại đúng vị trí này ($\mathcal{D}(\ell) = 0$), giả thiết quy nạp có thể áp dụng cho những điểm ở bên trái của ℓ và cũng áp dụng cho những điểm ở bên phải của đường thẳng ℓ . Từ không có đoạn thẳng nào giao nhau, khẳng định của bài toán đúng với tập hợp $\mathcal{A}$. Theo phương pháp quy nạp khẳng định của bài toán đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.



5.1.3. Đạo hàm của hàm số

Ta chỉ nhắc lại định nghĩa đạo hàm và một số bài toán về đạo hàm để làm công cụ để giải toán.

Định nghĩa 5.6. Đạo hàm của một hàm số $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tại điểm x thuộc (a, b) được định nghĩa bởi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

nếu giới hạn tồn tại.

Bài toán 5.3. Nếu hàm số f có đạo hàm tại x , thì f liên tục tại x .

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot h \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(x) \lim_{h \rightarrow 0} h = 0.\end{aligned}$$

Theo định nghĩa hàm liên tục suy ra $f(x)$ liên tục tại x . 😊

Bài toán 5.4. Nếu hàm số $xf(x)$ có đạo hàm tại điểm đã cho $x_0 \neq 0$, và nếu f là liên tục tại điểm x_0 , thì f có đạo hàm tại điểm x_0 .

Lời giải. Theo định nghĩa đạo hàm, ta có

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0}$$

tồn tại vì đây là công thức định nghĩa đạo hàm của hàm $xf(x)$ tại điểm x_0 (vì ta thay h bằng $x - x_0$). Với x đủ gần x_0 nhưng vẫn khác x_0 ta có

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{xf(x)}{x} - \frac{x_0f(x_0)}{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xx_0f(x) - xx_0f(x_0)}{xx_0(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xx_0f(x) - x^2f(x) - xx_0f(x_0) + x^2f(x)}{xx_0(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x)(x_0 - x) + x(xf(x) - x_0f(x_0))}{xx_0(x - x_0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{x_0} \left(\frac{xf(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0} \right) - \frac{f(x)}{x_0} \right] \\
&= \frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{xf(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0} \right) - \frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{1}{x_0} [L - f(x_0)].
\end{aligned}$$

Ta đã dùng giả thiết f là hàm liên tục $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. ☺

Bài toán 5.5. Cho $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$, ở đây $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số thực và n là số nguyên dương. Cho biết $|f(x)| \leq |\sin x|$ với mọi số thực x , chứng minh rằng

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1.$$

Lời giải. Ta có thể chứng minh bài này bằng phương pháp quy nạp theo n . Nhưng ở đây ta dùng định nghĩa đạo hàm để chứng minh. Ta lấy đạo hàm của f :

$$f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \dots + na_n \cos nx.$$

Tại $x = 0$ ta có $f'(0) = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$. Ta sẽ chứng minh rằng $|f'(0)| \leq 1$ là đủ. Thật vậy,

$$|f'(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

Đó là điều cần chứng minh. ☺

5.2. ĐỊNH LÝ ROLLE

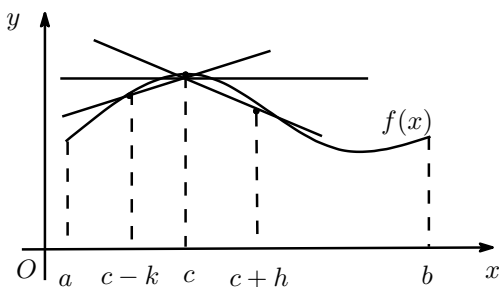
Định nghĩa 5.7. Cho hàm số $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ và tại $c \in [a, b]$ hàm số f xác định. Ta nói rằng c là *điểm cực đại* (*điểm cực tiểu*) của f nếu $f(c) \geq f(x)$ ($f(c) \leq f(x)$) với mọi số x mà ở đó f xác định.

Nếu ta chỉ có $f(c) \geq f(x)$ với mọi x trong một đoạn nào đó, thì ta nói rằng c là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ trong đoạn này.

Ví dụ 1: Hàm số $f(x) = \sin x$. Khi đó $\frac{\pi}{2}$ là điểm cực đại của hàm f vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ và $\sin x \leq 1$ với mọi giá trị của x . Chú ý $-\frac{3\pi}{2}$ cũng là điểm cực đại của hàm này.

Ví dụ 2: Hàm số $f(x) = 2x$, ta xét hàm này trong khoảng đóng $0 \leq x \leq 2$. Khi đó 2 là điểm cực đại của hàm $f(x)$ trong khoảng này, vì $f(2) = 4$ và $f(x) \leq 4$ với mọi x trong khoảng đóng này.

Định lý 5.6. Hàm số f xác định và có đạo hàm trên khoảng (a, b) . Cho $c \in (a, b)$ và là điểm cực đại của f . Khi đó $f'(c) = 0$.



Hình 5.1

Chứng minh. Nếu ta lấy giá trị đủ nhỏ $h > 0$, thì số $c+h \in (a, b)$. Ta có $f(c) \geq f(c+h)$. Do đó $f(c+h) - f(c) \leq 0$. Do $h > 0$, suy ra $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$. Do đó giới hạn của nó cũng nhỏ hơn 0, nghĩa là

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Ta lại lấy giá trị đủ lớn $h < 0$, thì số $c+h \in (a, b)$. Ta đặt $h = -k$ với

$k > 0$ (hình 5.1). Khi đó

$$f(c-k) - f(c) \leq 0, \quad f(c) - f(c-k) \geq 0$$

ta có thương

$$\frac{f(c-k) - f(c)}{-k} = \frac{f(c) - f(c-k)}{k} \geq 0.$$

Lấy giới hạn theo h (hoặc theo k), ta nhận được

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

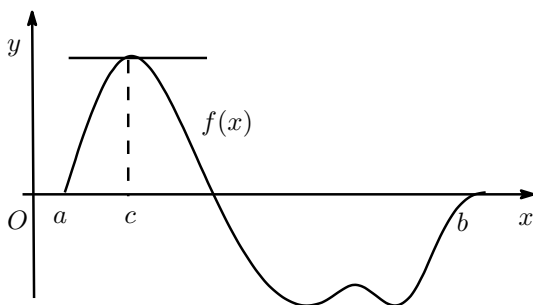
Do hàm số f có đạo hàm nên hai giới hạn trên bằng nhau và bằng 0. Do đó $f'(c) = 0$. ☺

Một định lý quan trọng của hàm thực là định lý Rolle:

Định lý 5.7 (Định lý Rolle). *Nếu hàm số $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên (a, b) sao cho $f(a) = f(b)$, thì tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ với $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Có nhiều cách chứng minh định lý này, sau đây là cách chứng minh áp dụng các định lý trên. Nếu hàm số là hàm hằng trên cả đoạn xác định, thì đạo hàm của nó bằng 0, khi đó mọi điểm trên khoảng đó đều thỏa mãn cho kết luận của định lý.

Trường hợp hàm số không phải là hàm hằng. Ta có thể giả thiết $f(a) = f(b) = 0$ (nếu $f(a) = f(b) \neq 0$ thì ta có thể nâng trục hoành lên một số $f(a)$, nghĩa là ta xét hàm $g(x) = f(x) - f(a)$) (Hình 5.2). Vì hàm số không phải là hàm hằng nên tồn tại một điểm nào đó trong khoảng xác định mà hàm này khác 0 và điểm này không thể là một trong hai đầu đoạn thẳng a hoặc b . Giả sử một giá trị nào đó của hàm đã cho mang dấu dương. Theo Định lý 5.4, hàm số đó có giá trị cực đại. Kí hiệu c là điểm cực đại của $f(x)$. Khi đó $f'(c) > 0$ và



Hình 5.2

$c \neq a, c \neq b$. Suy ra $a < c < b$. Theo Định lý 5.6, ta phải có $f'(c) = 0$, như vậy ta đã chứng minh định lý cho trường hợp hàm số f có giá trị dương tại một điểm nào đó trong khoảng xác định. Trường hợp f có giá trị âm tại một điểm nào đó của khoảng xác định cũng chứng minh tương tự, bạn đọc tự tiến hành theo các bước trên. ☺

Bài toán 5.6. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0, 1)$.

Lời giải. Bài này nếu áp dụng định lý giá trị trung gian thì sẽ dẫn đến sự phức tạp, vì không đủ thông tin về giá trị của a, b, c . Xét hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x$.

Khi đó $f(0) = 0 = f(1)$. Do đó theo định lý Rolle, tồn tại điểm d trong $(0, 1)$ sao cho $f'(d) = 0$. Từ đó suy ra d là nghiệm của phương trình $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$, đó là điều ta cần chứng minh. ☺

Bài toán 5.7. Chứng minh rằng nếu những hàm khả vi liên tục f và

g thỏa mãn $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ với mọi x , thì giữa hai nghiệm bất kì của $f(x) = 0$ tồn tại một nghiệm của $g(x) = 0$.

Lời giải. Cho a và b là hai nghiệm khác nhau của $f(x) = 0$, $a < b$. Từ giả thiết đã cho suy ra cả a và b không phải là nghiệm của $g(x) = 0$. Giả sử $g(x) = 0$ không có nghiệm nằm giữa a và b . Khi đó, theo hệ quả của định lý giá trị trung gian, dấu của $g(x)$ trên $[a, b]$ không đổi (nghĩa là $g(x) > 0$ với mọi $x \in [a, b]$, hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \in [a, b]$).

Ta xét hàm số $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Hàm số này liên tục và khả vi trên $[a, b]$ và $F(a) = 0 = F(b)$. Do đó theo định lý Rolle, tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Nhưng điều này dẫn đến vô lý, vì

$$F'(c) = \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g^2(c)} = 0$$

trái với giả thiết $g(c)f'(c) - g'(c)f(c) \neq 0$. Điều vô lý này dẫn đến $g(x) = 0$ phải có nghiệm nằm giữa a và b . ☺

Chú ý: Theo hệ quả của định lý Rolle, ta có nếu f là hàm liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$ và x_1, x_2 là các nghiệm của $f(x) = 0$, $a < x_1 < x_2 < b$, thì tồn tại một điểm $c_1 \in (x_1, x_2)$ sao cho $f'(c_1) = 0$. Hơn nữa, nếu $f(x) = 0$ tại n điểm khác nhau trong $[a, b]$, thì tồn tại ít nhất $n - 1$ điểm tại đó $f'(x) = 0$ (những điểm này nằm xen kẽ những điểm mà $f(x) = 0$) và tồn tại ít nhất $n - 2$ điểm tại đó $f''(x) = 0$ (với giả thiết $f'(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[a, b]$).

Bài toán 5.8. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 = x \sin x + \cos x$$

có đúng hai nghiệm.

Lời giải. Ta xét hàm $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$. Khi đó

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0, \quad f(0) < 0 \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

Như vậy áp dụng định lý giá trị trung gian ta có $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm. Nếu $f(x) = 0$ có số nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3, thì theo chú ý trên $f'(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm. Tuy nhiên,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \sin x - x \cos x + \sin x \\ &= x(2 - \cos x) = 0 \end{aligned}$$

chỉ có một nghiệm. Do đó, $f(x) = 0$ chỉ có đúng hai nghiệm và kết quả được chứng minh. ☺

Định lý 5.8 (Định lý giá trị trung bình Cauchy). *Nếu f và g là những hàm liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trên (a, b) , thì tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Chứng minh. Ta xét hàm số

$$F(x) = [f(x) - f(b)][g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)][g(x) - g(b)].$$

Hàm số F xác định và liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trên (a, b) . Mặt khác ta lại có $F(a) = 0 = F(b)$. Theo định lý Rolle, tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)[g(x) - g(a)] + g'(x)[f(x) - f(b)] \\ &\quad - f'(x)[g(x) - g(b)] - g'(x)[f(x) - f(a)] \\ &= f'(x)[g(b) - g(a)] + g'(x)[f(a) - f(b)]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$. ☺

Chú ý : Bài toán trên với $g(x) = x$ thì ta nhận được định lý giá trị trung bình của hàm số $f(x)$. Một hệ quả của định lý Rolle là định lý giá trị trung bình do Lagrange tìm ra.

Định lý 5.9 (Định lý giá trị trung bình). Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) . Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Bài toán 5.9. Giải phương trình

$$2^x + 5^x = 3^x + 4^x.$$

Lời giải. Hiển nhiên $x = 0$ là một nghiệm của phương trình. Để tìm nghiệm khác 0, ta viết lại phương trình như sau :

$$5^x - 4^x = 3^x - 2^x.$$

Bây giờ ta coi x như một hằng số còn các số 2, 3, 4, 5 là giá trị của một biến t nào đó của hàm $f(t) = t^x$.

Trên các khoảng $[2, 3]$ và $[4, 5]$, hàm số này thỏa mãn những giả thiết của định lý giá trị trung bình, do đó tồn tại $t_1 \in (2, 3)$ và $t_2 \in (4, 5)$ với $xt_1^{x-1} = 5^x - 4^x$ và $xt_2^{x-1} = 3^x - 2^x$ (chú ý rằng đạo hàm của $f(t)$ là $f'(t) = xt^{x-1}$).

Từ đó suy ra $xt_1^{x-1} = xt_2^{x-1}$, do đó $\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{x-1} = 1$. Những số t_1 và t_2 là khác nhau, vì chúng nằm trong những đoạn thẳng rời nhau. Như vậy đẳng thức này chỉ đúng khi và chỉ khi $x = 1$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 0$. ☺

Bài toán 5.10. Chứng minh rằng nếu những số thực $a_0, a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} = 0,$$

thì phương trình $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

Lời giải. Ta xét hàm số

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}.$$

Hàm số này có đạo hàm bằng $f'(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Vì $f(x)$ là khả vi và $f(0) = f(1) = 0$, áp dụng định lý Rolle trên đoạn thẳng $[0, 1]$, ta có: Tồn tại trên đoạn thẳng này một điểm c mà $f'(c) = \sum_{i=0}^n a_i c^i = 0$. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 5.11. Cho u và v là những số dương cố định. Hãy tìm tất cả các nghiệm dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \\ x^3 + y^3 = u^3 + v^3. \end{cases}$$

Lời giải. Hiển nhiên hệ phương trình có các nghiệm $x = u, y = v$ và $x = v, y = u$. Ta sẽ chứng minh rằng hệ phương trình không có nghiệm nào khác. Nếu x, y là một nghiệm khác của hệ phương trình, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $x > u \geq v > y$ (trường hợp $u > x \geq y > v$ suy ra bởi tính đối xứng của ẩn).

Đặt $x_1 = x^3, y_1 = y^3, u_1 = u^3, v_1 = v^3$, khi đó $x_1 > u_1 \geq v_1 > y_1$ và viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1^{\frac{2}{3}} - u_1^{\frac{2}{3}} = v_1^{\frac{2}{3}} - y_1^{\frac{2}{3}}, \\ x_1 - u_1 = v_1 - y_1. \end{cases}$$

Sử dụng định lý giá trị trung bình cho hàm $f(t) = t^{\frac{2}{3}}$ trên các đoạn $[u_1, x_1]$ và $[y_1, v_1]$, dẫn đến tồn tại $t_1 \in (u_1, x_1)$ và $t_2 \in (y_1, v_1)$ sao cho

$$\begin{cases} x_1^{\frac{2}{3}} - u_1^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} t_1^{\frac{1}{3}} (x_1 - u_1), \\ v_1^{\frac{2}{3}} - y_1^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} t_2^{\frac{1}{3}} (v_1 - y_1). \end{cases}$$

Suy ra $t_1 = t_2$, điều này vô lý vì hai khoảng (u_1, x_1) và (y_1, v_1) là những đoạn thẳng tách nhau. Do đó hệ phương trình không thể tồn tại những nghiệm khác. ☺

Bài toán 5.12. Cho p là một số nguyên tố, và a, b, c, d là những số nguyên dương khác nhau sao cho $a^p + b^p = c^p + d^p$. Chứng minh rằng

$$|a - c| + |b - d| \geq p.$$

Lời giải. Sử dụng định lý nhỏ Fermat, ta có $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$, $b^p - b \equiv 0 \pmod{p}$, $c^p - c \equiv 0 \pmod{p}$ và $d^p - d \equiv 0 \pmod{p}$. Do đó

$$(a - c) + (b - d) \equiv 0 \pmod{p} \quad (5.1)$$

Nếu ta chứng minh được rằng $a + b \neq c + d$, thì kết luận của bài toán được suy ra từ

$$|a - c| + |b - d| \geq |(a - c) + (b - d)|.$$

(vì khi đó vế trái của (5.1) khác 0 và suy ra kết luận của bài toán). Nếu $a + b = c + d$, thì ta có thể giả sử rằng $a > c > d > b$. Sử dụng định lý giá trị trung bình cho hàm số $f(t) = t^p$ trên khoảng $[c, a]$ và $[b, d]$, ta nhận được $t_1 \in (c, a)$ và $t_2 \in (b, d)$ sao cho

$$pt_1^{p-1}(a - c) = pt_2^{p-1}(d - b).$$

Nhưng vì $a - c = d - b$, đẳng thức sau cùng kéo theo $t_1 = t_2$, điều này vô lý vì hai điểm này nằm trên hai đoạn thẳng hoàn toàn khác nhau. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 5.13. Cho a, b là hai số dương và $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và khả vi trên (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{1}{a - b}(af(a) - bf(b)) = f(c) - cf'(c).$$

Lời giải. Nếu ta áp dụng định lý Cauchy cho các hàm số $\frac{f(x)}{x}$ và $\frac{1}{x}$, thì tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ với

$$\left(\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a} \right) \left(-\frac{1}{c^2} \right) = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} \right).$$

Do đó

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).$$



Bài toán 5.14. Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm nhận giá trị dương, liên tục và khả vi trên (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b)}{f(c)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Lời giải. Vì f là hàm số nhận giá trị dương, nên hàm $\ln f(x)$ hoàn toàn xác định và thỏa mãn những giả thiết của định lý giá trị trung bình. Do đó tồn tại $c \in (a, b)$ với

$$\frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{f(c)}.$$

Điều này kéo theo

$$\ln \frac{f(b)}{f(a)} = (b - a) \frac{f'(c)}{f(c)},$$

và từ đây suy ra kết quả cần chứng minh.



Bài toán 5.15. Cho $g, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hai hàm liên tục và khả vi trên (a, b) . Hơn nữa $g(x)$ và $g'(x)$ nhận giá trị khác 0 trên (a, b) và $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Lời giải. Hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ thỏa mãn giả thiết của định lý Rolle.

Do đó tồn tại $c \in (a, b)$ với $h'(c) = 0$. Vì

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$

suy ra $f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0$. Do đó $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ☺

Bài toán 5.16. Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục, khả vi trên (a, b) và nhận giá trị khác 0 trên (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại $\theta \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{a - \theta} + \frac{1}{b - \theta}.$$

Lời giải. Ta xét hàm số $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ định nghĩa bởi

$$g(x) = (x - a)(x - b)f(x).$$

Ta thấy g liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $g(a) = g(b) = 0$. Sử dụng định lý Rolle, tồn tại $\theta \in (a, b)$ với $g'(\theta) = 0$. Nhưng $g'(x) = (x - b)f(x) + (x - a)f(x) + (x - a)(x - b)f'(x)$. Vậy tại điểm θ , ta có $(\theta - b)f(\theta) + (\theta - a)f(\theta) + (\theta - a)(\theta - b)f'(\theta) = 0$. Chia hai vế cho $(\theta - a)(\theta - b)f(\theta)$ ta nhận được

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{a - \theta} + \frac{1}{b - \theta}. \quad \text{☺}$$

Bài toán 5.17. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số khả vi. Giả sử $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ với một số thực a nào đó và $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x)$ tồn tại, hãy tính giới hạn này.

Lời giải. Cho n, N (với $n < N$) là hai số tự nhiên. Bằng cách áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm số $g(x) = xf(x)$ trên $[n, N]$, dẫn đến tồn tại $c_n \in (n, N)$ sao cho $g'(c_n) = \frac{Nf(N) - nf(n)}{N - n}$. Vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nf(N) - nf(n)}{N - n} = a.$$

Với n đủ lớn thì $|g'(c_n) - a| < \frac{1}{n}$. Dễ thấy $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$. Cũng vậy, từ $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, suy ra $g'(x)$ có giới hạn tại vô cùng. Suy ra rằng $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(c_n) = a$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a - a = 0$. ☺

Bài toán 5.18. Hãy tính giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right].$$

Lời giải. Giới hạn phải tính là một số không âm. Ta sẽ chứng minh rằng nó bằng 0 bằng cách chỉ ra dãy số đã cho bị chặn trên và hội tụ tới 0.

