M TKVb 1256

BÁCH TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
BỘ MÔN ĐO LƯỜNG - CƠ SỞ KỸ THUẬT ĐIỆN

CƠ SỞ
LÝ THUYẾT MẠCH ĐIỆN

TẬP II

Dùng cho học viên tại chức ngành điện, vô tuyến điện

IỆN
N-TN
81
S
9
K
926

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA ĐẠI HỌC TẠI CHỨC XUẤT BẢN

TỦ SÁCH ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

BỘ MÔN ĐO LƯỜNG — CƠ SỞ KỸ THUẬT ĐIỆN

CƠ SỞ
LÝ THUYẾT MẠCH ĐIỆN

Dùng cho học sinh tại chức ngành Điện, Vô tuyến điện

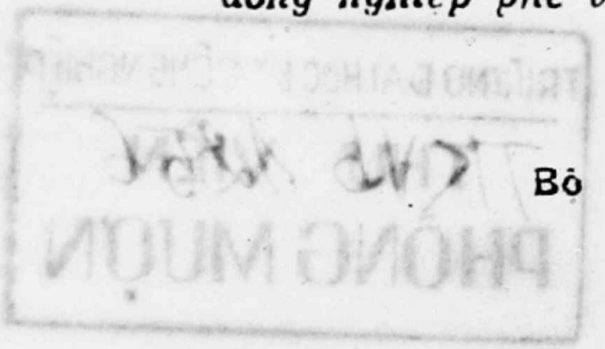
TẬP II

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA ĐẠI HỌC TẠI CHỨC XUẤT BẢN
HÀ NỘI — 1969

Đây là tập II của GIÁO TRÌNH CƠ SỞ LÝ THUYẾT MẠCH ĐIỆN do Trường Đại học Bách khoa xuất bản cho học sinh tại chức các ngành Điện — Vô tuyến điện.

Cuốn sách do bộ môn Đo lường — Cơ sở kỹ thuật điện soạn : đồng chí Nguyễn Thế Thắng viết các chương 13, 14, 15, đồng chí Lê Văn Bảng các chương 17, 18, 19, đồng chí Nguyễn Bình Thành các chương 16, 20, 21, 22 và chủ biên chung.

Cuốn sách xuất bản lần đầu, chắc chắn có nhiều thiếu sót. Rất mong các bạn đọc và bạn đồng nghiệp phê bình để cải tiến.



Hà nội 1967

Bộ môn Đo lường — Cơ sở KTĐ

Đại học Bách khoa

CHƯƠNG XIII

KHÁI NIỆM CHUNG VỀ PHẦN TỬ VÀ MẠCH PHI TUYẾN

Mục đích :

— Làm rõ đặc trưng cho một phần tử phi tuyến là đặc tuyến $u_R(i)$, $\Psi(i)$ hay $q(u)$, và những thông số điện trở, điện cảm, điện dung động và tĩnh.

— Nêu rõ tính tạo tần là tính chất cơ bản của các phần tử phi tuyến quán tính nhỏ.

— Nêu lên phương hướng chung nghiên cứu mạch phi tuyến.

Các chương 13, 14, 15 và 22 tiếp theo sẽ xét về chế độ xác lập và quá độ của mạch phi tuyến, là loại mạch của những hệ thống mô tả bởi những hệ phương trình phi tuyến viết theo các luật Kirhof. Đó là loại mạch trong đó ít nhất có một phần tử phi tuyến mô tả bởi một phương trình trạng thái phi tuyến giữa các biến u, i và thường đặc trưng bởi một quan hệ hàm phi tuyến giữa một biến u hoặc i với một biến thích hợp khác.

Thật vậy ta đều biết phương trình trạng thái đối với các phần tử trở, cảm, dung phi tuyến thứ tự là :

$$u_r = r(i)i, \quad u_L = \frac{d\psi(i)}{dt}, \quad i_C = \frac{dq(u)}{dt} \qquad (13\text{-}1)$$

Rõ ràng tính phi tuyến các phương trình ấy quyết định bởi các *quan hệ hàm phi tuyến đặc trưng* phần tử, thứ tự là:

$$u_r = u_r(i),\ \psi = \psi(i),\ q = q(u). \qquad (13\text{-}2)$$

Từ hệ (13-1, 13-2) thường dẫn ra dạng *phương trình trạng thái quen biết giữa u, i* nói trên, thứ tự là:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= r(i)i, \\ u_L &= \frac{\partial\psi(i)}{\partial i}\,\frac{di}{dt} = L(i)\,\frac{di}{dt}, \\ i_C &= \frac{\partial q(u)}{\partial u}\,\frac{du}{dt} = C(u)\,\frac{du}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}3)$$

Các phương trình (13. 3) nêu rõ cũng có thể đặc trưng các phần tử phi tuyến bằng những hàm thông số $r(i)$, $L(i)$, $C(u)$:

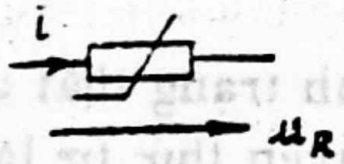
$$r = r(i),\ L = L(i),\ C = C(u). \quad (13.4).$$

Dưới đây lần lượt sẽ nêu qua về các phần tử ấy. Trong thực tế mỗi nhóm phần tử cơ bản $r(i)$, $L(i)$, $C(u)$ có thể chia làm những phần tử *không điều khiển* và *có điều khiển*.

13-1. ĐIỆN TRỞ PHI TUYẾN

Ta lần lượt xét qua về điện trở phi tuyến không và có điều khiển.

1. **Điện trở không điều khiển** là loại trở mà dòng chảy qua chỉ phụ thuộc một mình điện áp trên nó, không tùy thuộc mọi biến khác.



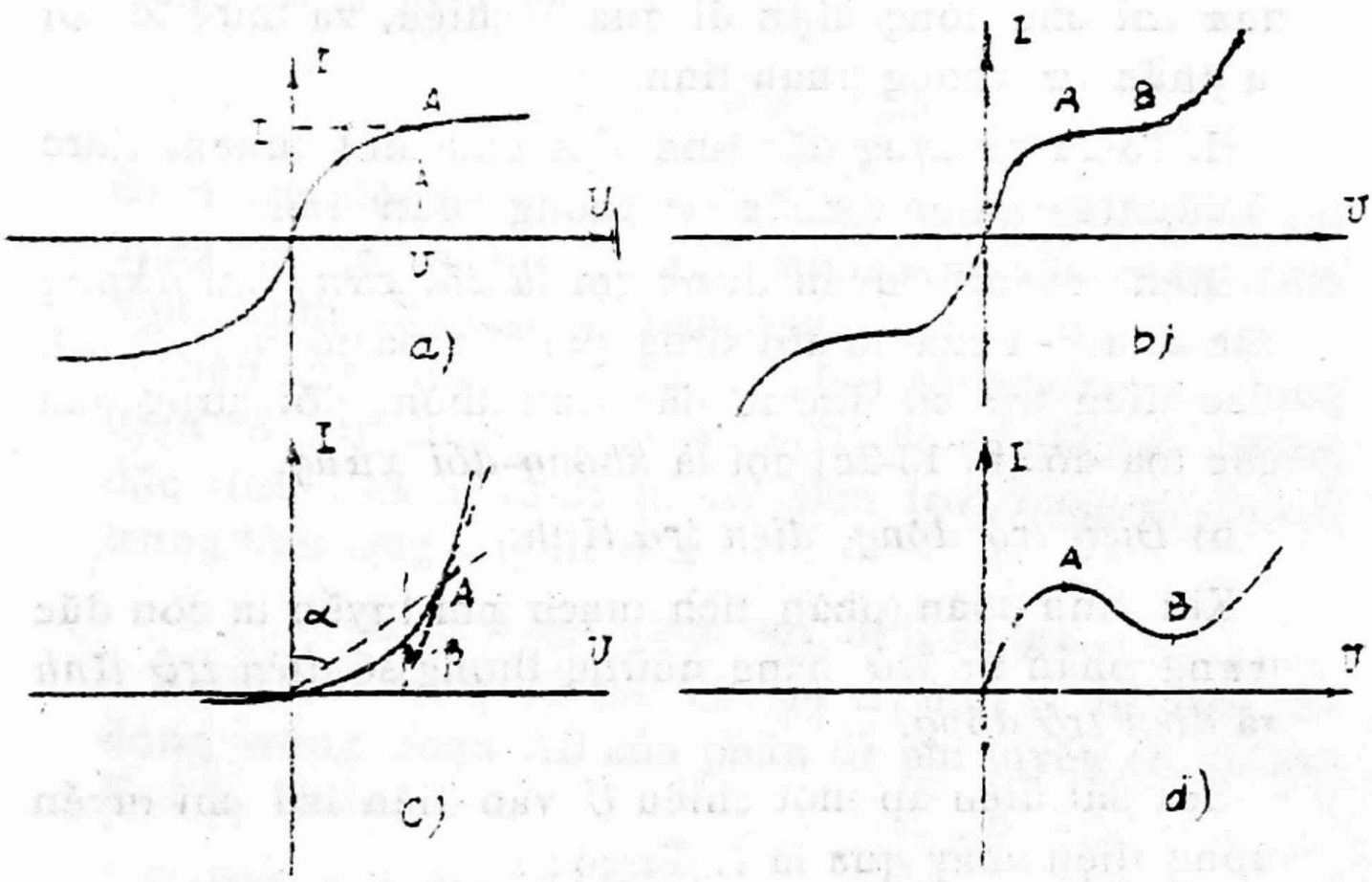
H. 13-1

Trong sơ đồ mạch ta ký hiệu nó như h. 13-1.

a) *Đặc tính volt-ampe* (*V. A*). Như (13-2) điện trở phi tuyến không điều khiển được đặc trưng bởi một quan hệ hàm $u_r(i)$ gọi là *đặc tính voltampe*. Nó mô tả rõ phản ứng của phần tử

trở bằng cách chỉ rõ quan hệ tương ứng đồng đôi giữa các biến dòng, áp coi là 1 cặp kích thích — đáp ứng. H. 13-2 vẽ đặc tính V.A của một số loại phần tử trở phi tuyến.

Trong đó h. 13-2a vẽ dang đặc tính V.A của điện trở nhiệt có hệ số nhiệt độ dương, ví dụ đèn có sợi đốt bằng kim loại. Khi dòng điện qua sợi kim loại càng lớn, nhiệt độ càng tăng và điện trở đèn cũng tăng theo. Vì quán tính nhiệt lớn, nên điện trở nhiệt là một phần tử có quán tính. Vì vậy khi một dòng điện chu kỳ có tần số đủ lớn chảy qua, có thể coi nhiệt độ của điện



H. 13-2

trở nhiệt chỉ phụ thuộc trị hiệu dụng dòng điện : với một trị hiệu dụng nhất định của dòng, điện trở có một giá trị coi là không đổi. Tóm lại *ở điện trở có quán tính*

ta coi *quan hệ hiệu dụng U(I) là phi tuyến, còn quan hệ tức thời u(i) là tuyến tính.*

H. 13-2b vẽ dạng đặc tính của baretto cũng là một phần tử có quán tính. Baretto là 1 điện trở cấu tạo bằng 1 sợi dây thep cuộn xoắn ốc đặt trong một ống thủy tinh chứa khí hydro với áp suất khoảng 50 ÷ 200mm thủy ngân. Đặc tính V-A của baretto có đoạn *AB* nằm ngang. Ở đó *i* hầu như không đổi khi *u* biến thiên. Dựa vào đặc điểm này ta dùng baretto để ổn định dòng điện.

Dạng đặc tính V-A của một số loại chỉnh lưu bán dẫn Se hoặc Ge được vẽ trên h. 13-2c. Các điện trở này hầu như chỉ cho dòng điện đi qua 1 chiều, và thực tế coi là phần tử không quán tính.

H. 13-2d vẽ dạng đặc tính V-A của diot tunen, thực tế cũng coi là một phần tử không quán tính.

Điện trở phi tuyến được gọi là *đối xứng* khi đường đặc tính V-A của nó đối xứng qua gốc tọa độ (h. 13-2a,b). Các điện trở có đường đặc tính không đối xứng qua gốc tọa độ (h. 13-2c) gọi là *không đối xứng.*

b) *Điện trở động, điện trở tĩnh.*

Khi tính toán phân tích mạch phi tuyến ta còn đặc trưng phần tử trở bằng những thông số *điện trở tĩnh* và *điện trở động.*

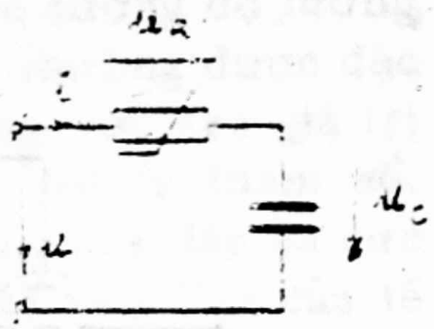
Khi đặt điện áp một chiều U vào điện trở phi tuyến dòng điện chảy qua là I. Ta có:

$$U = R_t(I)\, I \; ; \; R_t = \frac{U}{I} = R_t(I). \qquad (13.5)$$

R_t gọi là điện trở tĩnh. Khái niệm điện trở [illegible] được dùng trong mạch phi tuyến có dòng

một chiều, hoặc cho phần tử trở quán tính có dòng xoay chiều.

Khái niệm điện trở động thường được dùng trong mạch phi tuyến có dòng xoay chiều. Ví dụ mạch h. 13-3 có phương trình :



H. 13-3.

$$u = u_R - \frac{1}{C}\int i\,dt$$

hoặc :

$$u' = \frac{\partial u_R}{\partial i} i' - \frac{i}{C} = R_d(i)\, i' - \frac{i}{C}$$

trong đó ta gọi điện trở động là :

$$R_d(i) = \frac{\partial u_R}{\partial i}. \quad (13.6)$$

Điện trở động thường dùng tính mạch phi tuyến khi dòng và áp có một thành phần không đổi, cộng thêm một thành phần biến thiên nhỏ.

Điện trở động và điện trở tĩnh phụ thuộc vào dòng điện và nói chung $R_t(i) = R_d(i)$. Ví dụ đối với đường đặc tính V-A h. 13-2c ta có điện trở động và tĩnh ở trạng thái ứng với điểm A

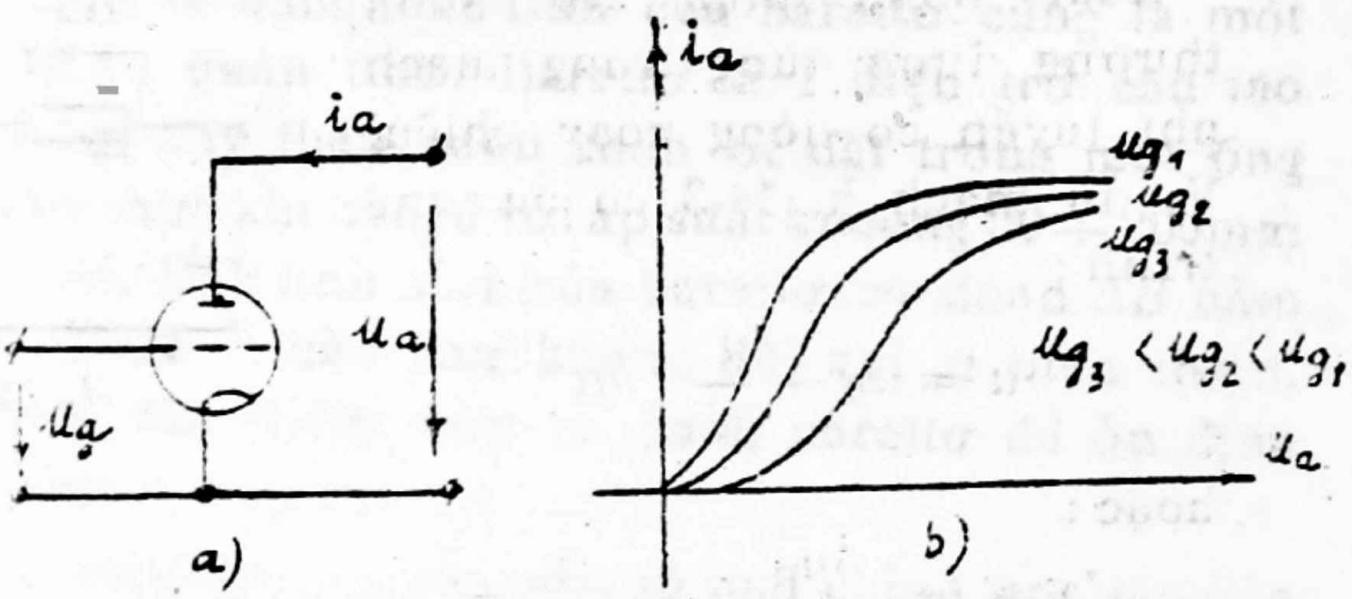
$$R_d|_A = \operatorname{tg}\beta \text{ khác với } R_t|_A = \operatorname{tg}\alpha.$$

Điện trở động có thể có giá trị âm, ví dụ điện trở động trong đoạn AB của phần tử phi tuyến có đường V-A h. 13-2d.

2. Điện trở điều khiển.

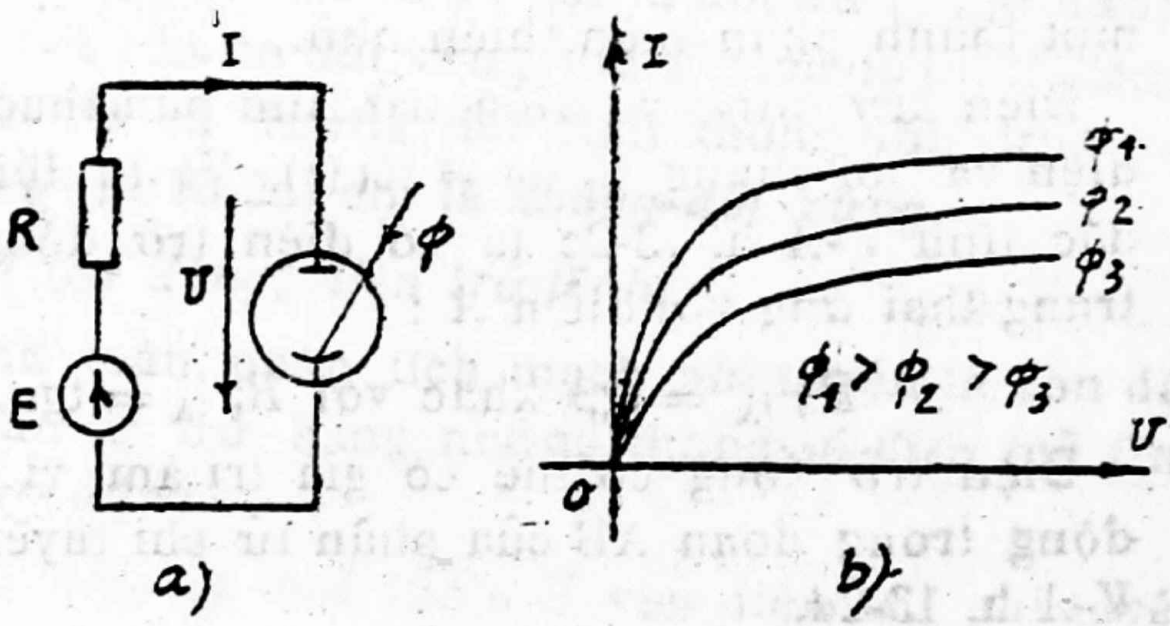
Trong thực tế còn thường gặp các phần tử có điện trở không những phụ thuộc vào điện áp *trên nó*, mà còn phụ thuộc một vài *lượng khác*, gọi là các lượng điều khiển. Ta gọi chúng là điện trở có điều khiển. Các

lượng điều khiển có thể là các lượng điện hoặc không điện (quang, âm...).



H. 13-4.

H. 13-4a vẽ một phần tử trở có điều khiển: đèn ba cực. Dòng điện anôt i_a và do đó điện trở đèn không những tùy thuộc u_a mà còn bị điều khiển bởi điện áp lưới u_g.



H. 13-5.

Tế bào quang điện trong sơ đồ h. 13-5a có điện trở điều khiển bằng quang. Thay đổi quang thông Φ, điện trở sẽ thay đổi, dòng điện i qua điện trở cũng thay đổi.

Vì dòng điện i qua điện trở không những tùy thuộc điện áp u trên nó mà còn tùy thuộc cường độ lượng điều khiển, nên điện trở điều khiển thường được đặc trưng bằng *một họ đặc tính* $u(i)$ ứng với các giá trị khác nhau của lượng điều khiển coi là tham số. H. 13-4b. vẽ một họ đặc tính anôt $i_a(u_a)$ của đèn ba cực với tham số là u_g. H. 13-5b vẽ họ đặc tính V-A của tế bào quang điện với quang thông Φ là tham số.

Tóm lại ở tần số không cao quá, và trong 1 giải tần hẹp, ta đặc trưng mỗi phần tử trở phi tuyến bằng một quan hệ hàm $u\,(i)$ ứng với một đường đặc tính V-A hoặc một họ quan hệ $u\,(i)$ và một họ đặc tính V-A.

§ 13-2. CUỘN DÂY LÕI SẮT. ĐIỆN CẢM PHI TUYẾN

Điện cảm của một cuộn dây có lõi bằng vật liệu sắt từ (cuộn dây có lõi sắt) là một **điện cảm phi tuyến.**

Điện cảm phi tuyến có thể có điều khiển và không điều khiển.

Tính chất phi tuyến của điện cảm là kết quả của quan hệ phi tuyến $B(H)$ của vật liệu sắt từ làm lõi cuộn dây.

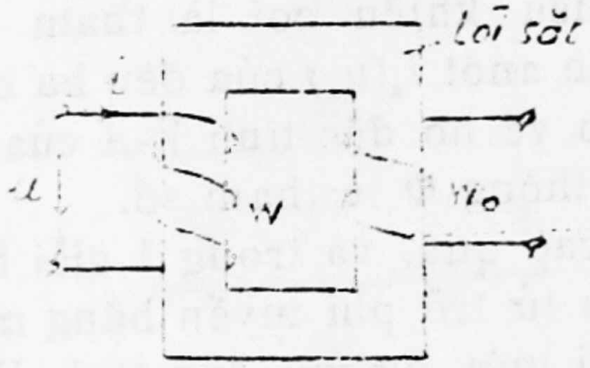
1. Sơ đồ thay thế cuộn dây có lõi sắt. Điện cảm phi tuyến.

Cuộn dây lõi sắt gồm có một cuộn dây quấn trên một lõi làm bằng vật liệu sắt từ (h. 13-6). Khi có dòng điện chảy trên cuộn dây, trong lõi sắt sẽ có một dòng từ thông Φ. Ta thường coi Φ chỉ chảy trong lõi sắt.

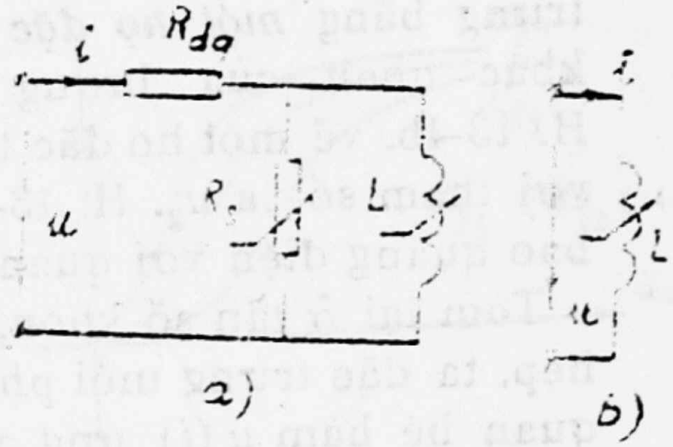
Ta hãy xét sơ đồ mạch điện mô tả cuộn dây lõi sắt ở chế độ điều hòa (hoặc gần điều hòa) tần số thấp.

Khi có từ thông xoay chiều $\Phi_\sim$ xuyên qua cuộn dây, trong cuộn dây sinh ra một sức điện động e_L. Ta biểu diễn hiện tượng này trong sơ đồ bằng một điện cảm L

(h. 13-7a). Đồng thời khi có $\Phi_\sim$, trong lõi thép thường có tiêu tán năng lượng do từ trễ và dòng điện xoáy. Mất mát sắt từ tùy thuộc từ thông $\Phi_\sim$ hoặc có thể coi



H. 13-6



H. 13-7

tùy thuộc i_L nên được biểu diễn bằng một điện trở R_s nối song song với điện cảm L. Vì từ thông Φ phụ thuộc phi tuyến vào dòng i và tổn hao sắt phụ thuộc phi tuyến vào Φ, nên phải coi L và R_s là phi tuyến. Cuối cùng dòng điện chảy qua dây dẫn gây nên tổn hao Jun, tổn hao này được biểu diễn bằng điện trở R_{dq} của dây quấn.

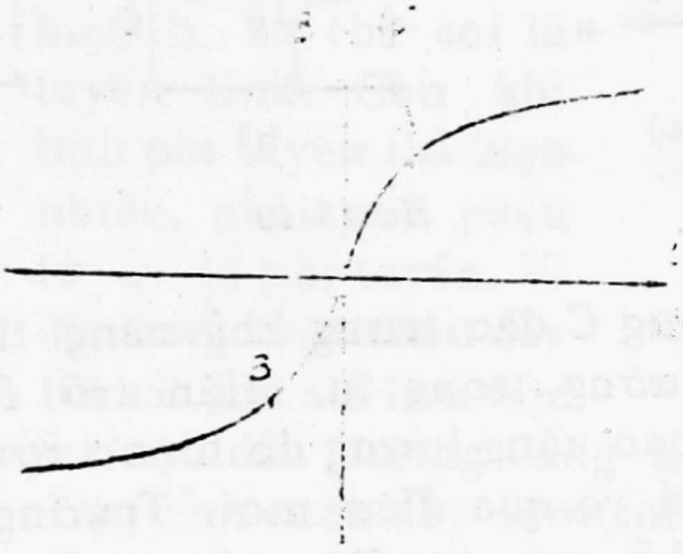
Sơ đồ mạch mô tả cuộn dây lõi sắt (h. 13-7a) thường dùng để khảo sát máy điện có dòng xoay chiều.

Trong một số trường hợp, khi tổn hao dây quấn và tổn hao sắt nhỏ, có thể bỏ qua các điện trở R_{dq} và R_s, lúc ấy cuộn dây lõi sắt được thay thế bằng một **điện cảm phi tuyến** L (h. 13-7b).

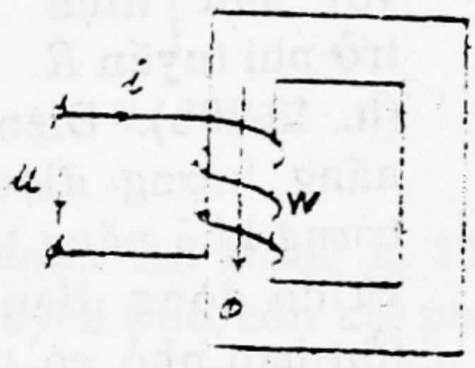
Như (13-2), điện cảm phi tuyến đặc trưng bởi quan hệ $\psi(i)$ giữa từ thông móc vòng ($\psi = w\Phi$) và dòng điện i. Thông thường vì $\psi \equiv B$, $i \equiv H$ nên quan hệ $\psi(i)$ tương tự như quan hệ $B(H)$ của vật liệu làm lõi cuộn dây. Nhưng thực ra ở trạng thái biến thiên quan hệ $B(H)$ là những quan hệ vi tích phân phi tuyến phức tạp (liên quan với hiện tượng trễ và dòng điện xoáy) phụ

thuộc tốc độ, gia tốc, hình dạng và độ lớn của $B(t)$ và $H(t)$...

Trường hợp bỏ qua tổn hao trong cuộn dây, ở tần số thấp có thể coi quan hệ $B(H)$ và do đó $\psi(i)$ của cuộn dây là một quan hệ hàm h. 13-8.



H. 13-8



H. 13-9

Tương tự như đối với điện trở, khi tính mạch có điện cảm với i, u biến thiên, ta hay dùng khái niệm điện cảm động $L_d(i) = \frac{\partial \psi}{\partial i}$, còn điện cảm tĩnh $L_t(i) = \frac{\psi}{i}$ ít dùng hơn.

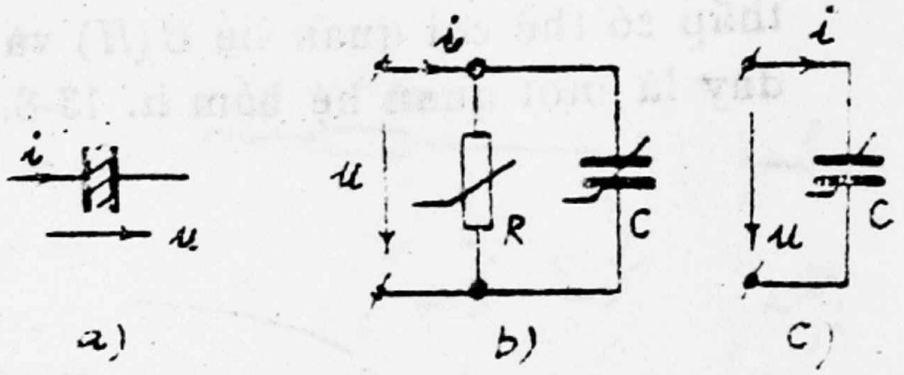
2. Cuộn dây lõi thép có điều khiển. Điện cảm có điều khiển.

H. 13-9 vẽ sơ đồ cuộn dây lõi thép có điều khiển đơn giản. Cuộn w có dòng xoay chiều i chảy qua gọi là cuộn làm việc. Cuộn w_o có dòng một chiều I_o gọi là cuộn điều khiển. Thay đổi dòng điện điều khiển sẽ làm thay đổi mức độ bão hòa của lõi thép do đó làm thay đổi điện cảm L của cuộn dây làm việc w. Điện cảm điều khiển được xét kỹ hơn trong chương 15.

§ 13-3. ĐIỆN DUNG PHI TUYẾN

Điện dung phi tuyến là điện dung của tụ điện có điện môi phi tuyến (ví dụ điện môi xenhet).

Ở tần số thấp tụ điện phi tuyến h. 13-10a được thay thế bằng một điện dung phi tuyến C nối song song với một điện trở phi tuyến R (h. 13-10b). Điện dung C đặc trưng khả năng tích tụ năng lượng điện trường trong tụ, điện trở R đặc trưng khả năng tổn hao năng lượng do hiện tượng trễ và do dòng điện dẫn rò qua điện môi. Trường hợp tổn hao nhỏ có thể bỏ qua, tụ điện phi tuyến được thay thế bằng một điện dung phi tuyến C (h. 13-10c).



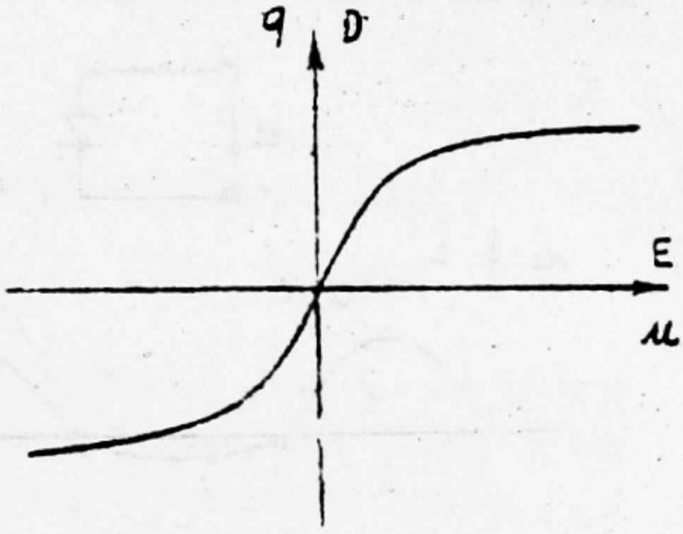
H. 13-10

Như (13-2), đặc trưng cho điện dung phi tuyến là quan hệ $q(u)$ liên hệ giữa điện tích q và điện áp u giữa các cực của phần tử điện dung. Đối với những tụ lý tưởng (không tổn hao) quan hệ $q(u)$ tương tự như quan hệ $D(E)$ của điện môi giữa hai bản tụ điện. Cũng giống như quan hệ $B(H)$ trong vật liệu sắt từ, ở trạng thái biến thiên $D(E)$ thường là một quan hệ vi tích phân phức tạp. Khi bỏ qua tổn hao, ở tần số không cao lắm và ở một giải tần đủ hẹp, có thể coi $D(E)$ và do đó $q(u)$ là quan hệ hàm, đường cong $q(u)$ thường có dạng giống đường cong $\Psi(i)$ của điện cảm phi tuyến (h. 13-11).

Cũng giống như điện trở và điện cảm phi tuyến, trong tính toán ta hay dùng khái niệm điện dung động cho mạch có u, i biến thiên $C_d(u) = \dfrac{\partial q}{\partial u}$

và điện dung tĩnh thường dùng đối với mạch có u, i không đổi $C_t(u) = \frac{q}{u}$.

Thực ra các phần tử ít nhiều đều là phi tuyến cả. Nhưng khi khảo sát các phần tử mà tính phi tuyến thể hiện ít, có thể coi là tuyến tính. Còn khi tính phi tuyến thể hiện nhiều, phải coi phần tử ấy là phi tuyến. Ví dụ cùng một cuộn dây lõi sắt, khi chỉ làm việc ở đoạn đầu đường cong $\psi(i)$ (đoạn AB trong h. 13-8) điện cảm cuộn dây được coi là tuyến tính, còn khi phạm vi làm việc ở đoạn bão hòa (ngoài đoạn AB) phải coi điện cảm cuộn dây là phi tuyến. Trong thực tế còn gặp nhiều phần tử bắt buộc coi là phi tuyến, như các van, cuộn dây có lõi sắt trong các thiết bị ổn áp sắt từ, các máy điện làm việc ở chế độ bão hòa từ v.v...



H. 13-11

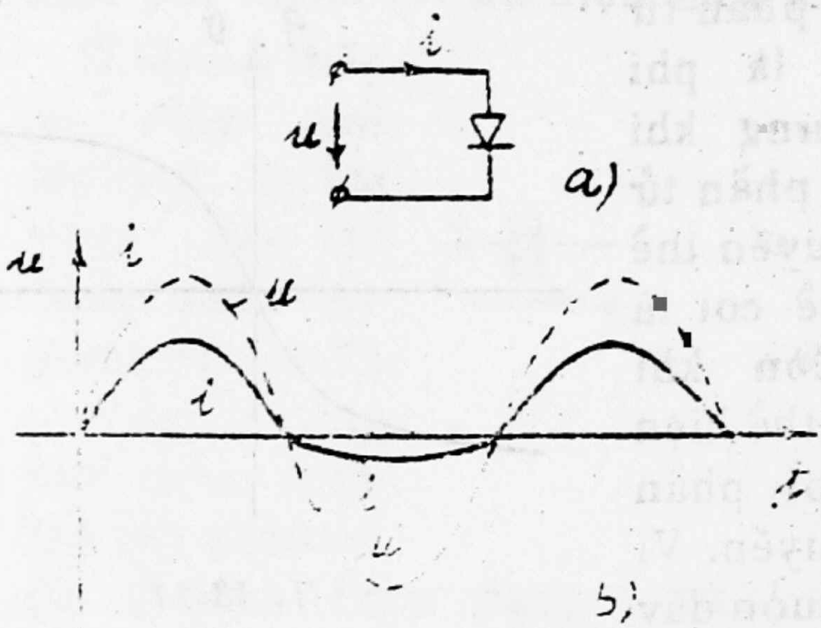
§ 13-4. TÍNH CHẤT TẠO TẦN CỦA PHẦN TỬ PHI TUYẾN

Tính tạo tần là đặc điểm của các phần tử phi tuyến không quán tính hoặc quán tính nhỏ.

Tính tạo tần thể hiện ở chỗ ứng với một điều hòa của kích thích, trong đáp ứng sẽ có thêm những điều hòa khác.

Do tính tạo tần nên nói chung hình dáng đáp ứng bị méo so với hình dáng kích thích. H. 13-12b cho thấy

khi kích thích $u(t)$ trên chỉnh lưu là hình sin, thì hình dáng đáp ứng $i(t)$ khác hình sin, trong phổ tần của đáp ứng đã sinh ra những tần số mới. Tính tạo tần của phần tử phi tuyến là cơ sở để chế các thiết bị nhân chia tần số, các máy phát dao động.



H. 13-12

Đối với những phần tử có quán tính lớn do quan hệ $u(i)$ tức thời coi là gần tuyến tính nên tính tạo tần không rõ nét.

§13-7. MẠCH PHI TUYẾN

Ta đã có khái niệm về mạch phi tuyến. Có thể phân loại các mạch phi tuyến theo nhiều cách nhìn nhận:

— Mạch có phần tử quán tính hay không,

— Mạch có điều khiển hay không.

Trong mạch phi tuyến có nhiều hiện tượng về nguyên tắc không thể có được trong mạch tuyến tính. Hiện tượng phổ biến và quan trọng nhất trong mạch phi tuyến là tính tạo tần. Ngoài ra trong những mạch cụ thể có thể xuất hiện những dao động không tắt (tự dao động), dao động có biên độ tăng dần, dao động biến điệu, hiện tượng ổn áp, ổn dòng...

Những hiện tượng muôn hình muôn vẻ trong mạch phi tuyến được dùng để chế nhiều loại thiết bị KTĐ.

Việc chế tạo ra những phần tử phi tuyến mới và ứng dụng chúng vào thực tế rất có tính thời sự và có triển vọng lớn.

§ 13-6. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU MẠCH PHI TUYẾN

Việc dùng rộng rãi những phần tử phi tuyến trong KTĐ đòi hỏi có những phương pháp ngày càng hoàn thiện để nghiên cứu tính toán mạch phi tuyến. Lý thuyết Mạch phi tuyến là một trong những phần phát triển mạnh của Lý thuyết Mạch. Việc khảo sát mạch phi tuyến quy về việc xét và giải hệ phương trình phi tuyến mô tả cho các biến trạng thái dòng áp theo các luật Kirhoff.

Việc khảo sát chính các mạch phi tuyến khó khăn hơn mạch tuyến tính. Những khó khăn này là do yêu cầu giải những hệ phương trình phi tuyến (vi phân hoặc đại số).