Đặt $f : [n, n+1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ở đây n là số tự nhiên.

Áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm f , suy ra tồn tại số $c_n \in (n, n+1)$ sao cho $f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$. Ta muốn tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} f'(c_n)$.

Chú ý rằng

$$f'(c_n) = \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \left[\ln \left(\frac{1}{c_n} + 1 \right) - \frac{1}{c_n + 1} \right].$$

Từ $n < c_n < n+1$, điều này kéo theo

$$f'(c_n) < \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \left[\ln \left(\frac{1}{n} + 1 \right) - \frac{1}{n+2} \right].$$

Do dãy $\{c_n\}$ tiến tới vô cùng khi $n \rightarrow \infty$, ta nhận được

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} f'(c_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \left[\ln \left(\frac{1}{n} + 1 \right) - \frac{1}{n+2} \right] = 0.$$

Kết luận trên đã được suy ra từ các giới hạn đã biết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \left[\ln \left(\frac{1}{n} + 1 \right) - \frac{1}{n+2} \right] = 0.$$

Nguyên lý giới hạn bị kẹp kéo theo giới hạn biểu thức ban đầu tiến tới 0. ☺

Bài toán 5.19. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số khả vi và

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}f'(x)$$

với mọi số thực x . Chứng minh rằng f là hàm số tuyến tính, nghĩa là $f(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Muốn chứng minh một hàm số là tuyến tính, người ta đi chứng minh đạo hàm của nó bằng hằng số trên miền xác định của nó. Cụ thể bài này ta sẽ chứng minh rằng đạo hàm của hàm số f luôn luôn bằng đạo hàm của nó tại $x = 0$. Cố định x và giả sử nó là số dương, trường hợp nó là số âm hoàn toàn lập luận tương tự. Ta định nghĩa tập hợp

$$M = \{t | t \geq 0 \text{ và } f'(t) = f'(x)\}.$$

Dễ thấy M là tập bị chặn dưới, gọi t_0 là cận dưới của M . Từ đẳng thức đã cho suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = f'(0),$$

điều này chỉ ra rằng $f'(x)$ là một hàm liên tục tại 0. Hiển nhiên nó liên tục khắp nơi vì nó là tỉ số của hai hàm liên tục. Điều này kéo theo M là tập đóng và do đó t_0 thuộc M .

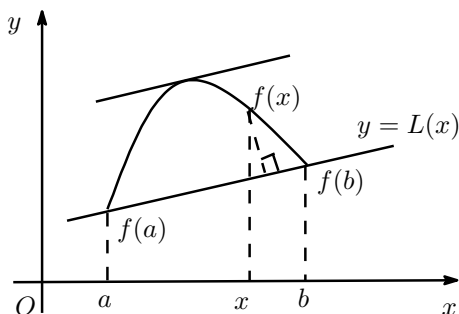
Ta muốn chứng minh rằng $t_0 = 0$. Giả sử rằng $t_0 > 0$. Từ

$$\frac{f(t_0) - f\left(\frac{t_0}{2}\right)}{\frac{t_0}{2}} = f'(t_0),$$

Từ định lý giá trị trung bình suy ra trên đoạn $\left[\frac{t_0}{2}, t_0\right]$ tồn tại điểm $c \in \left(\frac{t_0}{2}, t_0\right)$ sao cho $f'(c) = f'(t_0) = f'(x)$, điều này trái với t_0 là cận dưới. Từ đó suy ra với mọi x , ta có $f'(x) = f'(0) =$ hằng số. Như vậy bài toán đã được giải. ☺

5.3. ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Phần trước từ định lý giá trị trung bình Cauchy và định lý Rolle ta chứng minh được định lý giá trị trung bình và nhiều ứng dụng. Phần này ta xét kỹ hơn bản chất của định lý giá trị trung bình và theo một cách nhìn khác như sau:



Hình 5.3

Giả sử $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trên (a, b) . Ta xét hàm số $F(x) = f(x) - L(x)$, ở đây $y = L(x)$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$ (Hình 5.3). $F(x)$ thể hiện khoảng cách từ điểm $(x, f(x))$ đến đường thẳng $y = L(x)$. Từ $F(a) = 0 = F(b)$, theo định lý Rolle tồn tại điểm c thuộc (a, b) sao cho $F'(c) = 0$, nghĩa là

$$f'(c) = L'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(hệ số góc của đường thẳng $y = L(x)$). Như vậy ta có Định lý 5.9:

Định lý giá trị trung bình ở trang 157.

5.3.1. Các ứng dụng trực tiếp định lý giá trị trung bình

Bài toán 5.20. Cho g là hàm số sao cho nó có đạo hàm bậc nhất $g'(x)$ liên tục với mọi x . Hơn nữa, hàm số g thỏa mãn các điều kiện sau :

$$(i) \quad g(0) = 0,$$

$$(ii) \quad |g'(x)| \leq |g(x)| \text{ với mọi } x.$$

Chứng minh rằng $g(x) = 0$ với mọi x .

Lời giải. Trước tiên ta xét hàm số g trên đoạn $[0, 1]$. Lấy x là điểm bất kì trong $(0, 1]$. Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại một điểm c_1 trong $(0, x)$ sao cho

$$g'(c_1) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

Từ đó suy ra $|g(x)| = |xg'(c_1)| = |x||g'(c_1)| \leq |x|g(c_1)$.

Tương tự, tồn tại điểm c_2 trong $(0, c_1)$ sao cho $|g(c_1)| \leq |c_1g(c_2)|$ và thay nó vào bất đẳng thức sau cùng, ta nhận được $|g(x)| \leq |x||c_1||g(c_2)|$.

Tiếp tục bằng cách như vậy, ta có thể tìm được dãy số $c_1, c_2, \dots, c_n$, $0 < c_n < \dots < c_2 < c_1 < x < 1$ sao cho

$$|g(x)| \leq |x||c_1| \dots |c_{n-1}||g(c_n)|.$$

Vì $g(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$, nên nó bị chặn (nằm giữa giá trị cực tiểu và giá trị cực đại), do đó vế phải của bất đẳng thức sau cùng có thể làm nhỏ đi tùy ý bằng cách lấy đủ lớn n (mỗi đại lượng $|c_i|$ đều nhỏ hơn 1), điều đó dẫn đến $g(x) = 0$. Như vậy, $g(x) = 0$ trên đoạn $[0, 1]$.

Cũng lý luận tương tự áp dụng cho khoảng $[1, 2]$ (với $x \in (1, 2)$ tồn tại $c_1 \in (1, x)$ sao cho $|g(x)| \leq |x - 1||g(c_1)|$, ...). Kết quả của lý

luận này là $g(x) = 0$ trên $[1, 2]$.

Bằng lý luận quy nạp, ta sẽ nhận được $g(x)$ bằng 0 trên $[n, n+1]$ với mọi n . Do đó $g(x) = 0$ với mọi x . ☺

Bài toán 5.21. Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm bậc hai $f''(x)$ nhận giá trị không âm. Chứng minh rằng với mọi a, b ($a < b$), ta có

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Lời giải. Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại $x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ sao cho

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{1}{2}(a+b) - a} = f'(x_1),$$

và $x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{1}{2}(a+b)} = f'(x_2).$$

Nhưng $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (x_1, x_2)$, do đó $f'(x)$ là hàm không giảm.

Như vậy $f'(x_2) \geq f'(x_1)$, tương đương với

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{1}{2}(a+b) - a} \leq \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{1}{2}(a+b)},$$

suy ra

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad \text{☺}$$

Bài toán 5.22. Giả sử f là hàm số thực có đạo hàm bậc hai liên tục và xác định với mọi số thực x sao cho $|f(x)| \leq 1$ và

$(f(0))^2 + (f'(0))^2 = 4$. Chứng minh rằng tồn tại một số thực x_0 sao cho $f(x_0) + f''(x_0) = 0$.

Lời giải. Đặt $G(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$, thì $G(x)$ là hàm liên tục và $G(0) = 4$. Ta có

$$G'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)].$$

Ta phải chứng minh rằng tồn tại hai điểm a và b , $-2 < a < 0$, $0 < b < 2$ sao cho $|G(a)| \leq 2$ và $|G(b)| \leq 2$. Thật vậy, từ định lý giá trị trung bình tồn tại điểm a trong $(-2, 0)$ và b trong $(0, 2)$ sao cho

$$f'(a) = \frac{f(0) - f(-2)}{2} \text{ và } f'(b) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$|f'(a)| = \left| \frac{f(0) - f(-2)}{2} \right| \leq \frac{|f(0)| + |f(-2)|}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1,$$

$$|f'(b)| = \left| \frac{f(2) - f(0)}{2} \right| \leq \frac{|f(2)| + |f(0)|}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1.$$

Như vậy,

$$|G(a)| = |(f(a))^2 + (f'(a))^2| \leq |f(a)|^2 + |f'(a)|^2 \leq 2,$$

$$|G(b)| = |(f(b))^2 + (f'(b))^2| \leq |f(b)|^2 + |f'(b)|^2 \leq 2.$$

Từ $G(0) = 4$, sẽ suy ra $G(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 trong (a, b) và $G'(x_0) = 0$. Khi đó

$$G'(x_0) = 2f'(x_0)[f(x_0) + f''(x_0)] = 0.$$

Nếu $f'(x_0) = 0$, thì $G(x_0) = (f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 = (f(x_0))^2 \leq 1$. Nhưng $G(x_0) \geq 4$, vì $G(0) = 4$. Do đó $f'(x_0) \neq 0$ và từ đẳng thức cuối cùng suy ra $f(x_0) + f''(x_0) = 0$. ☺

Bài toán 5.23. Cho f là hàm số có đạo hàm trong $[0, 1]$ với $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Với mỗi số nguyên dương n , chứng minh rằng tồn tại

những điểm khác nhau $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong $[0, 1]$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

Lời giải. Trước khi xét trường hợp tổng quát, ta xét trường hợp cụ thể với $n = 1$. Ta sẽ phải tìm điểm $x_1 \in [0, 1]$ sao cho $\frac{1}{f'(x_1)} = 1$. Điều này thực hiện được nhờ định lý giá trị trung bình, từ giả thiết của bài toán và trên khoảng $[0, 1]$, tồn tại một điểm x_1 sao cho $f(1) - f(0) = f'(x_1)$ hay $f'(x_1) = 1$.

Xét trường hợp $n = 2$. Ta xét hai khoảng nhỏ $[0, x]$ và $[x, 1]$, ở đây x là một số nào đó giữa 0 và 1 đã được chọn. Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại $x_1 \in (0, x)$ và $x_2 \in (x, 1)$ sao cho

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ và } f'(x_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}.$$

Như vậy,

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2 \iff \frac{x}{f(x)} + \frac{1-x}{1-f(x)} = 2.$$

Ta biến đổi đẳng thức sau cùng

$$\begin{aligned} x(1-f(x)) + (1-x)f(x) &= 2f(x) - 2(f(x))^2 \\ \iff x - xf(x) + f(x) - xf(x) - 2f(x) + 2(f(x))^2 &= 0 \\ \iff x - 2xf(x) - f(x) + 2(f(x))^2 &= 0 \\ \iff x[1 - 2f(x)] - f(x)[1 - 2f(x)] &= 0 \iff [x - f(x)][1 - 2f(x)] = 0. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chọn $x \in (0, 1)$ sao cho $f(x) = \frac{1}{2}$ (điều này có thể làm được do định lý giá trị trung gian), chứng minh được hoàn thành khi đi ngược từng bước các đẳng thức tương đương trên.

Ta xét trường hợp n là số nguyên dương bất kì. Chọn c_i là số nhỏ nhất trong $[0, 1]$ sao cho $f(c_i) = \frac{i}{n}$ (tồn tại số như vậy do hệ quả của

định lý giá trị trung gian cùng với giả thiết về tính liên tục của hàm số f). Khi đó $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < 1$. Đặt $c_0 = 0$ và $c_n = 1$, với mỗi khoảng (c_{i-1}, c_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ chọn một x_i sao cho

$$f'(x_i) = \frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{c_i - c_{i-1}}$$

(điều này có thể làm được do định lý giá trị trung bình). Khi đó

$$f'(x_i) = \frac{\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}}{c_i - c_{i-1}} = \frac{1}{n(c_i - c_{i-1})},$$

như vậy

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n n(c_i - c_{i-1}) = n. \quad \text{😊}$$

5.3.2. Các ứng dụng từ hệ quả định lý giá trị trung bình

Trước khi xét những hệ quả quan trọng của định lý giá trị trung bình, ta đưa vào một số định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 5.8. Hàm số f được gọi là *hàm tăng* (hoặc *hàm giảm*) trong khoảng (a, b) , nếu từ $a < x_1 < x_2 < b$ suy ra $f(x_1) \leq f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) \geq f(x_2)$). Nếu từ $a < x_1 < x_2 < b$ suy ra $f(x_1) < f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) > f(x_2)$) thì hàm số f được gọi là *hàm tăng ngặt* (hoặc *hàm giảm ngặt*) trong khoảng (a, b) .

Định lý 5.10. Nếu đạo hàm $f'(x)$ của hàm số f tồn tại trong khoảng (a, b) và nhận giá trị dương trong khoảng này, thì hàm số f là hàm tăng ngặt trong khoảng (a, b) .

Chứng minh. Cho $a < x_1 < x_2 < b$. Hàm số f thỏa mãn các điều kiện của định lý giá trị trung bình cho đoạn $[x_1, x_2]$. Khi đó tồn tại số $\xi \in (x_1, x_2)$ sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi).$$

Nhưng theo giả thiết $f'(\xi) > 0$ và $x_2 > x_1$ nên từ đẳng thức trên suy ra $f(x_2) - f(x_1) > 0$, nghĩa là $f(x_1) < f(x_2)$. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Chú ý: Nếu trong định lý trên thay " $f'(x)$ nhận giá trị dương" thành " $f'(x)$ nhận giá trị không âm" thì f là hàm tăng trong khoảng (a, b) . Kết quả tương tự cho định lý sau đây.

Định lý 5.11. Nếu đạo hàm $f'(x)$ của hàm số f tồn tại trong khoảng (a, b) và nhận giá trị âm (hoặc không dương) trong khoảng (a, b) , thì hàm số f là hàm giảm ngặt (hoặc hàm giảm) trong khoảng (a, b) . Nghĩa là, từ $a < x_1 < x_2 < b$ suy ra $f(x_1) > f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Định lý 5.12 (Tiêu chuẩn hàm hằng số). Nếu đạo hàm $f'(x)$ của hàm số f tồn tại trong khoảng (a, b) và đồng nhất bằng 0 trên khoảng này, thì hàm số f là một hằng số trong khoảng (a, b) .

Chứng minh. Lấy $x \in (a, b)$. Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại số c trong (a, x) sao cho $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0$. Từ đó suy ra $f(x) = f(a)$ với mọi $x \in (a, b)$. ☺

Sau đây ta có thể phát biểu tiêu chuẩn trên theo cách khác để dễ sử dụng hơn.

Định lý 5.13. Nếu các đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ của hai hàm f và g tồn tại trong khoảng (a, b) và bằng nhau, thì hiệu của những hàm này là một hằng số trong khoảng (a, b) , nghĩa là $f(x) = g(x) + c$ với mọi $x \in (a, b)$.

Phương pháp chứng minh hai hàm số trùng nhau. Để chứng minh hai hàm số f và g bằng nhau trong $[a, b]$, thì ta chỉ kiểm tra những điều kiện sau là đủ :

- (a) Các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trong $[a, b]$;
 (b) Những đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ bằng nhau trong (a, b) ;
 (c) Tại một điểm $x_0 \in [a, b]$ có đẳng thức $f(x_0) = g(x_0)$.

Bài toán 5.24. Chứng minh rằng

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (5.2)$$

với $x \in [-1, 1]$.

Lời giải. Hàm số $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ và $g(x) = \frac{\pi}{2}$ là liên tục trong $[-1, 1]$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad g'(x) = 0$$

trong khoảng $(-1, 1)$.

Tại điểm $x_0 = 1$ ta có

$$f(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}, \quad g(1) = \frac{\pi}{2}, \text{ nghĩa là } f(1) = g(1).$$

Theo nhận xét của Định lý 5.13 suy ra đẳng thức (5.2). ☺

Bài toán 5.25. Hãy chứng minh đẳng thức

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{4} \cos^2 2x + \frac{1}{4}.$$

Lời giải. Các hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ và $g(x) = \frac{3}{4} \cos^2 2x$ là những hàm liên tục với mọi x . Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\sin^5 x \cos x - 6\cos^5 x \sin x \\ &= 6\sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x) \\ &= 6\sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= -3\sin 2x \cos 2x, \end{aligned}$$

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cos 2x (\cos 2x)' = -3 \cos 2x \sin 2x.$$

Bởi vì $f'(x) = g'(x)$, nên hiệu của hai hàm này khác nhau một hằng số, nghĩa là $f(x) - g(x) = c$.

Ta tìm hằng số c bằng cách cho $x = 0$ ta nhận được $c = f(0) - g(0) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, do đó

$$\sin^6 x + \cos^6 x - \frac{3}{4} \cos^2 2x = \frac{1}{4}.$$

với mọi x . 😊

Bài toán 5.26. Với giá trị nào của các tham số a, b, c và d (với $c \neq 0$) để hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ không phụ thuộc vào x .

Lời giải. Hàm số đã cho có đạo hàm $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. $f'(x) = 0$ khi $ad-bc = 0$. Suy ra giá trị của hàm số đã cho không phụ thuộc vào x khi $ad-bc = 0$, bởi vì với những giá trị a, b, c, d như vậy đạo hàm của nó bằng 0 trên toàn bộ miền xác định của f .

Với $ad-bc = 0$, nghĩa là $b = \frac{ad}{c}$, ta có

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{cx+d}{cx+d} = \frac{a}{c}. \quad \text{😊}$$

Bài toán 5.27. Với những giá trị nào của a và b , đẳng thức

$$a \cos x - \cos(ax + b^2) = a - 1 - b^2 \quad (5.3)$$

đúng với mọi x ?

Lời giải. Hàm số $f(x) = a \cos x - \cos(ax + b^2)$ là hằng số khi

$f'(x) = 0$. Đạo hàm của hàm số này là

$$\begin{aligned} f'(x) &= -a \sin x + a \sin(ax + b^2) \\ &= 2a \sin \frac{ax - x + b^2}{2} \cos \frac{ax + x + b^2}{2}. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ trong ba trường hợp sau đây :

$$\text{a) } a = 0; \quad \text{b) } \sin \frac{ax - x + b^2}{2} = 0; \quad \text{c) } \cos \frac{ax + x + b^2}{2} = 0.$$

a) Đẳng thức (5.3) có dạng $\cos b^2 = b^2 + 1$ và đẳng thức đúng khi $b = 0$, vì $\cos b^2 \leq 1$.

b) Trường hợp này có nghiệm $\frac{ax - x + b^2}{2} = k\pi$, ở đây k là một số nguyên bất kì, nghĩa là $(a - 1)x = 2k\pi - b^2$ điều này đúng với mọi x nếu $a = 1$, $b^2 = 2k\pi$.

Khi đó phương trình (5.3) có dạng

$$\cos x - \cos(x + 2k\pi) = -2k\pi,$$

mà nó chỉ có thể với $k = 0$, nghĩa là $b = 0$.

c) Trường hợp này có nghiệm $\frac{ax + x + b^2}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ở đây k là một số nguyên bất kì, nghĩa là $b^2 = \pi + 2k\pi - (a + 1)x$. Điều này đúng với mọi x nếu $a = -1$, $b^2 = \pi + 2k\pi$.

Khi đó phương trình (5.3) có dạng

$$-\cos x - \cos(-x + \pi + 2k\pi) = -2 - \pi - 2k\pi,$$

hoặc là $0 = -2 - \pi - 2k\pi$, mà nó không có thể thỏa mãn với bất cứ k nào.

Tóm lại, đẳng thức (5.3) đúng với mọi x trong hai trường hợp:
 $a = 0, b = 0$ và $a = 1, b = 0$. ☺

Trong nhiều trường hợp không những sử dụng chỉ một đạo hàm

bậc nhất, mà còn dùng hàm số có những đạo hàm liên tiếp bậc cao hơn khi đó ta phải dựa vào mệnh đề sau đây.

Định lý 5.14. Hai hàm số f và g xác định với mọi $x \in (a, b)$ có các tính chất sau :

- (i) Chúng có đạo hàm đến bậc n và $f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.
- (ii) Các hàm số f, g và các đạo hàm của chúng cho đến bậc $(n-1)$ liên tục tại a sao cho

$$f(a) \leq g(a), \quad f'(a) \leq g'(a), \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(a) \leq g^{(n-1)}(a).$$

Khi đó $f(x) < g(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Chứng minh. Đặt $F(x) = f(x) - g(x)$. Khi đó hàm số F là hàm liên tục và xác định với mọi $x \in (a, b)$. Mặt khác $F^{(n)}(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$, theo Định lý 5.11 hàm số F giảm ngặt, nghĩa là $x > a$ thì $F^{n-1}(x) < F^{n-1}(a) = f^{n-1}(a) - g^{n-1}(a) \leq 0$. Từ đây suy ra $F^{n-2}(x)$ cũng là hàm giảm ngặt, từ giả thiết của định lý ta cũng suy ra được $F^{n-2}(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Tiếp tục quá trình này đến khi $F(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Ta xét một số bài toán áp dụng Định lý 5.14 sẽ có cách giải tốt.

Bài toán 5.28. Chứng minh bất đẳng thức

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, \quad \text{với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Lời giải. Đặt $f(x) = \operatorname{tg} x$ và $g(x) = x + \frac{x^3}{3}$. Ta tính đạo hàm của các

hàm này

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}, & g'(x) &= 1 + x^2, \\f''(x) &= \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, & g''(x) &= 2x, \\f'''(x) &= \frac{2 + 4 \sin^2 x}{\cos^4 x}, & g'''(x) &= 2, \\f^{(4)}(x) &= \frac{8 \sin x (2 + \sin^2 x)}{\cos^5 x}, & g^{(4)}(x) &= 0,\end{aligned}$$

Với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ta có bất đẳng thức $f^{(4)}(x) > g^{(4)}(x)$.

Với $x = 0$ ta có $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2, g(0) = 0, g'(0) = 1, g''(0) = 0, g'''(0) = 2$, nghĩa là $f(0) = g(0), f'(0) = g'(0), f''(0) = g''(0), f'''(0) = g'''(0)$. Theo Định lý 5.14, suy ra $f(x) > g(x)$ với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. ☺

Bài toán 5.29. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}$ với $x \in (-1, 1)$. Như vậy ta cần phải chứng minh: $f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right) < 2$.

Trong khoảng $(-1, 1)$ hàm số $f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2} - \sqrt[3]{(1+x)^2}}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}.$$

Bởi vì mọi $x \in (0, 1)$ đều có $\sqrt[3]{(1-x)^2} < \sqrt[3]{(1+x)^2}$, nên $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0, 1)$.

Xét hàm số $g(x) = 2$, luôn có $g'(x) = 0$. Khi đó $f'(x) < g'(x)$ với mọi $x \in (0, 1)$. Ngoài ra $f(0) = 2 = g(0)$. Từ đó và theo Định lý 5.14 ta có bất đẳng thức $f(x) < g(x) = 2$ với mọi $x \in (0, 1)$, suy ra nó cũng đúng với $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$. ☺

Bài toán 5.30. Chứng minh rằng nếu a và b là những số dương bất kì, còn c là một số âm, thì bất đẳng thức sau đúng:

$$3a^4 + 4ca^3b + c^4b^4 \geq 0. \quad (5.4)$$

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 4c\left(\frac{a}{b}\right)^3 + c^4 \geq 0.$$

Ta xét hàm số $f(x) = 3x^4 + 4cx^3 + c^4$ với $x \geq 0$. Khi đó ta phải chứng minh $f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 + 12cx^2 = 12x^2(x+c)$. Với $x \in (0, -c)$, thì $f'(x) < 0$. Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm giảm ngặt trong khoảng này. Vì hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, -c]$ và giá trị của nó nằm trong khoảng từ $f(-c) = 0$ đến $f(0) = c^4$, nghĩa là có bất đẳng thức sau

$$0 \leq f(x) \leq c^4 \quad \text{với } x \leq 0 \leq -c. \quad (5.5)$$

Khi có đẳng thức $f(x) = 0$ chỉ với $x = -c$.

Với $x > -c$ thì $f'(x) > 0$. Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm tăng ngặt trong khoảng $(-c, \infty)$. Vậy ta có

$$f(x) > f(-c) = 0 \quad \text{với } x > -c, \quad (5.6)$$

Vì $\frac{a}{b} > 0$, theo (5.5) và (5.6) ta nhận được bất đẳng thức (5.4). Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b} = -c$. ☺

Bài toán 5.31. Hãy tìm tất cả những hàm khả vi f có tính chất sau : Nếu ba số tạo thành một cấp số cộng, thì những giá trị hàm số tương ứng của chúng cũng tạo thành một cấp số cộng.

Lời giải. Mỗi cấp số cộng có thể viết dưới dạng $x, x+y, x+2y$. Những giá trị hàm số tương ứng của chúng tạo thành một cấp số cộng nếu đẳng thức sau thỏa mãn

$$f(x) + f(x+2y) = 2f(x+y). \quad (5.7)$$

Như vậy, bài toán đưa về tìm tất cả những hàm số khả vi mà chúng là nghiệm của phương trình hàm (5.7).

Ta lấy đạo hàm hai vế của (5.7) đối với y , nhận được

$$2f'(x+2y) = 2f'(x+y)$$

mà nó thỏa mãn với mọi số thực của x và y . Nhưng $x+2y$ và $x+y$ có thể bằng hai số thực nào đó, từ đó suy ra hàm số $f'(x)$ là một hằng số. Từ đây suy ra

$$f(x) = ax + b, \quad (5.8)$$

ở đây a và b là những hằng số bất kì. Kiểm tra trực tiếp thấy rằng hàm số (5.8) thỏa mãn phương trình (5.7). Suy ra hàm cần tìm là hàm tuyến tính. Từ đó suy ra điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 5.32. Hãy tìm tất cả những hàm khả vi thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Lời giải. Như bài trước lấy đạo hàm hai vế phương trình hàm đã cho đối với x ta nhận được $f'(x+y) = f'(x)$, từ đó suy ra $f'(x)$ là hằng số và suy ra nó có dạng $f(x) = ax + b$. Thay hàm tìm được vào phương trình hàm đã cho ta nhận được

$$a(x+y) + b = ax + b + ay + b,$$

suy ra $b = 0$. Hàm số cần tìm là $f(x) = ax$ với a là hằng số bất kì. ☺

5.4. BÀI TẬP

Bài tập sử dụng định lý giá trị trung gian

► 5.33. Giả sử $f(x)$ là hàm số bị chặn trên $[a, b]$ và mọi cặp giá trị x_1, x_2 với $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ sao cho

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số liên tục với $a \leq x \leq b$.

► 5.34. Cho hàm số thực liên tục thỏa mãn phương trình hàm

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y),$$

với mọi số thực x và y . Chứng minh rằng $f(x) = [f(1)]^{x^2}$.

► 5.35. Cho $f(0) > 0, f(1) < 0$ và tồn tại một hàm số liên tục $g(x)$ sao cho $f(x) + g(x)$ là hàm không giảm. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với một số x .

► 5.36. Một người leo núi bắt đầu trèo lên núi từ 7h00 sáng thứ bảy và lên đến đỉnh núi vào 5h00 chiều. Người leo núi dựng trại qua đêm trên đỉnh núi và xuống núi vào sáng chủ nhật lúc 7h00 sáng theo đúng con đường đã leo lên và về đến điểm xuất phát cũng đúng 5h00 chiều. Chứng minh rằng tại một thời điểm trong ngày chủ nhật người leo núi có cùng độ cao như là người đó ở cùng thời gian của ngày thứ bảy.

Bài tập sử dụng định lý Rolle

► **5.37.** (a) Giả sử rằng $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi, $f(0) = 0$ và $f(x) > 0$ với $x \in (0, 1)$. Chứng minh rằng tồn tại một số thực c trong $(0, 1)$ sao cho

$$\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

(b) Có tồn tại số d thuộc $(0, 1)$ sao cho $\frac{3f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$ không?

► **5.38.** (a) Chứng minh rằng phương trình $5x^4 - 4x + 1 = 0$ có một nghiệm nằm giữa 0 và 1.

(b) Chứng minh rằng nếu $a_0, a_1, \dots, a_n$ là những số thực mà

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

thì phương trình $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài tập sử dụng định lý giá trị trung bình

► **5.39.** (a) Chứng minh rằng $f(x) = x^3 - 3x + b = 0$ không thể có nhiều hơn một nghiệm trong $[-1, 1]$ cho dù giá trị nào của b .

(b) Cho $f(x) = (x^2 - 1)e^{cx}$. chứng minh rằng $f'(x) = 0$ cho đúng một x trong khoảng $(-1, 1)$ và x này có cùng dấu với tham số c .

► **5.40.** Phương trình $2^x - 1 - x^2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực ?

► **5.41.** Cho $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ là đa thức với hệ số thực sao cho $f(x) = 0$ có $n+1$ nghiệm thực khác nhau. Hãy dùng định lý Rolle chứng minh rằng $a_k = 0$ với $0 \leq k \leq n$.

► **5.42.** Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm, chứng minh rằng tồn tại một nghiệm của $f'(x) - af(x) = 0$ nằm giữa hai nghiệm bất kì của $f(x) = 0$.

► 5.43. Giả sử n là số nguyên không âm và

$$f(x) = c_0 e^{r_0 x} + c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n e^{r_n x},$$

ở đây c_i và r_i là những số thực. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ có hơn n nghiệm trong $\mathbb{R}$, thì $f(x) \equiv 0$.

► 5.44. Cho đa thức Legendre bậc n được định nghĩa như sau :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n [(x^2 - 1)^n]$$

ở đây D^n kí hiệu đạo hàm bậc n đối với x . Chứng minh rằng $P_n(x)$ có đúng n nghiệm thực và nằm trên đường thẳng trong đoạn $(-1, 1)$.

Bài tập khác

► 5.45. Hãy tìm những giá trị của a và b sao cho hàm số

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$$

không phụ thuộc vào x .

► 5.46. Chứng minh những bất đẳng thức sau :

(a) $n(x-1) < x^n - 1 < nx^{n-1}(x-1)$, với $x > 1$, ở đây $n \geq 2$ là số tự nhiên;

(b) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, ($x > 0$);

(c) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, ($x > 0$);

(d) $x - \frac{x^2}{2!} < \cos x < x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$;

(e) $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$);

(f) $1 + \cotg x \leq \cotg \frac{x}{2}$, ($0 < x \leq \frac{\pi}{2}$).

► 5.47. Chứng minh bất đẳng thức sau :

(a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n+b^n}{2}$ ($a > 0, b > 0, a \neq b$), ở đây $n \geq 2$ là một số tự nhiên;

(b) $(a+b)^s \leq a^s + b^s$ ($a > 0, b > 0, 0 \leq s \leq 1$).

► 5.48. Chứng minh rằng

$$F(x) = \frac{\sin x + \sin(x+a)}{\cos x - \cos(x+a)}$$

là một hàm hằng số bằng cách chỉ ra $F'(x) = 0$.

► 5.49. (a) Nếu $y = f(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân $y'' + y = 0$, chứng minh rằng $(f(x))^2 + (f'(x))^2$ là hàm hằng số.

(b) Dùng phần (a) để chứng minh rằng mọi nghiệm của $y'' + y = 0$ đều có dạng $y = A \cos x + B \sin x$.

(c) Dùng phần (b) chứng minh hai công thức tổng sau :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

► 5.50. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0, 1]$ với $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Với mỗi số nguyên dương n và những số dương bất kì $k_1, k_2, \dots, k_n$, chứng minh rằng tồn tại những điểm khác nhau $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i.$$

CHƯƠNG 6

HÀM LỖI VÀ NHỮNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

6.1. Hàm lỗi và bất đẳng thức cơ bản	183
6.1.1. Định nghĩa hàm lỗi và các chú ý	183
6.1.2. Bất đẳng thức Jensen và ví dụ ứng dụng	187
6.2. Bất đẳng thức quan trọng liên quan đến hàm lỗi	192
6.3. Hàm lỗi nhiều biến và những giá trị lớn nhất	203
6.3.1. Giá trị lớn nhất của hàm lỗi đạt trên biên ...	204
6.3.2. Những ứng dụng khác	212
6.4. Bài tập	215

Trong những cuốn sách [15] và [18] của tác giả có nói tới hàm lỗi và sử dụng nó với mục đích khác nhau. Trong chương này trình bày hàm lỗi và ứng dụng nó để giải các bài toán bất đẳng thức. Đặc biệt chương này nói về giá trị cực đại của hàm lỗi, những giá trị cực đại này đạt được tại những điểm cực biên trong miền xác định, chính điều này cho ta lợi dụng giải một số lượng lớn bài toán khó. Những hàm lỗi được sử dụng ở đây đa số là những hàm tuyến tính và những hàm nhiều biến với mỗi biến của hàm số đều tuyến tính.

6.1. HÀM LỒI VÀ BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

6.1.1. Định nghĩa hàm lồi và các chú ý

Định nghĩa 6.1. Hàm số nhận giá trị thực f xác định trên đoạn $[a, b]$ được gọi là *hàm lồi* nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (6.1)$$

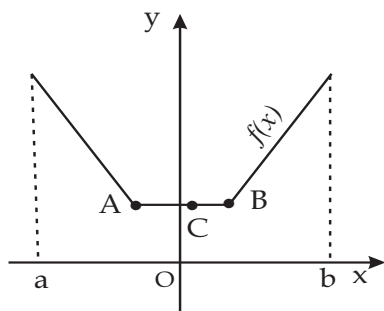
với mọi x, y thuộc $[a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$.

Hàm số f được gọi là *hàm lồi chặt* nếu

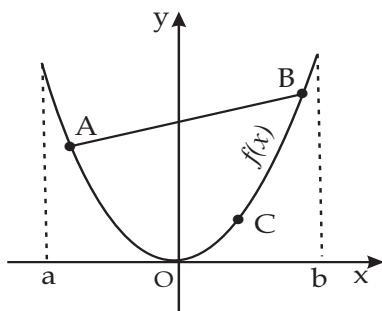
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (6.2)$$

với mọi x, y thuộc $[a, b]$, $x \neq y$ và $\lambda \in (0, 1)$.

Hình 6.1 thể hiện một hình ảnh của hàm lồi. Hình 6.2 thể hiện một hình ảnh của hàm lồi chặt



Hình 6.1. Hàm lồi



Hình 6.2. Hàm lồi chặt

Chú ý : 1. Hàm số f gọi là *hàm lõm* (hoặc *hàm lõm chặt*) trên $[a, b]$ nếu $-f$ là hàm lồi (hoặc hàm lồi chặt).

2. Ý nghĩa hình học của hàm lồi chặt như sau : Hàm số f là hàm lồi chặt khi và chỉ khi với mọi cặp điểm $A = (x, f(x))$ và

$B = (y, f(y))$ thì điểm $C = (z, f(z))$ nằm dưới đoạn AB với mọi z nằm giữa x và y (Hình 6.2).

3. Nếu hàm số f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì người ta chứng minh được rằng f là hàm lồi khi và chỉ khi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

với mọi $x, y \in [a, b]$. Hàm số f là hàm lồi chặt khi và chỉ khi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

với mọi $x, y \in [a, b], x \neq y$.

4. Một hàm tuyến tính $f(x) = ax + b$ ($x \in \mathbb{R}$) là một hàm lồi và cũng là hàm lõm.

5. Tổng hai hàm lồi (hoặc hàm lõm) là một hàm lồi (hoặc hàm lõm).

Có rất nhiều tài liệu nói về hàm lồi. Ta không đi sâu nghiên cứu tính chất và các định lý liên quan đến hàm lồi, nhưng có một tiêu chuẩn xác định một hàm lồi thông qua định lý sau đây.

Định lý 6.1. Cho hàm số f có đạo hàm bậc hai trên $[a, b]$.

1. Nếu đạo hàm bậc hai $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$,
thì f là hàm lồi¹;
2. Nếu đạo hàm bậc hai $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$, thì f là hàm lồi chặt.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp 1), còn trường hợp 2) chứng minh hoàn toàn tương tự. Lấy tùy ý $x_1, x_2 \in [a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$ (ở đây $x_1 < x_2$). Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (6.3)$$

¹Định nghĩa hàm lồi tôi dùng ở đây là thông dụng quốc tế, sách giáo khoa ở trường Phổ thông Việt Nam dùng định nghĩa gần như ngược lại nên tiêu chuẩn này cũng ngược lại.

Bất đẳng thức (6.3) hiển nhiên đúng khi $\lambda = 0$ hoặc $\lambda = 1$. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh (6.3) cho $0 < \lambda < 1$.

Sử dụng định lý giá trị trung bình (định lý Lagrange) trên đoạn $[x_1, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2]$, khi đó tồn tại ξ_1 với $x_1 < \xi_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ sao cho

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1) = [\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1]f'(\xi_1)$$

hay

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)}. \quad (6.4)$$

Lại áp dụng định lý giá trị trung bình trên đoạn $[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, x_2]$, khi đó tồn tại ξ_2 với $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \xi_2 < x_2$ sao cho

$$f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = [x_2 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2]f'(\xi_2)$$

hay

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)}{\lambda(x_2 - x_1)}. \quad (6.5)$$

Vì $f''(x) \geq 0$ trên đoạn $[a, b]$ suy ra $y = f'(x)$ là hàm đồng biến trên đoạn $[a, b]$, mà $a < \xi_1 < \xi_2 < b$ suy ra $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. Do đó, từ (6.4) và (6.5) suy ra

$$\frac{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)}{\lambda(x_2 - x_1)}. \quad (6.6)$$

Từ $0 < \lambda < 1$ và $x_1 < x_2$, nên từ (6.6) ta có

$$\lambda(f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)) \leq (1 - \lambda)(f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)).$$

Suy ra $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. Vậy (6.3) đúng khi $0 < \lambda < 1$. Định lý đã được chứng minh. ☺

Từ định lý trên ta có thể kiểm tra các hàm sau đây là hàm lồi hoặc hàm lồi chặt :

1. Hàm số $f(x) = x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$ và n là một số nguyên dương.
Ta có $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, vậy f là hàm lồi với mọi $x \in \mathbb{R}$.
2. Hàm số $f(x) = x^p$ với $x \geq 0, p > 1$.
Ta có $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0$ với $x \geq 0, p > 1$, do đó f là hàm lồi với mọi $x \geq 0$.
3. Hàm số $f(x) = \frac{1}{(x+a)^p}$ với $x > -a, p > 0$.
Ta có $f''(x) = \frac{p(p+1)}{(x+a)^{p+2}} > 0$ với mọi $x > -a, p > 0$, vậy f là hàm lồi chặt.
4. Hàm số $f(x) = \operatorname{tg} x$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Ta có $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} > 0$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, vậy f là hàm lồi chặt.
5. Hàm số $f(x) = e^x$ với $x \in \mathbb{R}$.
Ta có $f''(x) = e^x > 0$, nên f là hàm lồi chặt.

Từ định lý trên ta cũng kiểm tra được các hàm sau là hàm lõm hoặc hàm lõm chặt :

1. Hàm số $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.
Ta có $f''(x) = -\sin x \leq 0$ với $x \in [0, \pi]$, vậy f là hàm lõm với mọi $x \in [0, \pi]$.
2. Hàm số $f(x) = \cos x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Ta có $f''(x) = -\cos x \leq 0$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, do đó f là hàm lõm trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Hàm số $f(x) = \ln x$ với $x \in (0, \infty)$.
Ta có $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ với $x \in (0, \infty)$, suy ra f là hàm lõm chặt trên $(0, \infty)$.
4. Hàm số $f(x) = x^p$ với $x \geq 0, p \in (0, 1)$.

Ta có $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \leq 0$ với $x \geq 0, p \in (0, 1)$, suy ra f là hàm lõm trên $(0, \infty)$.

6.1.2. Bất đẳng thức Jensen và ví dụ ứng dụng

Năm 1905 nhà toán học Jensen² người Đan Mạch đã chứng minh mở rộng công thức (6.1) :

Định lý 6.2 (Bất đẳng thức Jensen). Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ và các số thực không âm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($n \geq 2$) sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Khi đó

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n). \quad (6.7)$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Bất đẳng thức (6.7) đúng với $n = 2$, do định nghĩa của hàm lồi. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Cho $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in [a, b]$ và các số thực không âm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$. Từ đó suy ra ít nhất một trong các số $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ phải nhỏ hơn 1 (nếu ngược lại thì bất đẳng thức là hiển nhiên, khi đó chỉ có một số bằng 1 các số khác bằng 0). Không mất tính tổng quát ta cho $\lambda_{k+1} < 1$ và đặt

$$u = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{k+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k.$$

Ta có $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = 1$ và do đó

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} = (1 - \lambda_{k+1})u + \lambda_{k+1} x_{k+1}.$$

²Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925) : Nhà toán học Đan Mạch.