Đối với các hệ phương trình vi phân phi tuyến không có những phương pháp chung trực tiếp tích phân tìm nghiệm như đối với các hệ tuyến tính. Vì vậy thường giải bằng những phương pháp gần đúng. Có thể tạm phân những phương pháp thường dùng giải các hệ phi tuyến thành 4 nhóm :

1. Các phương pháp giải tích.

Nội dung các phương pháp giải tích là: tìm nghiệm phương trình dưới dạng các hàm hoặc các chuỗi giải tích của thời gian. Muốn vậy phải biểu thị đường đặc tính của phần tử phi tuyến bằng các hàm giải tích và thay vào hệ phương trình mạch. Dựa vào phương trình nghiên cứu ra cách tìm nghiệm dưới dạng hàm

giải tích. Nội dung các phương pháp giải tích thường tương đối khó, khối lượng tính toán nhiều ; vì vậy các phương pháp giải tích thường tiện dùng cho những mạch đơn giản, ít phi tuyến. Một số phương pháp giải tích thường dùng để giải mạch phi tuyến ở chế độ xác lập và quá độ là :

— Phương pháp cân bằng điều hòa,

— Phương pháp biên độ biến thiên chậm,

— Phương pháp thông số nhỏ v.v...

2. Các phương pháp đồ thị.

Nội dung các phương pháp đồ thị là vận dụng đường đặc tính các phần tử phi tuyến kết hợp với phương trình mạch để tìm đáp ứng dưới dạng đường cong của thời gian. Một số phương pháp đồ thị hay dùng là :

— Các phương pháp cộng đồ thị,

— Phương pháp biểu diễn quá trình trên mặt phẳng pha.

— Phương pháp dẫng tà v.v...

Các phương pháp đồ thị có ưu điểm là đơn giản và gọn gàng, nhưng thường chỉ dùng được cho các mạch đơn giản.

3. Các phương pháp số.

Nội dung phương pháp số là tìm nghiệm dưới dạng những bảng số theo thời gian. Một số phương pháp thường dùng là :

— Phương pháp đò,

— Phương pháp tính lặp,

— Phương pháp sai phân v.v...

Khi điều kiện hội tụ của nghiệm đã được bảo đảm, phương pháp số có thể cho nghiệm với độ chính xác tùy ý. Để giải một khối lượng tính toán tương đối lớn,

các phương pháp số thường dùng kết hợp với máy tính số. Vì vậy chúng có tính hiện đại và ngày càng được dùng nhiều để giải các hệ thống phi tuyến.

4. Phương pháp mô hình.

Nội dung phương pháp mô hình là xây dựng 1 mô hình điện — điện tử có phương trình giống hệ phương trình của mạch cần nghiên cứu và dễ đo lường quan sát đáp ứng. Đáp ứng của mô hình phản ánh đáp ứng của mạch. Phương pháp mô hình không những cho phép giải các bài toán mạch điện, mạch từ mà còn dùng rộng rãi để giải các bài toán thuộc những hệ thống vật lý khác có kết cấu giống mạch điện (mạch cơ, mạch thủy, mạch nhiệt v.v...) và cả những bài toán trường nữa. Phương pháp mô hình cho phép giải hệ thống phi tuyến 1 cách nhanh chóng với độ chính xác đủ dùng trong kỹ thuật.

Mỗi phương pháp giải mạch phi tuyến có ưu và nhược điểm riêng và thường chỉ thích hợp đối với 1 số loại bài toán nhất định.

Khi khảo sát các hệ phi tuyến còn phải xét đến nhiều vấn đề khác như tính ổn định của nghiệm. Trong khuôn khổ quyển sách này không đề cập những vấn đề ấy, sẽ chỉ đề cập những phương pháp thông dụng trong kỹ thuật điện.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ CÔNG NGHIỆP
THƯ VIỆN
TKVB 1256
PHÒNG MƯỢN

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là phần tử có quán tính, không quán tính, cho ví dụ.
2. Điện trở phi tuyến không điều khiển và có điều khiển đặc trưng bởi những quan hệ và số gì?
3. Giải thích nguyên nhân phi tuyến của điện cảm phi tuyến. Giải thích sơ đồ thay thế cuộn dây lõi sắt ở tần số thấp. Điện cảm phi tuyến đặc trưng bởi quan hệ gì?

4. Thế nào là điện dung phi tuyến? Quan hệ ứng của điện dung phi tuyến là gì?

5. Một cách chặt chẽ quan hệ đặc trưng cho phần tử phi tuyến phải coi là quan hệ gì? Khi nào có thể coi các quan hệ ấy là quan hệ hàm?

6. Khái niệm R_d, L_d, C_d, R_t, L_t, C_t của các phần tử phi tuyến. Chúng được dùng trong những trường hợp nào?

7. Giải thích tính tạo tần của phần tử phi tuyến ít quán tính. Phân biệt hiện tượng làm méo đáp ứng trong mạch tuyến tính và mạch phi tuyến.

8. Kể những hiện tượng chính của mạch phi tuyến mà không có trong mạch tuyến tính.

9. Nói những nguyên nhân gây khó khăn cho việc nghiên cứu mạch phi tuyến. Mạch phi tuyến có tính chất xếp chồng không?

10. Nêu nội dung và đặc điểm các loại phương pháp nghiên cứu mạch phi tuyến. Việc nghiên cứu mạch phi tuyến có đặc điểm gì khác việc nghiên cứu mạch tuyến tính?

CHƯƠNG XIV

MẠCH PHI TUYẾN CÓ DÒNG MỘT CHIỀU

Mục đích:

— Làm rõ thực chất việc tính toán mạch phi tuyến có dòng một chiều là giải hệ thống phương trình đại số phi tuyến miêu tả mạch.

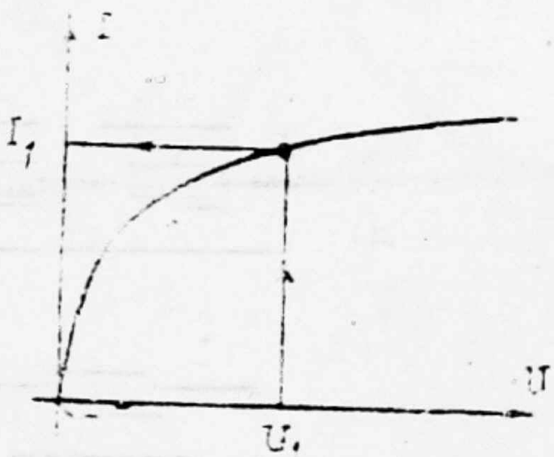
— Trình bày nội dung các phương pháp đồ thị và phương pháp số để giải mạch phi tuyến ở chế độ xác lập một chiều.

Ở chế độ xác lập trong mạch phi tuyến có những nguồn một chiều, dòng và áp không biến thiên theo thời gian. Vì vậy việc nghiên cứu mạch qui về việc giải một hệ phương trình đại số phi tuyến viết theo các luật Kirhof. Bài toán thường được giải bằng các phương pháp đồ thị và các phương pháp số. Chú ý rằng ở chế

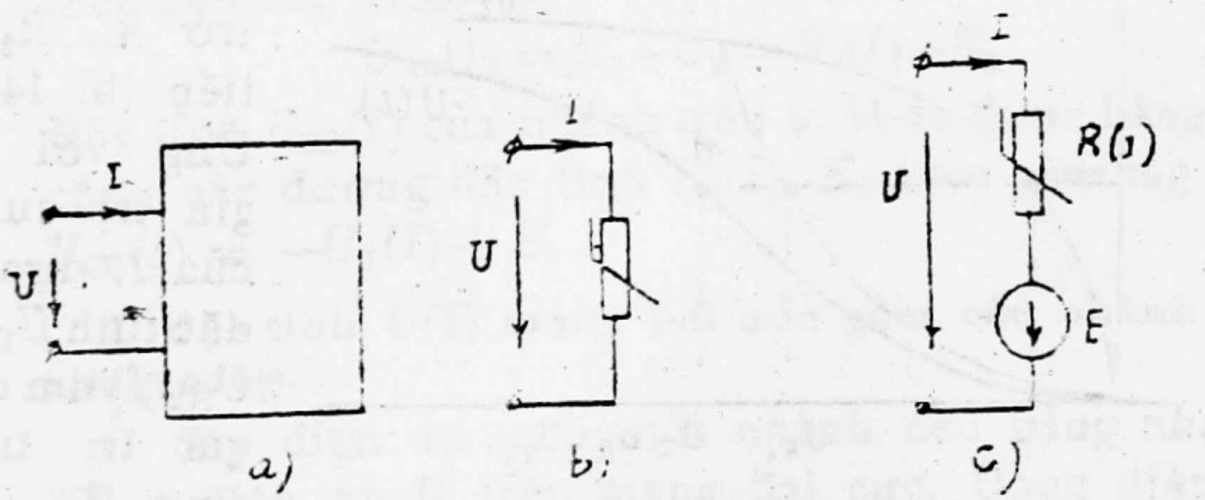
đồ xác lập kết cấu mạch điện có dòng một chiều chỉ gồm những nguồn một chiều ghép với các điện trở, không cần để ý đến các điện cảm (coi là ngắn mạch) và điện dung (coi là hở mạch).

§ 14-1. GIẢI MẠCH PHI TUYẾN MỘT CHIỀU BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

Trong phương pháp đồ thị ta dùng các đường đặc tính V—A để tính toán. Với một mạng hai cực cũng vậy (h. 14-2a), nếu biết đặc tính $U(I)$ của nó, khi biết kích thích U ta tìm được đáp ứng I và ngược lại. Dựa vào đặc tính của các phần tử bằng đồ thị có thể tìm đặc tính $U(I)$ của toàn mạng hai cực. Việc này thực chất là thay thế mạng hai cực đã cho bằng một nhánh tương đương h. 14-2b hoặc



H. 14-1



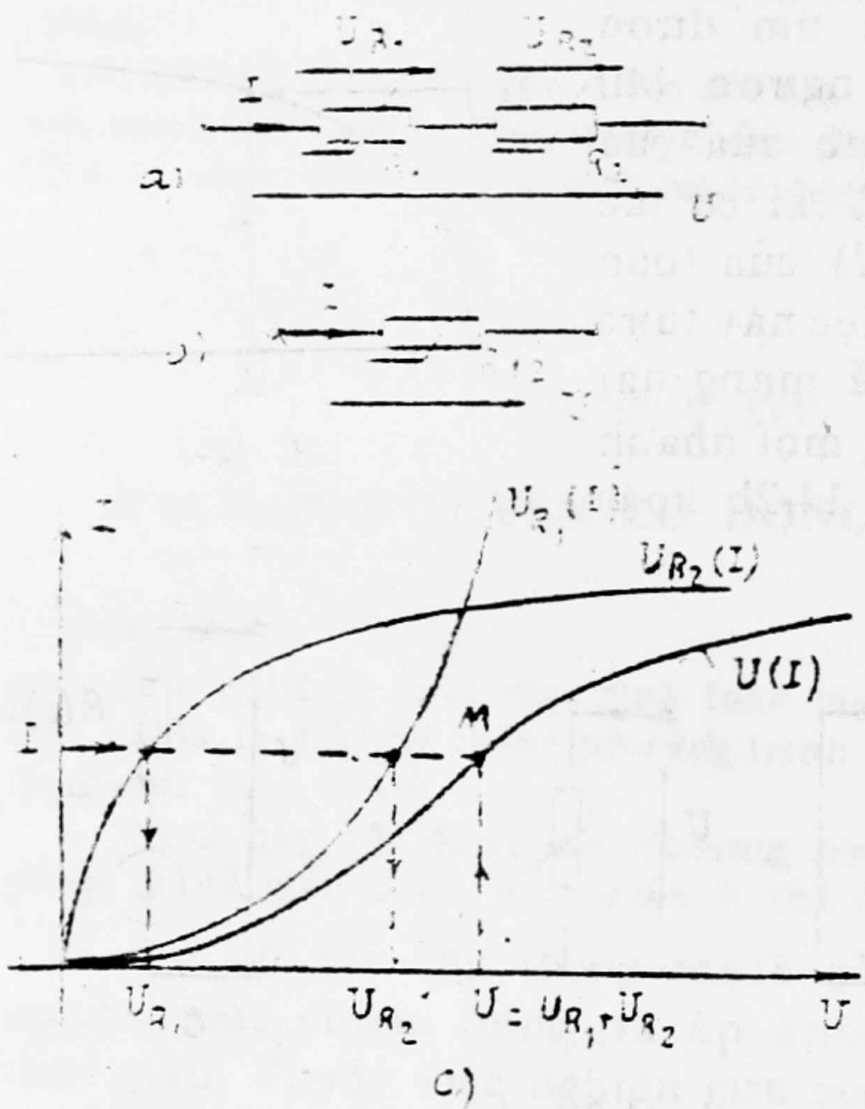
H. 14-2 a, b, c

14-2c. Dưới đây trình bày cách tìm nhanh tương đương của một số mạng hai cực cơ bản và ứng dụng nó giải mạch điện một chiều.

1. Đặc tính $U(I)$ của mạng hai cực gồm các phần tử ghép nối tiếp.

Giả thiết có một mạng hai cực gồm các phần tử ghép nối tiếp có các đặc tính $V-A$ đã biết, ta đặt vấn đề tìm đặc tính $U(I)$ của mạng hai cực.

Vì các phần tử ghép nối tiếp, nên với một giá trị dòng I, điện áp trên mạng hai cực bằng tổng điện áp trên mỗi phần tử $U(I) = \sum_{k=1}^{n} U_k(I)$. Vậy suy ra ta có đường đặc tính của nhánh nối tiếp các phần tử trở bằng cách cộng các đặc tính của mỗi phần tử theo trục điện áp.

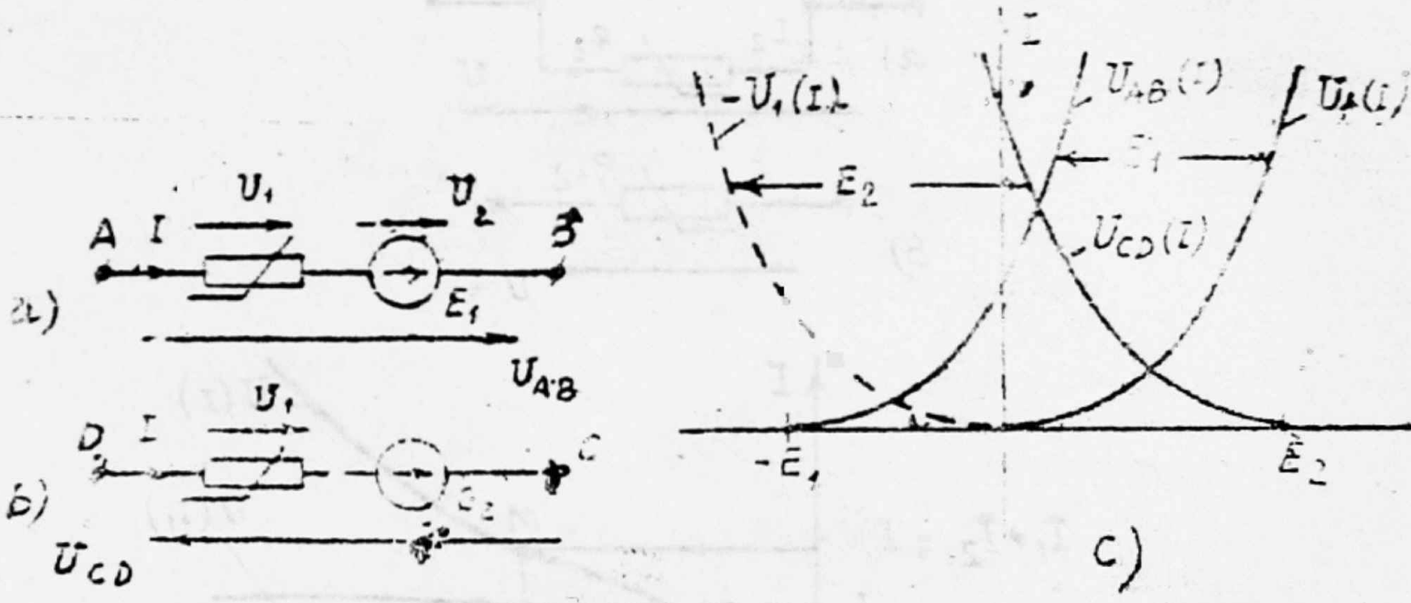


H. 14-3

H. 14-3c chỉ rõ cách vẽ một điểm trên đường đặc tính $U(I)$ của một nhánh 2 điện trở R_1, R_2 nối tiếp (h. 14-3a). Ứng với một giá trị cụ thể của I, dựa vào đặc tính $U_{R1}(I)$, $U_{R2}(I)$ tìm được giá trị tương ứng U_{R1}, U_{R2}. Cộng chúng lại ta sẽ được giá trị của U trên mạng hai cực ứng với dòng điện I. Như vậy được một điểm M (U, I) trên đường đặc

tính mạng hai cực. Vẽ nhiều điểm như vậy ứng với những giá trị I khác nhau ta được toàn bộ đặc tuyến $U(I)$ của mạng hai cực hoặc của điện trở tương đương (h. 14-3b).

Cũng theo cách đó, ta vẽ được đặc tính $V-A$ của một nhánh ghép nối tiếp nguồn sức điện động E với một điện trở R.



H. 14-4

Ví dụ đặc tính $V-A$. $U_{AB}(I)$ của nhánh trên h. 14-4a được bằng cách cộng các đường đặc tính $U_1(I)$ và E_1 theo phương trình

$$U_{AB}(I) = U_1 + U_2 = U_1(I) - E_1.$$

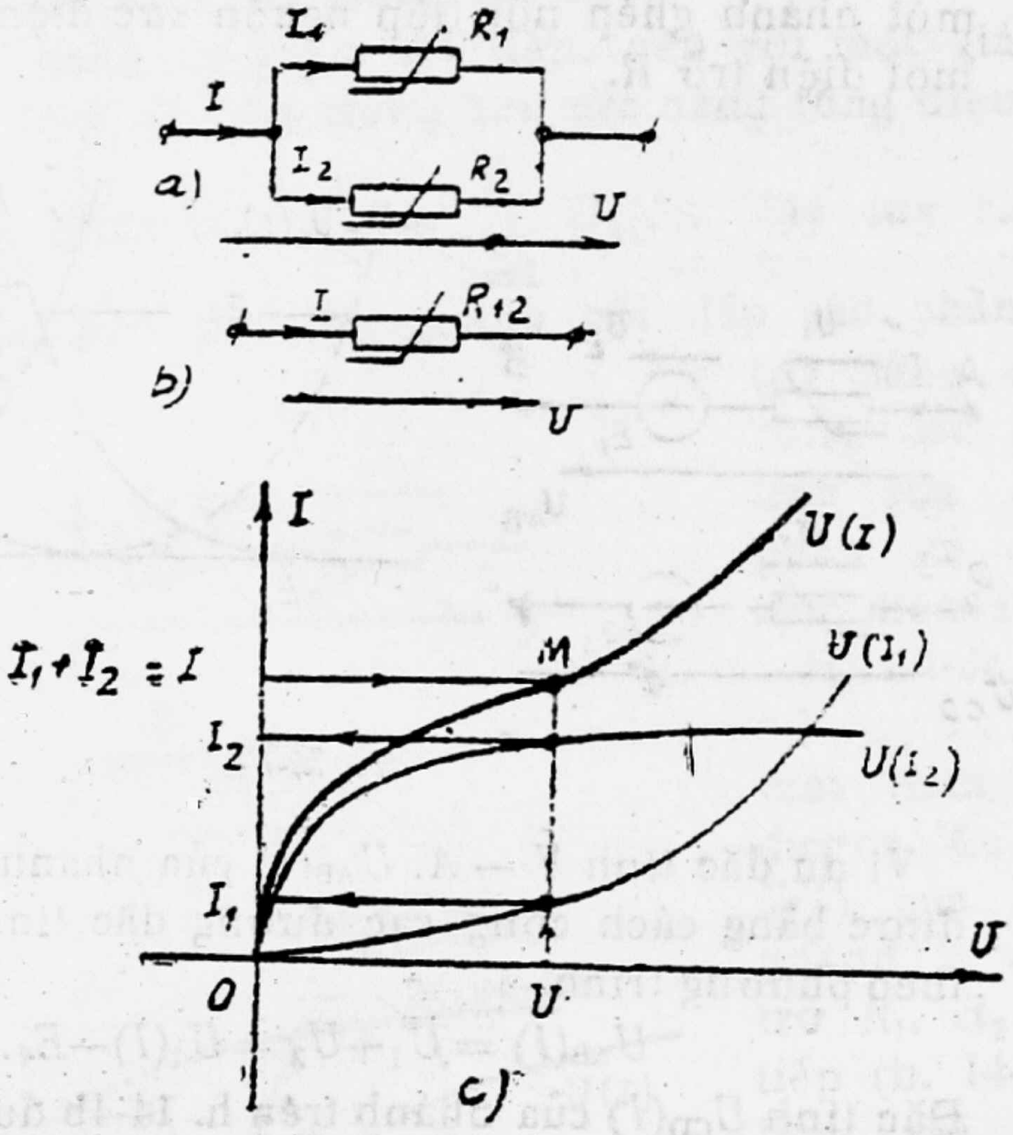
Đặc tính $U_{CD}(I)$ của nhánh trên h. 14-4b được bằng cách cộng các đường đặc tính $U_1(I)$, E_2 theo phương trình $U_{CD}(I) = -U_1(I) + E$.

2. Đặc tính U(I) mạng hai cực gồm các nhánh ghép song song.

Ở đây điện áp trên mỗi nhánh đều bằng nhau và bằng điện áp U trên mạng hai cực. Dòng điện vào bằng tổng đại số dòng điện các nhánh (luật Kirhof 1) :

$$I(U) = \sum_{k=1}^{n} I_k(U).$$

trong đó k là chỉ số đếm các nhánh. Suy ra ta vẽ được đặc tính $U(I)$ của mạng hai cực gồm các nhánh ghép song song bằng cách cộng đường đặc tính của các nhánh theo trục dòng điện. Để minh họa, ta thử áp dụng qui [illegible]ấy cho một số mạch cụ thể. H. 14-5 c chỉ rõ cách vẽ



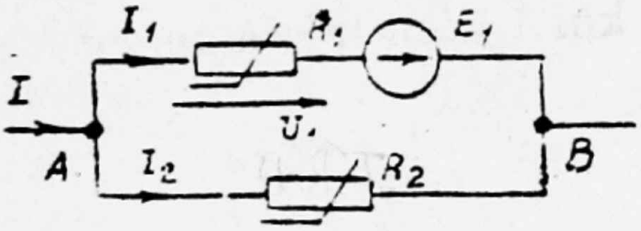
H. 14-5

1 điểm trên đường đặc tính $U(I)$ của một mạng hai cực gồm hai điện trở R_1, R_2 ghép song song (h. 14-5a).

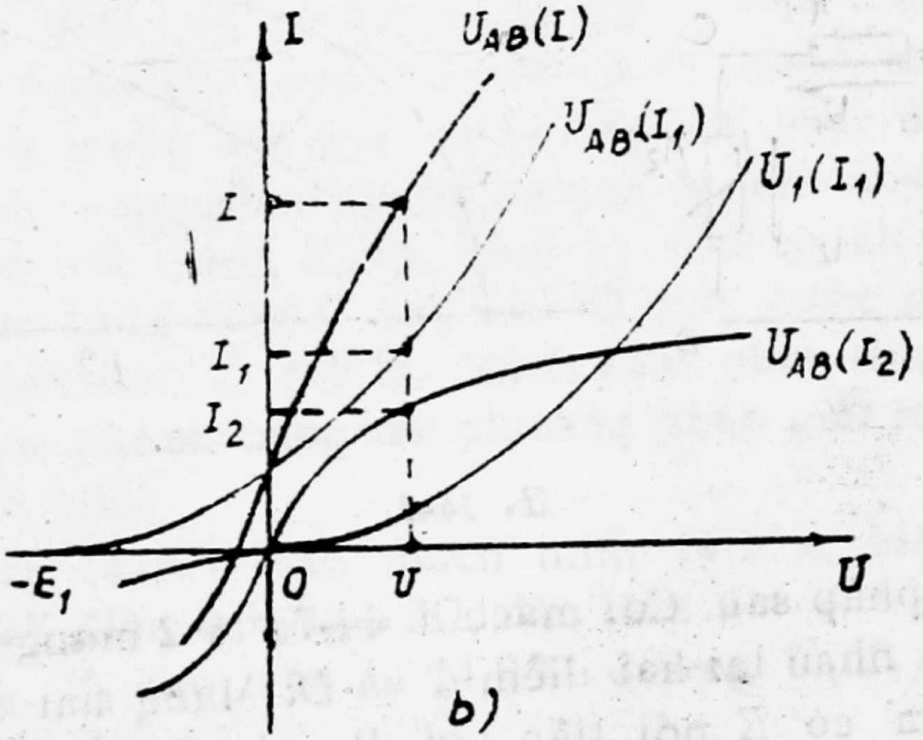
Ứng với một giá trị điện áp U, dựa vào đặc tính $U(I_1)$, $U(I_2)$ ta tìm được các trị tương ứng I_1, I_2. Cộng chúng lại (cộng đại số) ta được dòng I chảy vào mạng hai cực ứng với điện áp U. Ta được 1 điểm $M(U,I)$ trên đường đặc tính $U(I)$. Vẽ nhiều điểm như vậy ứng với

những trị U khác nhau ta được toàn bộ đường đặc tính $U(I)$. của mạng hai cực cũng là của nhánh tương đương h. 14-5 c.

Cũng theo cách đó dựa vào đặc tính các phần tử (h. 14-6) ta vẽ được đặc tính các nhánh $U_{AB}(I_1)$ và $U_{AB}(I_2)$ rồi suy ra đặc tính $U_{AB}(I)$ của toàn mạch. Quá trình vẽ được minh họa trên h. 14-6 b



a)



b)

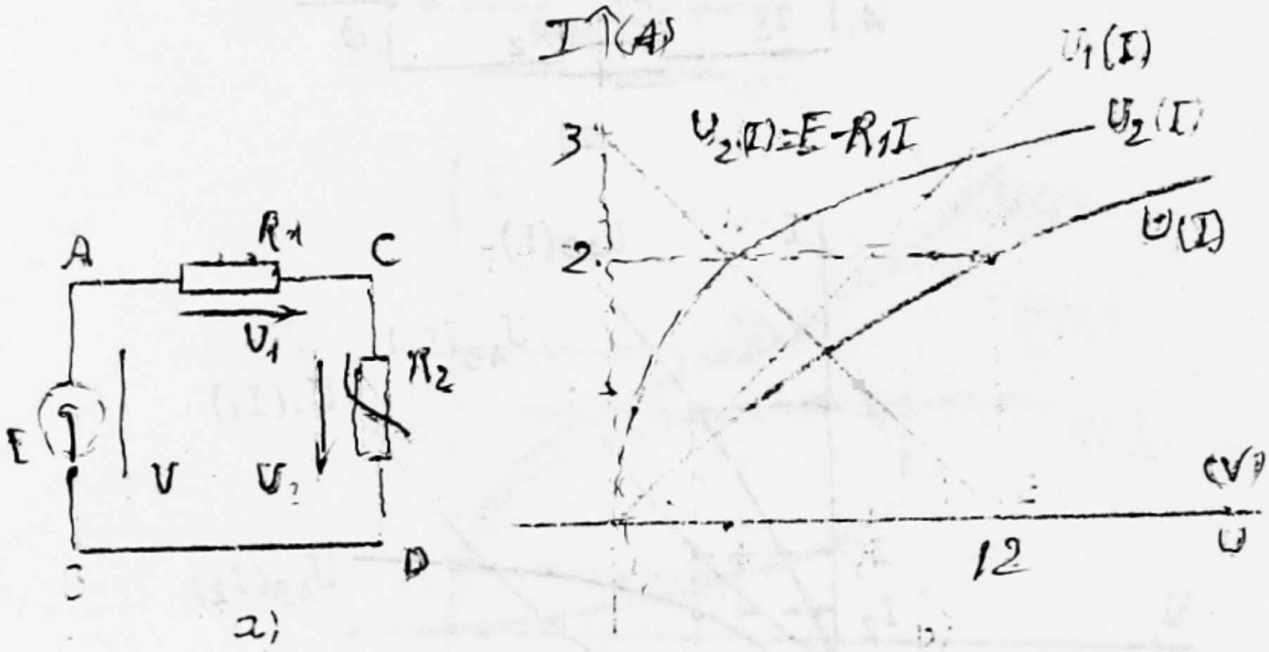
H. 14-6

Trên đây mới xét cách tìm đặc tính mạng hai cực gồm các phần tử ghép nối tiếp hay song song. Dựa vào các phương trình theo luật Kirhof, về nguyên tắc có thể tìm được đặc tính của 1 mạng hai cực phức tạp. Dưới đây nêu những ví dụ giải một số mạch đơn giản.

Ví dụ 14-1. — Cho mạch điện h. 14-7a. Đã biết $R_1 = 4\Omega$, $E = 12$ V. Đặc tính điện trở R_2 cho trên h. 14-7b. Tìm dòng I.

Giải. — Coi R_1, R_2 nối tiếp là 1 mạng 2 cực, tìm đặc tính $U(I)$ của mạng 2 cực ấy (cách làm đã trình bày ở m. 14-1). Biết kích thích $U = E = 12$V theo đường đặc tính $U(I)$ ta tìm được $I = 2$A.

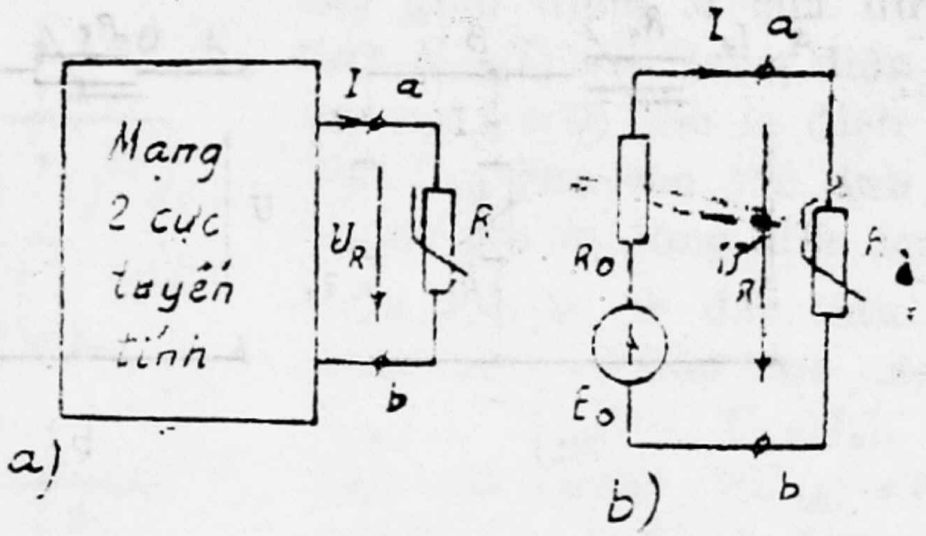
Chú ý. — Để giải bài toán có hai phần tử ghép nối tiếp (nhất là khi 1 điện trở là tuyến tính) ta hay dùng



H. 14-7

phương pháp sau. Coi mạch h. 14-7a là 2 mạng hai cực ghép với nhau tại hai điểm C và D. Mạng hai cực thứ nhất gồm có E nối tiếp với R_1 có đường đặc tính $U_2(I) = E - R_1 I$, mạng hai cực thứ hai gồm điện trở R_2 có đặc tính $U_2(I)$. Vì nối với nhau điện áp U_2 và dòng điện I trên hai mạng hai cực phải giống nhau, nên điểm cắt nhau của đường đặc tính 2 mạng đó (điểm N) ứng với tình trạng làm việc của mạch. Tọa độ điểm N (h. 14-7 b) cho biết dòng I và điện áp U_2.

Ví dụ 14-2. — Cho một mạch chỉ có 1 phần tử phi tuyến R (h. 14-8a) đã biết thông số của mạch, tìm dòng điện trong các nhánh.



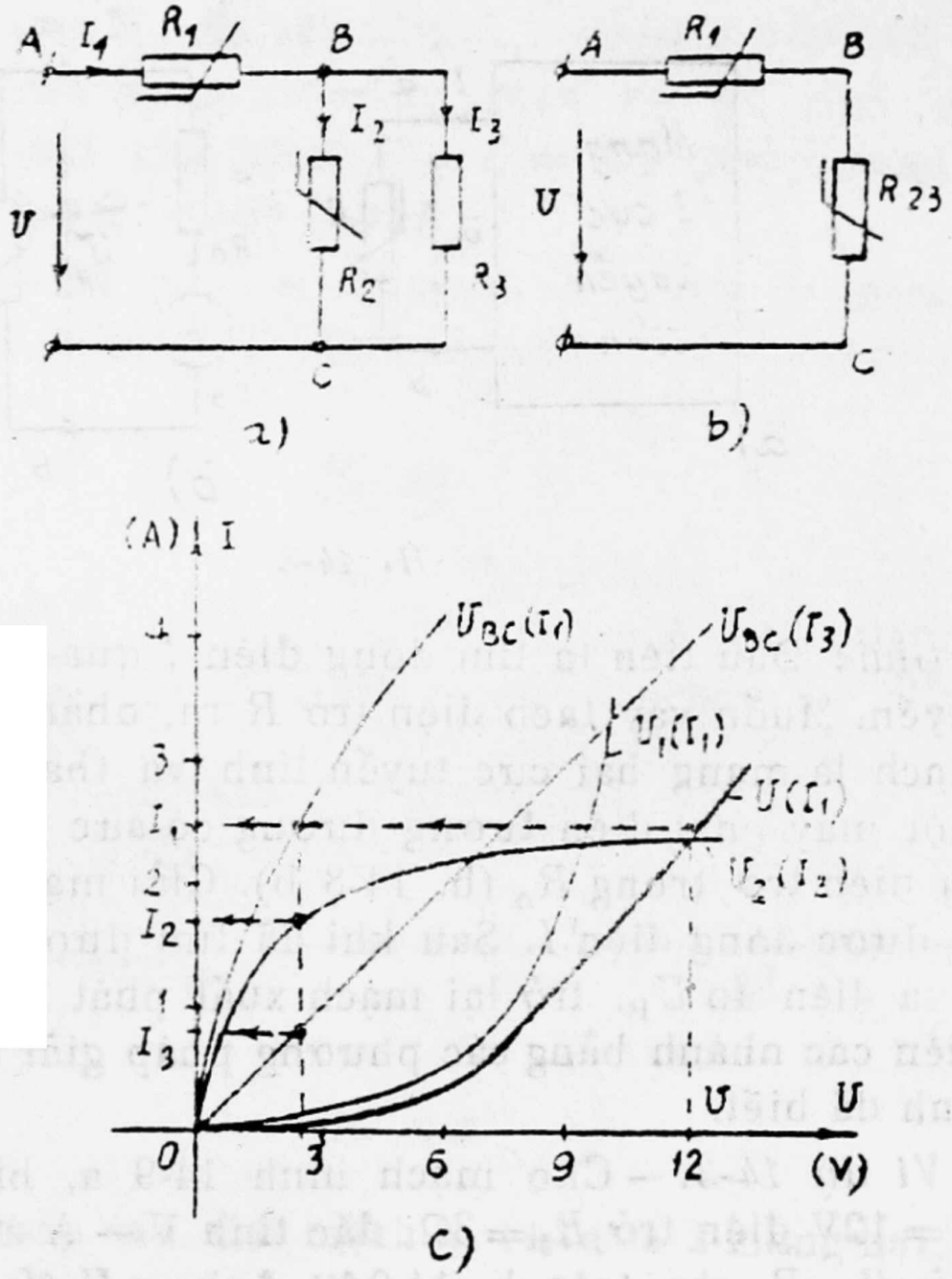
H. 14-8

Giải: Đầu tiên ta tìm dòng điện I qua điện trở phi tuyến. Muốn vậy tách điện trở R ra, phần còn lại của mạch là mạng hai cực tuyến tính và thay được bằng một máy phát điện tương đương có sức điện động E_0 và điện trở trong R_0 (h. 14-8 b). Giải mạch (h. 14-8b) ta được dòng điện I. Sau khi đã tìm được dòng điện I và điện áp U_R, trở lại mạch xuất phát tìm nốt dòng điện các nhánh bằng các phương pháp giải mạch tuyến tính đã biết.

Ví dụ 14-3. — Cho mạch hình 14-9 a, biết điện áp $U = 12V$ điện trở $R_3 = 3\Omega$, đặc tính V — A của các điện trở R_1, R_2 cho trên h. 14-9 b, đường $U_1(I_1)$ và $U_2(I_2)$. Tìm các dòng I_1, I_2, I_3?

Giải: Ta tìm đặc tính $U(I_1)$ của toàn mạch, từ đó biết kích thích U tìm ra I_1 rồi I_2, I_3. Trước tiên tìm đặc tính $U_{BC}(I_1)$ của mạng hai cực gồm R_2, R_3 song song (đặc tính của điện trở tương đương R_{23} (h. 14-9 b), sau đó từ đặc tính đã biết của hai phần tử R_1 và R_{23} ghép nối tiếp ta tìm được đặc tính $U(I_1)$ của toàn mạch. Biết

kích thích $U = 12V$, từ đường $U(I_1)$ tìm được $I_1 = 2,5A$, $U_{BC} = 2,4V$ và $I_2 = 1,7A$, $I_3 = 0,8A$.

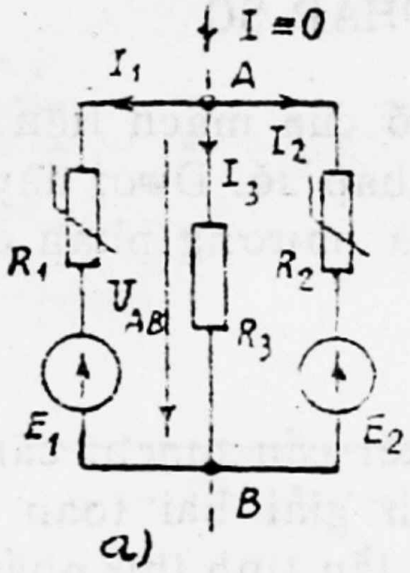


H. 14-9

Ví dụ 14-4: Cho mạch điện h. 14-10a gồm ba nhánh ghép song song, biết $E_1 = 9V$, $E_2 = 12V$, $R_3 = 1,5\Omega$, R_1, R_2 là những điện trở phi tuyến đối xứng, đường đặc tính $U_1(I_1)$, $U_2(I_2)$ của chúng cho trên h. 14-9c. Tìm các dòng I_1, I_2, I_3.