Vì $f(x)$ là hàm lồi, nên ta có

$$f((1 - \lambda_{k+1})u + \lambda_{k+1}x_{k+1}) \leq (1 - \lambda_{k+1})f(u) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

và theo giả thiết quy nạp,

$$f(u) \leq \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}}f(x_1) + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{k+1}}f(x_2) + \cdots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}}f(x_k).$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

Như vậy bất đẳng thức (6.7) đúng với $n = k + 1$ và do đó theo nguyên lý quy nạp toán học nó đúng cho mọi số nguyên dương n . ☺

Chú ý : 1. Với những hàm lồi chặt, bất đẳng thức (6.7) đúng khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ (dùng phương pháp quy nạp chứng minh điều này).

2. Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, thì (6.7) trở thành

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \quad (6.8)$$

3. Nếu hàm số $f(x)$ là hàm lõm, thì (6.7) và (6.8) có dạng

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \quad (6.9)$$

và

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \quad (6.10)$$

Bất đẳng thức Jensen được áp dụng rất nhiều trong học tập và nghiên cứu, ta xét một số bài toán sau đây.

Bài toán 6.1. Nếu $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $a + b = 2$, thì

$$(1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5 \leq 2^6.$$

Lời giải. Ta xét hàm $f(x) = (1 + \sqrt[5]{x})^5$ với $x \in [0, \infty)$. Ta có $f'(x) = (1 + \sqrt[5]{x})^4 x^{-\frac{4}{5}}$ và $f''(x) = -\frac{4}{5}(1 + \sqrt[5]{x})^3 x^{-\frac{9}{5}} \leq 0$ với $x \in (0, \infty)$, suy ra $f(x)$ là hàm lõm. Dùng bất đẳng thức Jensen dạng (6.10) với $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ và các điểm a, b , ta nhận được

$$2 \left(1 + \sqrt[5]{\frac{a+b}{2}} \right)^5 \geq (1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5.$$

Thay $a + b = 2$ vào bất đẳng thức trên và rút gọn ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. ☺

Bài toán 6.2. Nếu a, b, c là những số dương, thì

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{a+b+c}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\ln(a^a \cdot b^b \cdot c^c) \geq \ln \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{a+b+c},$$

hay

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq (a+b+c) \ln \left(\frac{a+b+c}{3} \right).$$

Ta xét hàm số $f(x) = x \ln x$ với $x \in (0, \infty)$. Vì $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, nên hàm số $f(x)$ là hàm lồi chặt trên $(0, \infty)$. Sử dụng công thức (6.8) với $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ và các điểm $a, b, c > 0$ cho kết quả cần chứng minh.

☺

Bài toán 6.3. Nếu a, b, c là những số dương, thì

$$\frac{a}{a+3b+3c} + \frac{b}{3a+b+3c} + \frac{c}{3a+3b+c} \geq \frac{3}{7}.$$

Lời giải. Cho s là một số dương. Ta xét hàm số

$$f(x) = \frac{x}{s-x} = \frac{s}{s-x} - 1$$

với $x \in (0, s)$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi chặt vì $f''(x) = \frac{2s}{(s-x)^3} > 0$. Ta sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi với $x_1 = 2a$, $x_2 = 2b$, $x_3 = 2c$ và $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$. Ta nhận được

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2a}{s-2a} + \frac{2b}{s-2b} + \frac{2c}{s-2c} \right) \geq \frac{\frac{1}{3}(2a+2b+2c)}{s - \frac{1}{3}(2a+2b+2c)},$$

hay

$$\frac{2a}{s-2a} + \frac{2b}{s-2b} + \frac{2c}{s-2c} \geq \frac{3(2a+2b+2c)}{3s - (2a+2b+2c)}.$$

Nếu ta cho $s = 3(a+b+c)$ vào bất đẳng thức trên, thì ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.4. Cho a, b, c là những số dương và $a+b+c=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10}.$$

Lời giải. Ta chú ý rằng $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Xét hàm số

$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ với $x \in (0, 1)$. Ta có

$$f''(x) = 90 \left(x + \frac{1}{x}\right)^8 \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 10 \left(x + \frac{1}{x}\right)^9 \frac{2}{x^3} > 0$$

với $x \in (0, 1)$. Do đó $f(x)$ là hàm lồi chặt trên $(0, 1)$. Theo bất đẳng

thức Jensen,

$$\begin{aligned}\frac{10^{10}}{3^9} &= 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \\ &\leq f(a) + f(b) + f(c) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10}.\end{aligned}$$

Do đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\frac{10^{10}}{3^9}$, đạt được tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. ☺

Bài toán 6.5. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực lớn hơn hoặc bằng 1, thì

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ với $x \in [0, \infty)$. Hàm số f là hàm lồi chặt, vì $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} > 0$ trên $(0, \infty)$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen với $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ và $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$, ta nhận được

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+e^{x_k}} \geq \frac{n}{1+e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k}}.$$

Cho $x_k = \ln a_k, k = 1, 2, \dots, n$, ta nhận được bất phương trình cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.6. Cho α, β, γ là ba góc của một tam giác. Chứng minh những bất đẳng thức sau :

$$(1) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$(2) \sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}};$$

$$(3) \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8};$$

$$(4) \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} \geq 2\sqrt{3}.$$

Lời giải. Ta dùng bất đẳng thức Jensen cho những hàm lồi sau :
 $\sin x, \sqrt{\sin x}, \ln \sin x, \ln \cos x$ và bất đẳng thức cuối cùng với hàm $\frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$,
 với mọi $x \in (0, \pi)$. ☺

6.2. BẤT ĐẲNG THỨC QUAN TRỌNG LIÊN QUAN ĐẾN HÀM LỒI

Từ bất đẳng thức Jensen ta suy ra các bất đẳng thức cơ bản.

Định lý 6.3 (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân có trọng số). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số thực không âm và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là những số dương sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.

Khi đó

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}. \quad (6.11)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh. Nếu có một số nào đó trong $x_1, x_2, \dots, x_n$ bằng 0, thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Ta giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ đều dương. Xét hàm số $\ln x$ với $x \in (0, \infty)$. Vì hàm số này là hàm lồi trên $(0, \infty)$, theo công thức (6.9), ta nhận được

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n,$$

tương đương với $\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \ln(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})$ và do đó

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}. \quad \text{☺}$$

Mỗi dạng bất đẳng thức có ứng dụng giải một số bài toán. Ngay sau định lý ta xét một số bài tập như ví dụ ứng dụng chúng.

Bài toán 6.7. Chứng minh rằng nếu a, b, c là những số dương, thì

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \geq a^{\frac{a}{a+b+c}} b^{\frac{b}{a+b+c}} c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Lời giải. Ta chú ý đẳng thức

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

và sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân có trọng số, đối với bất đẳng thức ở vế trái của bài ra :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} &= \frac{a}{a+b+c} a + \frac{b}{a+b+c} b + \frac{c}{a+b+c} c \\ &\geq a^{\frac{a}{a+b+c}} b^{\frac{b}{a+b+c}} c^{\frac{c}{a+b+c}}. \end{aligned}$$

Đối với bất đẳng thức ở vế phải của bài ra :

$$\begin{aligned} \frac{3}{a+b+c} &= \frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{1}{a} + \frac{b}{a+b+c} \cdot \frac{1}{b} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{1}{c} \\ &\geq \left(a^{\frac{a}{a+b+c}} b^{\frac{b}{a+b+c}} c^{\frac{c}{a+b+c}} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.8. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương và $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, thì

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_n} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân có trọng số với $\lambda_k = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Ta có

$$\frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{n} a_1 + \frac{2}{n} \sqrt{a_2} + \dots + \frac{n}{n} \sqrt[n]{a_n} \right) \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{2}{n(n+1)}} = 1. \quad \text{☺}$$

Bài toán 6.9. Nếu $a_k, x_k, k = 1, 2, \dots, n$ là những số dương, thì

$$a_1 x_1^{\frac{1}{a_1}} + \dots + a_n x_n^{\frac{1}{a_n}} \geq (a_1 + \dots + a_n) (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{a_1 + \dots + a_n}}.$$

Lời giải. Đặt $\lambda_k = \frac{a_k}{a_1 + \dots + a_n}$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó $\lambda_k > 0$ và $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân có trọng số, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \sum_{k=1}^n a_k x_k^{\frac{1}{a_k}} &= \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^{\frac{1}{a_k}} \geq \prod_{k=1}^n x_k^{\frac{\lambda_k}{a_k}} \\ &= \prod_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{a_1 + \dots + a_n}} = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{a_1 + \dots + a_n}} \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Bằng cách thay $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ vào (6.11), ta nhận được định lý sau đây.

Định lý 6.4 (Bất đẳng thức Cauchy). Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số không âm, thì

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \quad (6.12)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Bất đẳng thức này được ứng dụng rất nhiều trong giải toán, ở đây ta chỉ xét một số ví dụ.

Bài toán 6.10. Cho a, b, c là những số dương và $abc \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq a + b + c.$$

Lời giải. Từ $abc \leq 1$, ta suy ra $\frac{1}{bc} \geq a$, $\frac{1}{ac} \geq b$ và $\frac{1}{ab} \geq c$. Theo bất

đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{2a}{c} + \frac{c}{b} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} \geq 3a,$$

$$\frac{2b}{a} + \frac{a}{c} = \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}} \geq 3b,$$

$$\frac{2c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} \geq 3c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại và chia cho 3 sẽ nhận được bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.11. Cho a, b, c, d là những số dương và

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Chứng minh rằng $abcd \geq 3$.

Lời giải. Đặt $a^2 = \operatorname{tg}\alpha, b^2 = \operatorname{tg}\beta, c^2 = \operatorname{tg}\gamma, d^2 = \operatorname{tg}\delta$. Khi đó $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = 1$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta \geq 3(\cos^2 \beta \cos^2 \gamma \cos^2 \delta)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sin^2 \beta = \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta + \cos^2 \alpha \geq 3(\cos^2 \gamma \cos^2 \delta \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sin^2 \gamma = \cos^2 \delta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \geq 3(\cos^2 \delta \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sin^2 \delta = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq 3(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma)^{\frac{1}{3}}.$$

Nhân những bất đẳng thức trên theo vế, ta có

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \geq 81 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \cos^2 \delta.$$

Khi đó $abcd = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta} \geq 3$. ☺

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số dương và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là những số dương sao cho $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, ta định nghĩa sau :

- Trung bình cộng có trọng số bậc t , kí hiệu là M_t , được định nghĩa theo công thức

$$M_t = (\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \cdots + \lambda_n x_n^t)^{\frac{1}{t}}$$

với mọi $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

- Trung bình cộng trọng số được định nghĩa bằng công thức

$$M_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

- Trung bình điều hòa trọng số được định nghĩa bằng công thức

$$M_{-1} = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x_n}}.$$

- Trung bình bình phương căn trọng số được định nghĩa bằng công thức

$$M_2 = \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}.$$

- Nếu trong M_t ta cố định các $x_1, x_2, \dots, x_n$ thì M_t là một hàm liên tục theo t . Khi đó ta dùng quy tắc Lôpital có thể tính được giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} M_t$ như sau :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} M_t &= \lim_{t \rightarrow 0} (\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \cdots + \lambda_n x_n^t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{\frac{\ln(\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \cdots + \lambda_n x_n^t)}{t}} \right) \\ &= e^{\left. \frac{d}{dt} \ln(\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \cdots + \lambda_n x_n^t) \right|_{t=0}} \\ &= e^{\frac{\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}} \\ &= x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Do đó kí hiệu

$$M_0 = \lim_{t \rightarrow 0} M_t = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$$

gọi là Trung bình nhân trọng số.

Định lý 6.5 (Bất đẳng thức trung bình lũy thừa). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số dương và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là những số dương sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Nếu t và s là những số thực khác 0 sao cho $s < t$, thì

$$(\lambda_1 x_1^s + \lambda_2 x_2^s + \dots + \lambda_n x_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \dots + \lambda_n x_n^t)^{\frac{1}{t}}. \quad (6.13)$$

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau :

(1) Nếu $0 < s < t$ hoặc $s < 0 < t$, thì (6.13) nhận được bằng cách sử dụng bất đẳng thức Jensen với hàm số lồi chặt $f(x) = x^{\frac{t}{s}}$. Thật vậy, nếu $a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ đều dương sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, thì

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n)^{\frac{t}{s}} \leq \lambda_1 a_1^{\frac{t}{s}} + \lambda_2 a_2^{\frac{t}{s}} + \dots + \lambda_n a_n^{\frac{t}{s}}.$$

Bằng cách chọn $a_1 = x_1^s, a_2 = x_2^s, \dots, a_n = x_n^s$, ta có ngay kết quả (6.13).

(2) Nếu $s < t < 0$, thì $0 < -t < -s$, áp dụng (6.13) kết quả của phần trước cho $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$, ta nhận được

$$\left(\lambda_1 \left(\frac{1}{x_1} \right)^{-t} + \dots + \lambda_n \left(\frac{1}{x_n} \right)^{-t} \right)^{\frac{1}{-t}} \leq \left(\lambda_1 \left(\frac{1}{x_1} \right)^{-s} + \dots + \lambda_n \left(\frac{1}{x_n} \right)^{-s} \right)^{\frac{1}{-s}},$$

từ đây viết lại như dạng (6.13). ☺

Chú ý : Nếu $t < 0 < s$ thì $M_t \leq M_0 \leq M_s$. Hơn nữa ta cũng có bất đẳng thức sau :

$$M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2.$$

Bài toán 6.12. Nếu a, b, c là những số dương, thì

$$\frac{a^{10} + b^{10} + c^{10}}{a^5 + b^5 + c^5} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^5.$$

Lời giải. Đặt $M_t = \left(\frac{a^t + b^t + c^t}{3} \right)^{\frac{1}{t}}$. Khi đó dùng bất đẳng thức trung bình lũy thừa ta có

$$\begin{aligned} a^{10} + b^{10} + c^{10} &= 3(M_{10})^{10} = 3(M_{10})^5 (M_{10})^5 \\ &\geq 3(M_5)^5 \cdot (M_1)^5 = (a^5 + b^5 + c^5) \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^5. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.13. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương, thì

- (i) $a_1^{n+1} + \dots + a_n^{n+1} \geq a_1 \dots a_n (a_1 + \dots + a_n);$
 (ii) $a_1^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} \geq a_1 \dots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$

Lời giải. (i) Dùng bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có

$$\begin{aligned} a_1^{n+1} + \dots + a_n^{n+1} &= n(M_{n+1})^{n+1} = n(M_{n+1})^n (M_{n+1})^1 \\ &\geq n(M_0)^n (M_1)^1 = a_1 \dots a_n (a_1 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

(ii) Chứng minh tương tự phần (i). ☺

Định lý 6.6 (Bất đẳng thức Hölder). Nếu p và q là những số thực lớn hơn 1 sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là những số thực (hoặc số phức) khác 0, thì

$$\sum_{k=1}^n |a_k| |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (6.14)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{|a_1|^p}{|b_1|^q} = \frac{|a_2|^p}{|b_2|^q} = \dots = \frac{|a_n|^p}{|b_n|^q}.$$

Chứng minh. Ta có thể giả sử $a_i > 0$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Đặt $A = \sum_{i=1}^n |a_i|^p$ và $B = \sum_{i=1}^n |b_i|^q$. Nếu A hoặc B bằng 0, thì hoặc là tất cả a_i hoặc là tất cả b_i bằng 0. Khi đó hai vế của bất đẳng thức đều bằng 0 và bất đẳng thức cần chứng minh là đúng. Do đó ta chỉ xét trường hợp $A \neq 0$ và $B \neq 0$. Đặt $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ và $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, khi đó $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ và $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Ta lấy $x_i = \frac{|a_i|^p}{A}$ và $y_i = \frac{|b_i|^q}{B}$, khi đó $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ và $\sum_{i=1}^n y_i = 1$. Ta xét hàm số $f(x) = e^x$ trên $(-\infty, \infty)$. Hàm số này là hàm lồi chặt vì $f''(x) = e^x > 0$ với $x \in (-\infty, \infty)$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hai điểm trên

$$x_i^{\frac{1}{p}} y_i^{\frac{1}{q}} = f(\lambda_1 \ln x_i + \lambda_2 \ln y_i) \leq \lambda_1 f(\ln x_i) + \lambda_2 f(\ln y_i) = \frac{x_i}{p} + \frac{y_i}{q}.$$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_i = y_i$, nghĩa là $\frac{|a_i|^p}{|b_i|^q} = \frac{A}{B}$ nếu $b_i > 0$, còn $a_i = 0$ nếu $b_i = 0$. Ta cộng tất cả bất đẳng thức trên khi cho $i = 1, 2, \dots, n$, ta nhận được

$$\sum_{i=1}^n \frac{|a_i| |b_i|}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} = \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{p}} y_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i = 1.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{|a_1|^p}{|b_1|^q} = \frac{|a_2|^p}{|b_2|^q} = \dots = \frac{|a_n|^p}{|b_n|^q}$. ☺

Bài toán 6.14. Nếu a, b, c, x, y, z là những số thực dương, n là số nguyên dương và $(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n$, thì

$$\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z} \geq 1.$$

Lời giải. Ta có đẳng thức

$$a^n + b^n + c^n = \left(\frac{a^{n+1}}{x}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot x^{\frac{n}{n+1}} + \left(\frac{b^{n+1}}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot y^{\frac{n}{n+1}} + \left(\frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot z^{\frac{n}{n+1}},$$

Dùng bất đẳng thức Hölder với $p = \frac{n+1}{n}$ và $q = \frac{p}{p-1} = n+1$, ta nhận được

$$a^n + b^n + c^n \leq \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}} (x^n + y^n + z^n)^{\frac{1}{n+1}},$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.15. Nếu $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là những số dương, thì

$$\frac{(a_1 + \dots + a_n)^{n+1}}{(b_1 + \dots + b_n)^n} \leq \frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \dots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}.$$

Lời giải. Ta dùng bất đẳng thức Hölder với $p = n+1, q = \frac{n+1}{n}$, ta nhận được

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_n &= \left(\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} b_1^{\frac{n}{n+1}} + \dots + \left(\frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} b_n^{\frac{n}{n+1}} \\ &\leq \left(\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \dots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} (b_1 + \dots + b_n)^{\frac{n}{n+1}}, \end{aligned}$$

do đó

$$(a_1 + \dots + a_n)^{n+1} \leq \left(\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \dots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right) (b_1 + \dots + b_n)^n,$$

Từ đó nhận được bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.16. Nếu a, b là số dương, $p \geq 1$ và $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, thì

$$a(\sin x)^{\frac{1}{p}} + b(\cos x)^{\frac{1}{p}} \leq \left(a^{\frac{2p}{2p-1}} + b^{\frac{2p}{2p-1}}\right)^{\frac{2p-1}{2p}}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta nhận được

$$a(\sin x)^{\frac{1}{p}} + b(\cos x)^{\frac{1}{p}} \leq (a^s + b^s)^{\frac{1}{s}} \left(\sin^{\frac{\ell}{p}} x + \cos^{\frac{\ell}{p}} x\right)^{\frac{1}{\ell}},$$

ở đây $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{s} = 1$ và $s, \ell > 1$. Ta chọn $\ell = 2p$, ta nhận được $s = \frac{2p}{2p-1}$, từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Trường hợp bất đẳng thức Hölder với $p = q = 2$ rất hay được sử dụng trong thực tế. Bất đẳng thức như vậy có tên gọi là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Định lý 6.7 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz). Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là những số thực (số phức), thì

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i| |b_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right) \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i b_j = a_j b_i$ với mọi $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Bài toán 6.17. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a \cos \theta + b \sin \theta$, ở đây $0 \leq \theta < 2\pi$ và a, b là những số thực.

Lời giải. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq (a^2 + b^2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2 + b^2.$$

Do đó $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos \theta + b \sin \theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a \sin \theta = b \cos \theta$, nghĩa là $\tan \theta = \frac{b}{a}$. Tồn tại hai giá trị của $\theta \in [0, 2\pi)$ tương ứng bên trái và bên phải của đẳng thức. Như vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\sqrt{a^2 + b^2}$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $-\sqrt{a^2 + b^2}$. ☺

Bài toán 6.18 (USAMO 1978). Với những số thực a, b, c, d, e sao cho $a + b + c + d + e = 8$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$, hãy tìm giá trị lớn nhất của e .

Lời giải. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta nhận được

$$(a + b + c + d)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Do đó $(8 - e)^2 \leq 4(16 - e^2)$. Khai triển và rút gọn, ta nhận được $e(5e - 16) \leq 0$. Điều này nghĩa là $0 \leq e \leq \frac{16}{5}$. Đẳng thức xảy ra với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trong trường hợp này là $a = b = c = d = \frac{6}{5}$, e nhận giá trị lớn nhất là $\frac{16}{5}$. ☺

Bài toán 6.19. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, thì

$$\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_n + \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n \leq 1.$$

Lời giải. Ta chứng minh kết quả mạnh hơn

$$|\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_n| + |\cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n| \leq 1. \quad (6.15)$$

Với $n \geq 2$ và với mọi $a_i \in \mathbb{R}$, ở đây $i = 1, 2, \dots, n$. Hiển nhiên (6.15) kéo theo bất đẳng thức cần chứng minh. Ta chứng minh (6.15) bằng phương pháp quy nạp theo n .

Với $n = 2$, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$|\sin a_1 \sin a_2| + |\cos a_1 \cos a_2| \leq \sqrt{\sin^2 a_1 + \cos^2 a_1} \sqrt{\sin^2 a_2 + \cos^2 a_2} = 1.$$

Như vậy (6.15) đúng với $n = 2$. Giả sử (6.15) đúng với $n = k \geq 2$. Khi đó, với $a_{k+1} \in \mathbb{R}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và giả thiết quy nạp suy ra

$$\begin{aligned} & |\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_k \sin a_{k+1}| + |\cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_k \cos a_{k+1}| \\ & \leq \sqrt{|\sin a_1 \dots \sin a_k|^2 + |\cos a_1 \dots \cos a_k|^2} \sqrt{\sin^2 a_{k+1} + \cos^2 a_{k+1}} \\ & \leq |\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_k| + |\cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_k| \leq 1. \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức (6.15) đúng với $n = k + 1$, vậy nó đúng với mọi n . ☺

Định lý 6.8 (Bất đẳng thức tam giác Minkowski). Nếu $p > 1$ và $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ là những số dương, thì

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6.16)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$.

Chứng minh. Đặt $A = \sum_{i=1}^n a_i^p$. Theo giả thiết ta có $A \neq 0$. Đặt $\lambda_i = \frac{a_i^p}{A}$ và $x_i = \frac{b_i^p}{a_i^p}$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.

Ta xét hàm số $f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p$ với $x \in (0, \infty)$. Ta có $f''(x) = \frac{1-p}{p} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} \cdot x^{\frac{1}{p}-2} < 0$, do đó $f(x)$ là hàm lõm chặt. Theo bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm chặt, ta có

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

$$\left[1 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(1 + x_i^{\frac{1}{p}} \right)^p,$$

thay những giá trị cụ thể ở trên vào bất đẳng thức này, biến đổi và rút gọn ta nhận được kết quả cần chứng minh. ☺

6.3. HÀM LỒI NHIỀU BIẾN VÀ NHỮNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

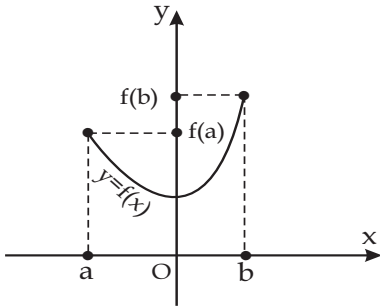
Một ứng dụng quan trọng của hàm lồi là chúng đạt giá trị lớn nhất tại những đầu mút (đỉnh cực biên) của miền xác định.

6.3.1. Giá trị lớn nhất của hàm lồi đạt trên biên

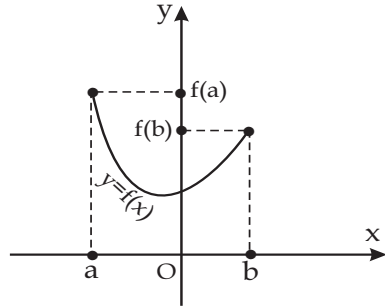
Định lý 6.9. Nếu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi, thì nó đạt giá trị lớn nhất tại a hoặc tại b , nghĩa là

$$f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}, \text{ với mọi } x \in [a, b]. \quad (6.17)$$

Chứng minh. Định lý trên được mô tả bằng đồ thị (Hình 6.3 và Hình 6.4). Điểm bất kì $x \in [a, b]$ khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in [0, 1]$ sao



Hình 6.3



Hình 6.4

cho $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Nếu ta đặt $M = \max\{f(a), f(b)\}$, ta nhận được

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \\ &\leq \lambda M + (1 - \lambda)M = M. \end{aligned} \quad \text{☺}$$

Bất đẳng thức (6.17) có thể mở rộng cho hàm n biến. Giả sử ta có hàm n biến,

$$F = F(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n.$$

Định nghĩa 6.2. Hàm nhiều biến $F(x_1, \dots, x_n)$ được gọi là hàm lồi theo biến x_k nếu

$$f(x_k) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

là hàm lồi với mọi $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $i \neq k$. Điều này nghĩa là với sự cố định $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, ta nhận được hàm số của x_k là hàm lồi.

Người ta kí hiệu miền xác định của hàm nhiều biến trên là $\{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. và gọi là n -khối hộp. Những điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mà $x_i = a_i$ hoặc $x_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ được gọi là đỉnh của khối hộp. Như vậy một khối hộp có 2^n đỉnh.

Định lý 6.10. Nếu $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm lồi theo mọi $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, thì

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq \max_{\substack{t_i \in \{a_i, b_i\} \\ i=1, \dots, n}} F(t_1, \dots, t_n). \quad (6.18)$$

với mọi $(x_1, \dots, x_n) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Nghĩa là, giá trị lớn nhất của $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ phải đạt tại một trong 2^n đỉnh của khối hộp $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Chứng minh. Ta xét hàm số $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lồi theo biến x_1 và áp dụng (6.17), ta nhận được

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq \max_{t_1 \in \{a_1, b_1\}} F(t_1, x_2, \dots, x_n),$$

với mọi $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$. Mặt khác $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm lồi tương ứng với x_2 . Do đó

$$F(t_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max_{t_2 \in \{a_2, b_2\}} F(t_1, t_2, x_3, \dots, x_n),$$

với mọi $t_1 \in \{a_1, b_1\}$, $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 2, \dots, n$. Từ hai bất đẳng thức trên ta nhận được

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max_{\substack{t_i \in \{a_i, b_i\} \\ i=1, 2}} F(t_1, t_2, x_3, \dots, x_n),$$

với mọi $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Lặp lại lý luận trên, ta dễ dàng nhận được (6.18). ☺

Định lý trên có ứng dụng rất lớn để giải các bài toán tương đối khó. Đặc biệt giá trị lớn nhất của các hàm này đều đạt tại các đầu nút của đoạn xác định các biến.

Bài toán 6.20 (Mỹ 1980). Nếu $a, b, c \in [0, 1]$, thì

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Lời giải. Ta xét hàm số

$$F(a, b, c) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c).$$

Dễ thấy $F(a, b, c)$ là hàm lồi theo mỗi a, b, c (cho những số không âm bất kỳ α và β , hàm số $f(x) = \frac{\alpha}{x+\beta}$ là một hàm lồi với $x \geq 0$. Khi đó hàm số $F(a, b, c)$ là một hàm lồi đối với mỗi biến khi hai biến kia cố định, vì nó là tổng của hai hàm lồi và hai hàm tuyến tính). Theo định lý 6.10, giá trị lớn nhất của hàm này đạt tại một trong 2^3 điểm đỉnh của khối hộp $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Tất cả những điểm đỉnh đó là: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$. Ta suy ra $\max_{a, b, c \in [0, 1]} F(a, b, c) = 1$, giá trị lớn nhất này đạt được tại mỗi đỉnh của hộp. Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.21. Cho một số dương a , hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\sum_{k=1}^n (a - a_1)(a - a_2) \cdots (a - a_{k-1})a_k(a - a_{k+1}) \cdots (a - a_n),$$

ở đây $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những biến độc lập trên khoảng $[0, a]$.

Lời giải. Với chỉ số k , cố định $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ và xét biểu thức như một hàm theo a_k . Hàm này là hàm tuyến tính theo a_k , do đó nó có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0, a]$ tại một trong những điểm biên, nghĩa là nó đạt giá trị lớn nhất tại 0 hoặc a . Lặp lại lý luận cho mỗi biến, ta dẫn đến kết luận rằng biểu thức đã cho đạt tới giá trị lớn nhất với một cách chọn nào đấy của $a_k = 0$ hoặc a với $k = 1, 2, \dots, n$.

Nếu tất cả a_k bằng 0 hoặc nếu hai hoặc nhiều hơn thế a_k bằng a , thì tổng đã cho bằng 0. Nếu một $a_k = a$ và những biến còn lại bằng 0, thì biểu thức đã cho bằng a^n . Do đó đây là giá trị lớn nhất của biểu thức ta cần tìm. ☺

Nếu hàm lồi xác định trên các đoạn thẳng, thì giá trị lớn nhất của nó cũng đạt tại những điểm đầu của đoạn thẳng.

Bài toán 6.22. Cho n là số tự nhiên và $x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $\sum_{i < j} |x_i - x_j|$.

Lời giải. Ta chú ý rằng với a cố định thì hàm $f(x) = |x - a|$ là một hàm lồi. Điều này dễ dàng chứng minh được thông qua định nghĩa hàm lồi. Vậy, nếu ta cố định $x_2, x_3, \dots, x_n$, thì biểu thức đã cho là một hàm lồi theo x_1 , vì biểu thức là một tổng những hàm lồi theo x_1 . Để biểu thức đạt được giá trị lớn nhất ta phải chọn x_1 là một trong những điểm đầu của đoạn thẳng. lý luận tương tự cho các biến còn lại, cuối cùng đưa đến giá trị lớn nhất của tổng đạt được khi tất cả biến x_i là 0 hoặc 1. Giả sử p số trong số các biến được chọn là 0 và $n - p$ số biến được chọn còn lại là 1, khi đó tổng có giá trị bằng $p(n - p)$. Ta xét giá trị tổng như là một hàm theo p , ta suy ra khi n là số chẵn, thì giá trị lớn nhất là $\frac{n^2}{4}$ đạt tại $p = \frac{n}{2}$ và khi n là số lẻ,

thì giá trị lớn nhất $\frac{n^2 - 1}{4}$ đạt tại $p = \frac{n \pm 1}{2}$. ☺

Bài toán 6.23. Cho $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. Chứng minh rằng

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1.$$

Lời giải. Biểu thức ở vế trái bất đẳng thức là một hàm tuyến tính theo mỗi biến a, b, c, d khi các biến còn lại cố định. Vậy giá trị nhỏ nhất đạt tại một trong hai đầu đoạn thẳng của miền xác định, nghĩa là tại 0 hoặc 1. Như vậy biểu thức vế trái đạt cực tiểu khi ta kiểm tra các biến a, b, c, d tại 0 hoặc 1. Thấy rằng nếu có ít nhất một trong bốn số bằng 1 thì biểu thức có giá trị $a + b + c + d$ và số này lớn hơn 1, suy ra ta có bất đẳng thức đúng. Nếu tất cả các số đều bằng 0 thì biểu thức vế trái bằng 1 và như vậy bất đẳng thức cũng đúng. ☺

Bài toán 6.24. Cho những số không âm a, b, c, A, B, C và k thỏa mãn

$$a + A = b + B = c + C = k.$$

Chứng minh rằng

$$aB + bC + cA \leq k^2.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a(k-b) + b(k-c) + c(k-a) \leq k^2.$$

Nếu ta xét vế trái bất đẳng thức như một hàm của a , thì nó là hàm tuyến tính. Từ những điều kiện của bài ra kéo theo khoảng xác định của hàm tuyến tính này là $[0, k]$. Suy ra để đạt giá trị cực đại của vế trái ta cần phải chọn $a \in \{0, k\}$. Lặp lại lý luận trên cho các biến b và c , suy ra giá trị cực đại của vế trái đạt được khi ta chọn $a \in \{0, k\}, b \in \{0, k\}, c \in \{0, k\}$. Kiểm tra tám khả năng có thể xảy ra khi chọn (a, b, c) , ta nhận được giá trị cực đại của biểu thức vế trái là k^2 , đó là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.25. Cho $0 \leq x_k \leq 1$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1 x_2 \dots x_n \leq n - 1.$$

Lời giải. Ta cố định $x_2, x_3, \dots, x_n$ và khi đó ta xét hàm $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + x_2 + x_3 + \dots + x_n - x x_2 x_3 \dots x_n$. Hàm này là hàm tuyến tính theo x , do đó nó đạt giá trị lớn nhất tại một trong những điểm đầu của đoạn $[0, 1]$. Như vậy để về trái của bất đẳng thức đã cho đạt lớn nhất thì ta phải chọn x_1 là 0 hoặc 1. Do tính đối xứng của các biến, nên kết luận như vậy cũng đúng cho các biến khác. Nếu tất cả các biến ta đều chọn 1, thì ta có bất đẳng thức đúng. Nếu ít nhất một trong các biến ta chọn bằng 0, thì tích của chúng bằng 0 và tổng của $n - 1$ biến khác nhiều nhất chỉ là $n - 1$, điều đó chứng tỏ bất đẳng thức đã cho là đúng. ☺

Bài toán 6.26. Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$S_n = a_1(1 - a_2) + a_2(1 - a_3) + \dots + a_n(1 - a_1),$$

ở đây $\frac{1}{2} \leq a_i \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Lời giải. Biểu thức đã cho là một hàm tuyến tính đối với mỗi biến, như vậy giá trị lớn nhất đạt được tại những điểm đầu của đoạn thẳng của mỗi biến, nghĩa là biểu thức có giá trị lớn nhất khi $a_k = \frac{1}{2}$ hoặc 1 với $k = 1, 2, \dots, n$.

Nếu $a_k = \frac{1}{2}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$ thì $S_n = \frac{n}{4}$. Ta sẽ chứng minh rằng S_n không thể vượt quá số này. Nếu có đúng m biến a_k chọn bằng 1, thì m số hạng của tổng bằng 0. Cũng như vậy nhiều nhất m số hạng bằng $\frac{1}{2}$, những số hạng này có dạng $a_k(1 - a_{k+1})$ với $a_k = 1$ và $a_{k+1} = \frac{1}{2}$. Mỗi số hạng còn lại đều có hai thừa số bằng $\frac{1}{2}$ và do đó nó

bằng $\frac{1}{4}$. Như vậy tổng loại này lớn nhất là $m \cdot 0 + \frac{m}{2} + \frac{n-2m}{4} = \frac{n}{4}$, suy ra giá trị lớn nhất của S_n là $\frac{n}{4}$. ☺

Bài toán 6.27. Cho $n \geq 2$ và $0 \leq x_i \leq 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

và xác định khi nào thì có đẳng thức, ở đây $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Lời giải. Ta kí hiệu vế trái của bất đẳng thức bằng $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Biểu thức này là một hàm tuyến tính đối với mỗi biến x_i . Cũng như những bài trước biểu thức đạt giá trị lớn nhất tại những điểm đầu mút của đoạn $[0, 1]$ của các biến. Nghĩa là chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi ta chọn x_i là 0 hoặc 1 với $i = 1, 2, \dots, n$.

Nếu có đúng k số biến x_i bằng 0, còn $n - k$ những biến khác bằng 1, thì thấy ngay $S(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq n - k$ và tổng $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 \geq n - 2k$, nên $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nhỏ hơn hoặc bằng $n - k - (n - 2k) = k$. Như vậy giá trị lớn nhất của S nhỏ hơn hoặc bằng $\min(k, n - k)$, mà nó lớn nhất bằng $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Từ đây suy ra với n chẵn, đẳng thức đúng khi $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$ hoặc $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$. Với n là số lẻ đẳng thức xảy ra khi tất cả các cặp (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, n$ gồm số 0 và 1, ngoại trừ một cặp chứa cả hai số 1 (với quy định ở đây $x_{n+1} = x_1$). ☺

Bài toán 6.28. Chứng minh rằng nếu $1 \leq x_k \leq 2$, $k = 1, 2, \dots, n$, thì

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^2 \leq n^3.$$

Lời giải. Dùng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^2} &\leq \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}}{3}. \end{aligned}$$

Hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x}$ là một hàm lồi trên $[1, 2]$, như vậy nó đạt cực đại tại một trong những điểm đầu của khoảng xác định. Giá trị của hàm này tại mỗi điểm đầu của đoạn thẳng xác định đều bằng 3. Như vậy chỉ ra rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}}{3} \leq n,$$

như vậy bất đẳng thức được chứng minh. ☺

Bài toán 6.29. Cho $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ là những số thực trong đoạn $[-98, 98]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{19} a_1.$$

Lời giải. Tổng $T = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{19} a_1$ là một hàm tuyến tính theo mỗi biến. Như vậy giá trị nhỏ nhất đạt được khi mỗi biến lấy những điểm cuối của khoảng xác định. Nghĩa là khi $a_i \in \{-98, 98\}$ với $i = 1, 2, \dots, 19$ thì tổng có giá trị nhỏ nhất. Vì có số lẻ chỉ số, nếu ta xem xét chỉ số theo modulo 19, thì tồn tại chỉ số i sao cho a_i và a_{i+1} cùng dấu. Do đó tổng nhỏ nhất là $-18 \cdot 98^2 + 98^2 = -17 \cdot 98^2$. Đẳng thức xảy ra tại

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{19} = -98, \quad a_2 = a_4 = \dots = a_{18} = 98. \quad \text{☺}$$

Bài toán 6.30. Cho $a, b, c, d, e \in [p, q]$ với $p > 0$. Chứng minh rằng

$$(a + b + c + d + e) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \right) \leq 25 + 6 \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2.$$

Lời giải. Trong năm số a, b, c, d, e nếu ta cố định bốn số lại và xem số thứ năm như là một biến x , thì vế trái trở thành một hàm có dạng $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x} + \gamma$ với α, β, γ là những số dương và x xác định trên đoạn $[p, q]$.

Hàm $f(x)$ là một hàm lồi trên đoạn $[p, q]$, vì nó là tổng của một hàm lồi và một hàm tuyến tính. Như vậy nó đạt giá trị lớn nhất tại một trong những điểm đầu của khoảng xác định của nó. Như vậy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức là cho các biến a, b, c, d, e lại những giá trị p hoặc q .

Nếu có $n(n \leq 5)$ số bằng p , và $5 - n$ số bằng q , thì vế trái của bất đẳng thức bằng

$$n^2 + (5 - n)^2 + n(5 - n) \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) = 25 + n(5 - n) \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2.$$

Giá trị lớn nhất của $n(5 - n)$ đạt được khi $n = 2$ hoặc 3 , trong trường hợp này đều có $n(5 - n) = 6$ và từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

6.3.2. Những ứng dụng khác

Định lý 6.11 (Bất đẳng thức Kantorovich). Nếu $p_i \geq 0$ và $0 < a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, n$, thì

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{x_i} \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4ab} \min_{\substack{X \cup Y = A_n \\ X \cap Y = \emptyset}} \left(\sum_{i \in X} p_i - \sum_{j \in Y} p_j \right)^2, \quad (6.19)$$

ở đây $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ và $X, Y \subseteq A_n$.

Chứng minh. Ta xét hàm số

$$F(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{x_i} \right).$$

Đặt $M_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j x_j$ và $N_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{p_j}{x_j}$, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} f(x_i) &= (p_i x_i + M_i) \left(\frac{p_i}{x_i} + N_i \right) \\ &= p_i^2 + M_i N_i + p_i N_i x_i + p_i M_i \frac{1}{x_i}. \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $f''(x_i) > 0$, suy ra $f(x)$ là hàm lồi. Do đó $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cũng là hàm lồi theo $x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Theo định lý 6.10 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nhận giá trị lớn nhất tại một trong 2^n đỉnh của n -hộp $[a, b] \times \dots \times [a, b]$. Do đó

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq \max_{\substack{X \cup Y = A_n \\ X \cap Y = \emptyset}} \left(a \sum_{i \in X} p_i + b \sum_{j \in Y} p_j \right) \left(\frac{1}{a} \sum_{i \in X} p_i + \frac{1}{b} \sum_{j \in Y} p_j \right). \quad (6.20)$$

Ta có đẳng thức sau

$$AB = \frac{1}{4ab} (A + abB)^2 - \frac{1}{4ab} (A - abB)^2,$$

ta nhận được

$$\begin{aligned} & \left(a \sum_{i \in X} p_i + b \sum_{j \in Y} p_j \right) \left(\frac{1}{a} \sum_{i \in X} p_i + \frac{1}{b} \sum_{j \in Y} p_j \right) \\ &= \frac{(a+b)^2}{4ab} \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4ab} \left(\sum_{i \in X} p_i - \sum_{j \in Y} p_j \right)^2. \end{aligned}$$

Thay kết quả này vào (6.20), ta sẽ nhận được (6.19) là điều cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.31. Nếu $0 < a \leq x_i \leq b, i = 1, 2, \dots, n$, thì

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2 - \frac{(a-b)^2}{4ab} \left[\frac{1 - (-1)^n}{2} \right].$$

Lời giải. Sử dụng định lý Kantorovich với $p_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ và tính được

$$\min_{\substack{X \cup Y = A_n \\ X \cap Y = \emptyset}} \left(\sum_{i \in X} 1 - \sum_{j \in Y} 1 \right)^2 = \min_{x \in \mathbb{N}} (x - (n-x))^2 = \left[\frac{1 - (-1)^n}{2} \right].$$

Thay các giá trị đã cho và kết quả tính toán trên vào (6.19) cho kết quả cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.32. Nếu các số α, β, γ thuộc $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, thì

$$\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} \right) \leq 5 + 3\sqrt{2}.$$

Lời giải. Từ $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ta có $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Do đó

$$\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\gamma}{2} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right].$$

Thay $n = 3, a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = 1$ vào công thức của bài toán trước cho kết quả cần chứng minh. ☺

Bài toán 6.33. Nếu $0 < a \leq x_i \leq b, i = 1, 2, \dots, n$, thì

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq \frac{4nab}{(a+b)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Lời giải. Ta lấy $p_i = x_i$ trong công thức (6.19), ta nhận được

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) n \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2,$$

Từ đây biến đổi về bất đẳng thức cần chứng minh.