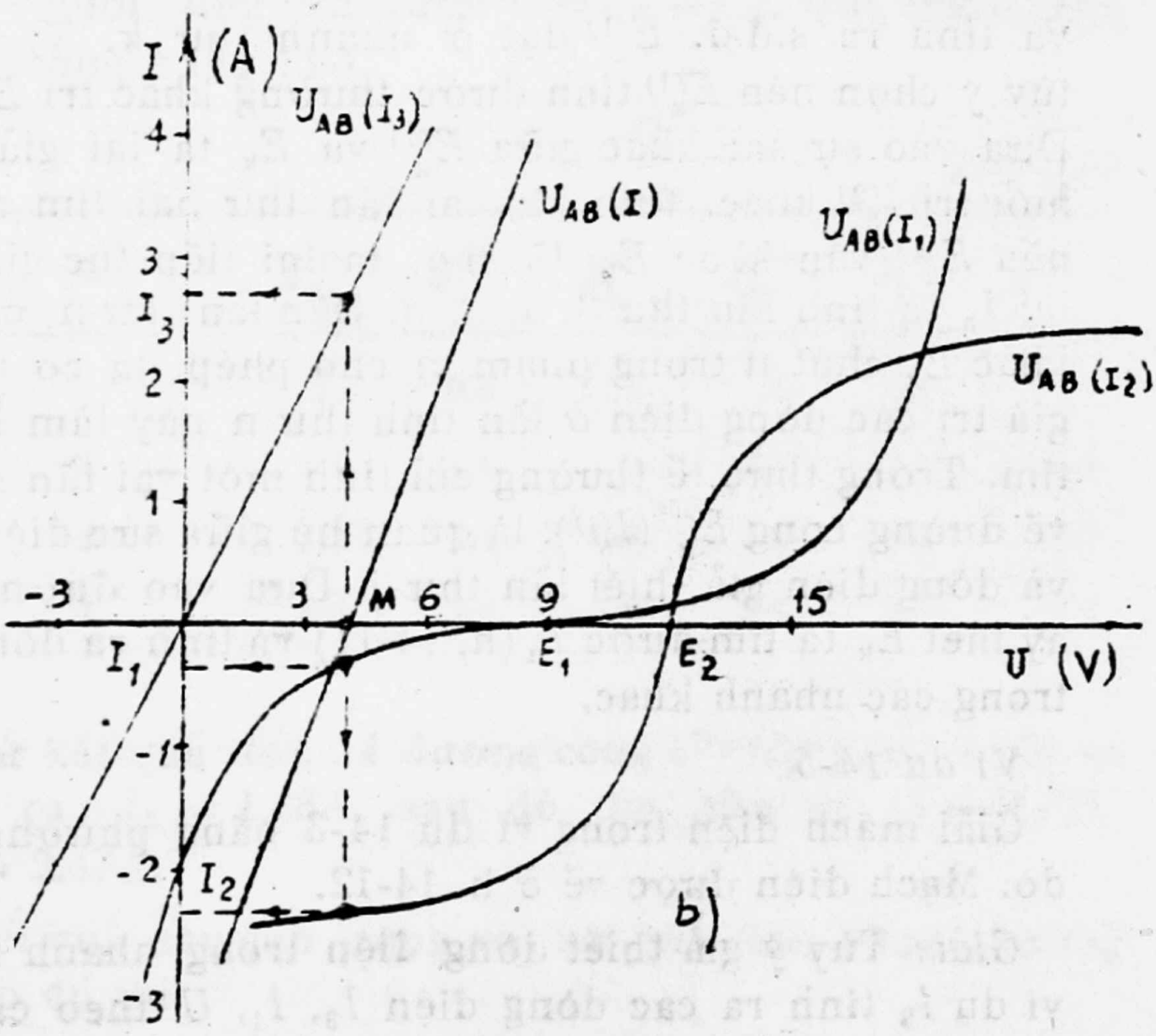
Giải: Ta có thể xem mạch điện h. 14-10a là một mạng hai cực gồm ba nhánh ghép song song và vẽ đặc

tính $U_{AB}(I)$ của nó. Cần chú ý là dòng điện vào mạng hai cực này bằng số không ($I \equiv 0$). Do đó hoành độ của giao điểm M của đường đặc tính $U_{AB}(I)$ với trục điện áp (tức đường $I \equiv 0$) cho ta điện áp U_{AB}. Biết U_{AB} dựa vào đặc tính V-A các nhánh tìm ra dòng điện các nhánh.



H. 14-10a

Cụ thể là từ đặc tính của các phần tử ta vẽ đặc tính các nhánh. $U_{AB}(I_1)$, $U_{AB}(I_2)$, $U_{AB}(I_3)$. Sau đó theo luật Kirhof : $I(U_{AB}) = I_1(U_{AB}) + I_2(U_{AB}) + I_3(U_{AB})$, đem cộng đặc tính các nhánh theo trục dòng điện ta được đặc tính $U_{AB}(I)$ (h. 14-10b)



H. 14-10 b

Từ đồ thị ta được $U_{AB} = 4,05$ và $I_1 = 0,3$ A ; $I_2 = 2,4$ A ; $I_3 = 2,7$ A.

§ 14-2. PHƯƠNG PHÁP SỐ

Để giải hệ phương trình đại số của mạch tiện dùng nhất thường là những phương pháp số. Dưới đây nêu hai phương pháp thông dụng là phương pháp dò và phương pháp tính lặp.

1. **Phương pháp dò.**

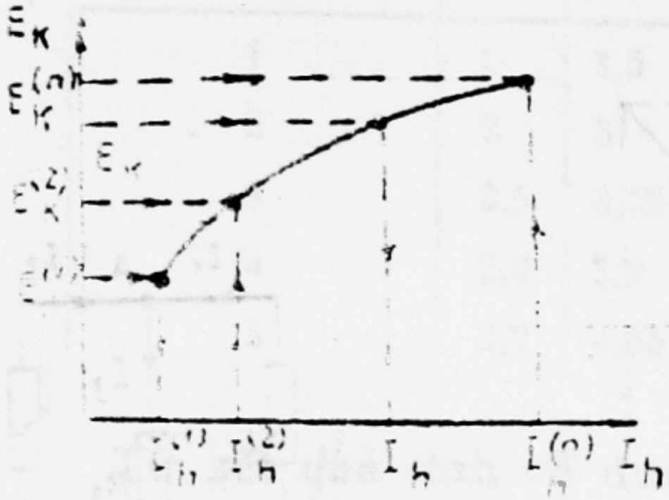
Giả thiết đã cho thông số và kết cấu mạch, cần tìm dòng các nhánh. Nội dung cách giải bài toán bằng phương pháp dò như sau : Trong lần tính thứ nhất, tùy ý giả thiết đáp ứng $I_h^{(1)}$ ở nhánh h nào đó, dựa vào phương trình viết cho mạch tìm ra các dòng điện khác và tính ra s.đ.đ. $E_k^{(1)}$ đặt ở nhánh thứ k. Vì trị $I_h^{(1)}$ tùy ý chọn nên $E_k^{(1)}$ tính được thường khác trị E_k thật. Dựa vào sự sai khác giữa $E_k^{(1)}$ và E_k ta lại giả thiết một trị $I_h^{(2)}$ khác, tính lặp lại lần thứ hai tìm ra $E_k^{(2)}$ nếu $E_k^{(2)}$ vẫn khác E_k đã cho, ta lại tiếp tục giả thiết lại I_h và tính lần thứ 3, 4, ... n. Đến lần thứ n, nếu $E_k^{(n)}$ khác E_k chút ít trong phạm vi cho phép, ta có thể lấy giá trị các dòng điện ở lần tính thứ n này làm ẩn cần tìm. Trong thực tế thường chỉ tính một vài lần sau đó vẽ đường cong $E_k^{(j)}(I_h^{(j)})$, là quan hệ giữa sức điện động và dòng điện giả thiết lần thứ j. Dựa vào đường cong ấy biết E_k ta tìm được I_h (h. 14-11) và tính ra dòng điện trong các nhánh khác.

Ví dụ 14-5 :

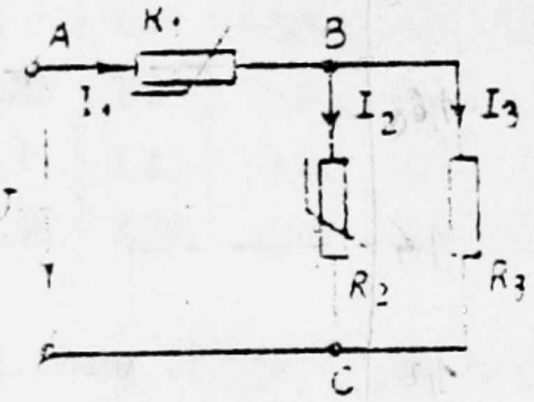
Giải mạch điện trong ví dụ 14-3 bằng phương pháp dò. Mạch điện được vẽ ở h. 14-12.

Giải : Tùy ý giả thiết dòng điện trong nhánh nào đó ví dụ I_2 tính ra các dòng điện I_3, I_1, U theo các luật

Kirhof. Từ I_2 dựa vào đặc tính $U_2(I_2)$ tìm ra U_2, rồi tìm $I_3 = \frac{U_2}{R_3}$ và $I_1 = I_2 + I_3$. Từ I_1 dựa vào $I_1(U_1)$ tra



H. 14-11



H. 14-12

ra U_1 cuối cùng tìm được $U = U_1 - U_2$. Quá trình tính ghi trong bảng 14-1.

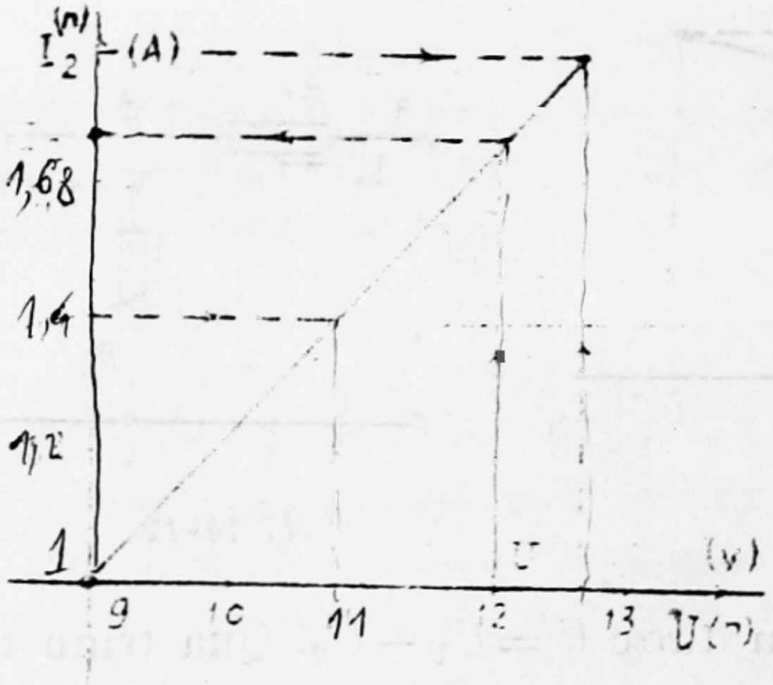
Bảng 14-1

n	$I_2^{(n)}$	$U_2^{(n)}$	$I_3^{(n)}$	$I_1^{(n)}$	$U_1^{(n)}$	$U^{(n)}$
1	1	0,9	0,3	1,3	8,1	9
2	1,4	1,8	0,6	2,0	9,0	10,8
3	1,6	2,4	0,8	2,4	9,3	11,7
4	1,8	3,0	1,0	2,8	9,7	12,7

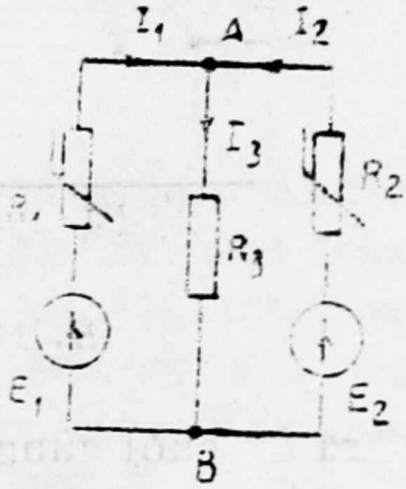
Từ kết quả tính vẽ đường cong $U^{(n)}(I_2^{(n)})$ (h. 14-13) và tìm ra: $I_2 = 1{,}68$A, sau đó tìm dần ra $I_3 = 0{,}79$A, $I_1 = 2{,}47$A.

Kết quả này gần trùng với kết quả tính bằng phương pháp đồ thị.

Ví dụ 14-6 : **Giải bài toán trong ví dụ 14-4 bằng phương** pháp đó. Mạch điện được vẽ lại trên h. 14-14 (với chiều các dòng I_1 và I_2 ngược với ví dụ trước).



H. 12-13



H. 14-14

Giải :

Tùy ý giả thiết dòng điện I_3 tính ra dòng điện I_2, I ra E_1. Lấy E_1 làm tiêu chuẩn so sánh quá trình tính theo trình tự sau :

$$U_{AB}^{(n)} = I_3^{(n)} . R_3,$$

$$U_2^{(n)} = E_2 - U_{AB}^{(n)}.$$

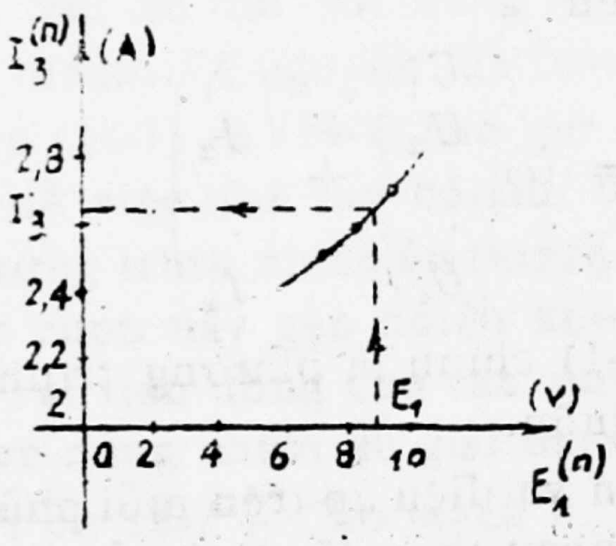
Từ U_2 dựa vào đặc tính $U_2(I_2)$ tìm ra $I_2^{(n)}$. Sau đó, theo luật Kirhof 1 tìm ra $I_1^{(n)} = I_3^{(n)} - I_2^{(n)}$, từ $I_1^{(n)}$ dựa vào $U_1(I_1)$ tìm ra $U_1^{(n)}$. Cuối cùng tính ra trị số $E_1^{(n)}$: $E_1^{(n)} = U_1^{(n)} + U_{AB}^{(n)}$. Kết quả tính cho trong bảng 14-2.

Bảng 14-2

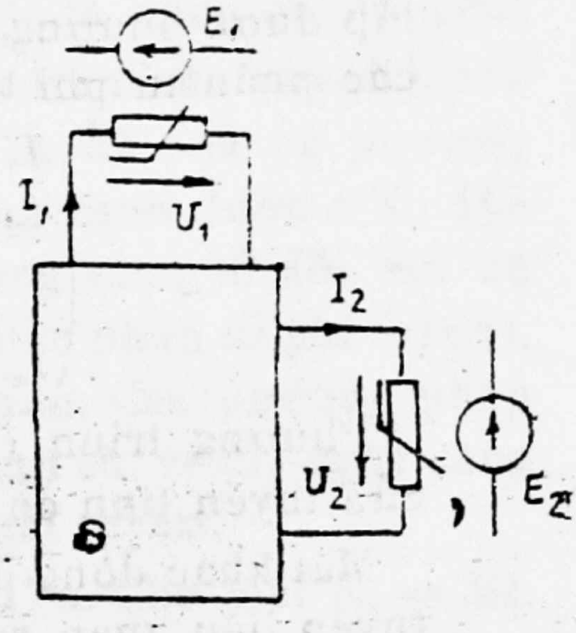
n	$I_3^{(n)}$	$U_{AB}^{(n)}$	$U_2^{(n)}$	$I^{(n)}$	$I_1^{(n)}$	$U^{(n)}$	$E_1^{(n)}$
1	1	1,5	10,5	2,4	−1,4	−8,4	−6,9
2	2	3	9	2,3	−0,3	−4,5	−1,5
3	2,5	3,75	8,25	2,3	0,2	3,6	7,35
4	2,6	3,9	8,1	2,3	0,3	4,5	8,4
5	2,7	4,05	7,95	2,25	0,45	5,5	9,55

Từ kết quả tính vẽ đường cong $E_1^{(n)}(I_3^{(n)})$ (h. 14-15). Ứng với $E_1 = 9V$ ta tìm được $I_3 = 2,67A$, và sau đó: $I_2 = 0,3A$; $I_1 = 2,37A$.

Kết quả này gần trùng với kết quả tính bằng phương pháp đồ.



H. 14-15



H. 14-16

2. Phương pháp tính lặp.

Giả thiết đã biết thông số của mạch phi tuyến. phải tìm dòng điện trong các nhánh. Nội dung phương pháp tính lặp như sau: Đầu tiên ta lập phương trình và bằng

cách tính lặp sẽ trình bày, giải ra được dòng điện (hoặc điện áp) trong các phần tử phi tuyến. Sau đó bằng các phương pháp tính mạch tuyến tính đã quen biết tìm nốt dòng điện trong các nhánh khác trong mạch.

Giả thiết mạch có hai phần tử phi tuyến (h. 14-16) có thể thay các phần tử ấy bằng nguồn điện áp $E_1 = U_1$ và $E_2 = U_2$. Theo nguyên tắc xếp chồng dòng trong nhánh 1 sẽ bằng:

$$I_1 = G_{11} U_1 + G_{12} U_2 + J_1$$

trong đó G_{11} tổng dẫn đầu vào nhánh 1, G_{12} tổng dẫn tương hỗ giữa nhánh 1 và 2, J_1 là thành phần dòng điện do các nguồn khác trong mạch gây ra trong nhánh 1, khi $U_1 = O$ và $U_2 = O$. Đối với dòng I_2 ta có:

$$I_2 = G_{21} U_1 + G_{22} U_2 + J_2.$$

Tương tự, với mạch có n phần tử phi tuyến ta cũng lập được phương trình liên quan giữa dòng và áp trên các phần tử phi tuyến

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = (G) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{pmatrix} \qquad (41\text{-}1)$$

Phương trình (14-1) chính là phương trình mạng cửa tuyến tính có nguồn.

Mặt khác dòng điện và điện áp trên mỗi phần tử phi tuyến liên quan với nhau theo đặc tính của nó:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(I_1), \\ U_2 &= U_2(I_2), \\ &\cdots\cdots \\ U_n &= U_n(I_n). \end{aligned} \qquad (14\text{-}2)$$

Giải hệ phương trình (14-1) và (14-2) ta tìm được dòng và áp trên các phần tử không tuyến tính. Dưới

đây trình bày một trong những phương pháp tính lặp để giải hệ thống phương trình trên.

Trong $2n$ ẩn ($I_1, I_2 \ldots I_n, U_1, U_2, \ldots U_n$) của hệ phương trình (14-1) và (14-2) chọn lấy n ẩn ví dụ $I_1, I_2, \ldots I_n$ làm ẩn độc lập để tính lặp. (còn lại $U_1, U_2, \ldots, U_n$ là ẩn phụ thuộc). Trong lần tính thứ nhất tùy ý giả thiết trị số các ẩn độc lập: $I_1^{(1)}\ I_2^{(1)} \ldots I_n^{(1)}$. Từ (14-2) tính ra được các ẩn phụ thuộc $U_1^{(1)}, U_2^{(1)} \ldots U_n^{(1)}$. Đem thay giá trị $U_1^{(1)}, U_2^{(1)} \ldots U_n^{(1)}$ vào hệ (14-1) tìm được giá trị mới của các ẩn độc lập: $I_1^{(2)}, I_2^{(2)} \ldots I_n^{(2)}$. Sau đó lại tiếp tục tính lần thứ hai với các trị $I_1^{(2)}, I_2^{(2)} \ldots$ Quá trình tính được lặp lại đến lần thứ l nào đó. Nếu việc chọn ẩn độc lập hợp lý, việc tính lặp sẽ hội tụ, kết quả nghiệm tính được ở lần thứ $l-1$ và thứ l sai khác nhau trong phạm vi cho phép thì ta có thể lấy giá trị nghiệm tính lần thứ l:

$I_1^{(l)}\ I_2^{(l)} \ldots I_n^{(l)}, U_1^{(l)}, U_2^{(l)}, \ldots U_n^{(l)}$ là dòng và áp phải tìm. Sau đó tìm nốt dòng và áp trên các nhánh khác của mạch. Về nguyên tắc trong $2n$ ẩn của hệ phương trình (14-1) và (14-2) bao giờ cũng chọn được n ẩn độc lập để việc tính lặp hội tụ, nhưng thực tế đối với hệ phương trình nhiều ẩn (mạch nhiều phần tử phi tuyến), việc chọn này gặp nhiều khó khăn. Các phương pháp lặp rất tiện dùng cho các máy tính số, vì vậy ngày càng được dùng nhiều để giải mạch phi tuyến.

Ví dụ 14-7 — Cho mạch h. 14-17 a. Cho biết $R_1 = 3\Omega$, $U = 6V$. Đặc tính điện trở R_2 cho trên h. 14-17 b. Tìm dòng I bằng phương pháp lặp.

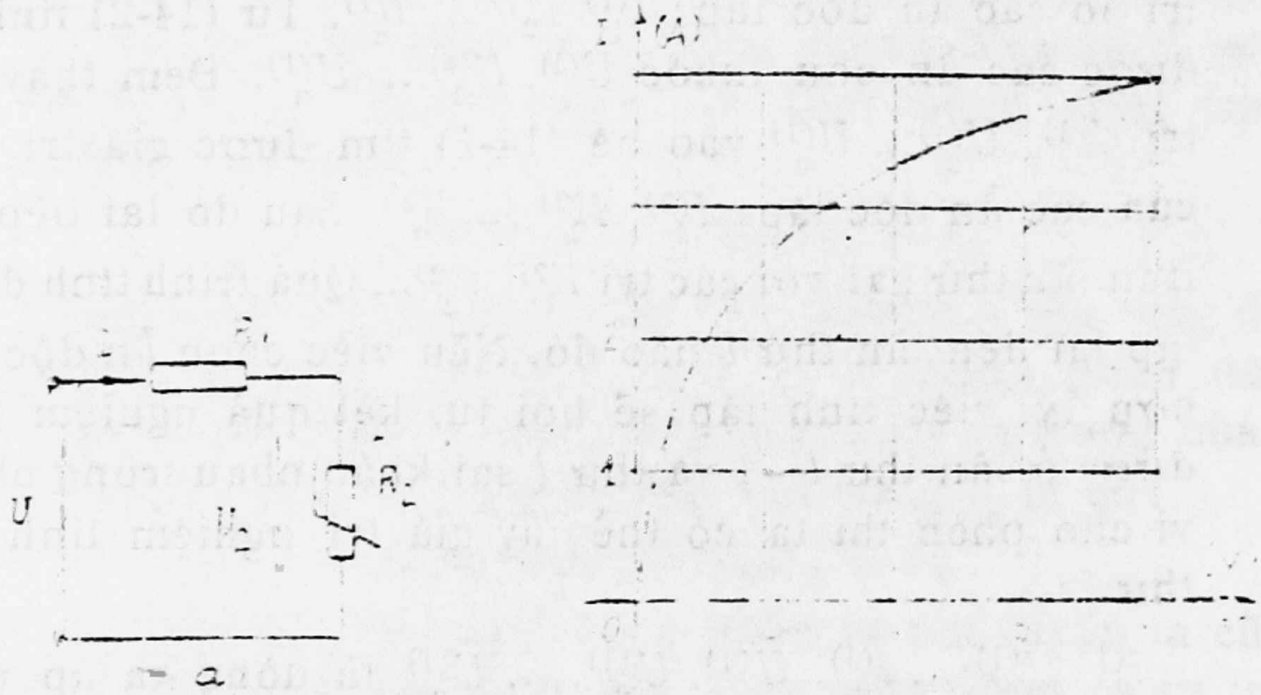
Giải: Lập phương trình cho mạch:

$$I = \frac{U - U_2(I)}{R_1} = \frac{6 - U_2(I)}{3} = 2 - \frac{1}{3}U_2(I) = f(I).$$

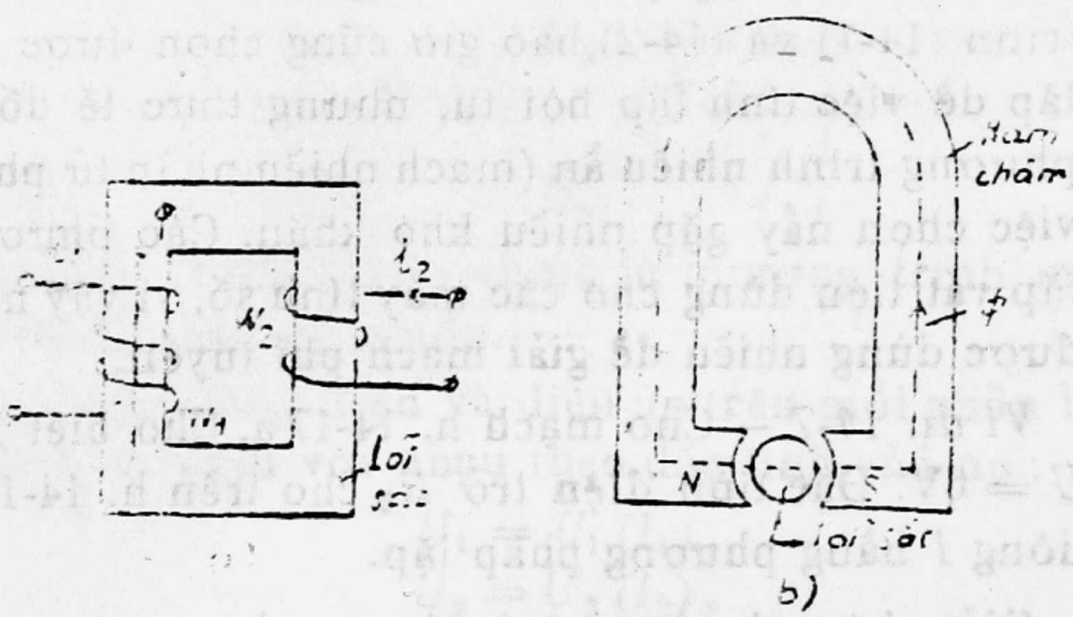
trong đó U_2 liên quan với I theo đặc tính của R_2:

$$U_2 = U_2(I).$$

Chọn I làm ẩn độc lập để tính lặp. Kết quả tính nêu trong bảng 14-3.



H. 14-17



H. 14-18

Ta thấy quá trình tính toán với I là hội tụ đư = 1,73A.

Bảng 14-3

l	$I(l)$	$U_2^{(l)}$	$I^{(l+1)}$
1	1	0,3	1,9
2	1,9	1	1,67
3	1,67	0,7	1,77
4	1,77	0,8	1,73

14.3. KHÁI NIỆM VỀ MẠCH TỪ

Khi khảo sát những thiết bị điện có lõi thép ở tần số chưa quá cao, ta thường mô tả những hiện tượng điện từ theo 2 sơ đồ mạch: *Mạch điện* với các trạng thái u, i, e và các thông số r, L, C mô tả các quá trình năng lượng gắn với dòng điện trong các dây dẫn. Sơ đồ thứ hai là *mạch từ*, là một cách mô tả quá trình phân bố từ trường tập trung trong các đoạn lõi thép của TBĐ, dưới ảnh hưởng dòng điện i_k trong các cuộn dây quấn trên các đoạn lõi thép, coi là kích thích của từ trường.

Ví dụ h. 14-18 a vẽ lõi thép 1 máy biến áp. Dòng điện trong các cuộn dây gây nên từ trường và dòng từ thông chảy trong lõi thép. H. 14-18 b vẽ hệ thống từ một dụng cụ đo điện gồm 1 nam châm vĩnh cửu và lõi sắt trong đó chảy 1 dòng từ thông.

Vì các đoạn lõi thép dẫn từ mạnh hơn không khí chung quanh nên dưới tác dụng những cuộn dây (với số vòng w và dòng điện i) có dòng, các dòng từ thông Φ sẽ chảy tập trung khép kín mạch theo những đoạn lõi thép. Độ lớn các dòng từ thong ấy tùy thuộc các lượng kích thích (dòng i_k và số vòng w_k các cuộn dây) phân phối trên các đoạn lõi thép. Vì số đoạn lõi thép hữu hạn, nên hiển nhiên số biến từ thông Φ_k chảy

như nhau dọc theo đoạn thứ k đo trạng thái từ thông phân bố trong lõi thép, cũng như số biến trạng thái kích thích $w_k i_k$ cũng hữu hạn. Chúng không tùy thuộc không gian mà chỉ tùy thuộc thời gian. Do đó (theo m.l.l) và do đối với các biến trạng thái từ trường (từ thông Φ_k, từ áp u_{mk}) tồn tại những luật giống những luật Kirhof đối với mạch điện, nên có thể xây dựng một sơ đồ mạch từ, tương tự những nguyên tắc xây dựng mạch điện.

Ta định nghĩa: « *Mạch từ là một sơ đồ kèm theo những phép tính theo các luật Kirhof, dùng để mô tả sự phân bố từ trường trong các lõi thép thường do bởi một số hữu hạn những dòng từ thông* Φ *và từ áp* u_M *chỉ tùy thuộc thời gian* ».

Thông thường cũng còn hiểu mạch từ chính là lõi thép trong đó ta xét sự phân bố từ trường theo sơ đồ mạch. Mạch từ có những điểm tương tự về kết cấu hình học (graph, đỉnh, nhánh), về phép tính (giống luật Kirhof) như mạch điện phi tuyến. Vì vậy phương pháp tính toán căn bản giống như mạch điện phi tuyến.

§ 14-4. CÁC LUẬT KIRHOF CHO MẠCH TỪ

1. Các luật Kirhof

Trong trường hợp bài toán mạch từ các luật của trường điện từ trở thành *các luật Kirhof cho dòng từ thông và từ áp*. Ta sẽ thấy biểu thức các luật này cũng giống như của mạch điện.

a) *Luật Kirhof 1:*

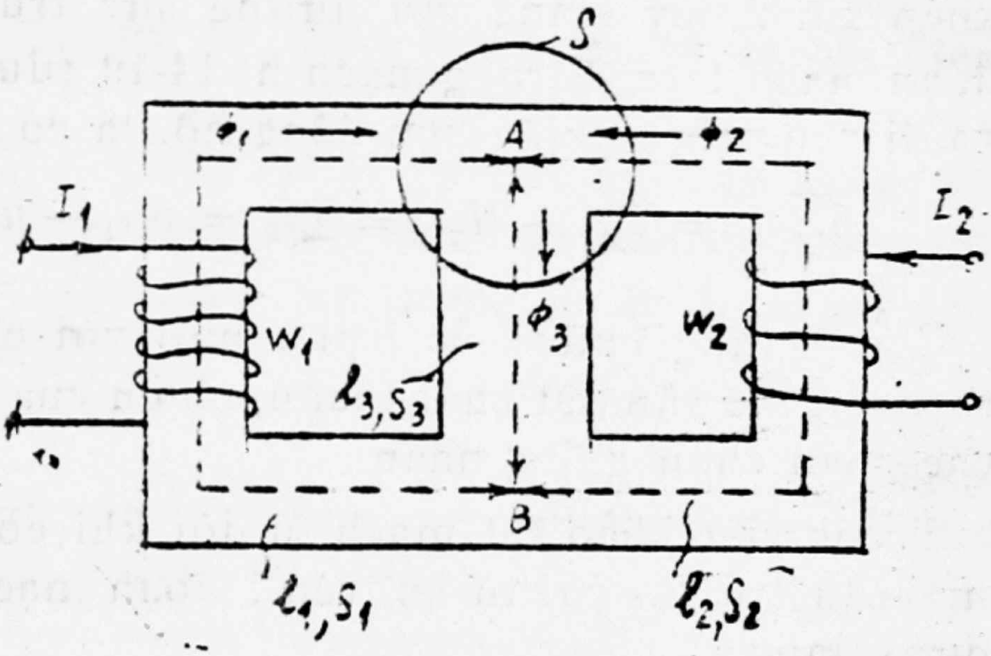
Luật Kirhof 1 cho mạch từ phát biểu như sau: « *Tổng đại số các từ thông tại một nút bằng số không* »:

$$\Sigma \Phi = 0 \qquad (14\text{-}3)$$

Ví dụ đối với mạch từ h. 14-19 luật Kirhof 1 viết cho nút A:

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

Luật Kirhof 1 được suy từ tính liên tục của từ thông $\oint_S \vec{B}\ \vec{dS} = 0$. Thật vật từ trường trong mỗi đoạn lõi



H. 14-19

thép có thể coi là đều. Lấy thông lượng của $\vec{B}$ qua mặt S bao quanh 1 nút ví dụ nút A h. 14-19, ta có:

$$\oint_S \vec{B}\ \vec{dS} = B_1S_1 + B_2S_2 - B_3S_3 = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

trong đó S là tiết diện các đoạn lõi sắt.

b) *Luật Kirhof 2:*

Luật Kirhof 2 cho mạch từ phát biểu như sau: «*Theo 1 đường vòng kín tổng các sức từ động bằng tổng các từ áp, tức là:*

$$\sum_{k=1}^{n} w_k i_k = \sum_{k=1}^{n} H_k l_k, \qquad (14\text{-}4a)$$

trong đó k là chỉ số các đoạn mạch từ trong một vòng kín. Tích của số vòng dây w_k với dòng điện I_k trong cuộn dây thứ k: $w_k I_k = F_k$, gọi là sức từ động chính là

nguồn kích thích mạch từ. Tích $H_k l_k = u_{mk}$ là từ áp rơi trên đoạn từ thứ k. Nó cũng giống như tích $E_k l_k = u_k$ là điện áp rơi trên đoạn dây dẫn thứ k của mạch điện. l_k là độ dài trung bình của đoạn mạch thứ k.

Luật Kirhof 2 cho mạch từ được suy từ luật dòng điện toàn phần $\oint_L \vec{H}\, \vec{dl} = \sum I$. Thật vậy, vi dụ theo đường khép kín L lấy trùng với đường sức trung bình các đoạn mạch 1 và 2 trong mạch h. 14-19 (đường nét đứt) và đi vòng theo chiều kim đồng hồ, ta có :

$$\oint \vec{H}\, \vec{dl} = H_1 l_1 - H_2 l_2 = \sum I_k = w_1 i_1 - w_2 i_2.$$

Chú ý rằng chiều của I phải hợp với chiều đi vòng theo quy tắc vặn nút chai thuận, chiều của H và Φ trong các đoạn chọn giống nhau.

Trong việc khảo sát mạch từ đôi khi còn dùng khái niệm từ trở R_m với từ áp trên 1 đoạn mạch có thể viết dưới dạng :

$$u_{mk} = H_k l_k = \frac{B_k}{\mu_k} l_k = \frac{\Phi_k l_k}{\mu_k S_k} = \Phi_k R_{mk}.$$

Biểu thức này giống như của điện áp $u_k = R_k I_k$ trên một điện trở. Công thức từ trở $R_{mk} = \frac{l_k}{\mu_k S_k}$ của đoạn mạch từ cũng tương tự như điện trở $R_k = \frac{l_k}{\gamma_k S_k}$ một đoạn dây dẫn.

Khi dùng khái niệm từ trở, luật Kirhof 2 cho mạch từ có thể viết dưới dạng :

$$\sum F_k = \sum R_{mk}\, \Phi_k. \qquad (14\text{-}4b)$$

Trong thực tế tính toán, dạng này ít được dùng hơn dạng (14-1a). Vì $\mu = \mu(B)$ nên $R = R(\Phi)$, luật Kirhof 2 viết cho mạch từ hằng 1 phương trình đại số phi tuyến.

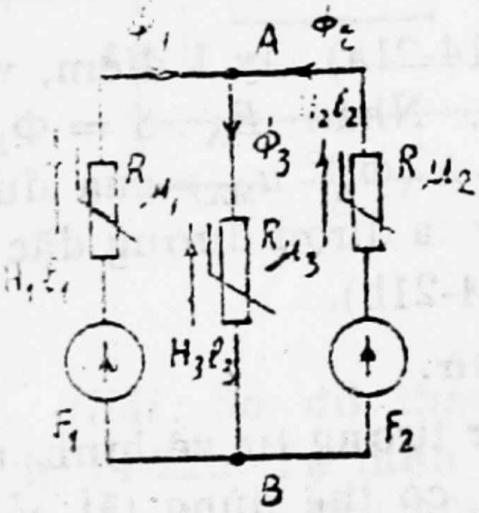
Các khái niệm và luật cho mạch từ nêu ở trên, nói chung chỉ đúng cho những mạch từ thực tế thỏa mãn điều kiện : kích thước dài các đoạn rất lớn so với kích thước ngang, vật liệu làm mỗi đoạn là đồng nhất. Vì với điều kiện ấy từ trường trong mỗi đoạn mới đều.

2. **Sự tương tự giữa mạch từ và mạch điện phi tuyến.**

Giữa các lượng vật lý và các luật cho mạch điện và mạch từ có dòng một chiều có một sự tương tự hình thức về toán học. Sự tương tự ấy được chỉ rõ trong bảng 14-1.