6.4. BÀI TẬP

▷ 6.34. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương và $k > p \geq 0$, thì

$$\frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{a_1^p + \dots + a_n^p} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^{k-p}.$$

▷ 6.35. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số không âm và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là những số dương sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Nếu $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} = 1$, thì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1} \dots \lambda_n^{\lambda_n}}.$$

▷ 6.36. Nếu a, b, c là các cạnh của một tam giác, thì

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

▷ 6.37. Nếu ABC là một tam giác nhọn với các góc α, β và γ , và $p \geq 1$, thì

$$(i) \operatorname{tg}^p \alpha + \operatorname{tg}^p \beta + \operatorname{tg}^p \gamma \geq 3\sqrt{3}^p;$$

$$(ii) \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

▷ 6.38. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương và $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{s}{s-a_1} + \frac{s}{s-a_2} + \dots + \frac{s}{s-a_n} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

▷ 6.39. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương, $m \geq 0$ và

$$A = \frac{a_1}{ma_1 + a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + ma_n}.$$

Chứng minh rằng

(i) Nếu $m \in [0, 1]$ thì $A \geq \frac{n}{n+m-1}$;

(ii) Nếu $m \in [1, \infty)$ thì $A \leq \frac{n}{n+m-1}$.

► **6.40.** Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương sao cho $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ và đặt $s = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \dots + \frac{1}{s-a_n} \leq 1.$$

► **6.41.** Cho $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi. Khi đó với mọi x, y, z thuộc $[a, b]$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} [f(x) + f(y) + f(z)] + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \\ \geq \frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

► **6.42.** Cho a, b, c thuộc $[0, 1]$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} + k(1-abc) \leq \max\{1, 3+k\}.$$

► **6.43.** Cho a, b, c thuộc $[1, 2]$, chứng minh rằng

$$(a+5b+9c) \left(\frac{1}{a} + \frac{5}{b} + \frac{9}{c} \right) \leq 225.$$

CHƯƠNG 7

LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý BÀI TẬP

7.1. Lời giải và gợi ý bài tập chương 1	217
7.2. Lời giải và gợi ý bài tập chương 2	222
7.3. Lời giải và gợi ý bài tập chương 3	226
7.4. Lời giải và gợi ý bài tập chương 4	233
7.5. Lời giải và gợi ý bài tập chương 5	235
7.6. Lời giải và gợi ý bài tập chương 6	238

7.1. LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý BÀI TẬP CHƯƠNG 1

▷ **1.23. Lời giải.** (a) Đặt $\mathcal{S} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } 7^n + 3n - 1 \vdots 9\}$. Dễ dàng thấy rằng $0 \in \mathcal{S}$. Giả sử $k \in \mathcal{S}$, nghĩa là $k \in \mathbb{N}$ và $7^k + 3k - 1 \vdots 9$, ta phải chứng minh $k+1 \in \mathcal{S}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} 7^{k+1} + 3(k+1) - 1 &= 7^k \cdot 7 + 21k - 7 - 18k + 9 \\ &= 7(7^k + 3k - 1) - 9(2k - 1). \end{aligned}$$

Vế phải của đẳng thức trên chia hết cho 9, suy ra $7^{k+1} + 3(k+1) - 1 \vdots 9$. Nghĩa là $k+1 \in \mathcal{S}$. Theo Định lý 1.2, ta có $\mathcal{S} = \mathbb{N}$. Vậy $7^n + 3n - 1 \vdots 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(b) Hoàn toàn tương tự như phần trên.

Đặt $\mathcal{S} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } 3^{2n+2} + 8n - 9 \vdots 16\}$. Dễ dàng thấy rằng $0 \in \mathcal{S}$.

Giả sử $k \in \mathcal{S}$, nghĩa là $k \in \mathbb{N}$ và $3^{2k+2} + 8k - 9 \vdots 16$, ta phải chứng minh $k+1 \in \mathcal{S}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} + 8(k+1) - 9 &= 3^{2k+2} \cdot 9 + 72k - 81 - 64k + 80 \\ &= 9(3^{2k+2} + 8k - 9) - 16(4k - 5). \end{aligned}$$

Vế phải của đẳng thức trên chia hết cho 16, suy ra $3^{2k+2} + 8k - 9 \vdots 16$. Nghĩa là $k+1 \in \mathcal{S}$. Theo Định lý 1.2, ta có $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.

Vậy $3^{2n+2} + 8n - 9 \vdots 16$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. ☺

▷ **1.24. Lời giải.**

(a) Phương pháp quy nạp toán học theo mệnh đề:

Bước cơ sở: Với $n = 0$, ta có $4^0 + 15 \cdot 0 - 1 \vdots 9$, mệnh đề đúng.

Bước quy nạp: Giả sử với $n = k$ đã có $4^k + 15k - 1 \vdots 9$. Ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4^k \cdot 4 + 60k - 4 - 45k + 18 \\ &= 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k - 2). \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì vế phải của đẳng thức chia hết cho 9. Nên suy ra $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ cũng chia hết cho 9. Vậy mệnh đề cần chứng minh đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Phương pháp phản tử cực biên: Giả sử có số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ mà mệnh đề không đúng. Có thể có một số số n như vậy, ta chọn số n_0 nhỏ nhất trong các số n mà mệnh đề sai (điều này làm được vì theo nguyên lý thứ tự). Số n_0 không thể là 0 hoặc 1, vì những giá trị này của n thì mệnh đề đúng. Với $n_0 - 1$ thì $4^{n_0-1} + 15(n_0 - 1) - 1 \vdots 9$. Khi

đó

$$\begin{aligned} 4^{n_0} + 15n_0 - 1 &= 4^{n_0-1} \cdot 4 + 60(n_0 - 1) - 4 - 45n_0 + 63 \\ &= 4(4^{n_0-1} + 15(n_0 - 1) - 1) - 9(5n_0 - 7). \end{aligned}$$

Ta thấy $4^{n_0} + 15n_0 - 1$ chia hết cho 9 điều này vô lý với cách chọn n_0 ở trên. Suy ra không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ nào mà mệnh đề không đúng.

(b) Chứng minh hoàn toàn tương tự như (a). $\odot$

▷ **1.25. Lời giải.** (a) Phương pháp quy nạp không áp dụng trực tiếp được cho việc chứng minh bất đẳng thức trên. Ta chứng minh bất đẳng thức mở rộng hơn một chút thì được. Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \cdots + \sqrt{a+n} < a+3 \quad (7.1)$$

với mọi số nguyên dương n và $a \in [0, \infty)$. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp:

Bước cơ sở: Với $n = 1$, bất đẳng thức (7.1) có dạng $\sqrt{a+1} < a+3$, tương đương với $a+1 < (a+3)^2 \Leftrightarrow 0 < a^2 + 5a + 8$, điều này đúng với mọi $a \geq 0$.

Bước quy nạp: Giả sử (7.1) đúng với $n = k$ và với mọi $a \in [0, \infty)$. Ta chứng minh nó cũng đúng với $n = k+1$. Do đó nó cũng đúng nếu ta thay a bằng $a+1$. Do đó,

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} + \cdots + \sqrt{a+1+k} < a+4.$$

Ta cộng vào hai vế bất đẳng thức trên đại lượng $a+1$ thì

$$a+1 + \sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} + \cdots + \sqrt{a+1+k} < 2a+5,$$

nghĩa là

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} + \cdots + \sqrt{a+1+k} < \sqrt{2a+5}.$$

Từ bất đẳng thức trên, ta suy ra (7.1) đúng với $n = k + 1$ nếu $\sqrt{2a+5} < a+3$ với mọi $a \geq 0$. Bất đẳng thức này đúng vì nó tương đương với $2a+5 < (a+3)^2$ hoặc là $0 < a^2 + 4a + 4$, bất đẳng thức này là hiển nhiên. Suy ra bất đẳng thức cần chứng minh đúng với mọi n và $a \geq 0$. Khi đó chọn $a = 0$ ta nhận được kết quả cần chứng minh.

(b) Chứng minh hoàn toàn tương tự như phần (a). ☺

▷ **1.26. Lời giải.** Hiển nhiên ta có đẳng thức

$$\sqrt{k} = \frac{k - b\sqrt{k}}{\sqrt{k} - b}. \quad (7.2)$$

Ta đặt $b = [\sqrt{k}]$. Vì k không phải là số chính phương nên ta có $b < \sqrt{k} < b+1$ nghĩa là $0 < \sqrt{k} - b < 1$.

Giả sử $\sqrt{k}$ là một số hữu tỉ, và đặt $\sqrt{k} = \frac{u}{v}$ có mẫu số nhỏ nhất v trong các phân số thỏa mãn đẳng thức trên. Khi đó từ (7.2) ta có

$$\sqrt{k} = \frac{kv - bu}{u - bv}$$

nó có mẫu số $u - bv = v(\sqrt{k} - b) > 0$ và $u - bv < v$ vì $\sqrt{k} - b < 1$. Mâu thuẫn với cách chọn v là mẫu số nhỏ nhất. ☺

▷ **1.27. Lời giải. Bổ đề:** Cho s là số nguyên dương. Chứng minh rằng mọi đoạn $[s, 2s]$ chứa lũy thừa của 2.

Thật vậy, nếu s là lũy thừa của 2 thì bổ đề đã được chứng minh. Nếu s không là lũy thừa của 2 thì nó phải nằm giữa hai số lũy thừa liên tiếp của 2, nghĩa là tồn tại một số nguyên r sao cho $2^r < s < 2^{r+1}$. Suy ra $2^{r+1} < 2s$. Do đó $s < 2^{r+1} < 2s$ cho ta kết quả mong muốn.

Ta sẽ chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp. Trước tiên ta chứng minh rằng 1 nằm trong tập $\mathcal{M}$, sau đó ta sẽ chứng minh rằng mọi lũy thừa của 2 cũng nằm trong tập này và cuối cùng ta sẽ chứng minh những số không phải lũy thừa của 2 cũng nằm

trong tập này.

Từ $\mathcal{M}$ là tập khác rỗng những số nguyên dương, theo nguyên lý thứ tự tồn tại phần tử nhỏ nhất, cho đó là a . Theo giả thiết $[\sqrt{a}]$ cũng nằm trong tập $\mathcal{M}$, nhưng $\sqrt{a} < a$, điều này nghĩa là $a = 1$, còn những giá trị khác sẽ mâu thuẫn với việc chọn a . Điều này chỉ ra rằng 1 thuộc $\mathcal{M}$. Từ 1 thuộc $\mathcal{M}$, theo giả thiết thì 4 cũng thuộc $\mathcal{M}$. Từ 4 thuộc $\mathcal{M}$ suy ra $4 \cdot 4 = 4^2, \dots$ cũng thuộc tập $\mathcal{M}$. Bằng cách này ta nhận được tất cả các số có dạng $4^n = 2^{2n}, n = 1, 2, \dots$ đều nằm trong $\mathcal{M}$. Như vậy tất cả lũy thừa của 2 nâng lên bậc chẵn đều nằm trong $\mathcal{M}$.

Từ giả thiết, ta có $[\sqrt{2^{2n}}] = 2^n$ cũng nằm trong $\mathcal{M}$, suy ra lũy thừa 2 nâng lên bậc lẻ cũng nằm trong $\mathcal{M}$. Tóm lại, tất cả lũy thừa của 2 đều nằm trong $\mathcal{M}$.

Giả sử $n \in \mathbb{N}$ không nằm trong tập $\mathcal{M}$. Khi đó n không thể là lũy thừa của 2. Từ $n \notin \mathcal{M}$ ta suy ra rằng không số nguyên nào trong $A_1 = [n^2, (n+1)^2)$ thuộc $\mathcal{M}$, vì mỗi phần tử của $y \in A_1$ thỏa mãn $[\sqrt{y}] = n$. Tương tự không có phần tử $z \in [n^4, (n+1)^4)$ thuộc $\mathcal{M}$, (nếu trái lại thì sẽ suy ra z thuộc A_1 , vô lý). Bằng quy nạp ta có thể chứng minh rằng không có phần tử nào trong khoảng $A_r = [n^{2^r}, (n+1)^{2^r})$ thuộc $\mathcal{M}$.

Ta sẽ chứng minh rằng những khoảng như vậy đủ lớn để chúng chứa cả lũy thừa của 2, do đó nhận được sự vô lý với giả thiết trên rằng không có phần tử nào của A_r thuộc $\mathcal{M}$. Ta xét hàm số $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ như $f(x) = \log_2 x$, đây là hàm tăng và do đó $\log_2(n+1) - \log_2 n > 0$. Từ hàm số $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ như $g(x) = 2^{-x}$ là hàm giảm, với số nguyên dương đủ lớn k ta có

$$2^{-k} < \log_2(n+1) - \log_2 n.$$

Điều này kéo theo

$$(n+1)^{2^k} > 2n^{2^k}.$$

Như vậy khoảng $[n^{2^k}, 2n^{2^k}]$ được chứa trong $[n^{2^k}, (n+1)^{2^k}]$. Nhưng mỗi khoảng có dạng $[s, 2s]$, ở đây s là một số nguyên dương, đều chứa lũy thừa của 2. Như vậy ta nhận được điều vô lý.

Chú ý: Dùng kết luận của bài toán trên để chứng minh bất đẳng thức Cauchy: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số thực không âm. Khi đó

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad \text{😊}$$

▷ **1.28. Gợi ý:** Dựa vào định nghĩa trong bài.

▷ **1.29. Gợi ý:** Xét số nguyên dương nhỏ nhất trong $\mathcal{S}$.

7.2. LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý BÀI TẬP CHƯƠNG 2

▷ **2.37. Lời giải.** Dễ thấy $x = y = z = t = 0$ là một nghiệm của phương trình. Ta sẽ chứng minh rằng đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. Giả sử phương trình có những nghiệm nguyên khác không, từ nguyên lý thứ tự ta có thể chọn được nghiệm nguyên (x_0, y_0, z_0, t_0) sao cho $|x_0|$ có giá trị nhỏ nhất trong những giá trị có thể có của những bộ nghiệm. Ta có

$$7(x_0^2 + y_0^2) = z_0^2 + t_0^2 \quad (7.3)$$

suy ra z_0^2 và t_0^2 đều chia hết cho 7, suy ra z_0 và t_0 cũng chia hết cho 7. Đặt $z_0 = 7z_1$ và $t_0 = 7t_1$ với $z_1, t_1 \in \mathbb{Z}$. Thay các giá trị này vào (7.3) ta nhận được

$$x_0^2 + y_0^2 = 7(z_1^2 + t_1^2).$$

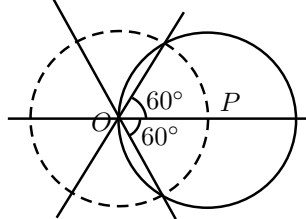
Lý luận tương tự như trên ta cũng có x_0 và y_0 chia hết cho 7. Ta đặt $x_0 = 7x_1$ và $y_0 = 7y_1$ với $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Thay các giá trị này vào đẳng thức sau cùng, ta nhận được

$$7(x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 + t_1^2.$$

Suy ra x_1, y_1, z_1, t_1 cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Nhưng $|x_1| = \frac{|x_0|}{7} < x_0$, điều này trái với cách chọn x_0 . Do đó phương trình không có nghiệm nguyên dương. ☺

▷ **2.38. Gợi ý:** Thực hiện giống như bài toán 2.4.

▷ **2.39. Lời giải.** Cho P là điểm xa nhất đối với điểm O trong n điểm đã cho. Đường thẳng OP và thêm hai đường thẳng tạo với nó những góc 60° đi qua O (Hình 7.1) chia mặt phẳng thành 6 phần. Đường tròn tâm P phủ những điểm (từ n điểm đã cho), mà chúng nằm trong hai từ những phần này. Trong mỗi phần còn lại ta chọn điểm cách xa O nhất. Nó là tâm của hình tròn phủ tất cả những điểm trong phần này. Bốn hình tròn mới phủ bốn phần và hình tròn đầu tiên ta chọn phủ tất cả n điểm đã cho là năm hình tròn. ☺



Hình 7.1

▷ **2.40. Lời giải.** Dễ thấy phương trình đã cho có nghiệm $(0, 0, 0, 0)$. Ta sẽ chứng minh rằng đây là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình đã cho. Ta có dùng bổ đề sau đây:

Bổ đề: Nếu $k_1, k_2, \dots, k_n$ là những số nguyên không âm khác nhau và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số nguyên không chia hết cho c , thì

$$c^{k_1}x_1 + c^{k_2}x_2 + \dots + c^{k_n}x_n \neq 0. \quad (7.4)$$

Chứng minh bất đẳng thức trên cũng dùng phương pháp đại lượng cực biên. Giả sử k_1 là số nhỏ nhất trong các số k_i

($i = 1, 2, \dots, n$). Ta có

$$c^{k_1}x_1 + c^{k_2}x_2 + \dots + c^{k_n}x_n = c^{k_1}(x_1 + c^{k_2-k_1}x_2 + \dots + c^{k_n-k_1}x_n).$$

Tất cả số hạng trong ngoặc nhọn ở vế bên phải đẳng thức đều chia hết cho c trừ số hạng ban đầu, bởi vì $k_i - k_1 > 0$ với $i \neq 1$. Số hạng đầu tiên theo giả thiết x_1 không chia hết cho c . Suy ra tổng này khác không, vì $c^{k_1} \neq 0$, nên bất đẳng thức (7.4) là đúng. Bổ đề đã chứng minh.

Giả sử những số nguyên x, y, z, u tạo thành nghiệm của phương trình (2.10). Tồn tại những số nguyên không âm k, ℓ, m, n sao cho

$$x = 2^k x_1, \quad y = 2^\ell y_1, \quad z = 2^m z_1, \quad u = 2^n u_1,$$

ở đây mỗi số trong các số x_1, y_1, z_1, u_1 là số lẻ hoặc bằng 0.

Thay x, y, z, u vào phương trình (2.10) và biến đổi về dạng

$$2^{4k}x_1^4 + 2^{4\ell+2}y_1^4 - 2^{4m+1}z_1^4 - 2^{4n+3}u_1^4 = 0. \quad (7.5)$$

Những số $4k, 4\ell+2, 4m+1, 4n+3$ là khác nhau, vì chúng chia cho 4 có số dư khác nhau, vì thế $x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 0$. Thật vậy, nếu một số nào đó trong các số x_1, y_1, z_1, u_1 khác 0, thì chúng là những số lẻ và đẳng thức (7.5) trái với kết quả của bổ đề.

Như vậy suy ra chỉ có nghiệm duy nhất $x = y = z = u = 0$. ☺

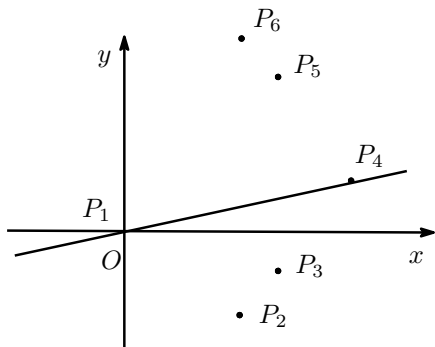
▷ **2.41.** Bạn đọc tự giải.

▷ **2.42. Lời giải.** Ta tưởng tượng những điểm đã cho nằm trong một hệ tọa độ và chọn điểm bên trái nhất, cho đó là P_1 , như là một trong hai điểm xác định đường thẳng (có thể tồn tại hai điểm bên trái nhất, khi đó ta chọn lấy một trong chúng).

Ta đặt hệ tọa độ vuông góc với điểm gốc là P_1 , trục P_1x theo hướng từ trái qua phải và trục P_1y theo hướng từ dưới lên trên. Sắp đặt những điểm còn lại theo dãy tăng $P_2, P_3, \dots, P_{2n+2}$ tương ứng

với góc định hướng P_1P_i được tạo với trục P_1x với $i = 2, 3, \dots, 2n+2$ (Hình 7.2). Điều này có thể làm được vì không có ba điểm nào thẳng hàng và các góc nằm giữa -90° và 90° . Nếu ta chọn đường thẳng là P_1P_{n+2} , thì $P_2, P_3, \dots, P_{n+1}$ nằm trong góc tạo bởi P_1P_{n+2} và nửa âm của trục P_1y , và $P_{n+3}, P_{n+4}, \dots, P_{2n+2}$ nằm trong góc tạo bởi P_1P_{n+2} và nửa dương của trục P_1y , như vậy hai tập điểm này tách nhau bởi đường thẳng P_1P_{n+2} , mà P_1 và P_{n+2} là hai điểm có tính chất ta mong muốn. ☺

▷ **2.43. Lời giải.** Ta kí hiệu và sắp xếp lại những số đã chọn: $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_9$. Khi đó có nhiều nhất 20 số vượt quá a_0 (đó là những số lớn nhất và số lớn thứ hai trong mỗi hàng), như vậy $a_0 \geq 80$. Tương tự như vậy $a_1 \geq 72$ (lần này gồm số lớn thứ nhất, số lớn thứ hai trong mỗi hàng và những phần tử trong hàng chứa a_0 có thể vượt quá a_1). Do đó



Hình 7.2

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_9 &\geq 80 + 72 + (a_9 + 7) + (a_9 + 6) + \dots + a_9 \\ &= 8a_9 + 180. \end{aligned}$$

Trong khi đó, hàng chứa số a_9 có tổng nhiều nhất là

$$100 + 99 + a_9 + (a_9 - 1) + \dots + (a_9 - 7) = 8a_9 + 171,$$

mà nó thực sự nhỏ hơn tổng của tất cả a_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ (đây là hàng trong bảng ta cần tìm). ☺

▷ **2.44. Lời giải.** Cho n số và sắp xếp theo thứ tự tăng

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Với $i = 1, 2, \dots, n$ đặt $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ và $S_0 = 0$. Tất cả những tổng này đều không vượt quá S_n . Kí hiệu T là một trong những tổng này và với một i thích hợp, ta có

$$S_{i-1} < T \leq S_i.$$

Kí hiệu C_i là nhóm các tổng T đều thỏa mãn $S_{i-1} < T \leq S_i$. Dễ thấy có n nhóm như vậy. Ta sẽ chứng minh rằng các nhóm như vậy có tính chất ta mong muốn. Để chứng minh điều này ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau là đủ: $\frac{1}{2}S_i < T \leq S_i$. Thật vậy, từ $S_{i-1} < T \leq S_i$. Bất đẳng thức

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} = S_{i-1} < T$$

và thứ tự $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ chỉ ra rằng tổng T chứa ít nhất một số hạng a_k với $k \geq i$. Khi đó vì $a_k \geq a_i$, ta có

$$S_i - T < S_i - S_{i-1} = a_i \leq a_k \leq T,$$

mà nó cùng với $T \leq S_i$ kéo theo mệnh đề cần chứng minh. ☺

▷ **2.45. Gợi ý:** Làm như bài toán 2.30.

7.3. LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý BÀI TẬP CHƯƠNG 3

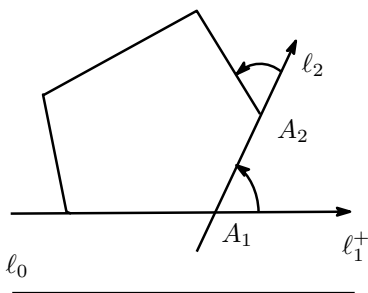
▷ **3.32. Gợi ý:** Chứng minh rằng nếu dây cung ngắn nhất trong số các dây cung không phải là đường kính, thì nó không thể đi qua trung điểm của bất cứ dây cung nào khác đã có.

▷ **3.33. Lời giải.** Giả sử ngược lại và cho k là số nhỏ nhất mà khẳng định của bài toán là sai. Điều này nghĩa là dựng được ít nhất $k + 1$ tam giác có đỉnh trong k điểm. Từ nguyên lý Dirichlet suy ra tồn tại một điểm A mà nó là đỉnh của ít nhất hai tam giác. Giả sử ABC là tam giác thứ nhất. Có ít nhất một trong những đỉnh B và C là đỉnh của tam giác thứ hai, mà nó được kí hiệu là ABD . Nếu ACX là tam

giác thứ ba thì $X = D$. Như vậy tam giác thứ tư phải chứa B hoặc C , điều này không thể được. Do đó nếu A và B là những đỉnh của hai tam giác thì chúng là những đỉnh của tất cả bốn tam giác.

Giả sử A là đỉnh của t tam giác ($t \geq 4$). Những tam giác này có dạng $ABA_1, ABA_2, \dots, ABA_t$, ở đây tất cả những điểm $A_1, A_2, \dots, A_t$ là đôi một khác nhau. Hiển nhiên không có khả năng tam giác dạng BXY , ở đây X và Y là những điểm khác nhau thuộc $A_1, A_2, \dots, A_t$. Tam giác BA_iA_j và $A_iA_jA_m$ cũng không tồn tại. Khi đó những điểm $A, B, A_1, A_2, \dots, A_t$ là những đỉnh của những tam giác $ABA_1, ABA_2, \dots, ABA_t$. Bằng cách như vậy ta dùng $t + 2$ điểm và nhận được t tam giác. Không có khả năng $t + 2 = k$, bởi vì tất cả những tam giác là $t < k$. Số những điểm còn lại là $k_0 = k - t - 2$ và với chúng dựng được ít nhất $k + 1 - t > k_0$ tam giác sao cho không có hai tam giác trong chúng có đúng một đỉnh chung. Những tam giác tạo ra nhiều hơn k_0 điểm, và như vậy $k_0 > 4$. Ta tìm được số $k_0 < k$ mà mệnh đề không đúng. Điều này trái với cách chọn k . ☺

▷ **3.34. Lời giải.** Vì M là tập hợp hữu hạn những điểm (Hình 7.3), nghĩa là nó bị chặn (nằm trong một hình tròn), suy ra tồn tại đường thẳng ℓ_0 sao cho tất cả những điểm thuộc M nằm toàn bộ trong một nửa mặt phẳng đối với ℓ_0 . Kí hiệu những điểm đã cho là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Vì chúng là hữu hạn, nên tồn tại một hoặc một số điểm mà nó gần nhất đến ℓ_0 . Qua một trong các điểm này, cho đó là A_1 , ta kẻ đường thẳng ℓ_1 mà $\ell_1 // \ell_0$. Trên ℓ_1 sẽ chứa tất cả



Hình 7.3

những điểm thuộc M mà chúng có khoảng cách bằng đúng khoảng cách từ A_1 đến ℓ_0 . Ta có thể cho rằng A_1 là một trong những điểm cuối trên ℓ_1 (sau điểm này không có điểm khác nữa).

Đối với A_1 trên ℓ_1 ta chọn một hướng dương. Tất cả những điểm còn lại là hữu hạn và nằm về cùng một nửa mặt phẳng đối với ℓ_1 . Ta xét tất cả các góc $A_i A_1 \ell_1^+$, ở đây $A_i \in M$ và $A_i \notin \ell_1$. Từ những góc này sẽ có một góc có số đo (hoặc một số góc) là nhỏ nhất. Ta cho đó là $A_2 A_1 \ell_1^+$. Qua những điểm A_1 và A_2 ta kẻ đường thẳng ℓ_2 . Từ cách dựng đường thẳng ℓ_2 suy ra tất cả những điểm trong tập M nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ ℓ_2 . Ta lại cho rằng A_2 là điểm cuối trên đường thẳng ℓ_2 và vì điểm cuối khác là A_1 , ta có thể chọn chiều từ A_1 đến A_2 là chiều dương. Bây giờ ta lại xét tất cả những góc của những điểm còn lại trong M đối với tia $A_1 A_2$, từ đây bằng cách lặp lại cách làm như trên và tiếp tục như vậy.

Những bước thực hiện trên có thể chỉ thực hiện hữu hạn lần, bởi vì số các điểm đã cho là hữu hạn. Cuối cùng ta nhận được một đa giác lồi (hoặc là đoạn thẳng) chứa tập hợp M , điều này được suy ra từ cách dựng các đường thẳng $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \dots$ ☺

▷ **3.35. Lời giải.** Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 4$ mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với $n \geq 4$ nào đó. Ta sẽ chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với $n + 1$. Cho $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ trên mặt phẳng sao cho mọi bốn điểm đều là đỉnh của một tứ giác lồi. Theo giả thiết quy nạp, những điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ là đỉnh của một đa giác lồi W .

Ta giả sử W có chu vi lớn nhất trong những đa giác lồi tạo ra bởi n điểm này (vì số điểm là hữu hạn và ta có thể chọn được các điểm thích hợp sao cho chúng là đỉnh của đa giác lồi có chu vi lớn nhất). Điểm A_{n+1} không nằm trên các cạnh của đa giác W , vì không có ba

điểm nào thẳng hàng. Điểm A_{n+1} cũng không nằm bên trong W , vì điểm bất kì bên trong W sẽ nằm trong một tam giác, mà nó được chia bởi đa giác W theo các đường chéo của nó. Điểm A_{n+1} không thể nằm trong tam giác này (vì mọi bốn điểm tạo ra các đỉnh một tứ giác lồi). Như vậy điểm A_{n+1} nằm ngoài đa giác W . Ta xét những góc lồi có đỉnh tại A_{n+1} , các cạnh đi qua các đỉnh của đa giác W . Vì tập hợp tất cả những góc như vậy hữu hạn, nên trong chúng có góc lớn nhất. Giả sử góc đó là $\alpha = \widehat{A_k A_{n+1} A_\ell}$. Bên trong của góc α chứa tất cả các đỉnh của đa giác W , loại trừ A_k và A_ℓ . Trong tam giác T có các đỉnh A_k, A_ℓ, A_{n+1} không chứa một đỉnh nào của W ngoài A_k và A_ℓ , bởi vì những điểm A_i ($i \neq k, i \neq \ell, i \neq n+1$) và A_k, A_ℓ, A_{n+1} theo giả thiết là đỉnh của tứ giác lồi. Suy ra A_k và A_ℓ là hai đỉnh kề nhau của W , cho đó là $\ell = k+1$. Nhưng khi đó $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{n+1}, A_{k+1}, \dots, A_n$ là dãy đỉnh của đa giác W_1 được tạo thành bởi đa giác W và tam giác T .

Ta sẽ chứng minh rằng đa giác W_1 là lồi, nghĩa là mọi đoạn thẳng có hai đầu nằm trong W_1 thì cả đoạn thuộc đa giác này.

Cho M và N nằm trong đa giác W_1 . Khi đó có một trong hai trường hợp sau xảy ra:

(a) Các điểm M và N hoặc nằm trong đa giác W , hoặc nằm trong tam giác T . Khi đó cả đoạn thẳng MN hoặc chứa trong W , hoặc chứa trong T và suy ra chúng nằm trong đa giác W_1 .

(b) Một trong những điểm này ví dụ như M nằm trong W , bên ngoài T , còn điểm khác N nằm trong T bên ngoài W . Đoạn thẳng MN nằm trong góc lồi α và những điểm nối nằm trong hai phần mà $A_k A_{k+1}$ chia ra miền đóng α . Suy ra đoạn thẳng MN giao với đoạn $A_k A_{k+1}$ tại điểm P nào đó.

Đoạn thẳng MP chứa trong đa giác W , đoạn thẳng PN chứa trong

tam giác T . Như vậy, mỗi đoạn thẳng này đều nằm trong W_1 suy ra cả đoạn MN cũng nằm trong W_1 . Đó là điều cần chứng minh. ☺

▷ **3.36. Lời giải.** Ta lấy một đường thẳng ℓ bất kì trong mặt phẳng và chiếu vuông góc tất cả các đa giác xuống đường thẳng này. Ta nhận được hữu hạn những đoạn thẳng trên đường thẳng, vì mọi cặp hai đa giác đều có điểm chung nên mỗi cặp đoạn thẳng đều có điểm chung.

Ta xét những đầu nút bên trái của những đoạn thẳng này và chọn trong đó điểm về phía bên phải nhất (chú ý ta phải quy định hướng của đường thẳng thì mới tìm được đầu nút bên trái hoặc bên phải). Điểm nhận được sẽ nằm trong mọi đoạn thẳng, vì thế kẻ đường vuông góc với ℓ tại điểm này sẽ giao với tất cả các đa giác đã cho. ☺

▷ **3.37. Lời giải.** Cho trên mặt phẳng 1000 đoạn thẳng. Ta lấy đường thẳng bất kì ℓ không vuông góc với bất cứ đường thẳng nào chứa đoạn thẳng đã cho và chiếu vuông góc tất cả đầu nút của các đoạn thẳng trên đường thẳng ℓ . Dễ thấy rằng những đầu nút của đoạn thẳng được chiếu xuống đường thẳng mà ở phía bên trái nhất, không thể thực sự nằm trong một đoạn thẳng nào khác. Điều này vô lý, suy ra không có tập hợp đoạn thẳng như bài đã cho. ☺

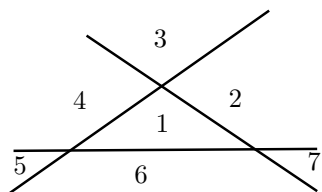
▷ **3.38. Lời giải.** Có hai khả năng cho bốn điểm trên mặt phẳng có thể xảy ra:

1. Các điểm tạo thành một đa giác lồi $ABCD$. Ta chọn góc lớn nhất trong số các góc ở đỉnh của tứ giác. Giả sử đó là góc ABC . Khi đó $\widehat{ABC} \geq 90^\circ$, nghĩa là tam giác ABC không phải là tam giác nhọn.

2. Điểm D nằm trong tam giác ABC . Ta chọn góc lớn nhất trong các góc ADB, BDC và ADC . Giả sử đó là góc ADB . Khi đó $\widehat{ADB} \geq 120^\circ$,

nghĩa là tam giác ADB là tam giác tù.

Ta sẽ chứng minh rằng những phương án khác phân bố bốn điểm không có. Thật vậy, những đường thẳng đi qua hai trong ba điểm đã cho chia mặt phẳng thành 7 phần (Hình 7.4). Nếu điểm thứ tư nằm trong phần thứ hai, thứ tư hoặc thứ sáu, thì ta lại có tình thế thứ nhất



Hình 7.4

đã xét ở trên, còn nếu điểm thứ tư nằm ở các phần thứ nhất, thứ ba, thứ năm và thứ bảy, thì ta lại có trong tình thế thứ hai ở trên. ☺

▷ **3.39. Lời giải.** Hình chữ nhật với các đỉnh tại các điểm $(0,0)$, $(0,m)$, $(n,0)$, (n,m) cạnh nằm ngang có độ dài n , còn cạnh thẳng đứng bằng m . Ta chọn hình chữ nhật có cạnh nằm ngang nhỏ nhất từ tập hợp đã cho những hình chữ nhật. Giả sử cạnh thẳng đứng của hình chữ nhật này bằng m_1 . Ta xét mọi m_1 từ những hình chữ nhật còn lại. Có hai khả năng xảy ra:

1. Những cạnh thẳng đứng của hai hình chữ nhật đều bằng m_1 . Khi đó một hình chữ nhật sẽ chứa hình kia.

2. Các cạnh thẳng đứng của tất cả các hình chữ nhật đều khác nhau. Khi đó cạnh thẳng đứng của một trong những hình chữ nhật lớn hơn m_1 , vì thế nó chứa hình chữ nhật có cạnh nằm ngang nhỏ nhất. ☺

▷ **3.40. Lời giải.** Vì số điểm đã cho là hữu hạn n , ta có thể lấy hình tròn chứa tất cả những điểm này. Ta làm nhỏ bán kính của hình tròn này với khả năng có thể. Giả sử R là bán kính hình tròn nhận được. Trên biên của hình tròn chứa ít nhất hai điểm đã cho. Trước tiên

xét trên biên có hai điểm A và B chia biên làm đôi. Để thấy rằng nó là hai đầu nút của đường kính của hình tròn. Ta lấy điểm thứ ba C trong số điểm đã cho. Bán kính nhỏ nhất của hình tròn chứa ba điểm A, B và C bằng R , vì thế $R \leq 1$. Bây giờ ta xét trường hợp trên biên của hình tròn có ba điểm A, B và C . Khi đó tam giác ABC là nhọn, vì nếu ngược lại thì có thể giảm được bán kính hình tròn chứa tất cả các điểm. Vì thế trên cơ sở bán kính nhỏ nhất của hình tròn chứa ba điểm A, B và C bằng R .

Cuối cùng ta xét trường hợp trên biên của hình tròn có ít nhất bốn điểm trong các điểm đã cho. Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là độ đo cung mà các các điểm trên đường tròn đã phân ra. Nếu tổng độ đo của hai cung liên tiếp không lớn hơn 180° , thì chúng có điểm chung. Ta sẽ chứng minh rằng với $n \geq 4$ luôn luôn tìm được hai cung liên tiếp như vậy. Thật vậy, giả thiết rằng $\alpha_1 + \alpha_2 > 180^\circ$, $\alpha_2 + \alpha_3 > 180^\circ$, ..., $\alpha_n + \alpha_1 > 180^\circ$. Cộng theo vế của tất cả bất đẳng thức trên ta nhận được $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) > n.180^\circ$, nghĩa là $4.180^\circ > n.180^\circ$. Ta có điều vô lý.

Như vậy trên biên của hình tròn ta nhận được hoặc là hai điểm đã cho ở hai đầu đường kính, hoặc là ba điểm trong các điểm đã cho là đỉnh của một tam giác nhọn. Những trường hợp này thì đã xét ở trên. ☺

▷ **3.41. Lời giải.** Ta xét tất cả những đường tròn mà nó đi qua hai điểm cạnh nhau A_i và A_{i+1} và một đỉnh A_j sao cho $\widehat{A_i A_j A_{i+1}} < 90^\circ$. Tồn tại ít nhất một đường tròn như vậy. Thật vậy, một trong những góc $\angle A_i A_{i+2} A_{i+1}$ và $\angle A_{i+1} A_i A_{i+2}$ nhỏ hơn 90° ; trong trường hợp thứ nhất ta đặt $A_j = A_{i+2}$, trường hợp thứ hai ta đặt $A_j = A_i$. Ta chọn trong những đường tròn như vậy (với tất cả i và j) một đường tròn S có bán kính lớn nhất; giả sử đường tròn chọn đó đi qua A_1, A_2 và A_k .

Ta giả sử đỉnh A_p nằm trong đường tròn S . Khi đó điểm A_p và A_k nằm về cùng một phía của đường thẳng A_1A_2 và $\widehat{A_1A_kA_2} < \widehat{A_1A_pA_2} < 90^\circ$. Từ định lý sin suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_pA_2$ lớn hơn bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_kA_2$. Ta nhận được điều vô lý, vì đường tròn S có bán kính lớn nhất chứa tất cả những đa giác $A_1 \dots A_n$.

Giả sử cụ thể $\widehat{A_2A_1A_k} \leq \widehat{A_1A_2A_k}$. Chứng minh rằng khi đó A_2 và A_k là những đỉnh cạnh nhau. Nếu $A_k \neq A_3$, thì

$$180^\circ - \widehat{A_2A_3A_k} \leq \widehat{A_2A_1A_k} < 90^\circ,$$

vì thế bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2A_3A_k$ lớn hơn bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_k$. Ta nhận được sự vô lý vì đường tròn S đi qua ba điểm cạnh nhau A_1, A_2, A_3 . ☺

7.4. LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý BÀI TẬP CHƯƠNG 4

▷ **4.34.** Bài toán giải tương tự như bài toán 4.2.

▷ **4.35. Gợi ý:** Trước tiên ta chia một cách bất kì thành hai nhóm nghị sĩ. Nếu trong một nhóm nào đó, ở nghị sĩ A có không ít hơn 2 người bạn thì số người bạn của ông ấy trong nhóm khác không lớn hơn 1. Vì thế sau khi chuyển A sang nhóm khác, số các cặp người bạn bên trong nhóm giảm đi thực sự. Sự chuyển đổi như vậy tiếp tục cho đến khi điều kiện bài toán không thực hiện được.