Bảng 14-1

Đại lượng, định luật	Mạch từ	Mạch điện
Dòng	Φ	I
Áp	$U_M=Hl=R_M\Phi$	$U=El=RI$
Kích thích từ và sđđ	$F=iwI$	E
Trở	$R_M=l/\mu S$	$R=l/\gamma S$
Luật Kirhof 1	$\Sigma\Phi=0$	$\Sigma I_k=0$
Luật Kirhof 2	$\Sigma F_k=\Sigma H_k l_k=$ $=\Sigma R_{Mk}\Phi_k$	$\Sigma e_k=\Sigma E_k l_k=$ $=\Sigma R_k I_k$



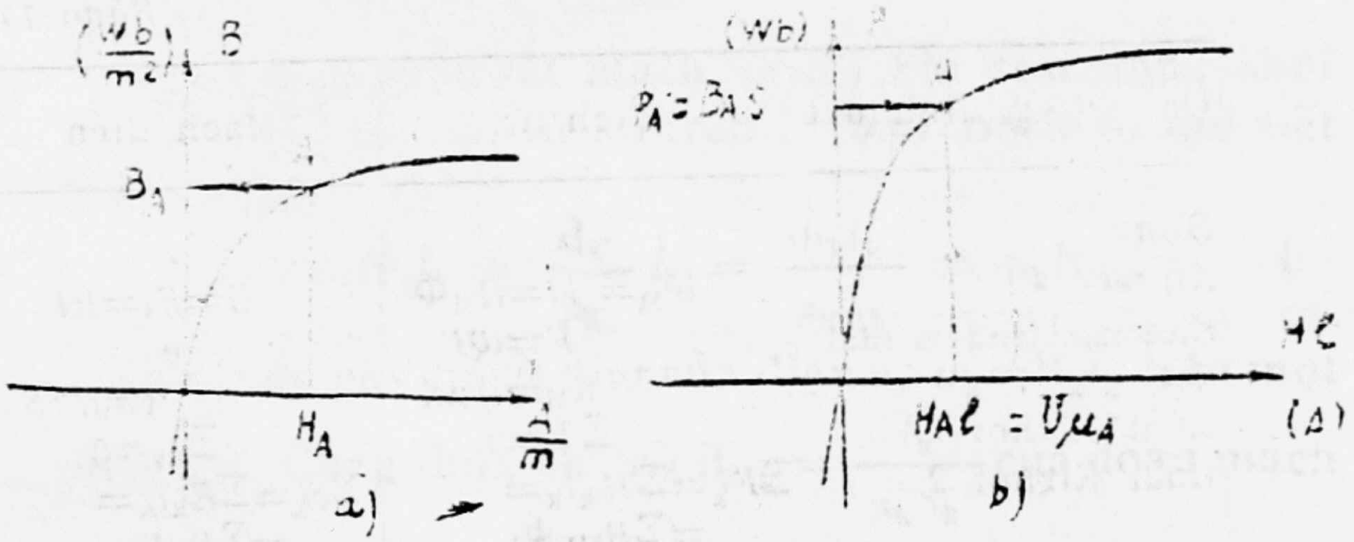
H. 14-20.

Để tiện tính toán, ta thường dùng sơ đồ mạch biểu diễn cho hệ thống từ. Trong sơ đồ mạch từ các phần tử cũng được ký hiệu giống như những phần tử tương ứng ở mạch điện. H. 14-20 vẽ sơ đồ mạch thay thế cho mạch từ h. 14-19.

3. Đặc tính Weber — Amper (Wb—A) của 1 đoạn mạch từ.

Đối với mạch điện, điện trở phi tuyến được đặc trưng bởi đặc tính Volt-amper $i(u_r)$. Đối với mạch từ, mỗi đoạn mạch từ cũng đặc trưng bởi một quan hệ $\Phi(Hl)$ liên hệ giữa *dòng từ* và *áp từ* trên đoạn ấy; gọi là đặc tính *Wb-A*. Đặc tính này nói lên phản ứng của đoạn mạch và được dùng tính toán mạch từ.

Chú ý đối với điện trở ta thường biết trực tiếp đặc tính *V-A*, còn đối với 1 đoạn mạch từ thường chỉ cho biết kích thước và đường cong $B(H)$ của vật liệu. Từ đó ta phải tự xây dựng lấy đặc tính *Wb-A* cụ thể của đoạn mạch. Cách làm như sau:



H. 14-21

Từ đường cong B (H) (h. 14-21a) lấy 1 điểm, ví dụ điểm A, ta được B_A và H_A. Nhân $B_A . S = \Phi_A$ và $H_A . l = u_{MA}$ ta được 1 điểm A (Φ_A, u_{MA}) của đường $\Phi(Hl)$. Vẽ nhiều điểm như vậy ta được đường đặc tính *Wb-A* của đoạn mạch từ (h. 14-21b).

4. Phương pháp giải mạch từ.

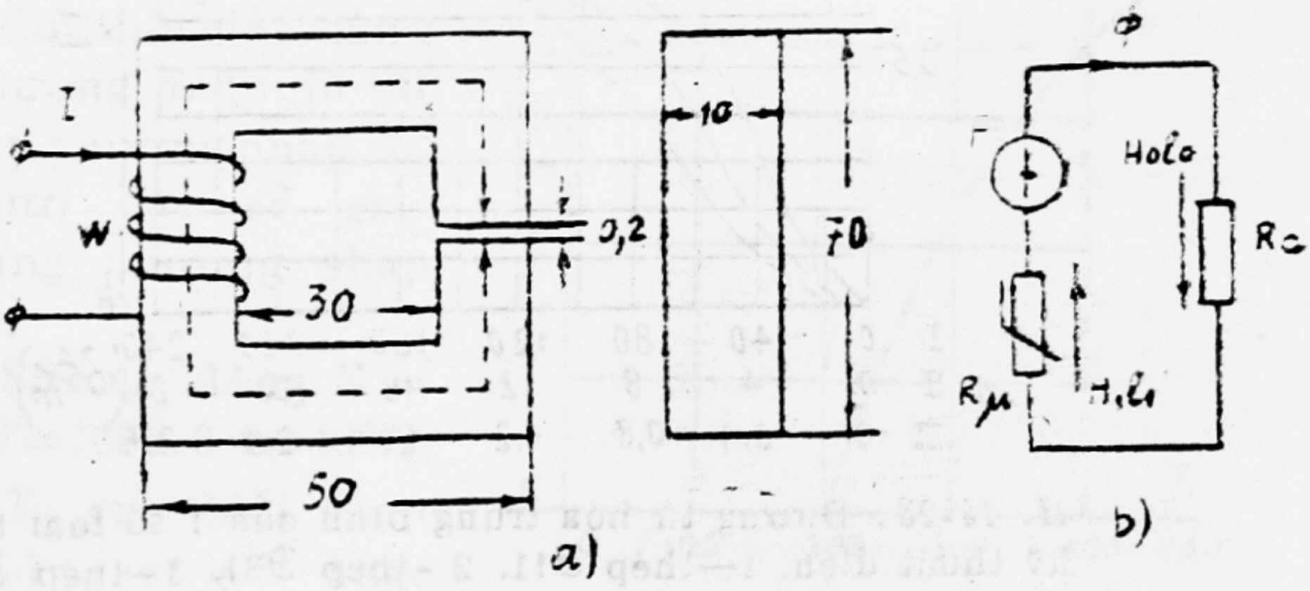
Mạch từ và mạch điện có sự tương tự về hình thức toán học. Vì vậy suy ra rằng: có thể dùng tất cả các

phương pháp tính mạch điện phi tuyến một chiều để tính mạch từ một chiều. Để giải mạch từ ta hay dùng phương pháp số ; phương pháp đồ thị ít dùng hơn vì phải làm một khối lượng tính toán khá lớn để vẽ đặc tính *Wb-A* các đoạn.

§ 14-5. VÍ DỤ TÍNH MẠCH TỪ

Nội dung bài toán là đã biết kích thước, vật liệu làm các đoạn mạch từ, cho kích thích F cần tìm từ thông Φ trong các nhánh, hoặc ngược lại cho biết từ thông ở 1 nhánh nào đó, cần tìm sức từ động F trong mạch.

Ví dụ 14-8 : Cho mạch từ h. 14-22, kích thước cho bằng mm. Lõi làm bằng thép kỹ thuật điện Э31. Đường từ hóa trung bình cho trên h. 14-23, số vòng dây $w=1000$. Hỏi dòng điện I bằng bao nhiêu để được cường độ từ cảm trong lõi $B=1$T.



a) b)

H. 14-22

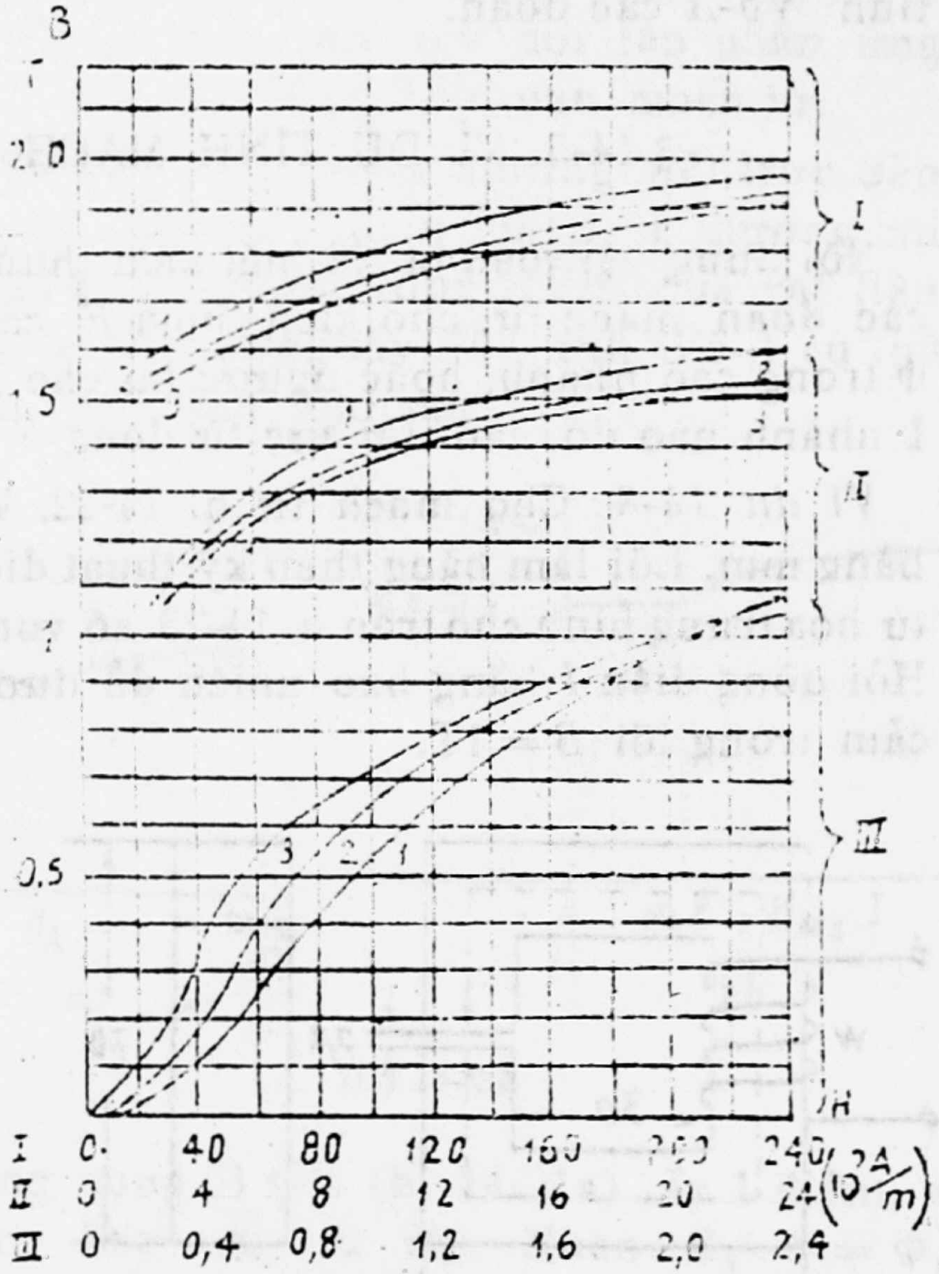
Giải: Sơ đồ thay thế cho mạch từ được vẽ trên h. 14-22b. Từ hình vẽ đã cho, xác định kích thước mỗi đoạn : $l_1=(40+60)2-0,2\approx 200$mm ; $l_0=2.10^{-4}$m.

Vì $l_1 \gg l_0$, nên có thể coi : $S_1=S_0=10^{-2}.10^{-2}=10^{-4}$m².

Bài toán này là bài toán biết Φ tìm F. Tiện nhất ta giải bằng phương pháp số.

Áp dụng luật Kirhof 2 cho mạch ta có :

$$F = wi = H_1 l_1 + H_0 l_0 \qquad (1)$$



H. 14-23 : Đường từ hóa trung bình của 1 số loại thép kỹ thuật điện. 1—thép Э11. 2 –thép Э31. 3—thép Э41.

Từ đó muốn xác định F, phải tìm H_1 và H_0. Do B đã biết nên từ đường cong $B(H)$ của thép Э31 ứng với $B = 1T$ tra ra :

$$H_1 = 2{,}20A/cm = 220A/m$$

Vì có $S_1 = S_0$ nên $B_1 = B_0$ ta suy ra:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi . 10^{-7}} = 7{,}95 . 10^5 \text{A/m}$$

Thay H_1 và H_0 vừa tính được vào (1) ta có:

$$F = 220 . 0{,}2 + 7{,}95 . 10^5 . 2 . 10^{-4} = 44 + 159 = 203\text{A},$$

và:

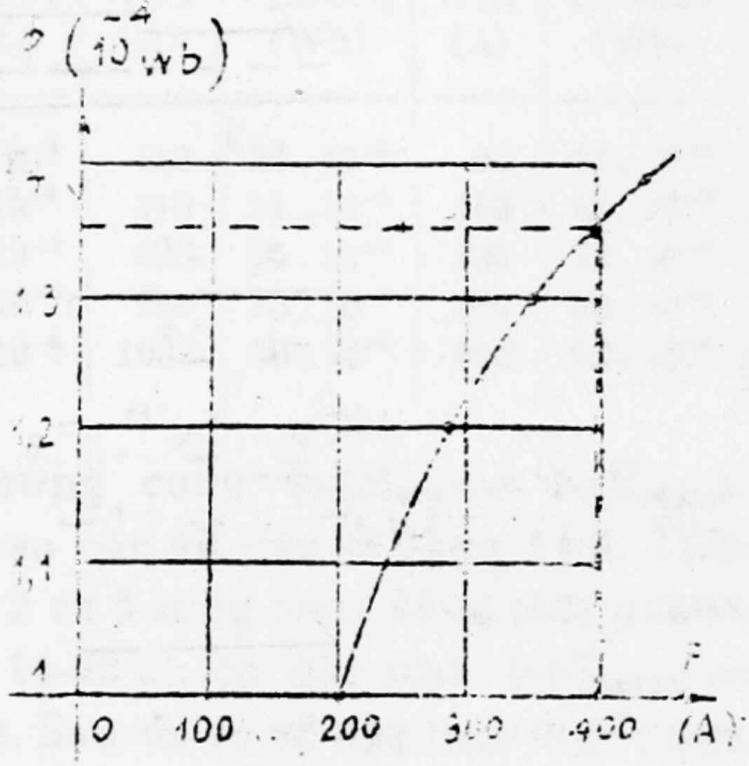
$$I = \frac{F}{w} = \frac{203}{1000} = 0{,}203\text{A}.$$

Qua đây thấy rằng vì μ_0 của không khí bé, nên từ trở khe không khí lớn và từ áp rơi trên đó lớn. Vì vậy trong những điều kiện có thể, ta thường cố làm giảm khe không khí trong mạch từ các máy điện.

Ví dụ 14-9: — Mạch từ cho trong ví dụ 14-8 biết I=0,4A tìm từ thông:

Giải: Đây là bài toán biết nguồn kích thích tìm đáp ứng dòng từ.

Có thể giải bằng hương pháp đồ thị hay phương pháp số. Dưới đây sẽ giải bằng phương pháp số.

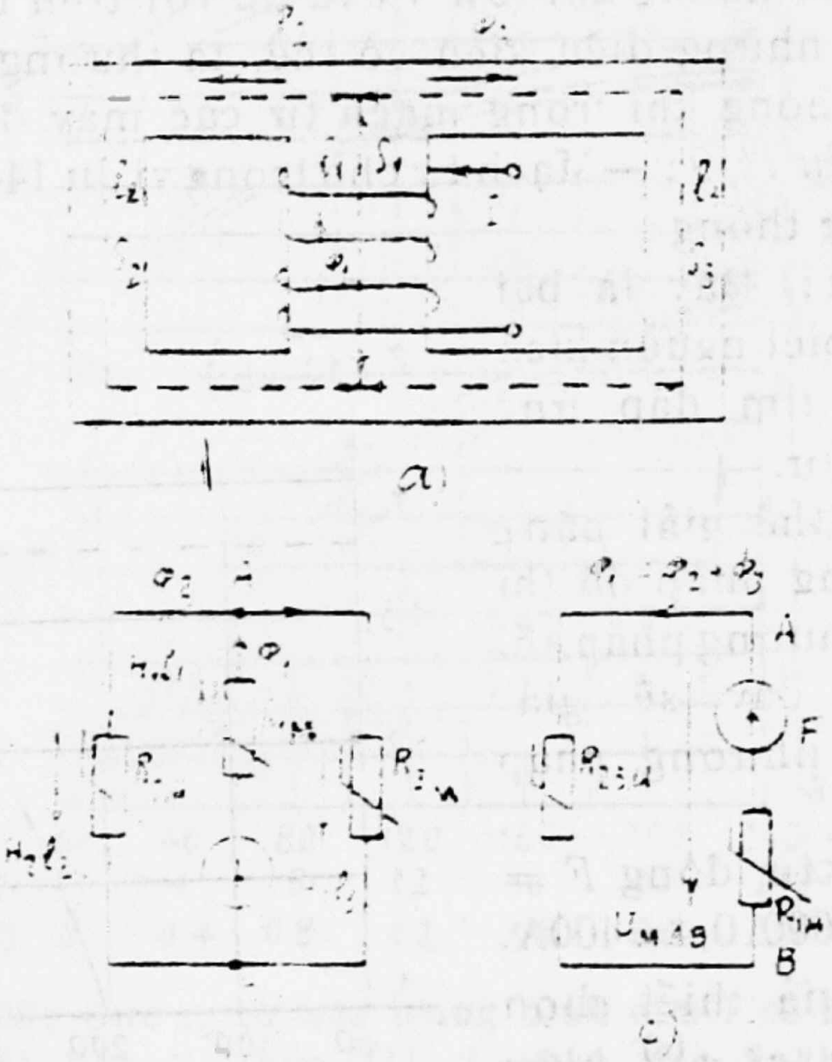


H. 14-24

Sức từ động $F = wI = 1000 . 0{,}4 = 400\text{A}$.

Ta giả thiết chọn những trị $\Phi^{(n)}$ khác nhau rồi tìm những sức từ động tương ứng $F^{(n)}$ (việc tính như giải bài toán ví dụ 14-8). So sánh $F^{(n)}$ với F đã cho rút ra trị số Φ cần tìm. Kết quả tính nêu trong bảng 14-5.

	$\Phi^{(n)}$ (Wb)	$B^{(n)}$ (T)	$H_1^{(n)}$ (A/m)	$H_o^{(n)}$ (A/m)	$H_1^{(n)} l_1$ (A)	$H_o^{(n)} l_o$ (A)	$F^{(n)}$ (A)
1	10^{-4}	1	220	$7,95.10^5$	44	153	203
2	$1,2.10^{-4}$	1,2	480	$9,54.10^5$	96	191	287
3	$1,3.10^{-4}$	1,3	700	$10,35.10^5$	140	207	347
4	$1,1.10^{-4}$	1,1	1050	$11,12.10^5$	210	222,3	432,3



H. 14-25

Dựa vào kết quả tính, ta lập đường cong $\Phi^{(n)}$ $(F^{(n)})$ (h. 14-24). Từ đó tìm được $\Phi = 1,36.10^{-4} Wb$.

Ví dụ 14-10:

Cho mạch từ h. 14-25 lõi bằng thép Ξ41, số vòng $w = 1000$, $I = 1$ A. Tìm từ thông trong các nhánh. Biết kích thước các đoạn:

Đoạn 1 : $S_1 = 40\text{cm}^2$, $l_1 = 30\text{cm}$,

Đoạn 2 : $S_2 = 20\text{cm}^2$, $l_2 = 50\text{cm}$,

Đoạn 3 : $S_3 = 20\text{cm}^2$, $l_3 = 80\text{cm}$.

Giải: Ta dùng phương pháp đồ thị. Trước tiên theo đường cong $B(H)$ của vật liệu Ξ41, và kích thước mỗi đoạn ta lập đặc tính $Wb - A$ cho mỗi đoạn. Việc tính toán nêu trong bảng 14-6.

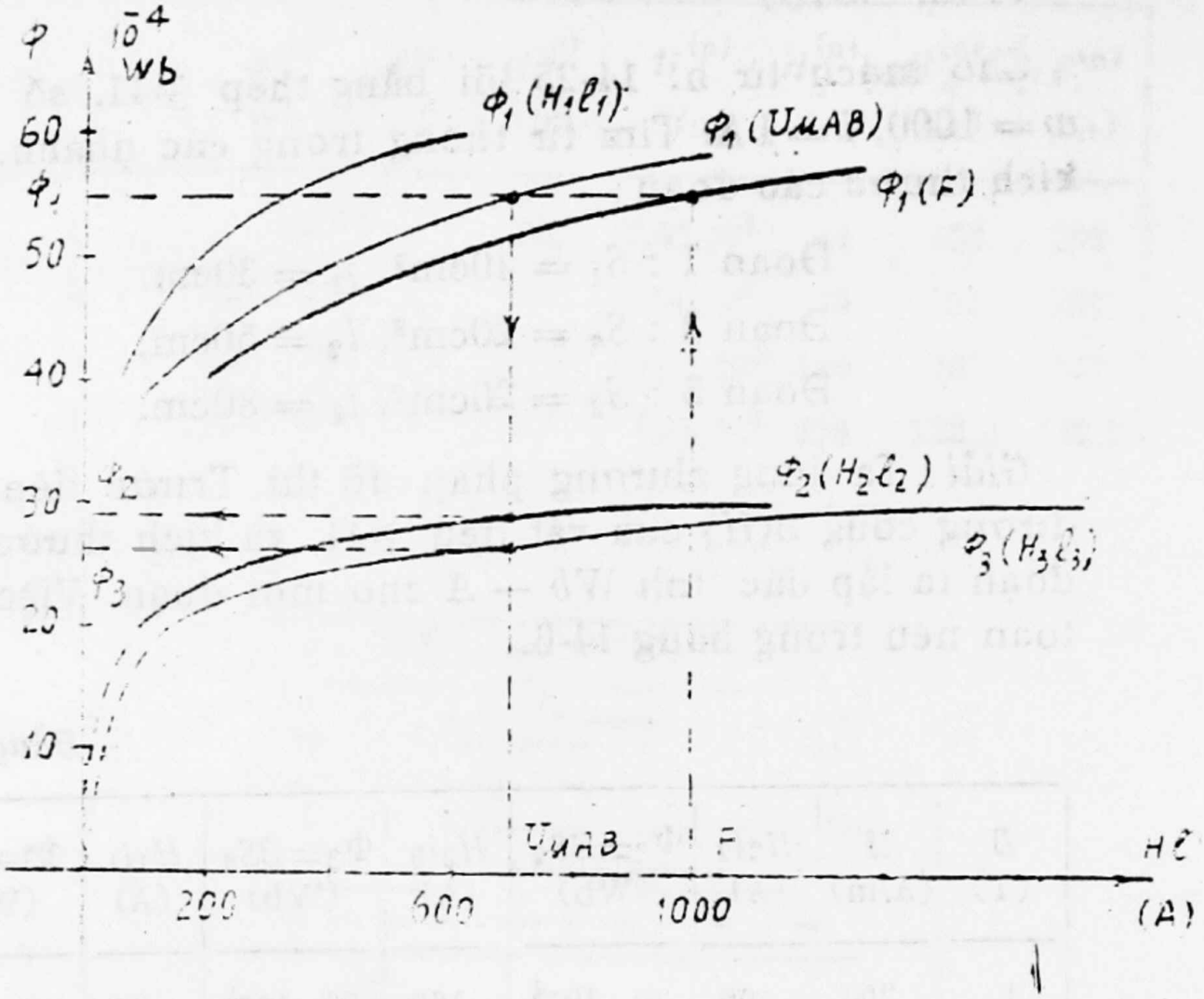
Bảng 14-6

B (T)	H (A/m)	H_2l_2 (A)	$\Phi_2 = BS_2$ (Wb)	H_3l_3 (A)	$\Phi_3 = BS_3$ (Wb)	H_1l_1 (A)	$\Phi_1 = BS_1$ (Wb)
1	200	100	$20 . 10^{-4}$	160	$20 . 10^{-4}$	60	$40 . 10^{-4}$
1,2	520	260	$24 . 10^{-4}$	416	$24 . 10^{-4}$	150	$48 . 10^{-4}$
1,3	780	390	$26 . 10^{-4}$	623	$26 . 10^{-4}$	234	$52 . 10^{-4}$
1,4	1200	600	$28 . 10^{-4}$	960	$28 . 10^{-4}$	360	$56 . 10^{-4}$
1,5	2000	1000	$30 . 10^{-4}$	1600	$30 . 10^{-4}$	600	$60 . 10^{-4}$

H. 14-26 vẽ các đường cong $\Phi_2(H_2l_2) = \Phi_2(U_{MAB})$, $\Phi_3(H_2l_3) = \Phi_3(U_{MAB})$ theo các số liệu ở bảng 14-6. Tiếp theo ta thay các nhánh 2 và 3 song song bằng một nhánh tương đương R_{23M} (h. 14-25 c), có đặc tính $\Phi_1(U_{MAB}) = \Phi_2(U_{MAB}) + \Phi_3(U_{MAB})$. Sau đó ta vẽ đặc tính $\Phi_1(F)$ dựa vào luật Kirhof 2 : $F(\Phi_1) = U_{MAB}(\Phi_1) + H_1l_1(\Phi_1)$. Cuối cùng dựa vào đường $F(\Phi_1)$ biết $F = 1000$ A, ta tìm ra :

$$\Phi_1 = 55 . 10^{-4}\text{Wb}, \quad U_{MAB} = 700\text{ A}, \quad \Phi_2 = 29 . 10^{-4}\text{Wb},$$

$$\Phi_3 = 26 . 10^{-4}\text{Wb}.$$



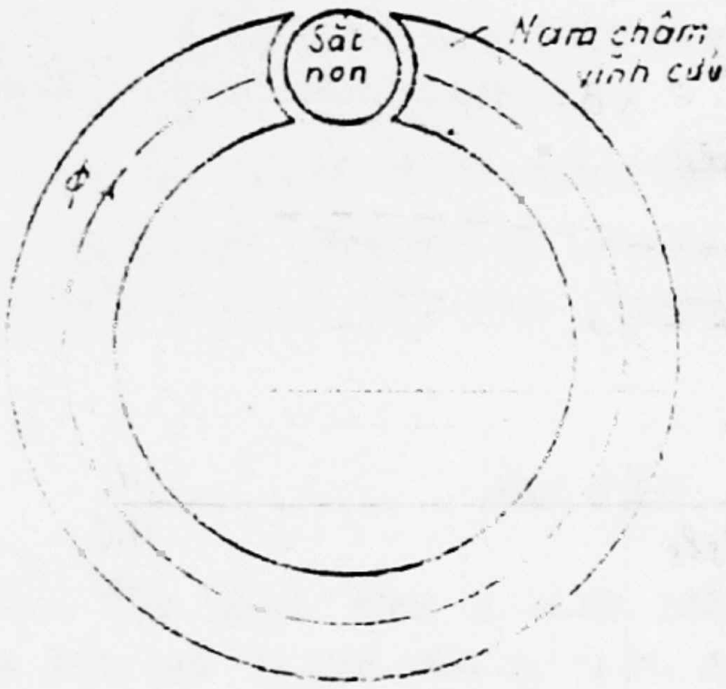
H. 14-26

§ 14-6. TÍNH MẠCH TỪ CÓ NAM CHÂM VĨNH CỬU

Nam châm vĩnh cửu được dùng rộng rãi để tạo từ trường trong nhiều thiết bị như ma-nhê-tô, dụng cụ đo, rơle từ điện, v.v... H. 14-27, vẽ mạch từ một dụng cụ đo kiểu từ điện.

Trong nhiều trường hợp từ áp rơi trên phần sắt non thường nhỏ so với từ áp rơi trên khe không khí và nam châm. Vì vậy bài toán mạch từ có nam châm vĩnh cửu thường được đưa về bài toán mạch từ có nam châm vĩnh cửu và khe không khí (h. 14-28). Trong bài toán này thường cần tính cường độ trường B

hay từ thông Φ trong khe không khí khi đã biết kích thước mạch từ và đặc tính từ hóa của nam châm.



H. 14-27

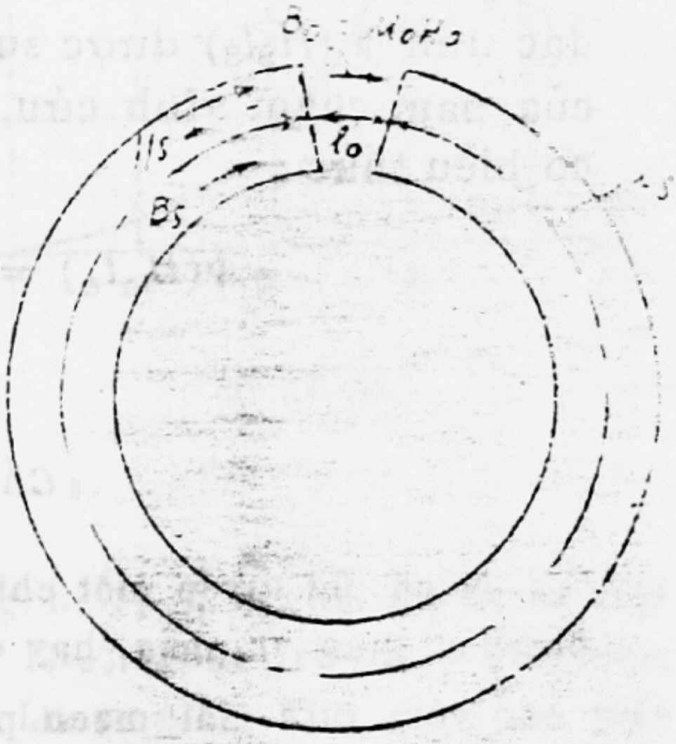
Nam châm vĩnh cửu (khi không có nguồn ngoài) được đặc trưng bởi đoạn khử từ của đường cong $B(H)$ (đoạn nằm trong góc vuông thứ 2 trên h. 14-29), trong đoạn này B và H ngược chiều nhau. Thật vậy theo luật Kirhof 2 cho mạch từ (h. 14-28), ta có:

$$H_s l_s + H_o l_o = 0$$

hay

$$l_s H_s = -H_o l_o.$$

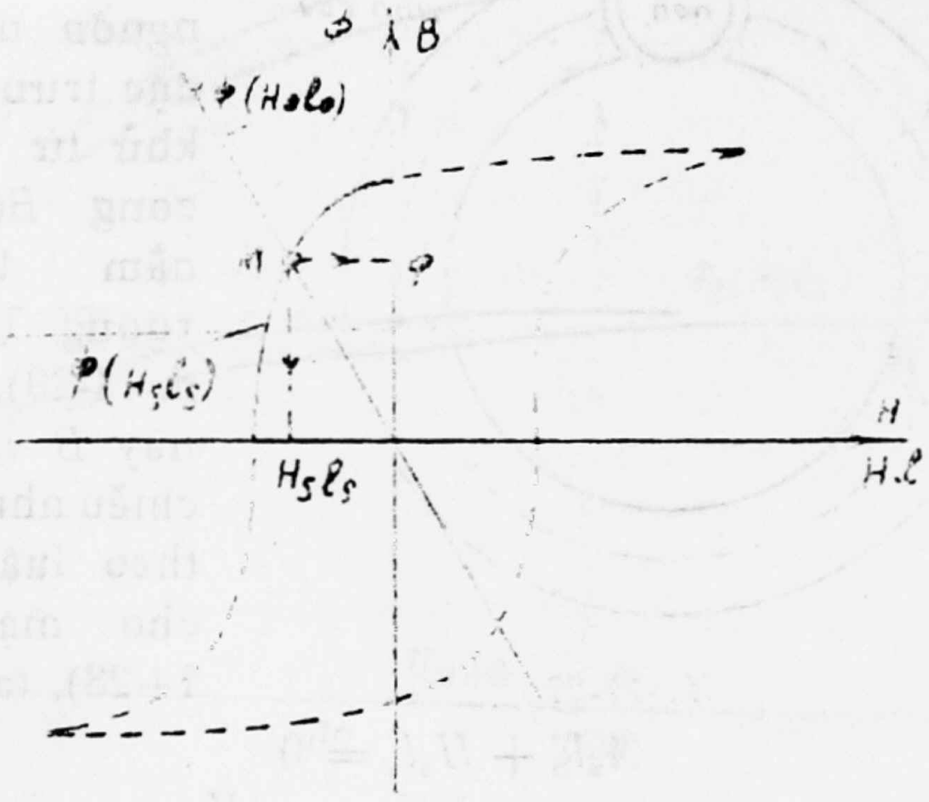
Dấu « — » trong biểu thức nói rõ H_s ngược chiều với H_o (chiều thật của H_s ngược với chiều giả thiết trên h. 14-28), nói cách khác H_s ngược chiều với B_s trong nam châm (chiều thật của H_s theo chiều mũi tên nét đứt).



H. 14-28

Ta tính được từ thông Φ trong mạch như sau. Giả thiết $l_o \ll 1$, $S_s \# S_o$, từ trường trong mỗi đoạn coi là đều. Vì *trong nam châm và trong khe không khí có cùng từ thông* Φ, *và từ áp rơi*

trên khe không khí bằng từ áp rơi trong nam châm, nên trạng thái của mạch phải ứng với điểm cắt nhau của hai đường đặc tính $\Phi(H_s l_s)$ và $\Phi(H_o l_o)$ (điểm M trong h. 14-29).



H. 14-29

Tung độ điểm M cho biết từ thông Φ phải tìm. Đường đặc tính $\Phi(H_s l_s)$ được suy từ đường cong khử từ $B(H)$ của nam châm vĩnh cửu. Còn $\Phi(H_o l_o)$ là đường thẳng có biểu thức :

$$\Phi(H_o l_o) = H_o l_o \frac{\mu_o S}{l_o}.$$

CÂU HỎI

1. Mạch phi tuyến một chiều xác lập được mô tả bởi những phương trình vi phân, hay đại số, tuyến tính hay phi tuyến?

2. Phương pháp giải mạch phi tuyến một chiều bằng đồ thị?

3. Cách tìm đặc tính của các mạng hai cực : a) Gồm các phần tử ghép nối tiếp, b) Gồm các nhánh ghép song song.

4. Nội dung phương pháp đồ để giải mạch phi tuyến một chiều ?

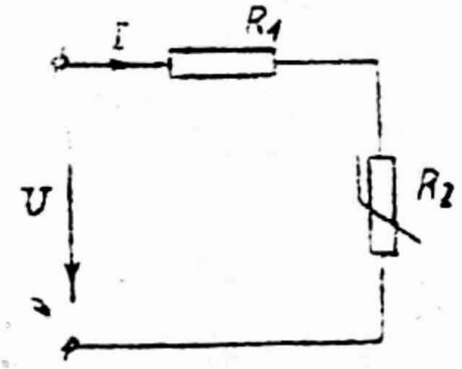
5. Mạch từ là gì? Những biến đo quá trình mạch từ là gì? Đặc điểm kết cấu của mạch từ?

6. Phát biểu và giải thích ý nghĩa các luật Kirhof cho mạch từ?

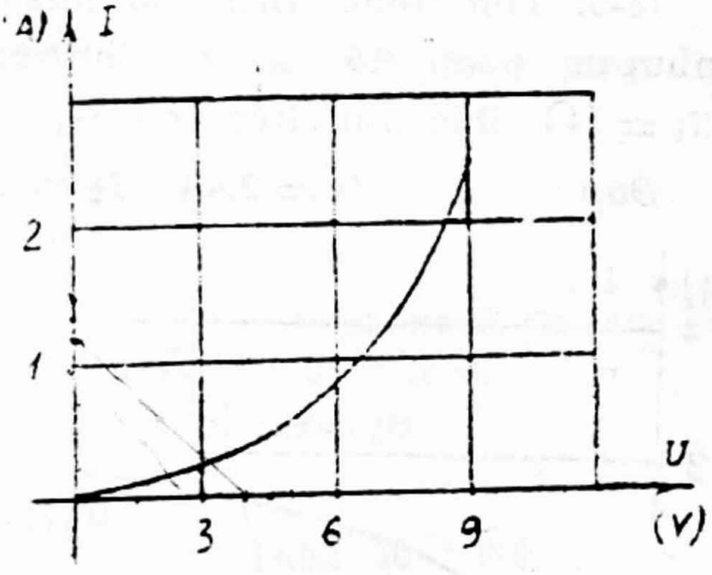
7. Nói những điểm tương tự giữa mạch từ và mạch điện phi tuyến có dòng một chiều. Phương pháp tính mạch từ?

BÀI TẬP

14-1. Cho mạch điện h. 14-30, biết $R_1 = 6\Omega$; $U = 9V$. Đặc tính điện trở R_2 cho trên h. 14-31, đường $U_2 (I_2)$. Tìm dòng I bằng phương pháp đồ thị và phương pháp số.



H. 14-30



H. 14-31

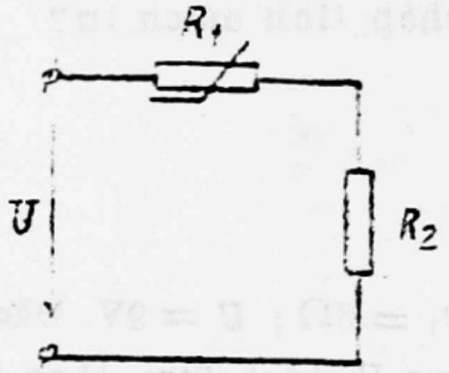
Đáp : $I = 0,7A$.

14-2. Cho 1 mạch ổn dòng h. 14-32, trong đó R_1 là một baretto có đặc tính trên h. 14-33. Điện trở $R_2 = 6\Omega$, dòng điện định mức của phụ tải $I_{dm} = 0,7A$. Tìm giới hạn biến

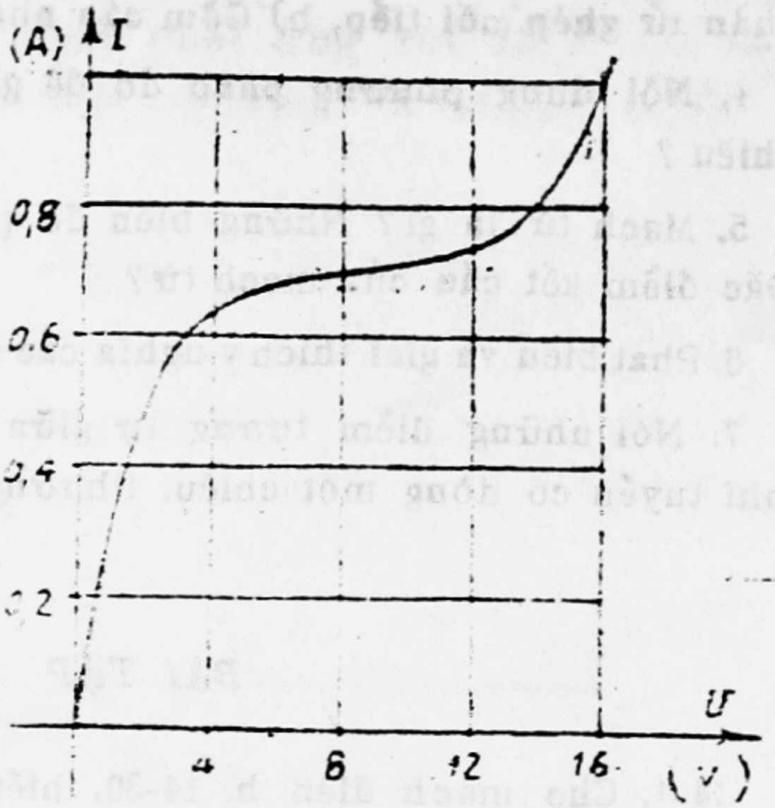
thiên của điện áp U để dòng điện qua tải không biến thiên quá 5%.