▷ **4.36. Gợi ý:** Trong bước tô màu lại các điểm "đặc biệt", số những đoạn thẳng có hai màu khác nhau ở hai đầu ít nhất giảm đi 1.

▷ **4.37.** Bạn đọc tự giải.

▷ **4.38. Lời giải.** Ta có $f(n_0 + 1) = f(n_0 + f(n_0)) = f(n_0) = 1$. Do đó $f(n) = 1$ với mọi $n \geq n_0$. Đặt $\mathcal{S} = \{n | n \in \mathbb{N}^*, f(n) \neq 1\}$.

Nếu $\mathcal{S} = \emptyset$, thì bài toán đã được giải.

Ngược lại, giả sử $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Vì $\mathcal{S}$ là một tập hữu hạn, nên ta gọi m là số lớn nhất trong $\mathcal{S}$. Khi đó $f(m + f(m)) = f(m) \neq 1$. Do đó $m + f(m) \in \mathcal{S}$, nhưng $m + f(m) > m$, điều này vô lý với tính chất cực đại của m . Do đó $\mathcal{S} = \emptyset$, $f(n) = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. ☺

▷ **4.39. Lời giải: Lời giải.** Từ đẳng thức đã cho liên hệ với đẳng thức:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Đẳng thức gợi ý cho ta hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ có dạng $f(n) = n$ là nghiệm của bài toán. Ta sẽ chứng minh chỉ có hàm số $f(n) = n$ là nghiệm của bài toán.

Mặt khác tỉ số $\frac{f(f(n))}{f(n+1)}$ gợi ý cho ta về bài toán trước. Ta sẽ biến đổi bài toán đang xét thành bài toán 4.28.

Ta thay $n = 1$ vào đẳng thức đã cho $f(f(1))f(1) = 1$. Do đó $f(1) = 1$. Ta thay hai giá trị n và $n+1$ lần lượt vào đẳng thức đã cho, rồi rút gọn, ta nhận được đẳng thức

$$\frac{f(f(n))}{f(n+1)} + \frac{1}{f(n+1)f(n+2)} = \frac{f(f(n+1))}{f(n+2)}.$$

Đẳng thức trên tương đương với

$$f(f(n))f(n+2) + 1 = f(f(n+1))f(n+1).$$

Ta thấy rằng $f(n+1) = 1$ kéo theo $f(f(n+1)) = 1$ (do $f(1) = 1$). Do đó $f(f(n))f(n+2) = 0$, điều này vô lý. Suy ra $f(n) > 1$ với mọi $n > 1$.

Ta sẽ chứng minh $f(f(n)) < f(n+1)$ bằng quy nạp toán học. Thật vậy, bất đẳng thức đúng với $n = 1$, vì $f(2) > 1 = f(f(1))$.

Giả sử $f(n+1) > f(f(n))$, khi đó $f(n+1) \geq f(f(n)) + 1$. Do vậy

$$f(f(n))f(n+2) + 1 > f(f(n+1))f(f(n)) + f(f(n+1)).$$

Vì $n+1 > 1$, ta có $f(n+1) > 1$, như vậy $f(f(n+1)) > 1$, điều này kéo theo $f(n+2) > f(f(n+1))$.

Do đó hàm số thỏa mãn $f(n+1) > f(f(n))$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ đây áp dụng kết quả bài toán 4.28 ta có hàm phải tìm. ☺

7.5. LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý BÀI TẬP CHƯƠNG 5

▷ **5.33. Gợi ý:** Hãy chứng minh

$$f(x+\delta) - f(x) \leq \frac{f(x+2\delta) - f(x)}{2} \leq \dots \leq \frac{f(x+2^n\delta) - f(x)}{2^n},$$

$a < x + 2^n\delta < b$. Cho $\delta \rightarrow 0$.

▷ **5.34. Gợi ý:** Trước tiên giải bài toán với tất cả các số có dạng $2^{\frac{n}{2}}$, ở đây n là một số nguyên. Sau đó giải bài toán cho tất cả các số có dạng $\frac{m}{2^n}$, m là một số nguyên và n là một số nguyên không âm.

▷ **5.35. Gợi ý:** Sử dụng lặp lại sự chia đôi: Chọn nửa bên phải của đoạn thẳng nếu tồn tại một điểm x trong nó sao cho $f(x) \geq 0$, ngược lại chọn nửa bên trái. Đó chính là dãy lồng nhau những đoạn thẳng $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$ hội tụ tới điểm c . Chú ý rằng với mỗi n tồn tại một điểm y_n trong $[a_n, c]$ sao cho $f(y_n) \geq 0$. Sau đó chứng minh $f(c) = 0$.

▷ **5.36.** Bạn đọc tự giải.

▷ **5.37. Lời giải.** (a) Ta xét hàm số $F(x) = f^2(x)f(1-x)$. Dễ thấy $F(0) = 0 = F(1)$. Theo định lý Rolle tồn tại một số c thuộc $(0, 1)$ sao cho $F'(c) = 0$. Từ đó suy ra $2f(c)f'(c)f(1-c) - f^2(c)f'(1-c) = 0$, theo giả thiết $f(c) > 0$. Ta nhận được $2f'(c)f(1-c) = f(c)f'(1-c)$,

từ đó suy ra kết quả cần chứng minh.

(b) Tương tự phần trên xét hàm $F(x) = f^3(x)f(1-x)$ ☺

▷ **5.38. Lời giải.** (a) Ta xét hàm số

$$f(x) = x^5 - 2x^2 + x.$$

Ta có $f(0) = 0 = f(1)$. Theo định lý Rolle tồn tại một số thực $d \in (0, 1)$ sao cho $f'(d) = 0$, nghĩa là phương trình đã cho $5x^4 - 4x + 1 = 0$ có nghiệm là $d \in (0, 1)$.

(b) Ta xét hàm số

$$f(x) = \frac{a_0}{1}x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Do giả thiết của bài toán $f(0) = 0 = f(1)$. Theo định lý Rolle tồn tại một số thực $d \in (0, 1)$ sao cho $f'(d) = 0$. Từ đó suy ra d chính là nghiệm của phương trình chúng ta cần chứng minh. ☺

▷ **5.39. Lời giải.** (a) Giả sử phương trình có hai nghiệm trở nên. Khi đó tồn tại $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ sao cho $f(x_1) = f(x_2)$. Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$, nghĩa là $f'(c) = 3c^2 - 3 = 0$ suy ra $c = \pm 1$. Điều này vô lý với việc tồn tại c . Vậy phương trình có nhiều nhất một nghiệm không phụ thuộc vào b . ☺

▷ **5.40. Lời giải.** Ta xét

$$f(x) = 2^x - 1 - x^2.$$

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$ và $f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2$ và $f'''(x) = 2^x \ln^3 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra $f''(x) = 0$ không có nghiệm, vì vậy $f'(x) = 0$ cũng không có nghiệm và cuối cùng là $f(x) = 0$ không có nghiệm (do nhận xét ở phần trên). ☺

▷ **5.41. Lời giải.** Như hệ quả của định lý Rolle, phương trình $f(x) = 0$ có $n+1$ nghiệm khác nhau thì $f'(x) = 0$ cũng có n nghiệm

khác nhau, và $f''(x) = 0$ cũng phải có $n - 1$ nghiệm khác nhau, ..., tiếp tục như vậy đến $f^{(n)}(x) = 0$ phải có 1 nghiệm. Mà $f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2.1a_n = 0$ khi và chỉ khi $a_n = 0$. Từ đây suy ra $f^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)\dots 2.1a_{n-1} = 0$ khi và chỉ khi $a_{n-1} = 0$, tiếp tục như vậy, ta nhận được $a_{n-2} = 0, \dots, a_1 = 0$, từ đây suy ra $a_0 = 0$.



▷ **5.42. Lời giải.** Do $f'(x) = af(x)$ nên nghiệm của $f(x) = 0$ cũng là nghiệm của $f'(x) = 0$. Nếu ta có hai nghiệm bất kì của $f(x) = 0$: x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) sao cho $f(x_1) = f(x_2) = 0$, theo định lý Rolle tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f'(c) = 0$. Theo nhận xét trên $f(c) = 0$, từ đó suy ra kết luận của bài toán.



▷ **5.43. Gợi ý:** Chứng minh bằng quy nạp theo n .

▷ **5.44. Gợi ý:** Xét biểu thức

$$(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n(x + 1)^n.$$

Chứng minh theo quy nạp rằng đạo hàm bậc k của $(x - 1)^n(x + 1)^n$ có $n - k$ nghiệm bội 1 và có $n - k$ nghiệm bội là -1 , và ít nhất k nghiệm khác nhau giữa -1 và 1 .

▷ **5.45. Trả lời:** $a = -1, b = 0$; $a = 1, b$ bất kì.

▷ **5.46.** ▷ **5.47.** ▷ **5.48.** Bạn đọc tự giải.

▷ **5.49. Gợi ý:** (b) Để dễ dàng kiểm tra tất cả hàm có dạng $A \cos x + B \sin x$ thỏa mãn phương trình $y'' + y = 0$. Cho $f(x)$ là một nghiệm. Ta phải chứng minh $f(x)$ phải có dạng $f(x) = A \cos x + B \sin x$. Vậy cần thiết chỉ ra $A = f(0)$ và $B = f'(0)$. Bây giờ ta xét $F(x) = f(x) - f(0) \cos x - f'(0) \sin x$. Sử dụng phần (b) cho $F(x)$ bằng cách dùng $F(0) = 0 = F'(0)$.

▷ **5.50.** Bạn đọc tự giải.

7.6. LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý BÀI TẬP CHƯƠNG 6

▷ **6.34. Lời giải.** Dùng bất đẳng thức lũy thừa để giải, đặt

$$M_t = \left(\frac{a_1^t + \dots + a_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}. \text{ Ta có}$$

$$\begin{aligned} a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k &= n(M_k)^k = n(M_k)^p (M_k)^{k-p} \\ &\geq n(M_p)^p \cdot (M_1)^{k-p} = (a_1^p + \dots + a_n^p) \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^{k-p}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

▷ **6.35. Lời giải.** Dùng bất đẳng thức trung bình cộng-nhân, ta có

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \lambda_1 \left(\frac{a_1}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left(\frac{a_2}{\lambda_2} \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{a_n}{\lambda_n} \right) \\ &\geq \lambda_1 \left(\frac{a_1}{\lambda_1} \right)^{\lambda_1} + \lambda_2 \left(\frac{a_2}{\lambda_2} \right)^{\lambda_2} + \dots + \lambda_n \left(\frac{a_n}{\lambda_n} \right)^{\lambda_n} \geq \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1} \dots \lambda_n^{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{\lambda_1} = \frac{a_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{a_n}{\lambda_n}.$$

Trong trường hợp này từ $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} = 1$ suy ra $a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1^{\lambda_1} \dots \lambda_n^{\lambda_n}}$ với $k = 1, 2, \dots, n$. ☺

▷ **6.36. Lời giải.** Đặt $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}$ và $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Ta xét hàm số $f(x) = \frac{x}{s-x}$ với $x < s$. Do $f''(x) = \frac{2s}{(s-x)^3} > 0$ với $x < s$, nên $f(x)$ là hàm lồi chặt. Theo bất đẳng thức Jensen ta nhận được

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq 6$$

Từ đó suy ra $A \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ☺

▷ **6.37. Lời giải.** (i) Xét hàm số $f(x) = \operatorname{tg}^p x$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $p \geq 1$. Vì $f''(x) > 0$, nên $f(x)$ là hàm lồi chặt trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và bất đẳng thức cần chứng minh suy ra từ bất đẳng thức Jensen với $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ và $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma$.

(ii) Xét $f(x) = \ln(\sin x)$ với $x \in (0, \pi)$. Vì $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$, nên $f(x)$ là hàm lõm chặt trên $(0, \pi)$. Dùng bất đẳng thức Jensen, ta nhận được

$$\ln \sin \alpha' + \ln \sin \beta' + \ln \sin \gamma' \leq 3 \ln \sin \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3},$$

ở đây α', β', γ' là các góc của một tam giác. Bất đẳng thức trên có thể viết lại là

$$\sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Thay $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\beta' = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ vào bất đẳng thức trên và nhận được

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Do đó

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

☺

▷ **6.38. Lời giải.** Ta xét hàm số $f(x) = \frac{s}{s-x}$ với $x < s$. Ta có $f''(x) > 0$ trên $(-\infty, s)$ suy ra $f(x)$ là hàm lồi chặt. Dùng bất đẳng thức Jensen ta nhận được

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{s}{s-a_k} \geq \frac{s}{s-\frac{s}{n}} \iff \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{s}{s-a_k} \geq \frac{n^2}{n-1}. \quad \text{☺}$$

▷ **6.39. Lời giải.** Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{s+(m-1)x}$ với $s+(m-1)x > 0$.

Vì $f''(x) = \frac{2s(1-m)}{[s+(m-1)x]^3}$, ta thấy rằng f là hàm lồi nếu $m \in [0, 1]$ và là hàm lõm nếu $m \in [1, \infty)$.

Nếu $m \in [0, 1]$. Theo bất đẳng thức Jensen, ta có

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s+(m-1)a_k} \geq n \frac{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}}{s+(m-1)\frac{a_1+\dots+a_n}{n}}.$$

Lấy $s = a_1 + \dots + a_n$, ta có $s + (m-1)a_k > 0$ với $k = 1, \dots, n$. Do đó

$$\frac{a_1}{ma_1+a_2+\dots+a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+ma_n} \geq \frac{n}{m+n-1}.$$

Nếu $m \in [1, \infty)$ thì ta có bất đẳng thức ngược lại vì hàm f là hàm lõm. ☺

▷ 6.40. ▷ 6.41. ▷ 6.42. ▷ 6.43. Bạn đọc tự giải.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Квант, Научно-популярный Физико-математический журнал, МЦНМО, 1970-2002.
- [2] G. Polya, *Toán học và những suy luận có lí*, NXBGD, 1995.
- [3] G. H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya *Bất đẳng thức*, NXBĐHQG Hà Nội, 2002.
- [4] H. Rademacher, *Higher Mathematics from an Elementary point of view*, Birkhauser, 1983.
- [5] Martin Aigner and Gunter M. Ziegler, *Proofs from the book*, Springer, 1999.
- [6] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical olympiad challenges*, Birkhauser, 2002.
- [7] Loren C. Larson, *Problem-Solving through problems*, Springer-Verlag, 1983.
- [8] Judita Cofman, *What to solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians*, Clarendon Press-Oxford, 1989.
- [9] Ш. К. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*, М. МЦНМО, 1999.
- [10] В. В. Прасолов, *Задачи по Геометрии*, М. МЦНМО, 2001.
- [11] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Dirichle và ứng dụng*, NXBKHK, 1999.
- [12] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Quy nạp toán học*, NXBGD, 2000.

- [13] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp điển hình trong giải toán phổ thông*, NXBGD, 2001.
- [14] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp giải bài toán cực trị trong hình học*, NXBKHK, 2001.
- [15] Nguyễn Hữu Điển, *Sáng tạo trong giải toán phổ thông*, NXBGD, 2002.
- [16] Nguyễn Hữu Điển, *Đa thức và ứng dụng*, NXBGD, 2003.
- [17] Nguyễn Hữu Điển, *Giải phương trình vô định nghiệm nguyên*, NXBĐHQG, 2004.
- [18] Nguyễn Hữu Điển, *Giải toán bằng phương pháp đại lượng bất biến*, NXBGD, 2004.

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
Những kí hiệu	6
Chương 1. Nguyên lý thứ tự trong tập số tự nhiên	7
1.1. Nguyên lý thứ tự.....	8
1.2. Nguyên lý quy nạp toán học.....	12
1.3. Sự tương đương giữa hai nguyên lý.....	23
1.4. Chuyên đề tập hợp sắp thứ tự đầy đủ.....	29
1.4.1. Thứ tự của một tập hợp bất kì.....	30
1.4.2. Tập hợp sắp thứ tự đầy đủ và ứng dụng.....	35
1.5. Bài tập.....	41
Chương 2. Kỹ thuật dùng phương pháp đại lượng cực biên	43
2.1. Phương pháp phản chứng và đại lượng cực biên.....	44
2.2. Tính toán với đại lượng cực biên.....	53
2.3. Sắp xếp phần tử theo thứ tự.....	60
2.4. Chuyên đề phương pháp xuống thang.....	66
2.4.1. Lịch sử của phương pháp.....	66
2.4.2. Phương pháp xuống thang trong số học.....	68
2.4.3. Phương pháp xuống thang trong hình học.....	72
2.5. Bài tập.....	75
Chương 3. Các bài toán hình học	79
3.1. Góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất.....	80
3.2. Khoảng cách lớn nhất hoặc nhỏ nhất.....	84

3.3. Diện tích và chu vi lớn nhất hoặc nhỏ nhất	89
3.4. Bao lồi và đường thẳng tựa.....	93
3.5. Chuyên đề về bài toán Sylvester-Gallai	97
3.5.1. Giới thiệu bài toán Sylvester-Gallai.....	97
3.5.2. Tổng quát hóa bài toán Sylvester-Gallai	99
3.5.3. Số những đường thẳng trong định lý Gallai	102
3.5.4. Tổng quát hóa định lý Gallai trong lý thuyết thiết kế khối 106	
3.6. Bài tập	108
Chương 4. Các bài toán số học và đại số	111
4.1. Các bài toán số học	112
4.2. Một số bài toán đại số	123
4.3. Chuyên đề phương trình hàm trên tập số nguyên	127
4.3.1. Sử dụng nguyên lý thứ tự của số tự nhiên.....	128
4.3.2. Dùng phương pháp quy nạp toán học	133
4.4. Bài tập	139
Chương 5. Các bài toán giải tích.....	141
5.1. Định lý giá trị trung gian của hàm số.....	142
5.1.1. Hàm số liên tục	142
5.1.2. Định lý giá trị trung gian	146
5.1.3. Đạo hàm của hàm số	149
5.2. Định lý Rolle	151
5.3. Định lý giá trị trung bình	164
5.3.1. Các ứng dụng trực tiếp định lý giá trị trung bình .	165
5.3.2. Các ứng dụng từ hệ quả định lý giá trị trung bình	169
5.4. Bài tập	178

Chương 6. Hàm lồi và những giá trị lớn nhất.....	182
6.1. Hàm lồi và bất đẳng thức cơ bản.....	183
6.1.1. Định nghĩa hàm lồi và các chú ý.....	183
6.1.2. Bất đẳng thức Jensen và ví dụ ứng dụng.....	187
6.2. Bất đẳng thức quan trọng liên quan đến hàm lồi.....	192
6.3. Hàm lồi nhiều biến và những giá trị lớn nhất.....	203
6.3.1. Giá trị lớn nhất của hàm lồi đạt trên biên.....	204
6.3.2. Những ứng dụng khác.....	212
6.4. Bài tập.....	215
Chương 7. Lời giải và gợi ý bài tập.....	217
7.1. Lời giải và gợi ý bài tập chương 1.....	217
7.2. Lời giải và gợi ý bài tập chương 2.....	222
7.3. Lời giải và gợi ý bài tập chương 3.....	226
7.4. Lời giải và gợi ý bài tập chương 4.....	233
7.5. Lời giải và gợi ý bài tập chương 5.....	235
7.6. Lời giải và gợi ý bài tập chương 6.....	238
Tài liệu tham khảo.....	241
Mục lục.....	243

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc: NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập: VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung:

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Trình bày bìa:

BÙI QUANG TUẤN

Chế bản:

NGUYỄN HỮU ĐIỂN

Sửa bản in:

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG CỰC BIÊN

Mã số: 8I092M5-CNĐ

In 3.000 bản, khổ $14,5 \times 20,5$ cm Tại Công ty In thống kê
và SXBB Huế. Giấy phép XB số: 89/186-05 CXB.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10/2005.

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO CHUYÊN TOÁN THPT

Dùng cho học sinh khá và giỏi Toán của cùng tác giả

NGUYỄN HỮU ĐIỂN

1. Phương pháp quy nạp Toán học
2. Những phương pháp điển hình trong giải Toán phổ thông
3. Sáng tạo trong giải Toán phổ thông.
4. Đa thức và ứng dụng
5. Giải Toán bằng phương pháp đại lượng bất biến
6. Giải Toán bằng phương pháp đại lượng cực biên
7. Một số chuyên đề hình học tổng hợp

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở địa phương hoặc các Cửa hàng Sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

** 25 Hàn Thuyên, 187 Giảng Võ, 23 Tràng Tiền, 232 Tây Sơn - Hà Nội.*

** 15 Nguyễn Chí Thanh - TP Đà Nẵng*

** 240 Trần Bình Trọng - Quận 5 - TP. Hồ Chí Minh.*



8 934980 534885



Giá: 18.100 đ