Đáp :

$U = 8 \div 16,4V.$



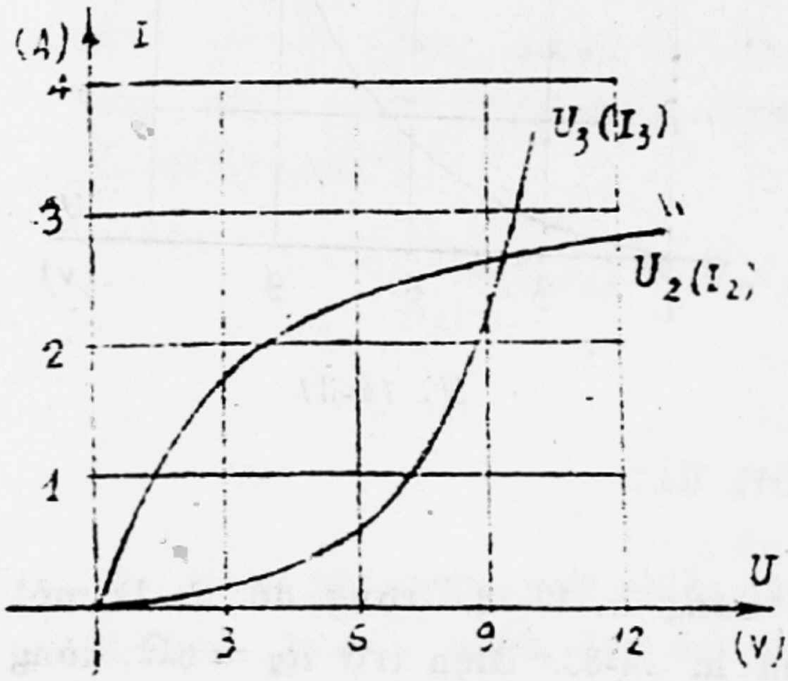
H. 14-32



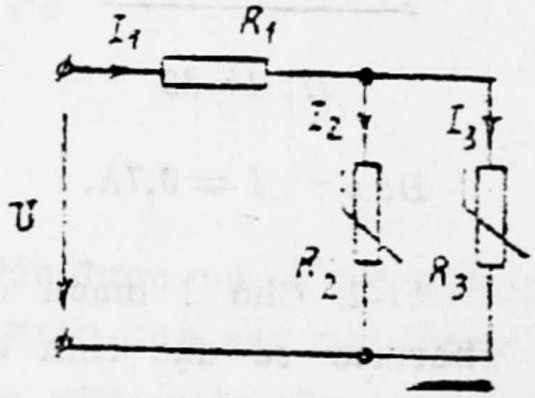
H. 14-33

14-3. Tìm dòng điện các nhánh trong mạch h. 14-34 bằng phương pháp đồ thị và phương pháp số. Biết $U = 12V$, $R_1 = 3\Omega$. Đặc tính điện trở R_2, R_3 cho trên h. 14-35.

Đáp : $I_1 = 2,4A \quad I_2 = 2,1A \quad I_3 = 0,3A$



H. 14-34

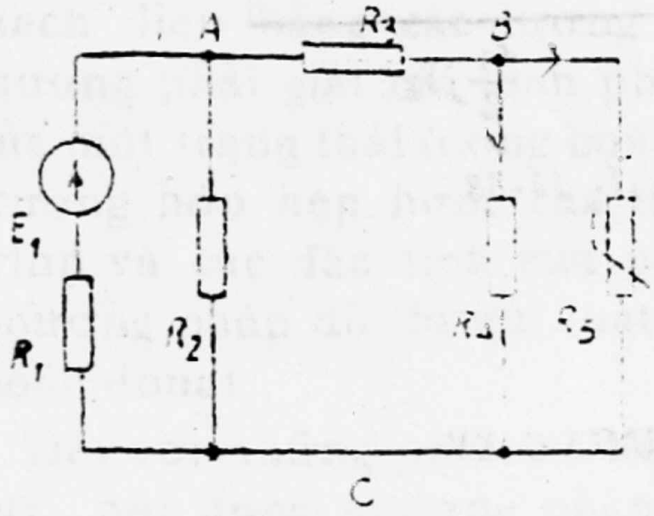


H 14-35

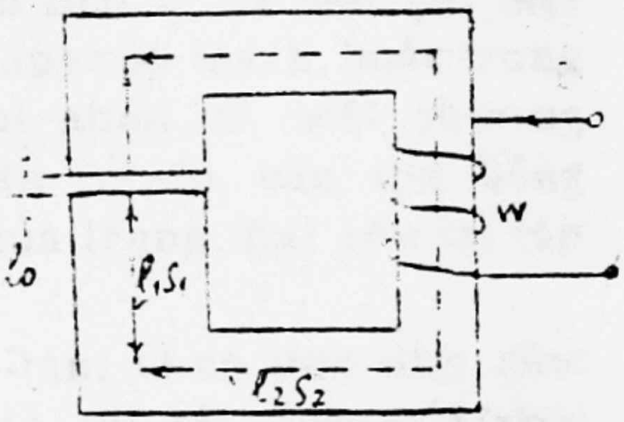
14-4. Cho mạch điện h. [illegible], biết :

$R_1 = R_2 = 4\Omega$. $R_3 = 8\Omega$. $R_4 = 10\Omega$. $E_1 = 12V$

Đặc tính điện trở R_5 cho trên h. 14-31. Tìm dòng điện qua R_5. *Đáp* : $I_5 = 0,2A$.



H. 14-36



H. 14-37

14-5. Cho mạch từ h. 14-37. Biết kích thước các đoạn như sau :

Đoạn 1 : $l_1 = 0,0995m$; $S_1 = 4 . 10^{-4}\ m^2$;

Đoạn 2 : $l_2 = 0,2m$; $S_2 = 3 . 10^{-4}\ m^2$;

Khe không khí : $l_o = 5 . 10^{-4}m$. Các đoạn mạch từ làm bằng thép kỹ thuật điện ∋ 41 ; số vòng dây $w = 1000$.

a) Biết $\Phi = 5 . 10^{-4} Wb$. Tìm dòng điện I ?

b) Biết $I = 1A$, tìm Φ ?

Đáp : a) $I = 2,03A$, b) $\Phi = 4,52 . 10^{-4}$ Wb

14-6. Cho mạch từ h. 14-38. Lõi thép làm bằng thép kỹ thuật điện ∋ 31. Biết kích thước các đoạn :

$l_1 = 0,158m$; $S_1 = 2 . 10^{-4}m^2$,

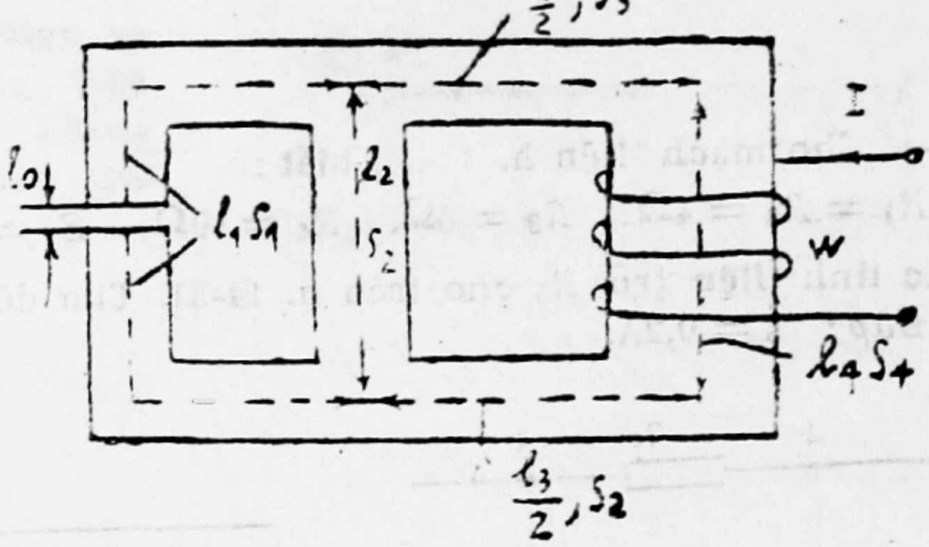
$l_2 = 0,1m$; $S_2 = 2 . 10^{-4}m^2$,

$l_3 = 0,08m$; $S_3 = 2 . 10^{-4}m^2$,

$l_4 = 0,1m$; $S_4 = 2 . 10^{-4}m^2$,

$l_o = 10^{-3}m$; $S_o = 2 . 10^{-4}m^2$.

Biết từ thông qua khe không khí $\Phi_o = 0,5 . 10^{-4}$ Wb. Tìm sức từ động $F = wI$. *Đáp* : $F = 261$ A.



H. 14-38

CHƯƠNG XV

QUÁ TRÌNH XÁC LẬP TRONG MẠCH PHI TUYẾN CÓ DÒNG, ÁP GẦN HÌNH SIN

Mục đích :

a) Trình bày một số phương pháp thường dùng tính mạch phi tuyến ở chế độ xác lập gần điều hòa :

— Phương pháp đồ thị đối với trị số tức thời,

— Phương pháp cân bằng điều hòa,

— Phương pháp tuyến tính hóa quan hệ tức thời,

— Phương pháp tuyến tính hóa đoạn đường đặc tính.

b) Dùng các phương pháp trên phân tích một số hiện tượng thường gặp trong mạch phi tuyến ở chế độ xác lập.

Chương này sẽ xét một số phương pháp tính mạch phi tuyến có dòng xoay chiều ở chế độ xác lập và dùng các phương pháp ấy phân tích một số hiện tượng thường gặp.

§ 15-1. PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ ĐỐI VỚI TRỊ SỐ TỨC THỜI. DẠNG ĐƯỜNG CONG $i(t)$, $u(t)$ TRONG CUỘN DÂY LÕI THÉP

1. Nội dung phương pháp đồ thị đối với giá trị tức thời.

Như đã nêu trong m.l.l. ta qui ước mô tả trạng thái mạch điện bằng các lượng dòng và áp $i(t)$, $u(t)$. Ta thường phải giải bài toán phân tích là đã biết qui luật của một trạng thái (dòng hoặc áp) của mạch, hoặc trong trường hợp hẹp hơn, của một phần tử, biết phương trình và các đặc tính của phần tử đó, cần tìm bằng phương pháp đồ thị qui luật của trạng thái còn lại (áp hoặc dòng).

Đối với những phần tử tiêu tán, vì có đặc tính hàm $u(i)$, nội dung phương pháp đồ thị rất đơn giản. Với mỗi thời điểm t_1, t_2 ..., biết những giá trị của trạng thái thứ nhất, ví dụ $u(t_1)$ $u(t_2)$ ..., tra đường đặc tính $u(i)$ ta được những giá trị tương ứng của trạng thái thứ hai $i(t_1)$, $i(t_2)$... Quá trình vẽ các đồ thị cũng rất đơn giản.

Đối với những phần tử kho điện và từ, giữa các trạng thái mạch u, i không có một quan hệ hàm trực tiếp, mà thường có một quan hệ vi tích phân giữa một trong hai trạng thái đó với những lượng trung gian x khác, ví dụ là từ thông ψ đối với những kho từ, và điện tích q đối với kho điện, dạng:

$$u_L = \frac{d\psi}{dt}, \qquad i_C = \frac{dq}{dt}.$$

Trong trường hợp đơn giản nhất, có thể tồn tại những quan hệ hàm giữa lượng trung gian này với trạng thái còn lại của mạch, ví dụ:

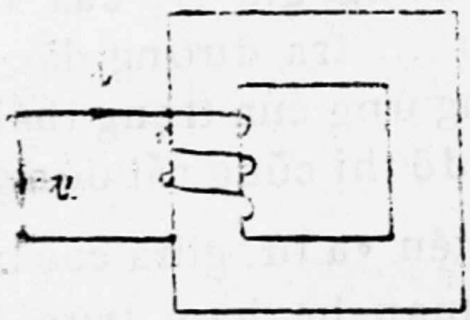
$$\psi = \psi(i), \qquad q = q(u).$$

Đối với những phần tử phi tuyến ta thường mô tả quan hệ này dưới dạng đường cong hoặc bảng số.

Nội dung phương pháp đồ thị ở đây là kết hợp giải bằng đồ thị hai quan hệ ấy với nhau như sau : từ trạng thái đã biết, dùng một trong hai quan hệ trên tìm ra trạng thái trung gian, dưới dạng hàm thời gian $x(t)$; rồi từ đường cong này ra quan hệ thứ hai tìm bằng đồ thị trạng thái kia.

Ví dụ đối với một cuộn dây lõi thép, nếu đã biết $i(t)$, có thể dùng đồ thị với đặc tính $\psi(i)$ tìm ra đường cong $\psi(t)$. Đạo hàm đường cong này bằng đồ thị sẽ được điện áp $u(t)$. Ngược lại nếu đã biết $u(t)$, bằng cách tích phân tìm được hàm $\psi(t)$, sau đó dùng đặc tính $\psi(i)$ có thể vẽ được đường cong $i(t)$.

Phương pháp này tiện dùng cho mạch có một phần tử phi tuyến.



H. 15-1

Dưới đây sẽ dùng phương pháp đồ thị đối với trị số tức thời để tìm hình dạng đường cong dòng điện và điện áp trong cuộn dây lõi thép (h. 15-1) dưới tác dụng kích thích điều hòa.

2. Hình dáng đường cong dòng điện và điện áp trong cuộn dây lõi thép (khi kích thích hình sin).

Nếu bỏ qua điện trở dây quấn thì đặc trưng cho cuộn dây lõi thép là đặc tính $\psi(i)$. Trong đó dòng i và áp u quan hệ nhau thông qua từ thông ψ như sau :

$$u = \frac{d\psi}{dt}, \quad \psi = \psi(i). \tag{1}$$

Khi biết đường cong kích thích $u(t)$ [hoặc $i(t)$], ta có thể tìm được đường cong $\psi(t)$ và sau đó đáp ứng $i(t)$

[hoặc $u(t)$] bằng phương pháp đồ thị. Ta nấy xét các trường hợp cụ thể sau :

Đáp ứng dòng $i(t)$ với kích thích áp $u(t)$ hình sin.

Giả thiết kích thích $u(t)$ có dạng $u = V_m \cos \omega t$. Từ (1) ta vẽ được đường cong $\psi(t)$:

$$\psi = \int u dt = \frac{V_m}{\omega} \sin \omega t = \psi_m \sin \omega t.$$

a) Khi bỏ qua tổn hao sắt từ quan hệ $\psi(i)$ có dạng đường cong h. 15-2a.

Quá trình vẽ một điểm trên đường cong $i(t)$ như sau : tại một thời điểm nào đó, ví dụ $t = t_1$, đưa vào $\psi(t)$, có $\psi(t_1) = \psi_1$ (trong đó điểm a_1), biết ψ_1, nhờ đường $\psi(i)$ ta được $i(t_1) = i_1$. Như vậy ta được một điểm $a_1(t_1, i_1)$ trên đường $i(t)$. Quá trình vẽ điểm a_1 được chỉ bằng các nét kẻ có đánh mũi tên trên h. 15-2. Vẽ nhiều điểm như vậy, nối lại ta được đường $i(t)$.

Ta nhận xét thấy đáp ứng $i(t)$ không sin có dạng nhọn đầu, đối xứng nhưng bị méo so với kích thích $u(t)$. Cũng thấy điểm « không » của $\psi(t)$ và $i(t)$ trùng nhau.

b) Khi kể đến tổn hao sắt từ, đường cong $\psi(i)$ sẽ có trễ (h. 15-3a). Ta cũng vẽ được $i(t)$ theo cách trên. Nhận thấy khi kích thích $u(t)$ hình sin, đáp ứng $i(t)$ cũng bị méo có hình dáng nhọn đầu (h. 15-3b), nhưng không còn đối xứng qua trục đứng chậy qua trị số cực đại như trường hợp trên nữa. Điểm « không » của $i(t)$ và $\psi t)$ không trùng nhau nữa.

Đáp ứng $u(t)$ khi kích thích $i(t)$ là hình sin. Từ đường cong $i(t)$, $\psi(i)$, bằng đồ thị vẽ được đường cong $\psi(t)$. Theo quan hệ $u(t) = \frac{d\psi}{dt}$, lấy đạo hàm $\psi(t)$ bằng đồ thị ta được $u(t)$. Quá trình tìm $\psi(t)$ cũng vẽ từng điểm một (h. 15-4) như ở trên.

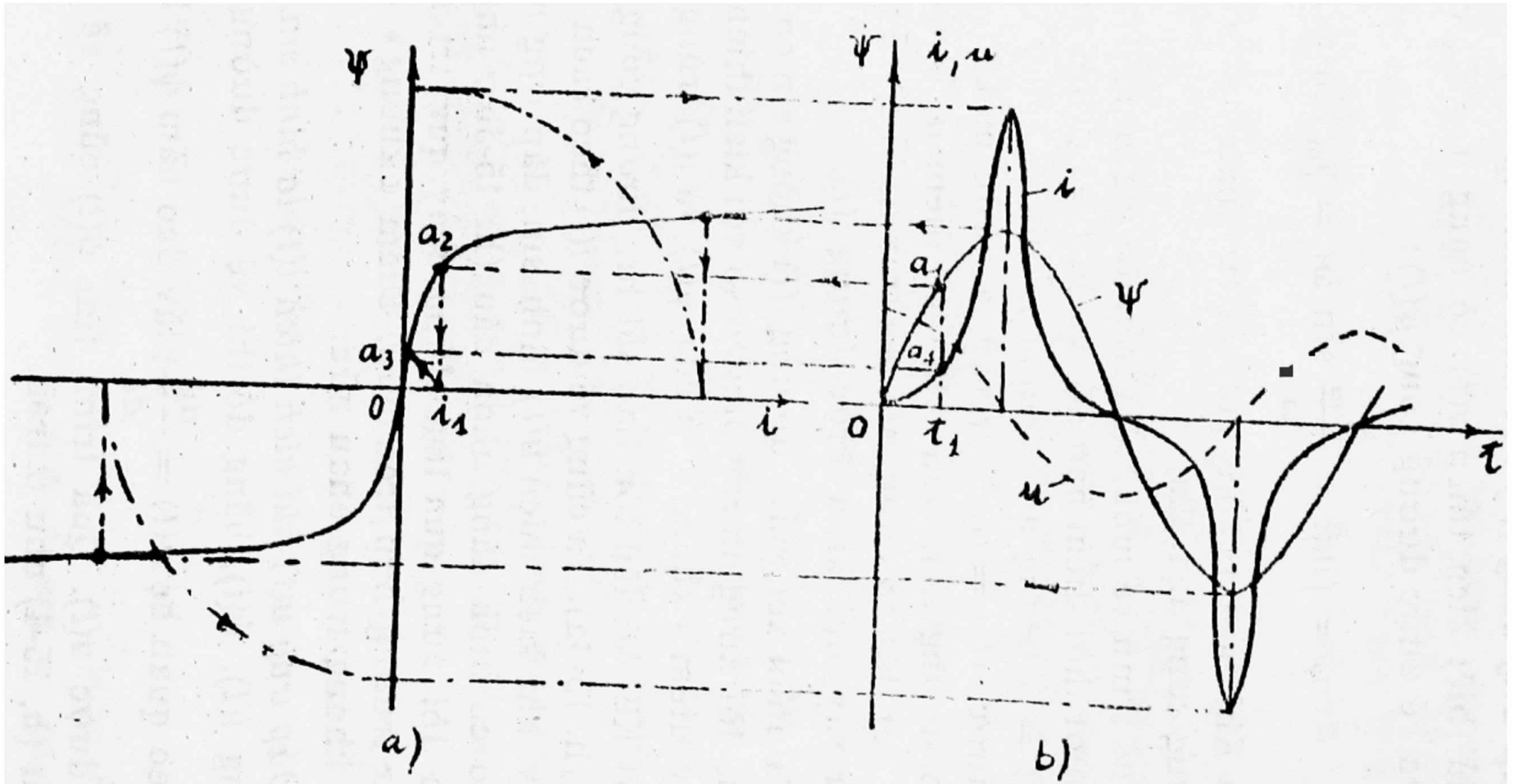
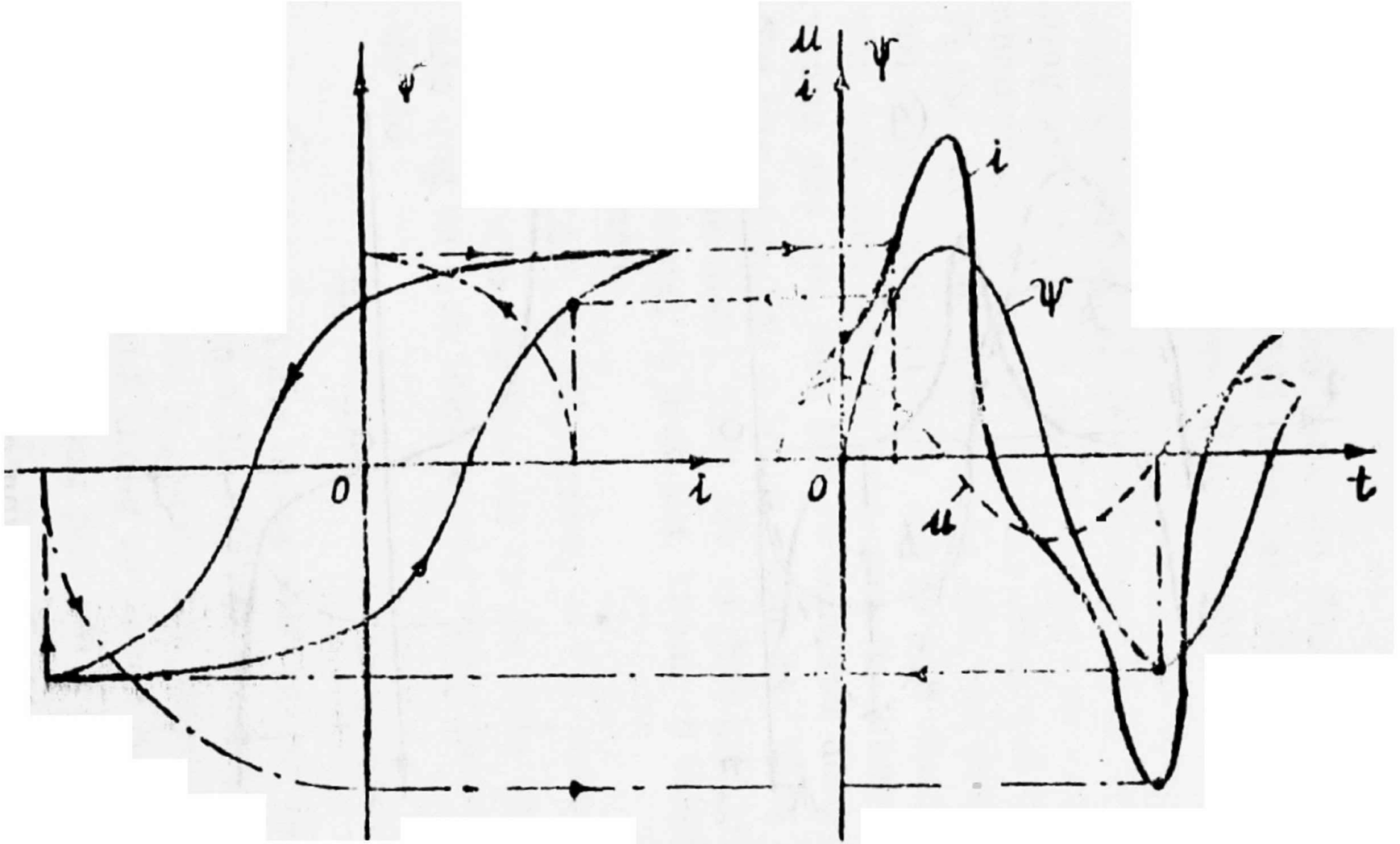
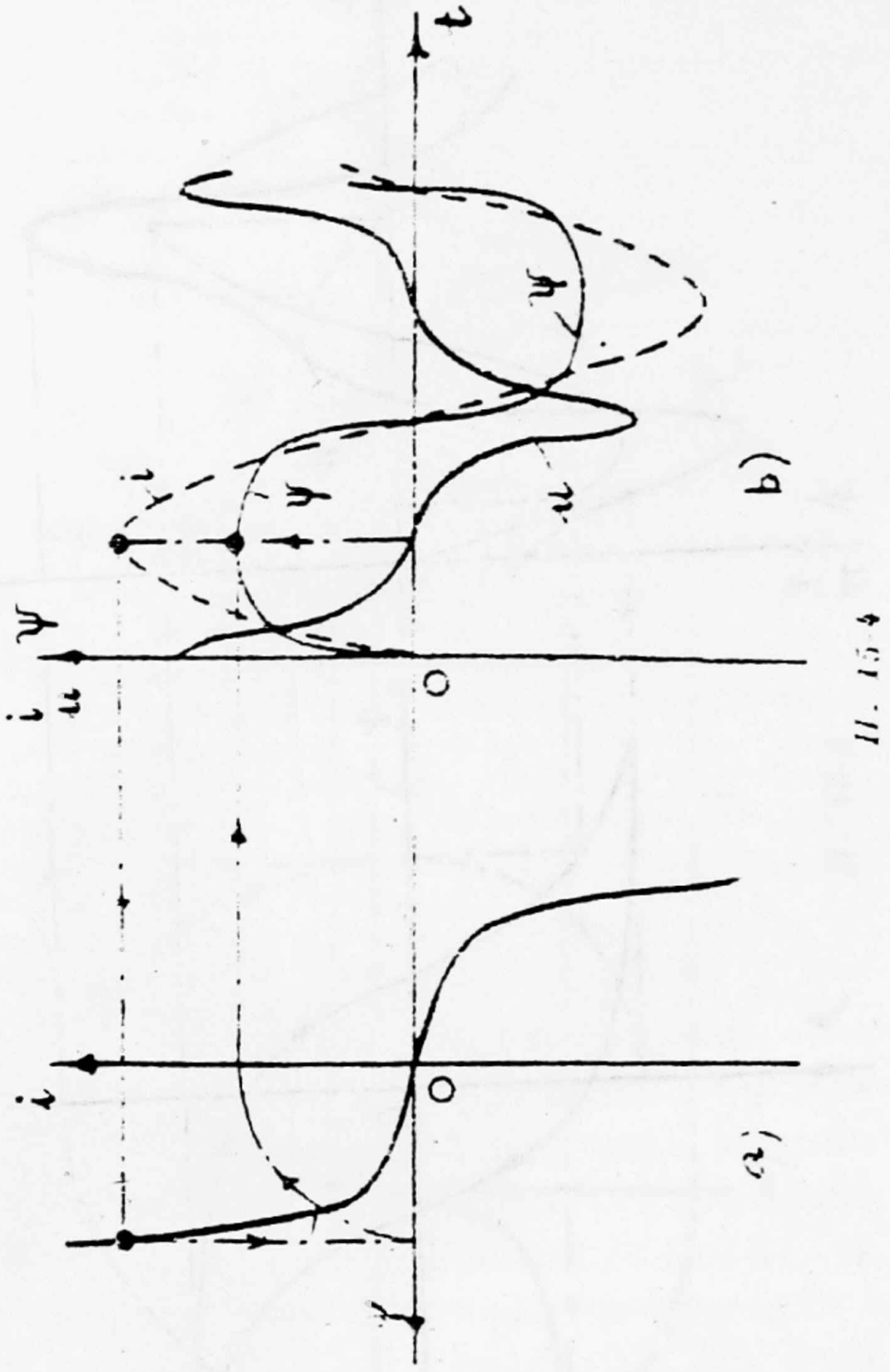


Fig. 15-2



Н. 15.3

cong đáp ứng $u(t)$ cũng nhọn đầu và đối xứng; điểm « không » của dòng điện và từ thông trùng nhau.



Khi kể đến từ trễ, đường cong $u(t)$ không đối xứng nữa, điểm « không » của $\psi(t)$, $i(t)$ không trùng nhau nữa.

Qua những trường hợp trên rút ra một số nhận xét về hình dáng đường cong dòng điện và điện áp trong cuộn dây lõi thép.

a) Với kích thích hình sin đáp ứng sẽ khác sin có dạng nhọn đỉnh. Lõi thép làm việc càng bão hòa thì đáp ứng càng nhọn đầu, điều hòa cao trong đáp ứng càng lớn.

b) Khi không kể đến tổn hao sắt từ (trễ) các đường cong $\psi(t)$ và $i(t)$ có « điểm không » và « cực đại » trùng nhau và đối xứng đối với trục đứng qua trị số cực đại. Vì thế các sóng điều hòa cơ bản của chúng trùng pha với nhau. Theo (1), điều hòa cơ bản của điện áp vuông pha với điều hòa cơ bản của từ thông, do đó cũng vuông pha với điều hòa cơ bản của dòng điện, khiến tổn hao năng lượng trong cuộn dây bằng không (phù hợp với giả thiết). Thật vậy, vì theo giả thiết kích thích (áp hoặc dòng) là hình sin, không có thành phần điều hòa cao, nên:

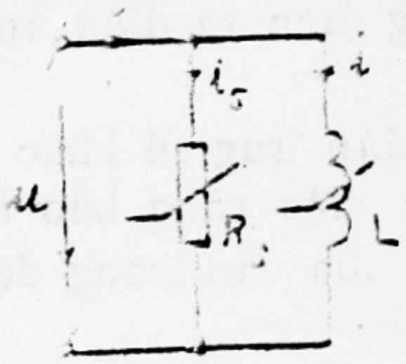
$$\Delta P = \Sigma \Delta P_k = \Sigma U_k I_k \cos \varphi_k = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 0. \quad (15\text{-}1)$$

Khi kể đến tổn hao sắt từ thì điều hòa cơ bản của đáp ứng và kích thích không vuông pha với nhau nữa, do đó

$$\Delta P = \Delta P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 \neq 0 \quad (15\text{-}2)$$

Điều nhận xét này thống nhất với sơ đồ thay thế của cuộn dây lõi thép h. 15-5 đã nêu trong m. 13-2. Thật vậy, theo h. 13-7a (với $R_{dq} = 0$), khi không có tổn hao sắt từ, sơ đồ thay thế không có nhánh R_s thì điều hòa bậc nhất $i_1 = i_{1L}$ sẽ vuông pha với u (u hình sin). Khi kể đến tổn hao sắt thì $i_1 = i_{1L} + i_{1R_s}$ do đó i và u không vuông pha nhau nữa.

c) Các đường cong của đáp ứng đều có dạng đối xứng qúa trục ngang, nên trong phổ của chúng chỉ



H. 15-5

có điều hòa lẻ. Điều này là do lặc tính $\varphi(i)$ đối xứng qua gốc. Cũng suy ra rằng đối với một phần tử phi tuyến có đặc tính không đối xứng qua gốc, phổ của dáp ứng sẽ có đầy đủ các điều hòa (cả lẻ và chẵn. Điều này cũng đã thấy ở đường cong dòng điện qua chỉnh lưu.

§ 15-2. PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG ĐIỀU HÒA

Một trong những phương pháp hay dùng cho mạch phi tuyến để tính được điều hòa cơ bản và một số điều hòa cao là vận dụng nguyên tắc cân bằng điều hòa, gọi là phương pháp cân bằng điều hòa.

Nội dung nguyên tắc cân bằng điều hòa là:

Nếu có đẳng thức:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kC} \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{n} A_{kS} \sin k\omega t = 0 \qquad (15\text{-}3)$$

thì, vì $\sin k\omega t$ và $\cos k\omega t$ là các hàm độc lập tuyến tính nên biên độ mỗi điều hòa phải triệt tiêu:

$$A_{kC} = 0,\ A_{kS} = 0. \qquad (15\text{-}4)$$

Nội dung phương pháp cân bằng điều hòa:

Hệ phương trình vi phân miêu tả mạch, sau khi rút gọn thường có thể đưa về dạng:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x} \ldots\ldots t) = 0. \qquad (15\text{-}5)$$

Vế trái (15-5) là 1 biểu thức nào đó của ẩn $x(t)$, và các đạo hàm $\dot{x}$, $\ddot{x}$ v.v... ngoài ra có thể chứa thêm những nguồn ngoài là hàm của thời gian, ở đây xét những nguồn điều hòa với tần số ω. Do đó, khi mạch

đã ở chế độ xác lập. Khi $x(t)$ là hàm chu kỳ. Ta đặt được $x(t)$ dưới dạng tổng các điều hòa :

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{kC} \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} A_{kS} \sin k\omega t =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t - \varphi_k) \qquad (15\text{-}6)$$

trong đó tần số điều hòa cơ bản, đối với nhiều loại mạch phi tuyến thường là tần số nguồn kích thích ω, và A_{kC}, A_{kS} là những hàm biến đổi thành phần cos và sin của điều hòa thứ k.

Trong tính toán gần đúng, tùy yêu cầu của bài toán thường chỉ cần kể đến một vài điều hòa chính của $x(t)$: từ điều hòa cơ bản cho đến điều hòa thứ k nào đó (ví dụ điều hòa thứ 3); trong đó cần tìm biên độ các điều hòa :

$$x(t) = A_{1C} \cos\omega t - A_{1S} \sin\omega t + \ldots +$$
$$+ A_{kC} \cos k\omega t - A_{kS} \sin k\omega t. \qquad (15\text{-}7)$$

Theo phương pháp cân bằng điều hòa, để tìm biên độ các điều hòa này : A_{1C}, A_{1S},..., A_{kC}, A_{kS} ta thay (15-7) vào (15-5), sau khi tính toán và sắp xếp các số hạng cùng một điều hòa với nhau ta được một phương trình dạng (15-8):

$$C_1(A_{1C}, A_{1S}, \ldots A_{kC}, A_{kS}) \cos\omega t + S_1(A_{1C}, A_{1S}, \ldots$$
$$A_{kC}, A_{kS}) \sin\omega t + \ldots + C_k(A_{1C}, A_{1S}, \ldots, A_{kC}, A_{kS})$$
$$\cos k\omega t + S_k(A_{1C}, A_{1S}, \ldots A_{kC}, A_{kS}) \sin k\omega t +$$
$$+ \Sigma(\text{điều hoa cao}) = 0 \qquad (15\text{-}8)$$

Trong đó C_k và S_k là những hệ số của các điều hòa cos và sin sau khi đã gộp hữa số chung, nói chung là hàm của các biên độ A_{1C}, A_{1S} v.v... cần tìm. Theo nguyên tắc cân bằng điều hòa, các hệ số C và S phải đồng

nhất triệt tiêu, vậy được một hệ phương trình dạng (15-4) :

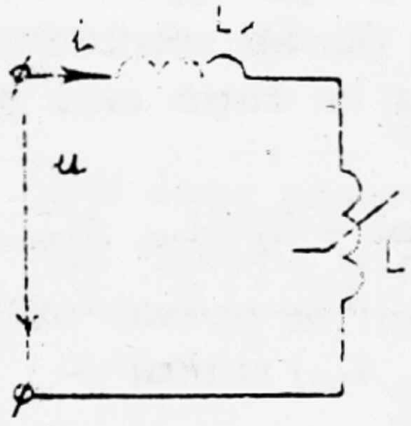
$$\left.\begin{aligned} C_1(A_{1C}, A_{1S}, \ldots, A_{kC}, A_{kS}) &= 0,\\ S_1(A_{1C}, A_{1S}, \ldots, A_{kC}, A_{kS}) &= 0,\\ &\cdots\\ C_k(A_{1C}, A_{1S}, \ldots, A_{kC}, A_{kS}) &= 0,\\ S_k(A_{1C}, A_{1S}, \ldots, A_{kC}, A_{kS}) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}9)$$

Giải hệ (15-9) sẽ được biên độ các điều hòa cần tìm. Nếu kể đến m điều hòa, nói chung phải xác định $2m$ biên độ $A_{1C}, A_{1S} \ldots A_{mC}, A_{mS}$ của các thành phần sin và cos (hoặc $2m$ biên độ và góc pha đầu) là nghiệm của hệ $2m$ phương trình dạng (15-9).

Vậy nội dung cơ bản của phương pháp cân bằng điều hòa là chuyển việc giải hệ phương trình vi phân (15-5) về việc giải hệ phương trình đại số (15-9). Ta thường giải hệ đó bằng phương pháp số.

Ví dụ 15-1 :

Cho mạch điện h. 15- Đã biết điện cảm $L_1 = 0{,}5$H đặc tính điện cảm phi tuyến L với dòng i biến thiên trong quãng -4A đến 4A có dạng gần đúng như sau (khi $i > 4$ hàm này bắt đầu giảm thấp, không đúng nữa):



H. 15-6

$$\psi = ai - bi^3 = 0{,}5i - 0{,}01i^3.$$

Điện áp đặt vào mạch :

$$u = 300\cos\omega t \text{ V}.$$

Tìm điều hòa cơ bản của dòng điện, biết tần số nguồn $f = 50$ Hz.

Giải — Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp cân bằng điều hòa.

Theo luật Kirhof ta viết phương trình miêu tả mạch:

$$u = L_1 i' + \frac{d\psi}{dt} = L_1 i' + \frac{\partial \psi}{\partial i} i' = (L_1 + a - 3bi^2)i',$$

hoặc: $$-3bi^2 i' + (L_1 + a)i' - U_m \cos\omega t = 0. \qquad (a)$$

Phương trình này có dạng (15-5).

Nếu chỉ kể đến điều hòa cơ bản của dòng điện, ta lấy ẩn dưới dạng:

$$i = A_{1C}\cos\omega t + A_{1S}\sin\omega t. \qquad (b)$$

Thay (b) vào (a) sẽ rút ra những phương trình đại số đối với A_{1C} và A_{1S}. Riêng đối với bài toán này, vì mạch điện không có tiêu tán năng lượng, nên ta biết rằng điều hòa bậc nhất của dòng và áp trong mạch phải vuông pha nhau nghĩa là có thể đặt dòng điện dạng: $i = i_1 = I_{1m}\sin\omega t = A_{1S}\sin\omega t$ và đặt $A_{1C} = 0$. Thay $i_1 = I_{1m}\sin\omega t$ vào (a), rút ra phương trình:

$$\frac{3}{4} b\omega I_{1m}^3 - (L_1 + a)\,\omega I_{1m} + U_m = 0.$$

Thay số ta được phương trình:

$$2.36 I_{1m}^3 - 314 I_{1m} + 300 = 0.$$

Giải phương trình này ta được ba giá trị của I_{1m}:

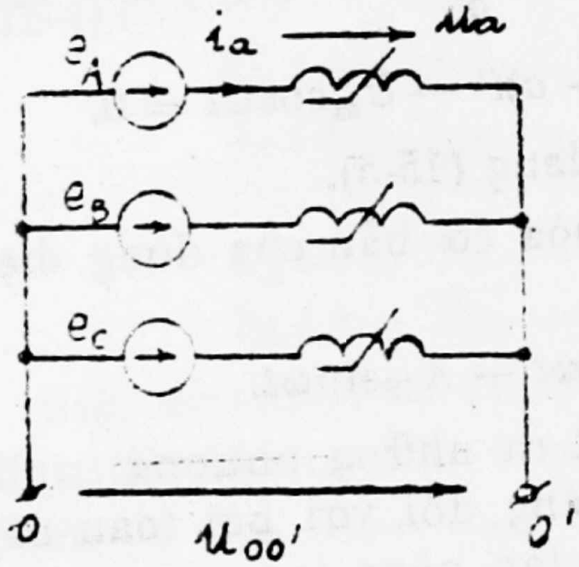
$$I_{1m}^{(1)} = 0{,}96\,\text{A}, \quad I_{1m}^{(2)} = 11\,\text{A}, \quad I_{1m}^{(3)} = -12\,\text{A}.$$

Theo đầu đề, hàm $\psi(i)$ chỉ giải tích gần đúng đối với các trị $I_m < 4\,\text{A}$, nên chỉ chọn lấy nghiệm thứ nhất, và ta có:

$$i \approx i_1 = 0{,}96\sin\omega t\,\text{A}.$$

Ví dụ 15-2: Phân tích bộ nhân 3 tần số đơn giản vẽ trên h. 15-7. Sơ đồ nhân tần này gồm ba điện cảm phi tuyến giống nhau cung cấp bởi một hệ thống điện áp ba pha đối xứng hình sin. Điện áp $u_{00'}$ sẽ có tần số gấp 3 lần của nguồn cung cấp.

phân tích sơ đồ nhân ba tần số.



H. 15-7

Ta phân tích điện áp không hình sin trên các điện cảm thành tổng các điều hòa thuận, nghịch, zerô. Đối với các điều hòa thuận và nghịch, mạch trở thành đối xứng thuận và nghịch, nên thành phần thuận và nghịch của điện áp giữa hai điểm trung tính triệt tiêu:

$$u_{OO'3n-1} = u_{OO'3n+1} = 0$$

Theo nguyên tắc cân bằng điều hòa:

$$u_{OO'} = u_{OO'3n} = u_{A3n}.$$

Trong đó u_{A3} là thành phần điều hòa bậc 3n của điện áp pha A.

Vì các thành phần điều hòa 9ω, 15ω nhỏ so với điều hòa bậc 3, nên có thể coi như điện áp $u_{OO'}$ điều hòa có tần số 3ω $u_{OO'} = u_{A3}$.

Để tính được độ lớn của điện áp u_{OO} ta viết phương trình cho đường vòng pha A:

$$u_A - u_{OO'} = e_A.$$

Giả thiết $e_A = E_m \sin \omega t$ và đặc tính điện cảm $\psi = ai - bi^3$ đã biết. Ta có:

$$\frac{d\psi}{dt} - u_{OO'} = E_m \sin \omega t,$$

hoặc: $$(a - 3bi^2)i' - u_{OO'} - E_m \sin \omega t = 0. \qquad (c)$$

Giả thiết chỉ kể đến điều hòa cơ bản của dòng điện (điều này cũng hợp lý, vì mạch không có dây trung

tính nên không có các điều hòa bội 3 của dòng điện, mà các thành phần bậc cao khác thì nhỏ), và điều hòa bậc 3 của điện áp $u_{OO'}$, ta có:

$$\left.\begin{aligned} u_{OO'} &= A\sin 3\omega t + B\cos 3\omega t, \\ i &= C\sin\omega t + D\cos\omega t. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Chú ý rằng mạch thuần cảm, không có tiêu tán, nên thành phần bậc 1 của dòng điện phải vuông pha với sđđ (hình sin), tức là:

$$C = 0;\ i = D\cos\omega t; \quad (e)$$

Thay (e) vào (c) rồi đưa về dạng (15-9) ta được:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{3}{4}\cos D^3 - a\omega D - E_m = 0, \\ &\frac{3}{4}b\omega D^3 - A = 0, \\ &B = 0. \end{aligned}\right\}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được D, A, B.

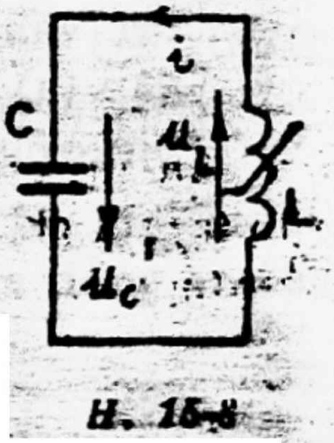
Ví dụ 15-3: Cho mạch điện tự dao động phi tuyến gồm một tụ điện tuyến tính C nối tiếp với một điện cảm phi tuyến có đặc tính $i = a\psi + b\psi^3$ (h. 15-8). Biết ở thời điểm $t = 0$:

$$u_C(0) = U_0;\ i(0) = I_0 = 0.$$

Tìm qui luật biến thiên của từ thông ψ. Tính cụ thể cho trường hợp $C = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ F; $i = 2\psi + 10\psi^3$; $U_0^{(1)} = 400$V; $U_0^{(2)} = 1000$V.

Giải: Phương trình viết cho mạch:

$$u_L + u_C = \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{C}\int_0 i dt + u_C(0) = 0.$$



H. 15-8

Đạo hàm hai vế theo t ta có:

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{C}i = 0$$

Thay $i = a\psi + b\psi^3$ ta được phương trình:

$$\ddot{\psi} + \frac{a}{C}\psi + \frac{b}{C}\psi^3 = 0,$$

hoặc: $$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi + h\psi^3 = 0. \qquad (a)$$

Trong đó: $\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ là tần số dao động riêng của vòng khi điện cảm L là tuyến tính: $i = a\psi = \frac{1}{L}\psi$.

Còn $h = \frac{b}{C}$.

Phương trình (a) có dạng phương trình tự dao động phi tuyến Van der Pôl. Thật vậy, vì mạch không có mất mát, nên dao động năng lượng được duy trì, ở đây dao động không tắt (xem tr. 22-5).

Ta sẽ tìm nghiệm xấp xỉ ψ gần nhất dạng:

$$\psi = \psi_{1m}\sin(\omega t - \theta) \qquad (b)$$

Trong đó ψ_{1m}, θ và ω là những lượng cần tìm. Chú ý đến sơ kiện ta thấy:

a) $\psi(0) = i(0) = 0$. vậy $\psi_{1m}\sin\theta = 0$ bắt buộc $\theta = 0$.

b) $u_L(0) = \dot{\psi}(0) = \omega\psi_{1m} = u_C(0) = U_0$ vậy $\psi_{1m} = \frac{U_0}{\omega}$

Thay các kết quả trên vào (b) ta có:

$$\psi = \frac{U_0}{\omega}\sin\omega t; \qquad (c)$$

tức vấn đề qui gọn về việc tìm ω. Muốn vậy thay (c) vào (a) rồi cho cân bằng các điều hòa ta sẽ rút ra được phương trình:

$$-\omega U_0 + \omega^2\frac{U_0}{\omega} + \frac{3hU_0}{4\omega^2} = 0$$

Từ phương trình này giải được:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 + 3hU_0^2}\right]} > \omega_0.$$

Thay số liệu cụ thể ta có:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{C}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}5.10^{-6}}} = 2.10^3;$$

$$h = \frac{b}{C} = \frac{10}{0.5.10^{-6}} = 2.10^7;$$

a) Với $U_0^{(1)} = 400$ V:

$$\omega^{(1)} = 2130 \text{ 1/s}; \quad \psi_{1m}^{(1)} = 0{,}186 \text{ W b}.$$

b) Với $U_0^{(2)} = 1000$ V

$$\omega^{(2)} = 2510 \text{ 1/s}; \quad \psi_{1m}^{(2)} = 0{,}397 \text{ W b}.$$

Ta thấy biên độ và tần số dao động phụ thuộc U_0. Đó là vì khi dao động trong mạch có biên độ lớn, cuộn dây bão hòa nhiều, điện cảm giảm xuống, do đó tần số dao động tăng lên:

$$\omega^{(2)} > \omega^{(1)} > \omega_0$$

Qua ví dụ trên rút ra một nhận xét về bài toán tự dao động phi tuyến: không những biên độ các điều hòa mà cả tần số dao động ω đều tùy thuộc năng lượng đưa vào mạch lúc ban đầu (U_0). Điều này khác hẳn với tự dao động trong mạch tuyến tính ở đó tần số tự dao động cố định, ví dụ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ không tùy thuộc biên độ dao động.

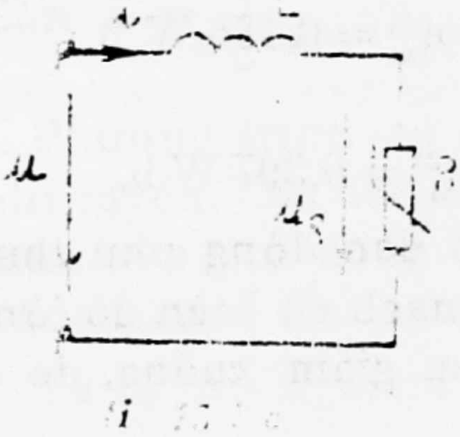
§ 15-3. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA QUI ƯỚC (TUYẾN TÍNH HÓA QUAN HỆ TỨC THỜI)

Trong thực tế đối với nhiều bài toán phi tuyến khi chỉ cần quan tâm đến trị hiệu dụng của dòng và áp.

thời, còn gọi là *phương pháp quán tính hóa*. Thực chất nội dung phương pháp này là: coi gần đúng phần tử phi tuyến không quán tính (hay quán tính nhỏ) là có quán tính.

1. Tính mạch có phần tử quán tính với nguồn hình sin

Ta gọi phần tử phi tuyến quán tính là phần tử có đặc tính $U(I)$ phi tuyến và $\psi(i)$ là tuyến tính. Vì vậy, khi kích thích hình sin thì áp ứng cũng hình sin. Ta có thể dùng phức số hay vectơ để biểu diễn các lượng hình sin trong mạch. Như vậy ta có thể chuyển hệ phương trình vi phân của mạch thành hệ phương trình đại số liên hệ các biến trong thái phức dòng và áp trong mạch. Do đó việc giải bài toán được đơn giản đi nhiều.



Ví dụ 15-4: Cho mạch h. 15-9a biết điện cảm L, điện áp $u = U_m \sin \omega t$, đặc tính đối với hiệu dụng của điện trở nhiệt R (h. 15-9b). Tìm dòng i trong mạch.

Giải: Lập phương trình cho mạch:

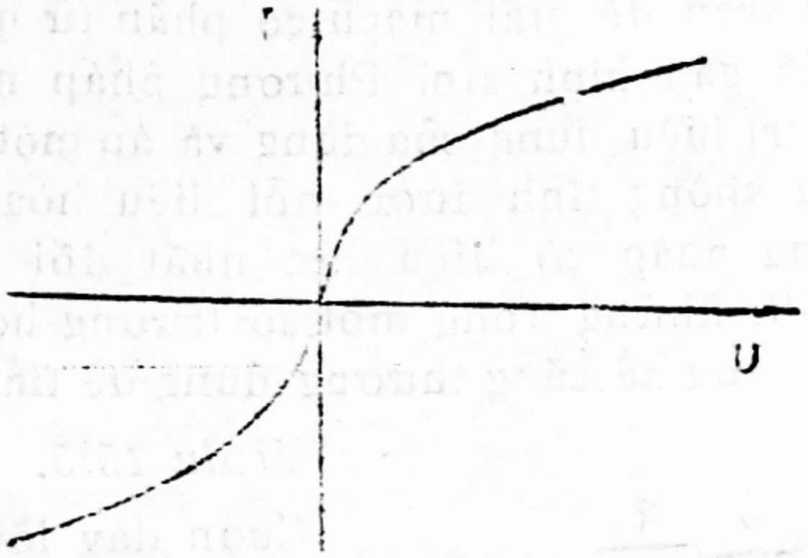
$$u = L\frac{di}{dt} + u_R \qquad (1)$$

Mạch gồm 1 điện trở nhiệt là một phần tử quán tính thực sự và một điện cảm tuyến tính L, nên khi u hình sin i cũng hình sin. Dùng phức số biểu diễn các lượng hình sin, ta chuyển phương trình vi phân phi tuyến (1)

thành phương trình đại số phi tuyến đối với hiệu dụng :

$$\dot{U} = j\omega L\dot{I} + \mathrm{R}(I)\,\dot{I}. \qquad (4)$$

Có thể dùng phương pháp đồ, giải (2) để được dòng I. Từ đó được nghiệm $i(t)$.



H. 15-9 b

2. **Dùng phương pháp tuyến tính hóa quy ước tính gần đúng mạch có phần tử không quán tính ở chế độ xác lập gần hình sin.**

Phần tử phi tuyến quán tính nhỏ hay không quán tính, có đặc tính đối với trị hiệu dụng hay đối với trị tức thời đều phi tuyến cả. Nhưng nếu tính phi tuyến thể hiện ít ta có thể dùng *quan niệm tuyến tính hóa đối với trị tức thời (tuyến tính hóa qui ước, hay quán tính hóa) như sau* : Coi phần tử quán tính nhỏ có đặc tính đối với trị hiệu dụng là phi tuyến, còn quan hệ giữa các trị tức thời ứng với một trị hiệu dụng coi gần đúng là tuyến tính. Thật vậy, do tính phi tuyến thể hiện ít, nên nếu kích thích là hình sin thì đáp ứng cũng gần hình sin và nếu coi gần đúng là hình sin có nghĩa là coi kích thích và đáp ứng tức thời liên quan nhau theo một quan hệ tuyến tính hóa (chương 3). Với quan niệm tuyến tính hóa đối với trị số tức thời, và khái niệm về

các lượng hình sin đẳng trị, ta có thể dùng phương pháp số phức tính mạch có phần tử quán tính đã trình bày ở trên để giải mạch có phần tử quán tính nhỏ ở chế độ gần hình sin. Phương pháp này cho ta tính được trị hiệu dụng của dòng và áp một cách đơn giản, nhưng không tính được mỗi điều hòa riêng rẽ. Tuy phương pháp có hiệu lực nhất đối với mạch phi tuyến ít, nhưng trong một số trường hợp khi tính phi tuyến đáng kể cũng thường dùng để tính gần đúng.

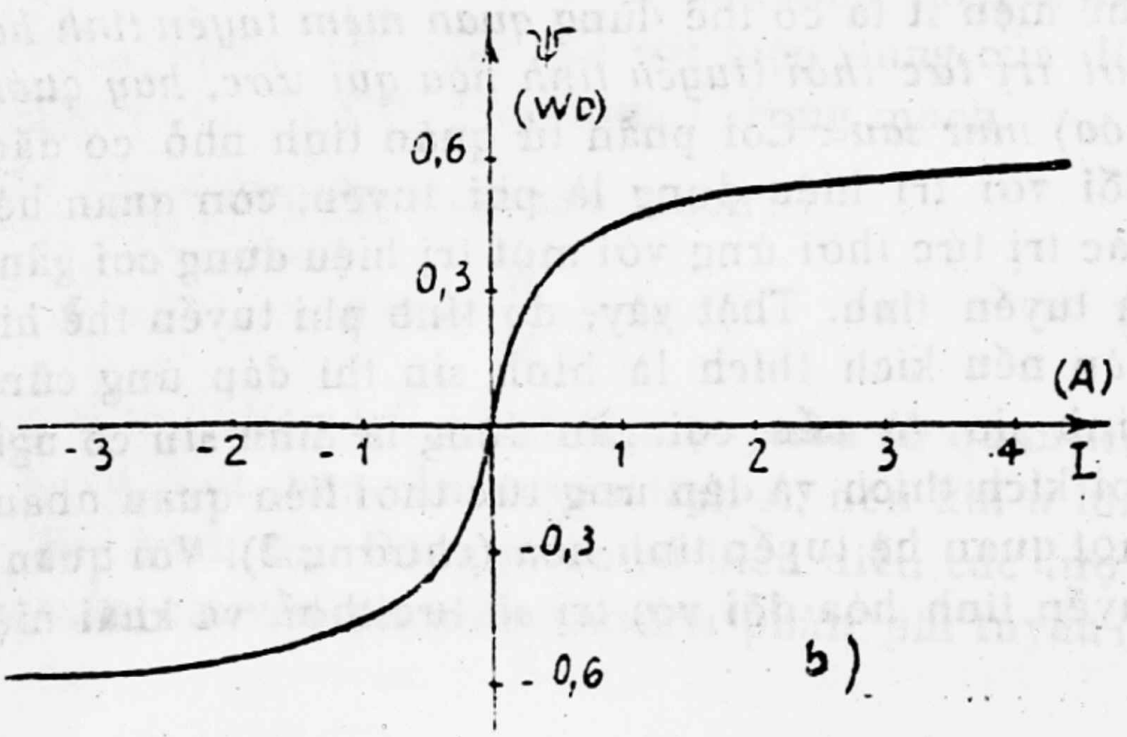
Ví dụ 15.5.



H. 15-10a

Cuộn dây lõi thép h. 15-10a có $R = 20\Omega$ và đặc tính $\psi_{hd}(I)$ (đối với trị số hiệu dụng) cho trên h. 15-10b. Điện áp hình sin đặt vào mạch có $U = 200V$. Tần số $f = 50Hz$. Tìm dòng điện I chảy trong mạch.

Giải: Ta giải bài toán bằng phương pháp tuyến tính hóa



H. 15-10b

quan hệ tức thời. Coi gần đúng dòng và áp trên các phần tử là hình sin ta có:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I},$$

trong đó giá trị $L = \frac{\psi_{hd}}{I} = L(I)$ là chưa biết (vì chưa biết I) và tùy thuộc đặc tính $\psi_{hd}(I)$ của điện cảm. Ta giải phương trình đại số trên bằng phương pháp số, ví dụ phương pháp dò. Để tiện tính toán ta chọn $\dot{I} = I\underline{/0°}$; $\dot{U} = 200\underline{/\varphi}$ V. Thay số vào phương trình trên, ta được: $200\underline{/\varphi} = 20\,\dot{I} + j314\,L(I)\dot{I}$. Thử cho một trị I, ta tìm được trị số điện cảm L, lắp vào phương trình, cứ thế dò dần cho đến khi phương trình đó được thỏa mãn. Kết quả quá trình dò ghi trong bảng 15-1.

Cuối cùng ta được:

$$I = 4{,}2 \text{ A}, \qquad \varphi = \psi_u - \psi_i = 65°10'.$$

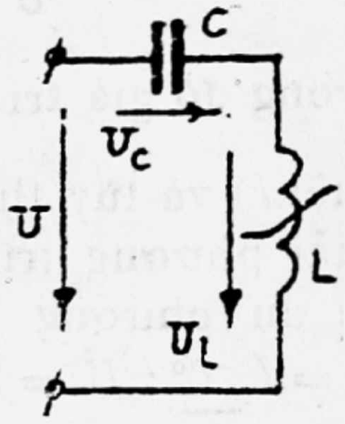
Bảng 15-1

i	$I^{(i)}$ (A)	$L^{(i)}(I)$ (H)	$RI^{(i)}$ (V)	$j314LI^{(i)}$ (V)	$U^{(i)}\underline{/\varphi^{(i)}}$ (V)
1	1	0,45	20	141	142 /81°55'
2	2	0,27	40	169	174 /76°40'
3	3	0,19	60	179	189 /71°30'
4	4	0,143	80	180	197 /66°
5	4,2	0,139	84	183	201 /65°10'

§ 15-4. HIỆN TƯỢNG TRIGƠ TRONG MẠCH CÓ CUỘN DÂY LÕI THÉP

Trong mạch phi tuyến có thể gặp hiện tượng trigơ. Đó là hiện tượng đáp ứng biến thiên gián đoạn (có sự

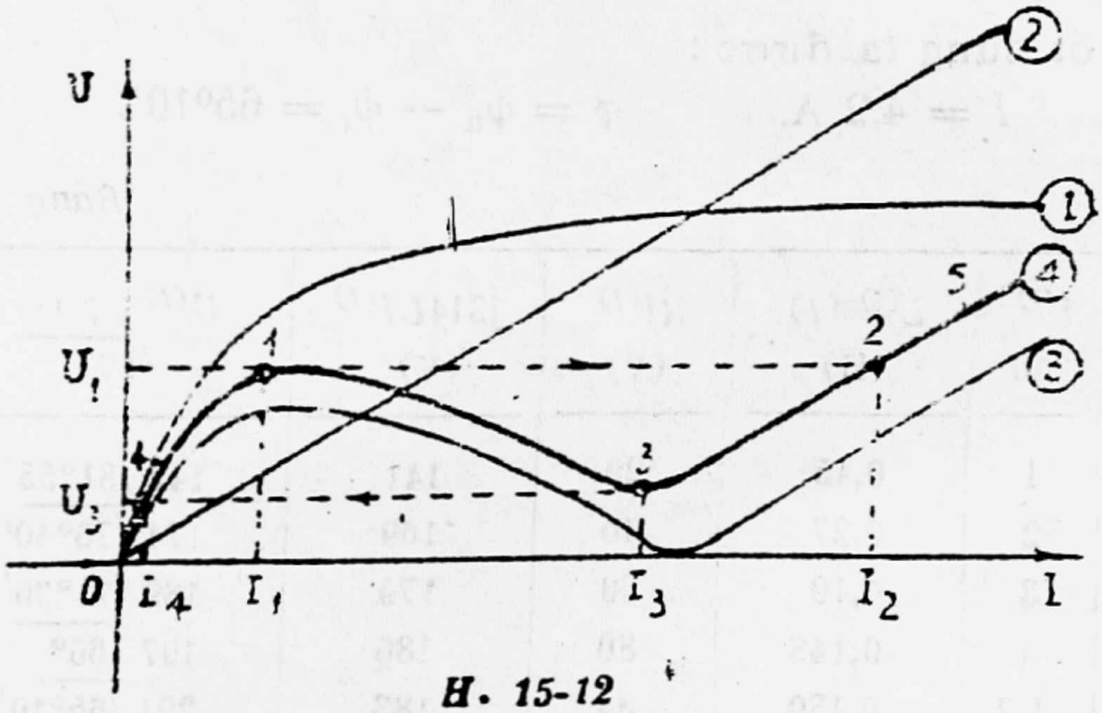
nhảy vọt), khi kích thích biến thiên liên tục, hoặc nói một cách khác là hiện tượng mà ứng với những kích thích, mạch có thể có hai trạng thái đáp ứng ổn định (cân bằng bền) khác nhau. Dưới đây chúng ta xét hiện tượng trigơ trong một mạch đơn giản gồm một cuộn dây có lõi sắt ghép với tụ điện tuyến tính.



H. 15-11

1 — Hiện tượng trigơ trong mạch nối tiếp cuộn dây lõi sắt với tụ điện tuyến tính.

Cung cấp mạch h. 15-11 bằng một *nguồn áp hình sin*. Khi thay đổi liên tục hiệu dụng U của nguồn, có thể quan sát thấy hiện tượng trigơ



H. 15-12

trong mạch, thể hiện qua sự nhảy vọt của dòng và áp trên các phần tử. Để phân tích hiện tượng ta dùng đồ thị h. 15-12. Đồ thị được xây dựng cho các trị hiệu dụng theo quan niệm tuyến tính hóa qui ước. Khi bỏ qua tổn hao trong các phần tử ta có phương trình mạch.

$$\dot{U}(I) = \dot{U}_L(I) + \dot{U}_C(I) \text{ hoặc } U(I) = |U_L(I) - U_C(I)|$$

Đặc tính $U(I)$ (đường 3) khi bỏ qua tổn hao được bằng cách trừ theo trục áp đặc tính $U_L(I)$ (đường 1) với đặc tính $U_C(I)$ (đường 2). Khi kể cả tổn hao trong các phần tử và ảnh hưởng các điều hòa cao của dòng và áp, đặc tính $U(I)$ thực tế (đường 4) dịch cao hơn đường lý tưởng một chút. Đặc tính $U(I)$ của mạch có dạng chữ N. Đặc tính này giải thích rõ hiện tượng trigơ trong mạch.

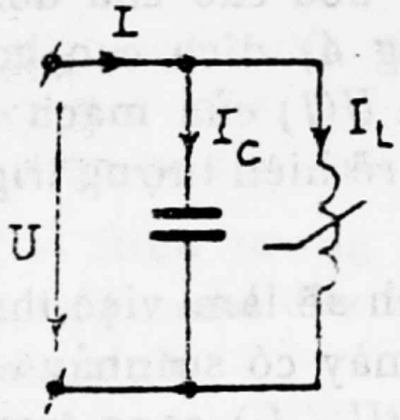
Tăng liên tục U từ 0 trở đi, mạch sẽ làm việc theo đoạn 0—1 rồi 2—5. Trong quá trình này có sự nhảy vọt từ trạng thái bền ứng với điểm 1 (U_1, I_1) sang trạng thái bền ứng với điểm 2 (U_1, I_2), kèm theo sự nhảy vọt của dòng và áp trên các phần tử, ví dụ từ I_1 nhảy lên I_2. Khi giảm điện áp (từ $U > U_1$) xuống đến 0 mạch sẽ làm việc theo đoạn 5—2—3 rồi 4—0. Cũng có nhảy vọt từ trạng thái ứng với điểm 3 (U_3, I_3) sang trạng thái ứng với điểm 4 (U_3, I_4). Như vậy đã xảy ra hiện tượng trigơ tại $U = U_1$ và $U = U_3$. Nếu cung cấp mạch bằng nguồn điện áp thì mạch sẽ không làm việc ổn định trong đoạn 1-3. Từ h. 15-12, tất nhiên muốn có được toàn bộ đường đặc tính $U(I)$, phải cung cấp mạch bằng một nguồn dòng điện: khi biến thiên liên tục I sẽ không có hiện tượng trigơ trong mạch nữa.

Riêng tại điểm 3, xảy ra *cộng hưởng điện áp đối với điều hòa cơ bản*: $U_{L1\,3} = U_{C1\,3}$. Như vậy khác hẳn với mạch tuyến tính, đối với mạch phi tuyến *bằng cách thay đổi độ lớn nguồn kích thích có thể có hiện tượng cộng hưởng.*

2. Hiện tượng trigơ trong mạch ghép song song cuộn dây lõi thép và tụ tuyến tính.

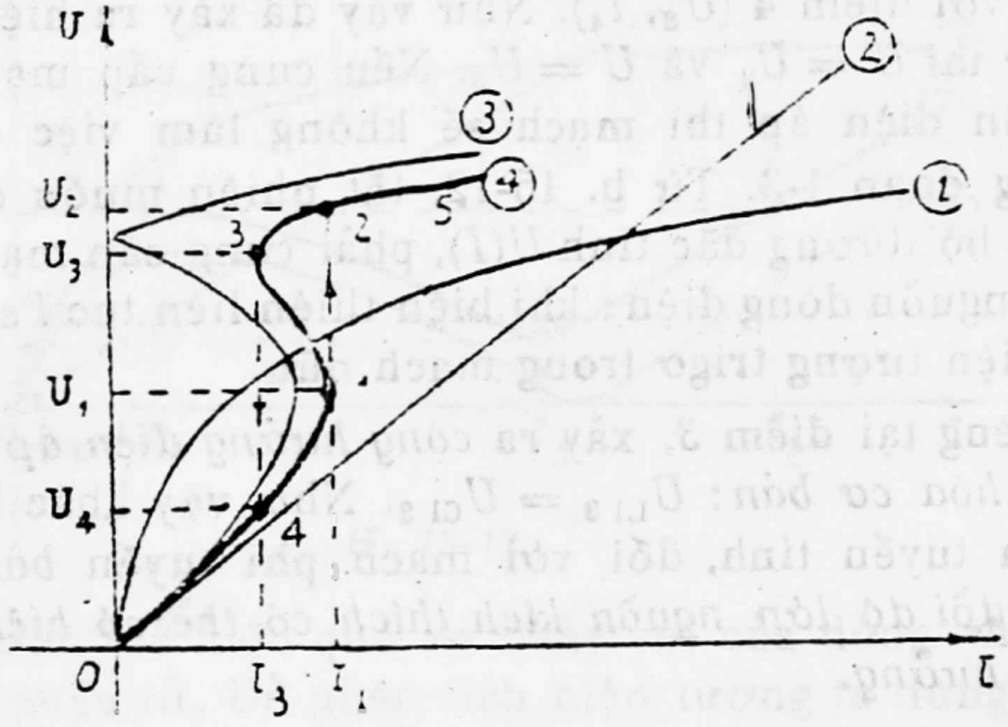
Cung cấp cho mạch nối song song một tụ tuyến tính với cuộn dây lõi sắt (h. 15-13) bằng một *nguồn dòng hình sin*. Khi thay đổi liên tục hiệu dụng I, có thể

quan sát thấy hiện tượng trigơ trong mạch thể hiện qua sự nhảy vọt điện áp và dòng điện trên các phần tử. Lý luận tương tự như trường hợp trên ta có đặc tính $U(I)$ lý tưởng đường (3) và đặc tính thực tế $U(I)$ đường (4). Chúng có dạng chữ S như 15-14.



H. 15-13

Khi tăng nguồn I từ không trở lên, mạch làm việc theo đoạn 0—1 sau đó chuyển qua đoạn 2—5. Khi giảm nguồn từ $I > I_1$ mạch làm việc theo đoạn 5—2—3 sau đó chuyển qua đoạn 1—0. Hiện tượng trigơ xảy ra tại trạng thái ứng với $I = I_1$ và $I = I_3$. Ở đoạn 1—3 mạch sẽ làm việc không ổn định nếu cung



H. 15-14

cấp bằng nguồn dòng điện. Muốn có toàn bộ đường $U(I)$ phải cung cấp cho mạch bằng nguồn điện áp: khi biến thiên liên tục điện áp U sẽ không có hiện tượng trigơ

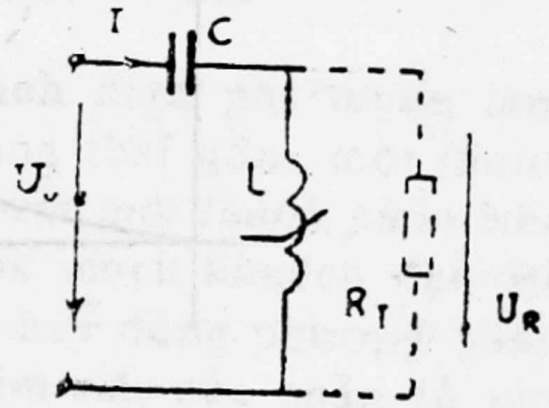
nữa. Tại điểm 3 trong mạch xảy ra *hiện tượng cộng hưởng dòng điện ứng với tần số cơ bản*: $I_{L1\,3} = I_{C1\,3}$.

Vậy tóm lại *bằng cách thay đổi liên tục trị hiệu dụng của nguồn kích thích có thể quan sát thấy hiện tượng trigơ, và hiện tượng cộng hưởng trong mạch ghép cuộn dây lõi sắt và tụ điện. Tất nhiên trong những mạch này bằng cách thay đổi tần số nguồn cũng có thể quan sát thấy hiện tượng trigơ.*

Trong thực tế, hiện tượng trigơ và cộng hưởng sắt từ có thể xảy ra trong những trường hợp máy biến áp làm việc với tải điện dung, điều đó có thể gặp trong các mạch có máy biến áp thí nghiệm. Hiện tượng trigơ trong mạch phi tuyến được ứng dụng để chế tạo nhiều thiết bị trong các ngành kỹ thuật điện như: rơle không tiếp điểm, một số phần tử nhớ trong máy tính điện tử...

§ 15-5. ỔN ÁP SẮT TỪ

Ta thường dùng các phần tử phi tuyến có đặc tính bão hòa để làm thiết bị ổn áp (và ổn dòng). Đó là những thiết bị dùng để duy trì một điện áp gần như cố định ở cửa ra, để cung cấp cho tải, khi điện áp ở cửa vào biến động nhiều.

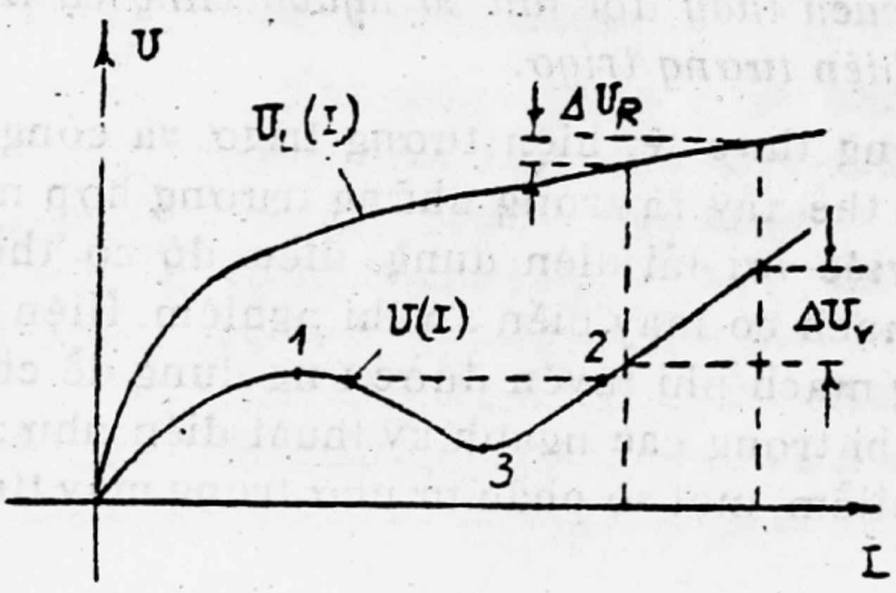


H. 15-15

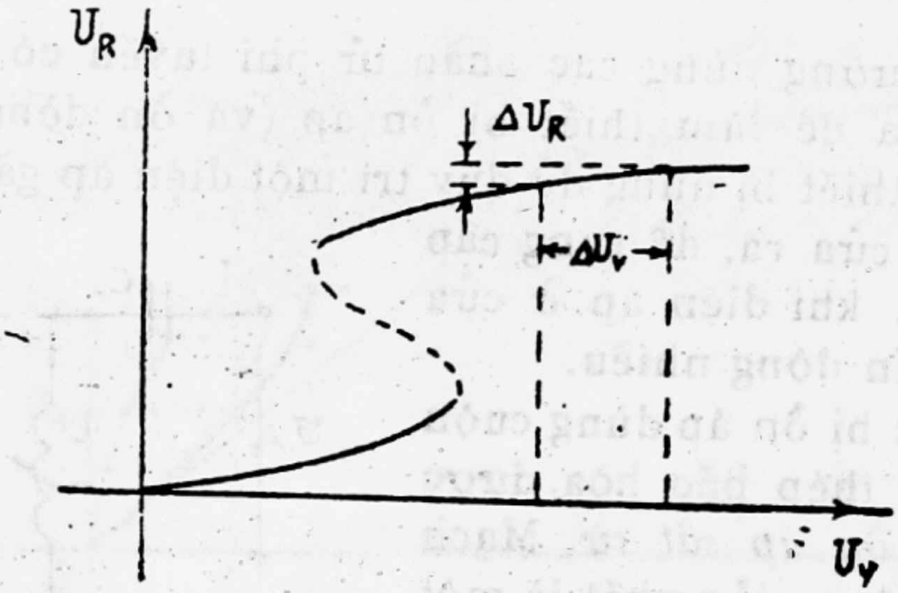
Thiết bị ổn áp dùng cuộn dây lõi thép bão hòa được gọi là *ổn áp sắt từ*. Mạch ổn áp đơn giản nhất là một cuộn dây lõi thép nối tiếp với một tụ tuyến tính như h. 15-15. Đặc tính $U(I)$ của mạch khi không tải (và cả khi dòng của tải nhỏ) có dạng như đường (4) h. 15-12, đường cong này được vẽ

lại trên h. 15-16. Trên hình này còn vẽ thêm đường cong $U_L(I)$, tức quan hệ giữa điện áp ra với dòng I khi không tải.

Theo các đường đặc tính này thấy rằng, kể từ điểm 2 trở đi (đoạn làm việc) tuy điện áp vào biến động



H. 15-16



H. 15-17

nhiều nhưng điện áp ra biến động ít, tức điện áp ra được ổn định. Đặc tính $U_r(U_v)$ đặc trưng cho ổn áp ứng với một tải nào đó vẽ trên h. 15-17.

Để đánh giá độ ổn định ta dùng *hệ số ổn áp*. Nó bằng tỉ số độ biến động tương đối của điện áp vào với độ biến động tương đối của điện áp ra:

$$k_{ổ} = \frac{\Delta U_v}{U_v} : \frac{\Delta U_r}{U_r}. \qquad (15\text{-}10)$$

Hệ số ổn áp càng lớn, chất lượng ổn áp càng tốt. Nó phụ thuộc tải, khi tăng tải (giảm R_T) hệ số ổn áp thường giảm.

Ổn áp đơn giản vẽ trên h. 15-15 thường có độ ổn áp không cao lắm, để được độ ổn áp cao hơn người ta dùng những ổn áp sắt từ có sơ đồ phức tạp hơn.

Ổn áp sắt từ có ưu điểm đơn giản. Nhưng nó có nhược điểm là hình dạng điện áp ra thường rất khác hình sin khi điện áp vào hình sin. Để được điện áp ra gần hình sin người ta chế tạo những ổn áp sắt từ đặc biệt có bộ lọc khử các điều hòa cao trong điện áp ra.

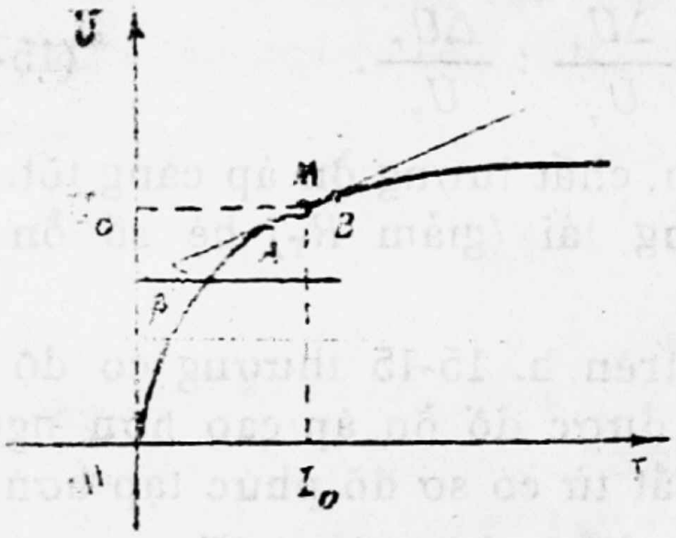
§ 15-6. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA ĐOẠN ĐẶC TÍNH LÀM VIỆC CỦA PHẦN TỬ PHI TUYẾN

Trong thực tế có nhiều mạch điện phi tuyến làm việc ở chế độ đặc biệt với trạng thái gồm một *thành phần không đổi đủ lớn, cộng thêm một thành phần biến thiên nhỏ*. Ví dụ trạng thái các mạch khuếch đại. Để tính toán những chế độ này ta hay dùng phương pháp *tuyến tính hóa đoạn đặc tính làm việc* của phần tử phi tuyến.

Nội dung phương pháp như sau:

Trong trường hợp này vì thành phần biến thiên đủ nhỏ, nên trên đường đặc tính, phạm vi làm việc của phần tử phi tuyến sẽ ở trong một lân cận nhỏ quanh

điểm làm việc ứng với thành phần một chiều, ví dụ đoạn AB quanh điểm M (h. 15-18) của điện trở phi tuyến. Vì vậy để tính thành phần biến thiên của dòng và áp trong mạch ta có thể thay gần đúng bậc nhất đoạn đặc tính phần tử phi tuyến đó bằng một đoạn thẳng tiếp tuyến tại điểm M. Như vậy ta đã tuyến tính hóa đường đặc tính hay nói cách khác ta đã thay phần tử phi tuyến bằng một phần tử tuyến tính có:



H. 15-18

$$R = R_d(M) = \frac{\partial u}{\partial i}(M) = \operatorname{tg}\beta. \qquad (15\text{-}11)$$

Trình tự tính bằng phương pháp tuyến tính hóa đoạn đặc tính gồm 2 bước như sau:

1 — Tính mạch phi tuyến ở chế độ một chiều để xác định thành phần một chiều của dòng và áp trong mạch. Từ đó xác định được điểm làm việc M trên đường đặc tính phần tử phi tuyến.

2 — Xác định thành phần xoay chiều: giải mạch tuyến tính hóa tương đương, trong đó phần tử phi tuyến được thay bằng một điện trở tuyến tính $R_d(M)$.

Ví dụ 15-6.

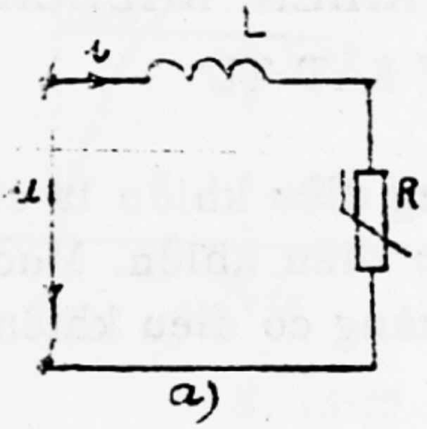
Mạch điện h. 15-19a được cung cấp bằng một nguồn áp

$$u = 110 + 10 \sin 2\omega t \text{ V}$$

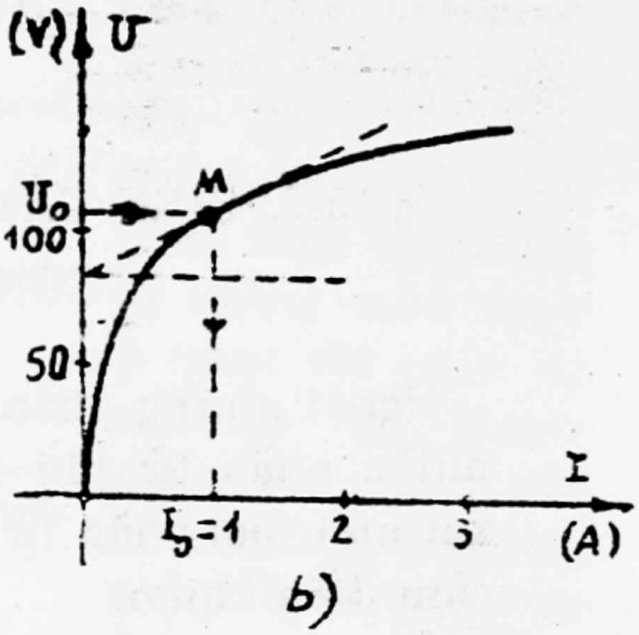
Điện cảm $L = 0{,}1$H. Đặc tính điện trở phi tuyến cho trên h. 15-19b. Tìm dòng i trong mạch. Biết $f = 50Hz$.

Giải: Vì thành phần xoay chiều nhỏ, ta dùng phương pháp tuyến tính hóa đoạn đặc tính để giải bài toán.

1 — Tìm thành phần dòng một chiều:



H. 15-19



H. 15-19 b

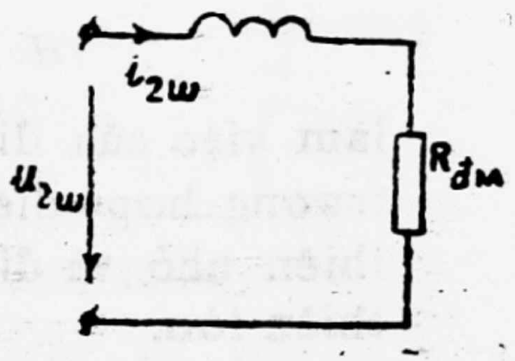
Trong mạch điện một chiều ở chế độ xác lập điện áp trên điện cảm bằng không, do đó toàn bộ điện áp $U_o = 110\,V$ đặt trên điện trở R. Theo đường đặc tính $U(I)$ của điện trở này ta tìm được $I_o = 1A$.

2 — Tính thành phần dòng xoay chiều.

Từ đồ thị h. 15-19 ta có:

$$R_d(M) = \frac{\partial U}{\partial I}(M) \# \frac{\Delta U}{\Delta I}(M) = 25\,\Omega.$$

Vì thành phần biến thiên của kích thích là hình sin ta nên dùng phương pháp số phức tính thành phần biến thiên của đáp ứng dòng. Theo sơ đồ tương đương h. 15-20 ta có:



H. 15-20

$$\dot{I}_{m2\,\omega} = \frac{\dot{U}_{m2\,\omega}}{R_{d_M} + j2\omega L} = \frac{10/\underline{0^\circ}}{25 + j2.2\pi . 50 . 0{,}1} = 0{,}148/\underline{-58{,}3^\circ}\,A$$

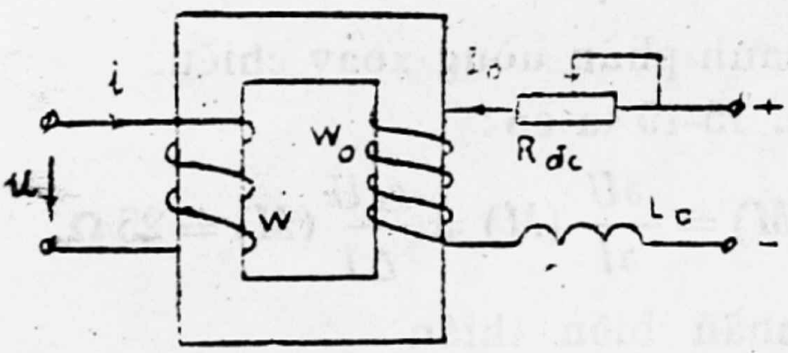
Vậy dòng điện chảy trong mạch :

$$i \# 1 + 0{,}148 \sin (2\omega t - 58{,}3^\circ)\,A.$$

§ 15-7. ĐIỆN CẢM ĐIỀU KHIỂN. KHUẾCH ĐẠI CÔNG SUẤT SẮT TỪ

Ngoài những phần tử không điều khiển ta còn dùng nhiều phần tử phi tuyến có điều khiển. Mục này sẽ xét một loại phần tử phản kháng có điều khiển là điện cảm điều khiển.

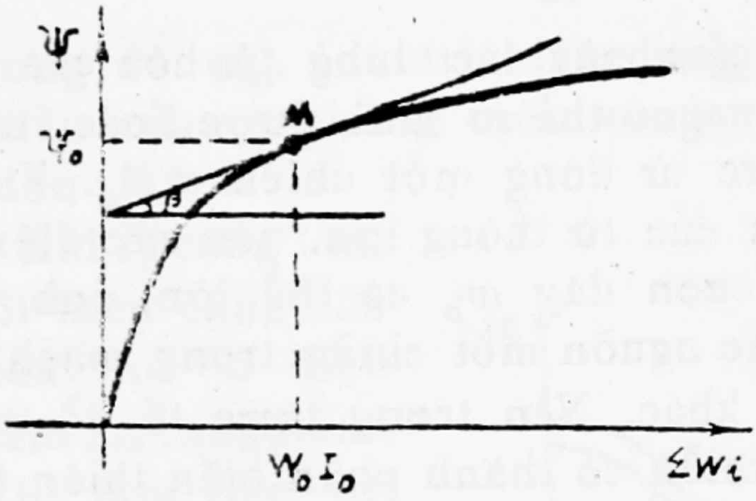
Điện cảm điều khiển đơn giản nhất gồm một lõi thép trên đó quấn hai cuộn dây : cuộn làm việc w và cuộn điều khiển w_o (h. 15-21). Điện trở R_{dc} để thay đổi được dòng điều khiển I_o, điện cảm L_o để hạn chế thành phần dòng điện biến thiên trong mạch một chiều.



H. 15-21

Bằng cách thay đổi dòng một chiều điều khiển I_o, ta thay đổi được điện cảm của cuộn dây làm việc w. Để giải thích nguyên lý làm việc của điện cảm điều khiển ta chia ra làm hai trường hợp: điện cảm làm việc với thành phần biến thiên nhỏ và điện cảm làm việc với thành phần biến thiên lớn.

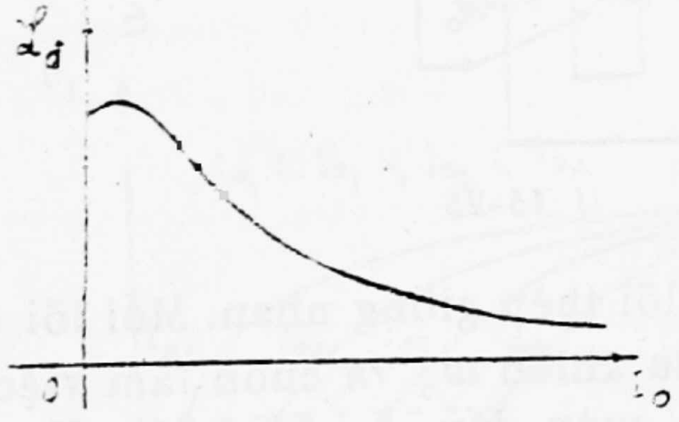
1. Điện cảm làm việc với thành phần biến thiên nhỏ. Đối với điện cảm này tác dụng từ hóa của sức từ động xoay chiều wi nhỏ so với tác dụng của sức từ động $w_0 I_0$. Vì vậy thành phần biến thiên của từ thông móc vòng ψ (móc với cuộn w) nhỏ so với thành phần một chiều của nó. Dùng phương pháp tuyến tính hóa đoạn đường đặc tính, ta tính được điện cảm (động) của cuộn dây làm việc ứng với dòng điện I_0, xem (h. 15-22):



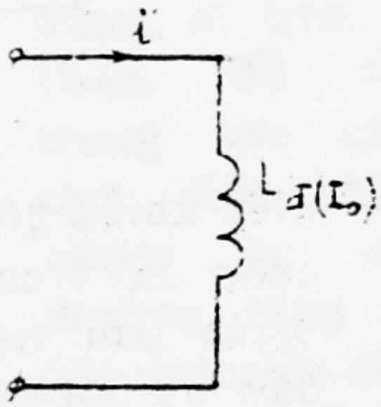
H. 15-22

$$L_d = \frac{\partial \psi}{\partial I_0}(M) \equiv \operatorname{tg}\beta \qquad (15\text{-}12)$$

Khi I_0 thay đổi, vị trí điểm làm việc M trên đường đặc tính thay đổi theo tức L_d biến thiên $L_d = L_d(I_0)$.



H. 15-23



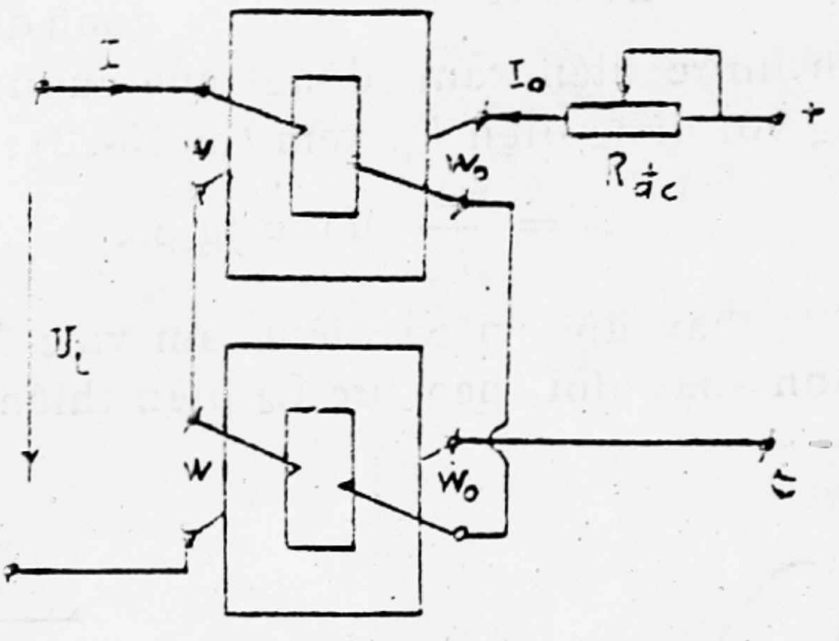
H. 15-24

Khi I_0 càng lớn, lõi thép càng bão hòa, L_d càng giảm. Quan hệ $L_d(I_0)$ được vẽ trên h. 15-23. Đối với cuộn dây công tác (h. 15-24) điện cảm L_d được coi là tuyến

tinn (chỉ phụ thuộc dòng điện điều khiển I_o, không phụ thuộc dòng điện i).

2. Điện cảm điều khiển làm việc với thành phần biến thiên lớn.

Đối với điện cảm này tác dụng từ hóa của sức từ động xoay chiều wi có thể so sánh được hoặc vượt quá tác dụng của sức từ động một chiều $w_o I_o$. Vì thành phần biến thiên của từ thông lớn, nên sức điện động cảm ứng trong cuộn dây w_o có thể lớn, ảnh hưởng không tốt đến các nguồn một chiều trong mạch w_o và những hậu quả khác. Nên trong thực tế để tạo một điện cảm điều khiển có thành phần biến thiên lớn, ta thường dùng sơ đồ h. 15-25. Theo sơ đồ này điện cảm



H 15-25

điều khiển gồm hai lõi thép giống nhau. Mỗi lõi có hai cuộn dây : cuộn điều khiển w_o và cuộn làm việc w. Ở mạch làm việc, hai cuộn dây w nối thuận. Hai cuộn dây w_o nối ngược để khử sức điện động cảm ứng trong mạch điều khiển.

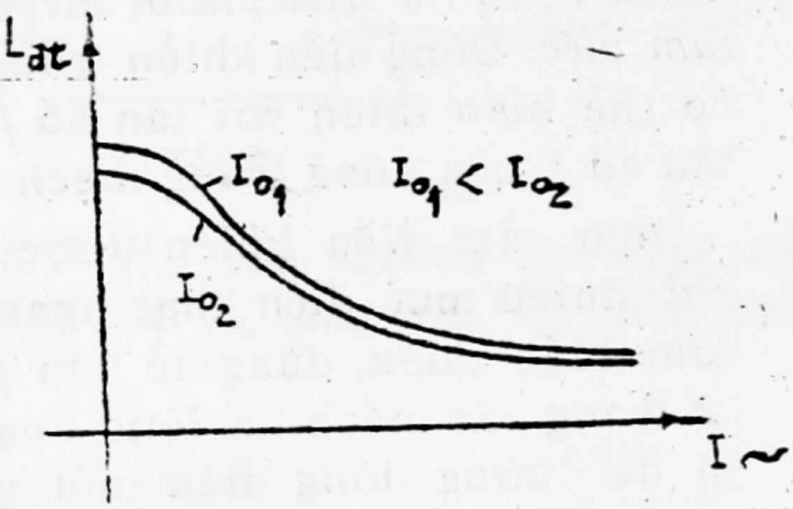
Khi đặt vào mạch làm việc một điện áp hình sin u_L dòng [illegible] sẽ khác sin. Dùng khái niệm hình sin

tương đương và tuyến tính hóa qui ước ta đưa ra khái niệm điện cảm tương đương của cuộn dây làm việc:

$$L_{td} = \frac{U_L}{\omega I} = \frac{\psi_{hd}}{I}, \qquad (15\text{-}13)$$

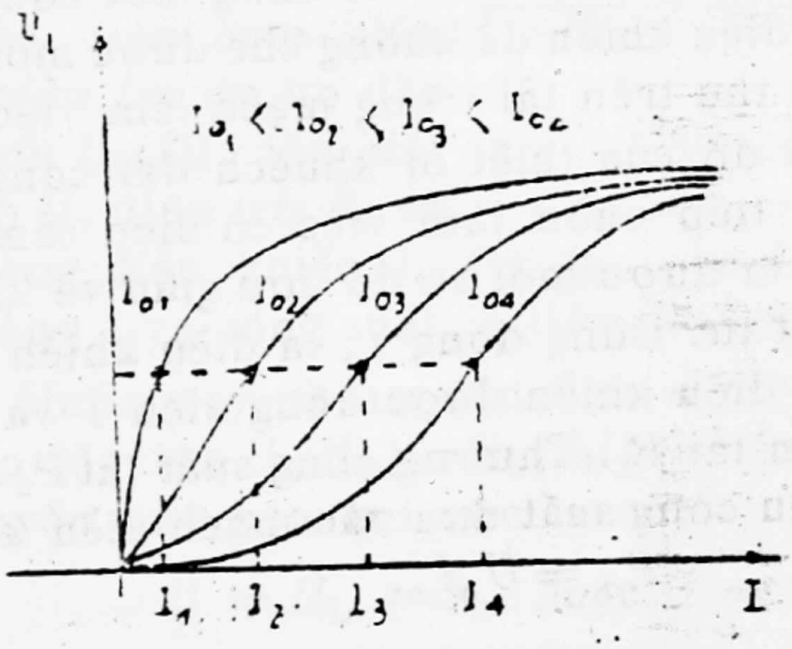
trong đó ψ_{hd}, I là trị hiệu dụng của thành phần xoay chiều của từ thông móc vòng và dòng điện qua các cuộn dây w.

Khi I_o càng lớn, lõi thép càng bão hòa do đó điện cảm L_{td} càng giảm. Khi làm việc với thành phần xoay chiều lớn, điện cảm điều khiển phải coi là điện cảm phi tuyến, không những phụ thuộc dòng điều khiển I_o mà còn phụ thuộc cả dòng công tác I nữa:



H. 15-26

$$L_{td} = L_{td}(I, I_o). \qquad (15\text{-}14)$$



H. 15-27

Quan hệ này được vẽ trên h. 15-26. Để đặc trưng cho điện cảm điều khiển người ta còn thường dùng họ đặc tính biểu diễn quan hệ $U_L = U_L(I, I_o)$ (h.15-27). Họ đặc tính này minh họa rõ với

Vậy dòng I_o đã điều khiển được chế độ làm việc của mạch xoay chiều.

Từ họ đặc tuyến cũng thấy rằng khi lõi thép làm việc ở tình trạng bão hòa tác dụng điều khiển của I_o giảm đi vì khi I càng lớn các đường cong càng xít lại nhau.

Điện cảm điều khiển làm việc với thành phần biến thiên lớn hay nhỏ đều có đặc tính chung là: *dòng điều khiển I_o có thể điều chỉnh được điện cảm của cuộn dây làm việc.* Dòng điều khiển trong trường hợp chung cũng có thể biến thiên với tần số f_o nhỏ hơn nhiều so với tần số f của dòng trong mạch làm việc.

Điện cảm điều khiển được ứng dụng trong thực tế với nhiều mục đích khác nhau. Ví dụ: dùng làm điện cảm biến thiên, dùng để làm khuếch đại công suất sắt từ trong các mạch tự động hoặc dùng để chế tạo thiết bị đo lường dòng điện một chiều hay dùng trong các sơ đồ máy phát dao động biến điệu...

Dưới đây ta xét kỹ một ứng dụng phổ biến của điện cảm điều khiển: khuếch đại công suất sắt từ.

3. Khuếch đại công suất sắt từ.

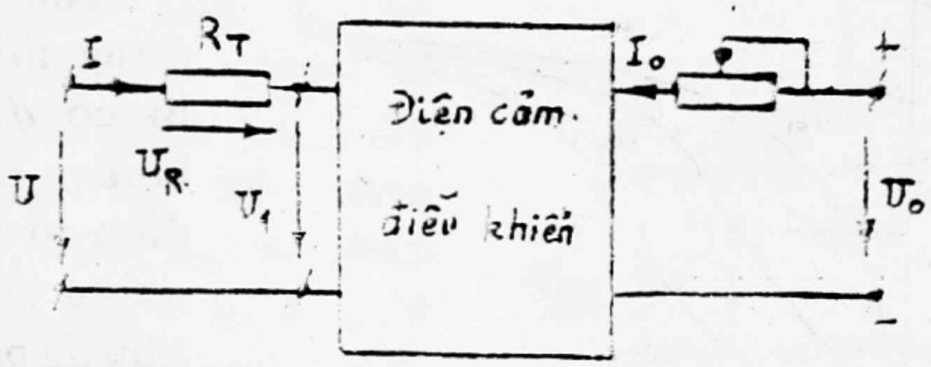
Khuếch đại công suất là thiết bị dùng một công suất nhỏ trong mạch điều khiển để khống chế được một công suất rất lớn tiêu thụ trên tải trong mạch làm việc.

H. 15-28 vẽ sơ đồ của thiết bị khuếch đại công suất sắt từ: mắc nối tiếp cuộn làm việc có điện cảm điều khiển với tải R_t ta được một sơ đồ đơn giản về khuếch đại công suất sắt từ. Dùng dòng I_o ta điều khiển được điện cảm do đó điều khiển được dòng điện I và công suất tiêu thụ trên tải R_t. Thường công suất tải $P_t = RI^2$ lớn hơn rất nhiều công suất đưa vào mạch điều khiển:

$$P_o = U_o I_o.$$

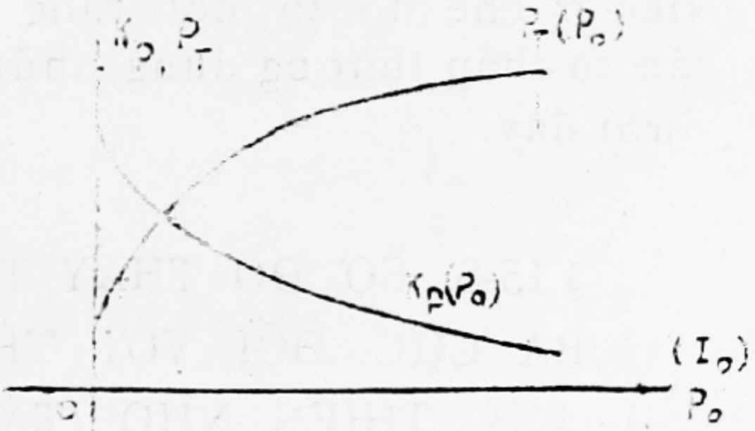
Để đặc trưng cho tác dụng điều khiển của khuếch đại công suất người ta dùng hệ số khuếch đại công suất:

$$K_P = \frac{\Delta P_t}{\Delta P_o} = K(P_o). \qquad (15\text{-}15)$$



H. 15-28

Đặc tính $K(P_o)$ và $P_t(P_o)$ của khuếch đại công suất sắt từ vẽ trên h. 15-29. Khi I_o càng lớn, lõi thép càng bão hòa, tác dụng làm thay đổi điện cảm của L_t càng giảm, do đó dòng điện I thay đổi ít, tác dụng khống chế của I_o càng giảm.



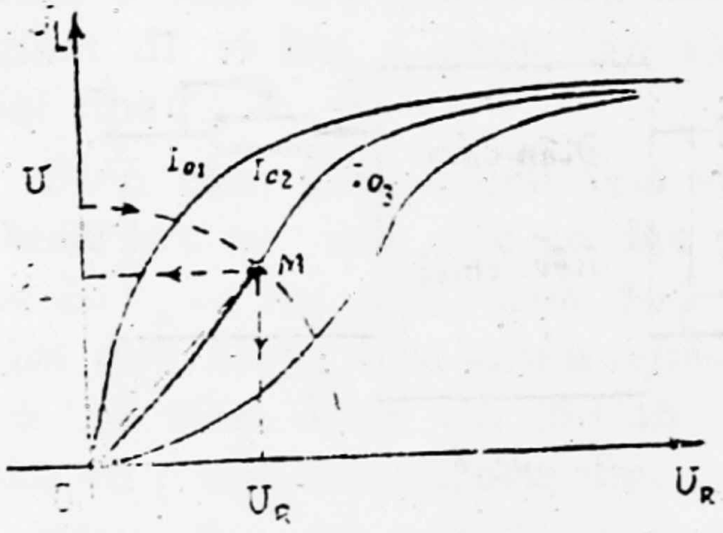
H. 15-29

Dựa vào đặc tính của điện cảm điều khiển (ví dụ họ đặc tính $U_L(I)$), nếu biết áp U, điện trở R_t và dòng điều khiển I_o (ví dụ $I_o = I_{o2}$), có thể tìm được dòng I và công suất P_t tiêu thụ trên tải.

Muốn vậy từ họ đặc tính $U_L(I)$ (h. 15-27) ta vẽ ra họ đặc tính $U_L(U_R) = U_L(R_t I)$ (h. 15-30). Theo quan niệm tuyến tính hóa qui ước ta có:

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_R, \text{ hoặc } U = \sqrt{U_L^2 + U_R^2}. \qquad (15\text{—}16)$$

Từ đó ta suy ra cách tìm điện áp U_R (xem h. 15-30). Biết U_R suy ra $I = \frac{U_R}{R_t}$ và công suất $P_t = R_t I^2$.



H. 15-30

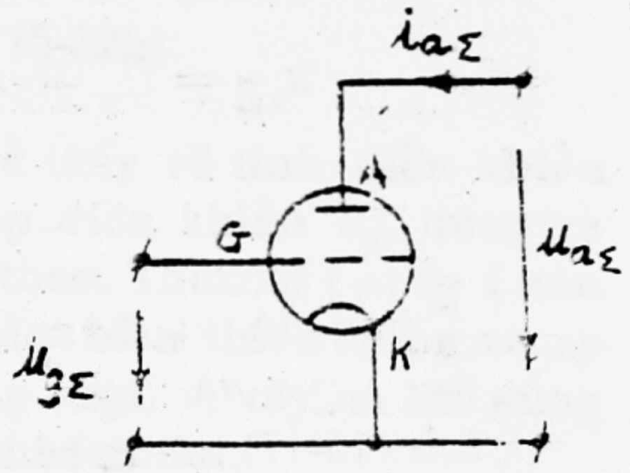
Ngoài ra, ta còn dùng nhiều loại thiết bị có *điện trở điều khiển*; đó là các đèn điện tử hay bán dẫn nhiều cực. Chúng là những phần tử thuần trở phi tuyến đặc trưng bởi những họ đặc tính V — A. Để tính mạch có đèn điện tử hay bán dẫn 3 cực, nhất là khi chúng làm việc ở chế độ có một trạng thái biến thiên nhỏ và ở tần số thấp thường dùng những sơ đồ thay thế dẫn ra dưới đây.

§ 15-8. SƠ ĐỒ THAY THẾ ĐÈN ĐIỆN TỬ BA CỰC ĐỐI VỚI THÀNH PHẦN BIẾN THIÊN NHỎ (TẦN SỐ THẤP)

Đèn điện tử ba cực là một linh kiện dùng rất phổ biến trong các mạch khuếch đại, tạo sóng, các mạch đo lường, điều khiển tự động v.v... Các hiện tượng trong đèn khá phức tạp. Nhưng coi là một phần tử mạch, ta có thể dẫn ra cho nó một sơ đồ đơn giản để tính các hệ thống có đèn.

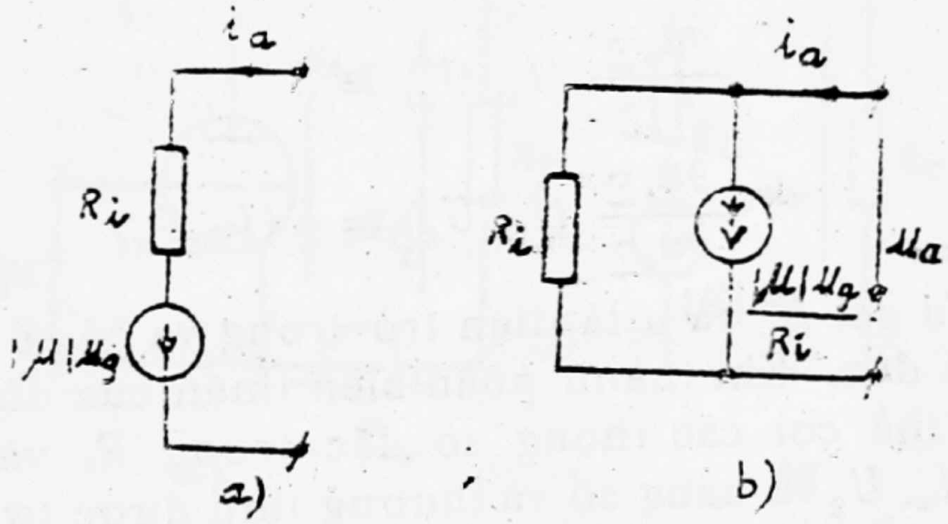
H. 15-31 vẽ sơ đồ ký hiệu của một đèn ba cực điện tử. Khi không có tín hiệu biến thiên trong mạch, điện áp một chiều giữa anôt và katôt của đèn là U_a, dòng

điện một chiều anôt là I_a, điện áp một chiều giữa lưới và katôt là U_g. Khi có thêm tín hiệu biến thiên nhỏ u_g đặt vào lưới, dòng anôt sẽ thêm một lượng biến thiên nhỏ i_a, và giữa anôt và katôt sẽ thêm một điện áp biến thiên nhỏ u_a. Ký hiệu $u_{a\Sigma} = U_a + u_a$ là điện áp anot, $i_{a\Sigma} = I_a + i_a$ là dòng anôt, $u_{g\Sigma} = U_g + u_g$ là điện áp lưới. Dòng chảy vào lưới thường nhỏ, có thể bỏ qua, nên đặc trưng cho đèn chỉ là 1 quan hệ phi tuyến giữa $u_{a\Sigma}$ với hai biến $i_{a\Sigma}$, $u_{g\Sigma}$:



H. 15-31

$$u_{a\Sigma} = u_{a\Sigma}(i_{a\Sigma}, u_{a\Sigma}).$$



H. 15-32

Nhưng khi thành phần biến thiên nhỏ so với thành phần một chiều ta có thể dùng *phương pháp tuyến tính hóa đoạn đường đặc tính* để tìm quan hệ tuyến tính giữa các thành phần biến thiên và từ đó đưa ra *sơ đồ thay thế cho đèn ba cực.*

Muốn vậy khai triển $u_{a\Sigma}$ ra chuỗi lũy thừa quanh các trị không đổi I_a, U_g, bỏ qua các số hạng bậc cao ta được :

$$u_{a\Sigma} = U_a + u_a = U_a + \frac{\partial u_{a\Sigma}}{\partial i_{a\Sigma}}(I_a, U_g)\, i_a + \frac{\partial u_{a\Sigma}}{\partial u_{g\Sigma}}(I_a, U_g)\, u_g. \qquad (15\text{-}17)$$

Trong đó vì thành phần biến thiên nhỏ, ta đã coi $i_a = i_{a\Sigma}$; và $u_g = u_{g\Sigma}$. Cân bằng hai vế phương trình (15-17) riêng rẽ cho các thành phần không đổi và biến thiên, ta được quan hệ giữa các thành phần biến thiên :

$$u_a = \frac{\partial u_{a\Sigma}}{\partial i_{a\Sigma}}(I_a, U_g)\, i_a + \frac{\partial u_{a\Sigma}}{\partial u_{g\Sigma}}(I_a, U_g)\, u_g = R_i\, i_a + \mu u_g \qquad (15\text{-}18)$$

trong đó ta đặt :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_{a\Sigma}}{\partial i_{a\Sigma}}(I_a, U_g) &= R_i(I_a, U_g) \\ \frac{\partial u_{a\Sigma}}{\partial u_{g\Sigma}}(I_a, U_g) &= \mu(I_a, U_g) \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}19)$$

Ta gọi R_i và μ là điện trở trong và hệ số khuếch đại của đèn. Khi thành phần biến thiên của dòng, áp nhỏ, có thể coi các thông số đặc trưng R_i và μ ứng với trị I_a, U_g là hằng số và thương tính được từ các họ đặc tính của đèn. Dưới đây để tính các lượng biến thiên nhỏ, ta coi các thông số ấy là đã biết. Chú ý theo định nghĩa trên μ có trị số âm ; để tiện tính toán ta viết lại phương trình (15-18) dưới dạng :

$$u_a = R_i\, i_a - |\mu|\, u_g = R_i\, i_a - \varepsilon. \qquad (15\text{-}20)$$

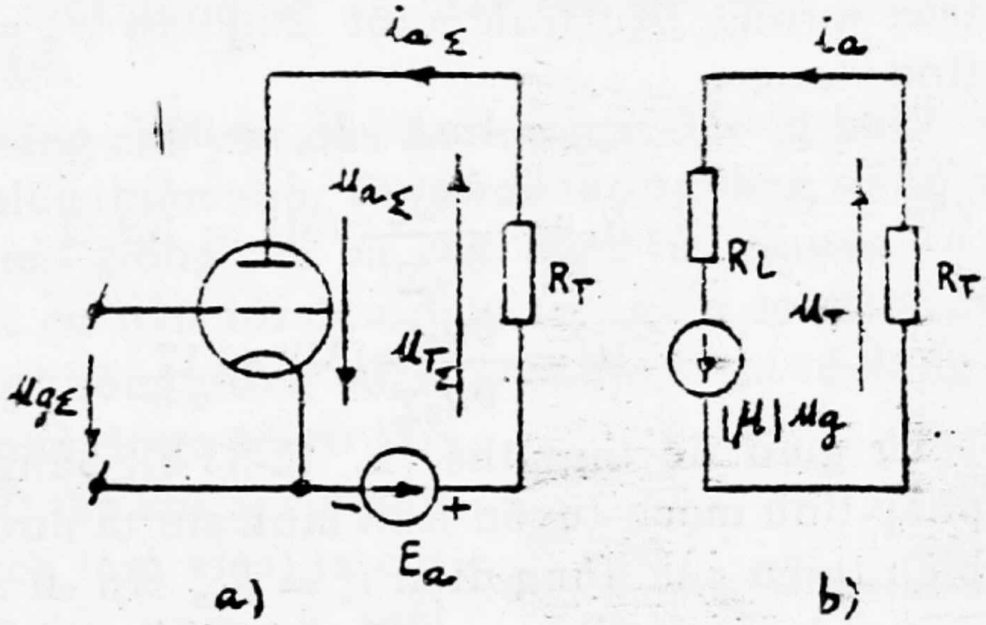
Từ (15-20) thấy rằng đối với thành phần biến thiên nhỏ một đèn điện tử ba cực được mô tả bằng một

mạng 2 cực có nguồn với điện trở trong R_t và một sức điện động $e = |\mu| u_g$ phụ thuộc vào điện áp điều khiển u_g đặt vào lưới đèn (h. 15-32a), hoặc một nguồn dòng điện $\frac{|\mu| u_g}{R_t}$ (h. 15-32b).

Từ giản đồ thay thế có thể thấy rõ tính điều khiển của đèn. Khi thay đổi điện áp điều khiển u_g, dòng và áp trong mạch cũng thay đổi theo. Thường $|\mu| \gg 1$ nên nói chung đối với thành phần biến thiên dòng và áp trên anôt lớn hơn dòng và áp lưới, vì vậy có thể dùng đèn 3 cực để lập các mạch khuếch đại.

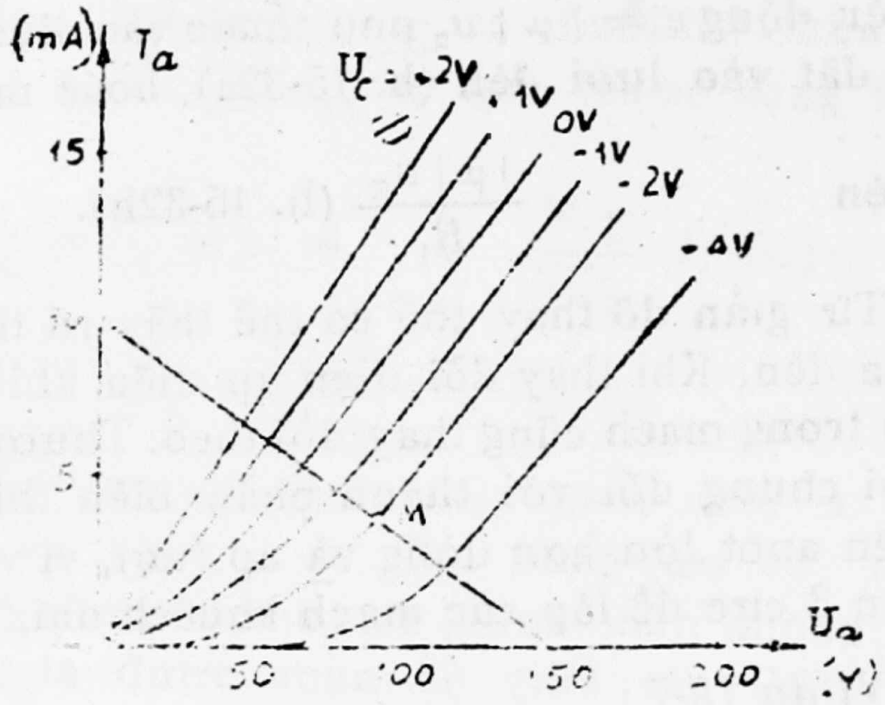
Ví dụ 15-7

Cho một mạch khuếch đại bằng đèn điện tử ba cực vẽ trong (h. 17-33a). Họ đặc tính anôt của đèn cho trên



H. 15-33

(h. 15-34). Điện áp lưới $u_{g\Sigma} = U_g + u_g = (-2 + 0{,}05 \sin \omega t)$ V, sức điện động cung cấp $E_a = 150$V, điện trở tải $R_t = 15k\Omega$. Tìm thành phần biến thiên của áp trên tải và hệ số khuếch đại áp.



H. 15-34

Giải

Đèn làm việc trong đoạn đặc tính lân cận điểm M. trên đường đặc tính ứng với $U_g = -2V$. Từ đó tính được :

$$I_a = 4\text{mA} \; ; \; U_a = 90V$$

và :

$$R_i = \frac{\partial u_a \Sigma}{\partial i_a \Sigma} \text{ (M)} = 10^4 \; \Omega.$$

$$|\mu| = \frac{\partial u_a \Sigma}{\partial u_g \Sigma} \text{ (M)} = 17$$

Từ giản đồ thay thế (h. 15-33 b), bằng các phương pháp tính mạch tuyến tính hình sin ta được thành phần biến thiên của dòng điện $i_a = I_{am} \sin \omega t$:

$$I_{am} = \frac{|\mu| U_{gm}}{R_i + R_t} = \frac{17 \; . \; 0.05}{10^4 + 15 \; . \; 10^3} = 3.39 \; . \; 10^{-5} \text{ A.}$$

$$U_{tm} = I_{am} R_t = 0{,}509 \text{ V.}$$

Vậy :

$$u_t = 0.509 \sin \omega t \text{ V.}$$

Hệ số khuếch đại áp bằng :

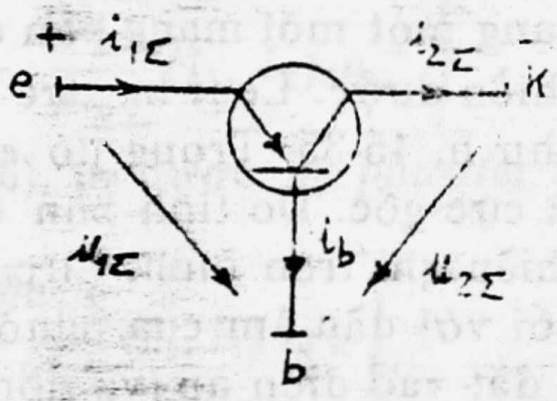
$$K_U = \frac{U_{tm}}{U_{gm}} = \frac{0{,}509}{0{,}05} = 10{,}15$$

§ 15-9. SƠ ĐỒ THAY THẾ BA CỰC BÁN DẪN ĐỐI VỚI THÀNH PHẦN BIẾN THIÊN NHỎ (TẦN SỐ THẤP)

Do những ưu điểm riêng, ngày nay ba cực bán dẫn ngày càng được dùng phổ biến trong mọi ngành kỹ thuật, trong kỹ thuật VTĐ, đo lường — điều khiển, khuếch đại, tạo sóng cũng như trong kỹ thuật máy tính v.v... Vì vậy nắm vững sơ đồ thay thế ba cực bán dẫn, vận dụng nó trong tính toán kỹ thuật là một yêu cầu thực tế và cơ bản.

Đi sâu nghiên cứu nắm vững những hiện tượng vật lý cơ bản của đèn bán dẫn là một việc phức tạp. Nhưng ta cần hiểu rõ một ba cực bán dẫn như là một phần tử mạch, biết dùng sơ đồ thay thế để tính toán mạch có bán dẫn.

Chức năng chủ yếu của ba cực bán dẫn là khuếch đại tín hiệu biến thiên nhỏ. Vì vậy dễ tưởng rằng sơ đồ mạch của nó phải giống của ba cực điện tử. Nhưng có một điều khác cơ bản với đèn điện tử khiến sơ đồ thay thế của chúng không giống nhau. Ở ba cực điện tử dòng điện lưới rất nhỏ, thực tế có thể bỏ qua. Vì thế khi xét mạch anốt (mạch làm việc) ta coi đèn điện tử như là một mạng hai cực (1 cửa) với điện áp và dòng điện vào là $u_{a\Sigma}$ và $i_{a\Sigma}$. Tất nhiên quan hệ giữa các lượng vào này là một quan hệ phi tuyến tùy thuộc vào điện áp lưới $u_{g\Sigma}$. Nhưng ở ba cực bán dẫn, cùng với điện áp $u_{1\Sigma}$ còn có dòng vào đáng kể $i_{1\Sigma}$ (h. 15-35) và đó bản

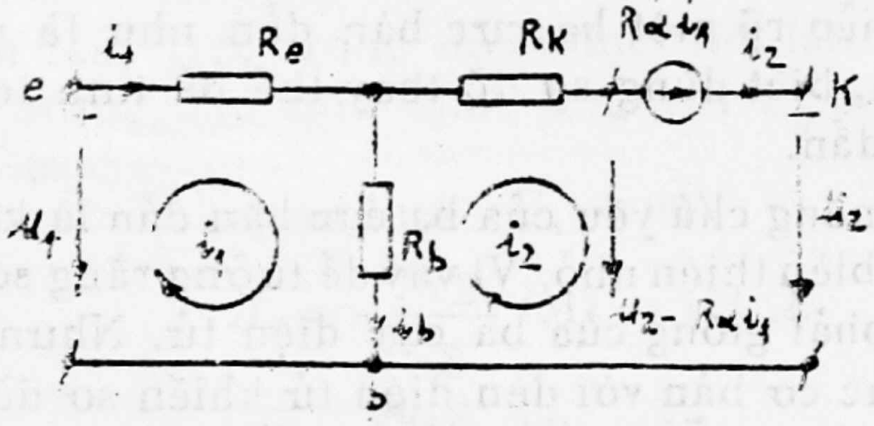


H. 15-35

chất vật lý của ba cực bán dẫn, chính *dòng vào có tác dụng quyết định đối với dòng ra* $i_{2\Sigma}$ và do đó ảnh hưởng đến điện áp ra $u_{2\Sigma}$. Tính chất này được vận dụng để dùng đèn ba cực bán dẫn trong mạch khuếch đại. Vì vậy về sơ đồ mạch có thể coi ba cực bán dẫn là một mạng bốn cực với kích thích ví dụ coi là dòng, và đáp ứng là các áp. Do đó có thể viết quan hệ giữa các kích thích và đáp ứng là:

$$\left.\begin{aligned} u_{1\Sigma} &= u_{1\Sigma}(i_{1\Sigma}, i_{2\Sigma}), \\ u_{2\Sigma} &= u_{2\Sigma}(i_{1\Sigma}, i_{2\Sigma}). \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}23)$$

Đó là những quan hệ phi tuyến có dạng phương trình mạng bốn cực.



H. 15-36

Ta sẽ dẫn ra sơ đồ thay thế của ba cực bán dẫn dưới dạng một một mạng bốn cực phi tuyến có thông số điều khiển được. Loại ba cực bán dẫn *p-n-p* được vẽ kí hiệu như h. 15-35. Trong đó *e* là cực phát, *k* là cực góp, *b* là cực gốc. Do tính bán dẫn, dòng điện chỉ chảy theo chiều ghi trên hình. Cực *e* nối với đầu dương và cực *k* nối với đầu âm của nguồn cung cấp. Giữa hai cực *e* và *b* đặt vào điện áp (và dòng điện) của nguồn điều khiển, kí hiệu u_1. Khi điện áp vào có một trị không đổi $U_1 = U_{eb}$ và dòng vào một trị không đổi $I_1 = I_e$ nào đó, trên cực ra sẽ có một áp $U_2 = U_{kb}$ và một dòng ra

$I_2 = I_k$ không đổi. Nếu dòng và áp vào biến thiên một lượng nhỏ ký hiệu bằng những chữ nhỏ i_1, u_1, thì dòng và áp ra cũng sẽ biến thiên những lượng nhỏ i_2, u_2.

Gọi:

$$\left.\begin{aligned} i_{1\Sigma} &= I_1 + i_1, \quad i_{2\Sigma} = I_2 + i_2; \\ u_{1\Sigma} &= U_1 + u_1, \quad u_{2\Sigma} = U_2 + u_2, \end{aligned}\right\} \tag{15-24}$$

là tổng các dòng và tổng các áp ở đầu vào và đầu ra. Theo (15-23) có quan hệ giữa chúng:

$$\left.\begin{aligned} u_{1\Sigma} &= u_{1\Sigma}(i_{1\Sigma}, i_{2\Sigma}); \\ u_{2\Sigma} &= u_{2\Sigma}(i_{1\Sigma}, i_{2\Sigma}). \end{aligned}\right\} \tag{15-25}$$

Khi các kích thích dòng biến thiên trong một phạm vi nhỏ có thể chuyển gần đúng (15-25) thành một quan hệ tuyến tính đối với những lượng biến thiên nhỏ bằng cách khai triển (15-25) theo chuỗi lũy thừa quanh các trị I_1, I_2, U_1, U_2:

$$\left.\begin{aligned} u_{1\Sigma} = U_1 + u_1 = U_1(I_1, I_2) &+ \frac{\partial u_{1\Sigma}}{\partial i_{1\Sigma}}(I_1, I_2)\, i_1 + \\ &+ \frac{\partial u_{1\Sigma}}{\partial i_{2\Sigma}}(I_1, I_2)\, i_2; \\ u_{2\Sigma} = U_2 + u_2 = U_2(I_1, I_2) &+ \frac{\partial u_{2\Sigma}}{\partial i_{1\Sigma}}(I_1, I_2)\, i_1 + \\ &+ \frac{\partial u_{2\Sigma}}{\partial i_{2\Sigma}}(I_1, I_2)\, i_2. \end{aligned}\right\} \tag{15-26}$$

Cho cân bằng 2 vế (15-26), ta được *hệ phương trình cho các lượng biến thiên:*

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial u_{1\Sigma}}{\partial i_{1\Sigma}}(I_1, I_2) i_1 + \frac{\partial u_{1\Sigma}}{\partial i_{2\Sigma}}(I_1, I_1)\, i_2; \\ u_2 &= \frac{\partial u_{2\Sigma}}{\partial i_{1\Sigma}}(I_1, I_2) i_1 + \frac{\partial u_{2\Sigma}}{\partial i_{2\Sigma}}(I_1, I_2)\, i_2. \end{aligned}\right\} \tag{15-27}$$

Với những trị I_1, I_2 nhất định, khi i_1, i_2 là những lượng biến thiên nhỏ các hệ số đạo hàm riêng phần trong (15-27) sẽ là những bằng số tùy thuộc các trị một chiều I_1, I_2 và có thứ nguyên điện trở. Ta ký hiệu là:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial i_1}_{\Sigma}(I_1, I_2) &= R_{11}(I_1, I_2);\\
\frac{\partial u_1}{\partial i_2}_{\Sigma}(I_1, I_2) &= R_{12}(I_1, I_2)\\
\frac{\partial u_2}{\partial i_1}_{\Sigma}(I_1, I_2) &= R_{21}(I_1, I_2);\\
\frac{\partial u_2}{\partial i_2}_{\Sigma}(I_1, I_2) &= R_{22}(I_1, I_2)
\end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}28)$$

Thay các ký hiệu trên vào (15-27) ta được:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= R_{11}i_1 - R_{12}i_2;\\
u_2 &= R_{21}i_1 - R_{22}i_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}29)$$

Hệ phương trình này nêu rõ rằng, đối với những thành phần biến thiên nhỏ có thể coi ba cực bán dẫn là một mạng 4 cực có thông số phụ thuộc vào các thành phần không đổi I_1 và I_2 của dòng điện vào và ra. Căn cứ theo (15-28) có thể làm thí nghiệm đo các lượng tăng riêng phần của dòng và áp rồi tính ra các điện trở R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22} (ứng với các trị I_1, I_2 nhất định). Cho nên dưới đây sẽ coi các điện trở này là đã biết.

Tuy vậy, có một điều quan trọng là, do tính phi tuyến và đặc biệt là tính dẫn điện 1 chiều của ba cực bán dẫn nên *các điện trở tương hỗ* R_{12}, R_{21} *không bằng nhau*. Cụ thể R_{21} thường lớn hơn R_{12}. Ta đặt hiệu của chúng là R_α tùy thuộc loại ba cực bán dẫn cụ thể:

$$\left.\begin{aligned}
R_\alpha &= R_{21} - R_{12};\\
\text{hoặc:}\qquad R_{21} &= R_{12} + R_\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}30)$$

Thay (15-30) vào (15-29) ta được hệ phương trình:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_{11}i_1 + R_{12}i_2, \\ u_2 &= R_{12}i_1 + R_{22}i_2 + R\alpha i_1. \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}31a)$$

Ta sẽ dẫn ra sơ đồ tương đương của ba cực bán dẫn. Để rõ ràng ta viết lại (15-31a), sau khi chuyển số hạng $R\alpha i_1$ sang vế trái:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_{11}i_1 + R_{12}i_2, \\ u_2 - R\alpha i_1 &= R_{12}i_1 + R_{22}i_2. \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}31b)$$

Ta thấy các lượng u_1, $u_2 - R\alpha i_1$ và i_1, i_2 liên hệ với nhau giống như ở một mạng bốn cực tuyến tính không nguồn thông thường, trong đó R_{11}, R_{22} là điện trở riêng các mạch vòng, R_{12} là điện trở chung của hai mạch vòng. Hệ (15-31b) trực tiếp dẫn ra mạch hình T tương đương (h. 15-36) trong đó theo thói quen ta gọi điện trở các cực phát, góp, gốc thứ tự là R_e, R_k, R_b là những điện trở cần tìm cho sơ đồ tương đương khi đã biết R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}. Xét (15-31b) và sơ đồ h. 15-36 dễ thấy rằng:

$$R_{11} = R_e + R_b;\ R_{12} = R_b;\ R_{22} = R_k + R_b. \qquad (15\text{-}32)$$

Từ phương trình thứ hai dẫn ra điện trở R_b:

$$R_b = R_{12}. \qquad (15\text{-}33\,a)$$

Thay vào phương trình thứ nhất và hai tìm ra R_e và R_k:

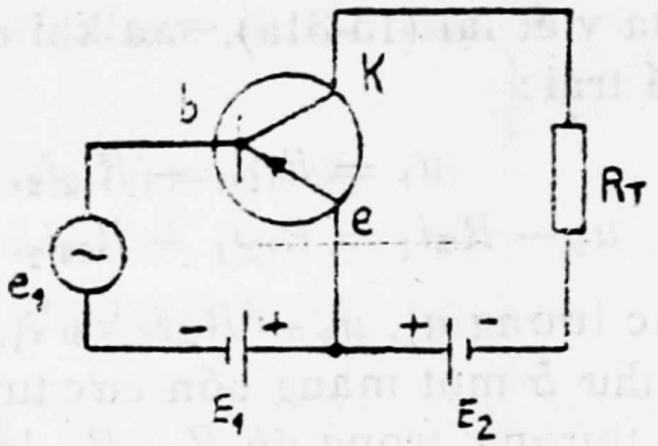
$$R_e = R_{11} - R_{12}, \qquad (15\text{-}33\,b);$$

$$R_k = R_{22} - R_{12}. \qquad (15\text{-}33\,c)$$

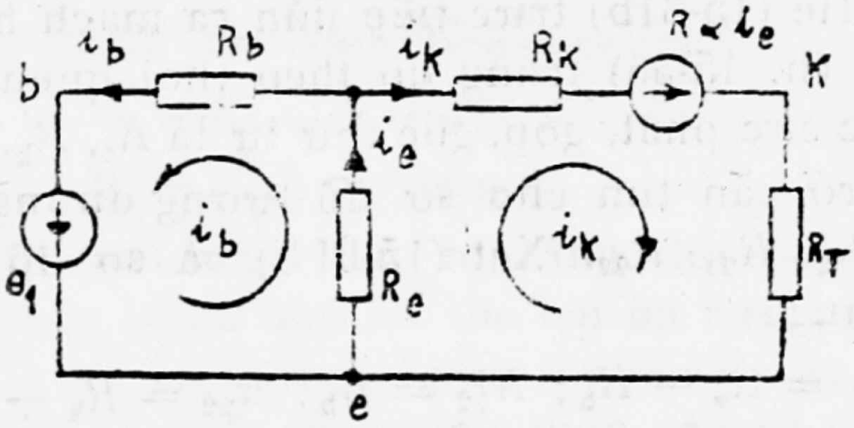
Vậy quan hệ giữa các lượng dòng và áp biến thiên nhỏ trong một đèn ba cực bán dẫn được miêu tả một cách đơn giản bằng một *mạng 4 cực có nguồn* hình T. Trong đó các điện trở R_e, R_k, R_b được tính theo công thức (15-33), và nguồn được lắp vào mạch góp như h. 15-36 có độ lớn $R\alpha i_e$ với $R\alpha = R_{21} - R_{12}$.

Ví dụ 15-8:

Cho một mạch khuếch đại tín hiệu hình sin bằng ba cực bán dẫn П13 (h. 15-37). Ở chế độ làm việc của đèn đã đo được các thông số:



a)



b)

H. 15-37

$R_{11}=142\Omega$; $R_{12}=22\Omega$; $R_{21}=1{,}045.10^{6}\Omega$; $R_{22}=1{,}1.10^{6}\Omega$.

Tín hiệu hình sin đặt vào giữa các cực gốc, phát là:

$$e_1 = 0{,}02 \sin \omega t \text{ V}.$$

Điện trở tải $R_t = 10^4\Omega$.

Tìm dòng điện, điện áp trên tải, hệ số khuếch đại điện áp, dòng điện và công suất của mạch.

Giải — Sơ đồ thay thế của mạch vẽ trên h. 15-37 b trong đó ta chọn chiều dòng điện các nhánh đối với

các cực giống như trong h. 15-36. Giải mạch này, ta được dòng điện các nhánh và tính ra hệ số khuếch đại.

Đặt $\dot{E}_m = 0{,}02\,\underline{/0°}$, và viết phương trình dòng điện vòng cho mạch:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= (R_b + R_e)\dot{I}_{bm} + R_e\dot{I}_{km}, \\ R_x(\dot{I}_{bm} + \dot{I}_{km}) &= R_e\dot{I}_{bm} + (R_e + R_k + R_T)\dot{I}_{km}. \end{aligned}\right\}$$

Theo các thông số đã cho ta tính được:

$$R_e = R_{12} = 22\Omega;\quad R_b = R_{11} - R_{12} = 120\Omega;$$

$$R_k = R_{22} - R_{12} \approx 1{,}1 \cdot 10^6\Omega.\quad R_x = R_{21} - R_{12} \sim 1{,}04 \cdot 10^6\Omega$$

Thay số vào ta được:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}02 &= 144\,\dot{I}_{bm} + 22\,\dot{I}_{km}, \\ 0 &= -1{,}045 \cdot 10^6\,\dot{I}_{bm} + 65 \cdot 10^3\,\dot{I}_{km}. \end{aligned}\right\}$$

Từ đó giải ra:

$$I_{km} = 0{,}645 \cdot 10^{-3}\text{A},\ \text{và}\ K_i = \frac{I_{km}}{I_{bm}} = 16.$$

Điện áp trên tải:

$$U_{Tm} = U_{km}R_T = 6{,}45\text{V}$$

Hệ số khuếch đại điện áp:

$$K_U = \frac{U_{Tm}}{E_{1m}} = \frac{6{,}45}{0{,}02} = 322.$$

Hệ số khuếch đại công suất:

$$K_p = \frac{U_{Tm}I_{Km}}{E_{km}I_{bm}} = K_UK_I = 5\,160.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Nội dung và phạm vi ứng dụng phương pháp đồ thị đối với trị tức thời. Ứng dụng phương pháp này để xét đường cong dòng điện và điện áp trên cuộn dây có lõi thép?

2. Thế nào là nguyên tắc cân bằng điều hòa. Nội dung, ưu nhược điểm và phạm vi ứng dụng phương pháp cân bằng điều hòa để giải mạch phi tuyến ở chế độ xác lập?

3. Thế nào là quan niệm tuyến tính hóa quan hệ tức thời. Quan niệm này chỉ dùng được trong những trường hợp nào? Nội dung và phạm vi ứng dụng phương pháp tuyến tính hóa quan hệ tức thời?

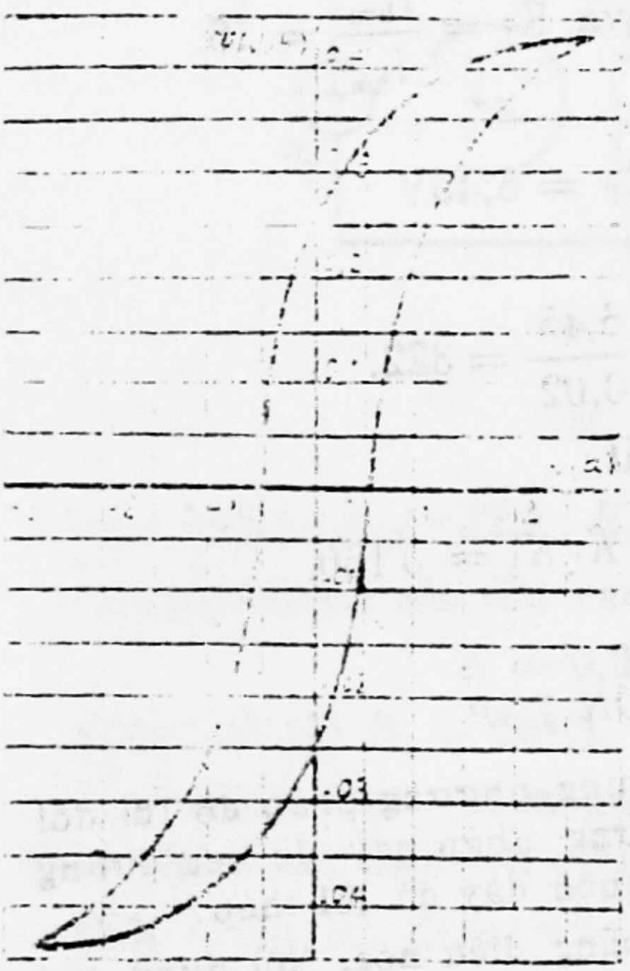
4. Thế nào là hiện tượng trigơ? Phân tích hiện tượng trigơ trong mạch ghép cuộn dây lõi thép với tụ điện tuyến tính.

5. Thế nào là hiện tượng ổn áp, ổn dòng, phân tích nguyên lý của sơ đồ ổn áp đơn giản?

6. Nội dung phương pháp tuyến tính hóa đoạn đường đặc tính làm việc, ưu nhược điểm, phạm vi ứng dụng của phương pháp?

7. Giải thích nguyên lý làm việc của điện cảm điều khiển. Phương pháp gì thường dùng để phân tích mạch có điện cảm điều khiển?

8. Vẽ sơ đồ thay thế mô tả đèn điện tử và bán dẫn ba cực đối với thành phần biến thiên nhỏ? Ý nghĩa của sơ đồ thay thế ấy? Các thông số của sơ đồ phụ thuộc vào gì?

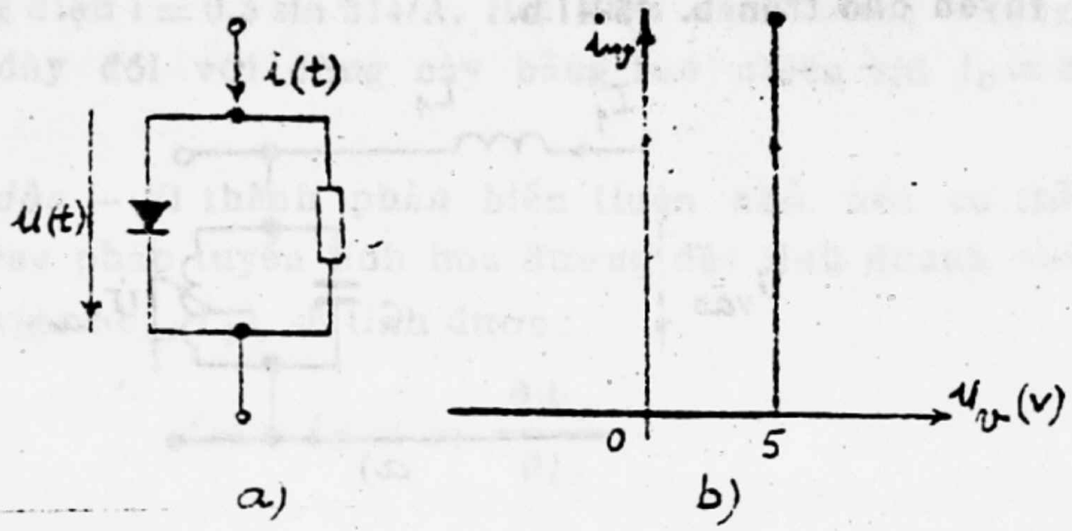


H. 15-38

BÀI TẬP

15-1. Biết dòng điện chảy trong một cuộn dây lõi thép là $i = 2{,}7\sin 314t$ A và đường cong $\psi(i)$ vẽ trên h. 15-38. Hãy vẽ đường cong $\psi(t)$ và $u(t)$?

15-2. Một điện trở $r = 50\Omega$ nối song song với 1 van (h. 15-39a). Đặc tính V-A gần đúng của van cho trên h. 15-39b. Biết dòng trong nhánh chính là $i(t) = 0{,}2\sin 1000t$ A. Hãy vẽ đường cong $u(t)$.



H. 15-39

15-3. Cho một mạch nối tiếp điện trở $r = 100\Omega$ và điện cảm phi tuyến có đặc tính Wb – A miêu tả bằng phương trình gần đúng $\psi(i) = 2i - 3{,}75i^8$. Dùng phương pháp cân bằng điều hòa tính các điều hòa bậc 1 và 3 của điện áp $u(t)$, nếu biết dòng điện là 0.5 sin 314t A.

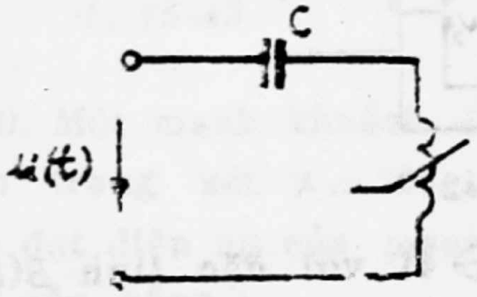
Đáp : $u(t) = 210 \sin (314t + 76^\circ 15') + 110 \sin (942t + 90^\circ)$ V

15-4. Cho một mạch nối tiếp một điện dung $C = 2{,}6\ \mu F$ và một điện cảm phi tuyến có đặc tính Wb – A là $\psi = 2i - 3{,}75\ i^3$ (h. 15-40). Dùng phương pháp cân bằng điều hòa tính thành phần điều hòa bậc 1 của dòng điện. Biết $u(t) = 180 \sin 314t$ V

Đáp : $i_1 = -0.44 \cos 314t$ A.

15-5. Dùng phương pháp tuyến tính hóa qui ước và bằng cách thăm dò tìm trị hiệu dụng của dòng điện và điện áp U_L trong mạch điện h. 15-40. Quan hệ giữa các trị hiệu dụng của từ thông và dòng điện là : $\psi_{hd} = 2I - 3{,}75\ I^3$.

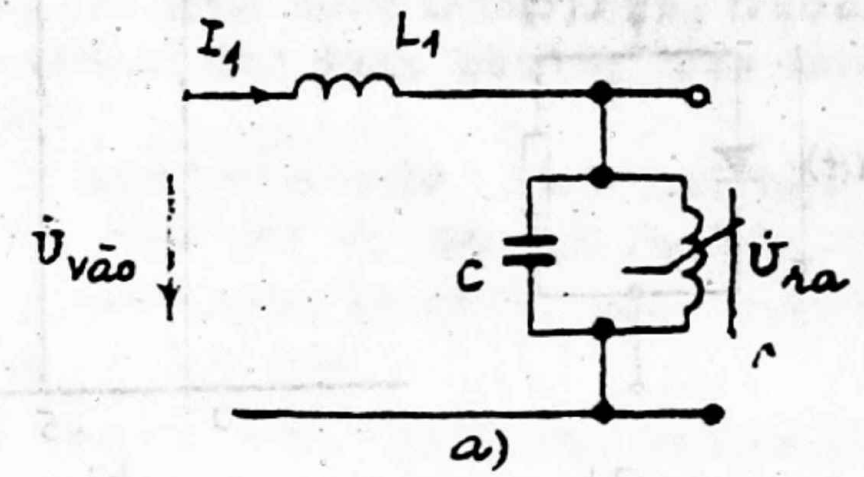
Đáp : $U_L = 116$ V ; $I = 0.2$ A.



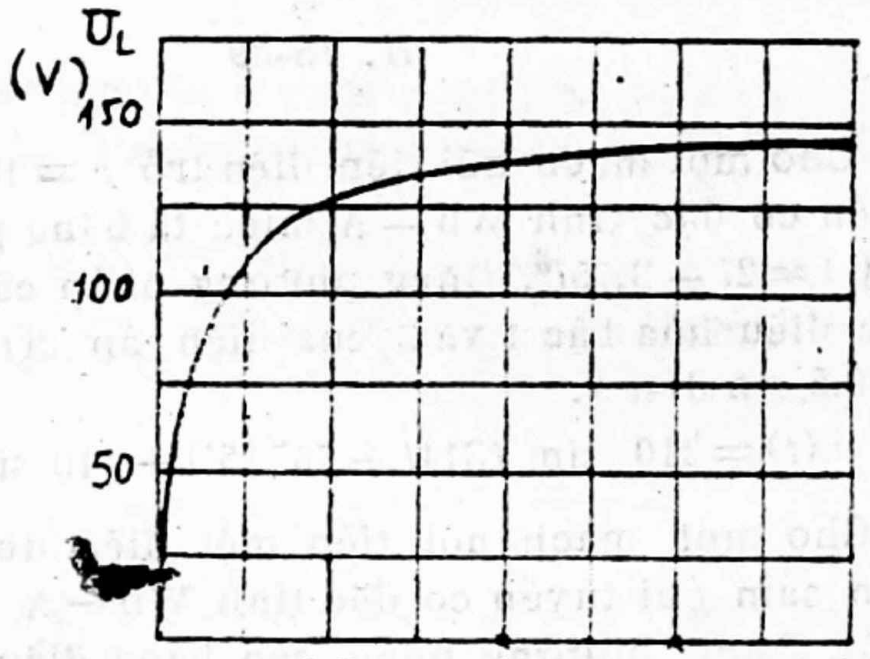
H. 15-40

15-6. Dùng phương pháp tuyến tính hóa qui ước hãy vẽ các đặc tính U_{ra} (I_1), $U_{vào}$ (I_1) và U_{ra} $(U_{vào})$ của mạch điện h. 15-41 a. Từ các đường cong này giải thích tính chất ổn áp của mạch này?

Cho $C = 40\ \mu F$, $L_1 = 0{,}05\ H$. Đặc tính $U_L(I)$ của phần tử phi tuyến cho trên h. 15-41 b.



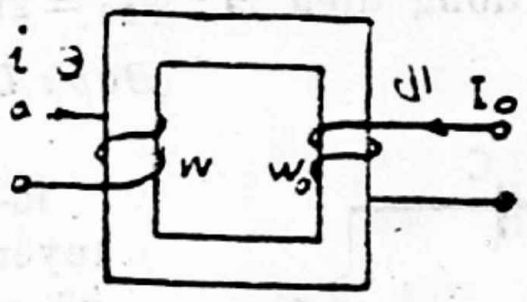
a)



b)

H. 15-41

15-7. Trên 1 lõi thép h. 15-42 quấn hai cuộn dây $w = w_0 = 200$ vòng. Lõi thép có tiết diện $S = 3.10^{-3} m^2$ và chiều dài trung



H. 15-42

bình $l = 0{,}5m$ làm bằng thép ∋ 41 với đặc tính $B(H)$ cho trên h. 14-23.

Biết dòng điện $i = 0{,}5 \sin 314t$A. Hỏi điện cảm tương đương của cuộn dây đối với dòng này bằng bao nhiêu khi $I_o = 5$ và 10A.

Hướng dẫn — Vì thành phần biến thiên nhỏ, nên có thể dùng phương pháp tuyến tính hóa đường đặc tính quanh các điểm làm việc (Φ_o, I_o), sẽ tính được :

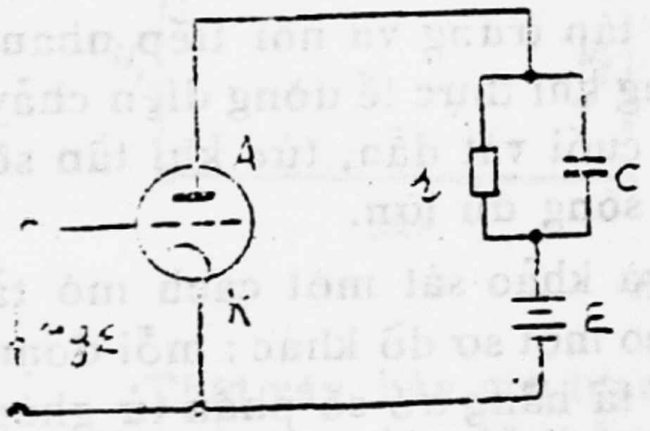
$$L_{td} = L_d = w_1 \frac{\partial \Phi_o}{\partial I_o}$$

Đáp : 13 mH và 6 mH.

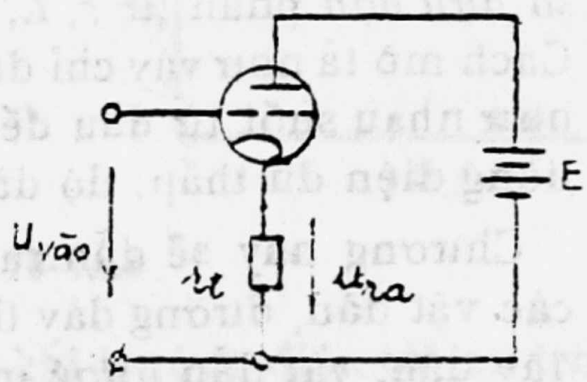
15-9. H. 15-43 vẽ một mạch khuếch đại bằng đèn điện tử. Họ đặc tính anôt của đèn cho trên h. 15-34. Biết điện áp trên lưới đèn là $u_{g\Sigma} = -2 + 0{,}4 \sin 10^4 t$ V, $E = 200$ V, $r = 20$ kΩ $C = 5.10^{-9}$F.

Tính thành phần điện áp xoay chiều giữa anôt và katôt của đèn và hệ số khuếch đại áp.

Đáp : $u_a = 4.3 \sin (10^4 t - 18{,}4^\circ)$ V ; $K_u = 10.8 \angle -18{,}4^\circ$.



H. 15-43



H. 15-44

15-10. Một mạch khuếch đại tải katôt vẽ trên h. 15-44. Biết ở tình trạng xét $\mu = 100$, $r_1 = 3$ kΩ, $r_t = 2$ kΩ, Tính hàm truyền đạt điện áp của mạch; thử nghiệm rằng hệ số khuếch đại áp gần bằng 1.

Đáp : $K_u = 0{,}975$.

CHƯƠNG XVI

MẠCH CÓ THÔNG SỐ RẢI ĐỀU

Mục đích.

— Làm rõ khái niệm mạch có thông số rải là một sơ đồ mạch đặc biệt mô tả một đường dây có độ dài so được với bước sóng.

— Làm rõ các hiện tượng riêng của đường dây dài đều : hiện tượng sóng chạy, sự phân bố không đơn điệu của điện áp và dòng điện dọc đường dây, qui luật biến thiên không đơn điệu của tổng trở đường dây theo độ dài, và khái niệm về mạng bốn cực tương đương của đường dây dài.

§ 16-1. KHÁI NIỆM VÀ PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA MẠCH CÓ THÔNG SỐ RẢI

Cho đến nay ta đã xét những mạch có thông số tập trung hiểu là những cách *mô tả quá trình điện từ quanh mỗi vật dẫn hoặc đường dẫn bằng một nhánh sơ đồ* gồm một *số hữu hạn* phần tử r, L, C tập trung và nối tiếp nhau. Cách mô tả như vậy chỉ đúng khi thực tế dòng điện chảy như nhau suốt từ đầu đến cuối vật dẫn, tức khi tần số dòng điện đủ thấp, độ dài sóng đủ lớn.

Chương này sẽ dẫn ra và khảo sát một cách mô tả các vật dẫn, đường dây theo một sơ đồ khác : mỗi đoạn dây dẫn, vật dẫn được mô tả bằng vô số phần tử ghép lại nhau, coi là rải ra dọc theo dây dẫn. Đó là *sơ đồ mạch có thông số rải*. Nó mô tả quá trình trên vật dẫn làm việc ở tần số đủ cao hoặc với những xung điện từ đủ ngắn.

Cho một đoạn dây dẫn làm việc với những điện áp và dòng điện tần số thấp, có bước sóng dài gấp nhiều lần đoạn dây (cỡ 100 lần trở lên).

Khi trường điện từ lan truyền trên toàn chiều dài đường dây chỉ thể hiện một phần rất nhỏ của bước sóng, cho nên cường độ trường trên toàn đường dây hầu như bằng nhau và do đó dòng điện chảy trên toàn đường dây cũng hầu như bằng nhau. Trong điều kiện đó có thể mô tả đoạn đường dây bằng một nhánh nối tiếp hai phần tử r, L đặc trưng quá trình tiêu tán và kho từ trên đoạn dây (h. 16-1).

Ở mọi tọa độ x dọc theo dây, ở mỗi thời điểm t dòng điện chảy như nhau:

$$i(x, t) = i_1(t) = i_2(t) = i(t). \qquad (16\text{-}1)$$

Nhưng nếu cũng đoạn dây ấy cho làm việc ở tần số đủ cao, sao cho độ dài l của đoạn dây lớn tới 1/10, hoặc 1/5 bước sóng λ hoặc hơn nữa, hiện tượng sẽ khác hẳn, hoàn toàn không hợp với cách mô tả bằng sơ đồ thông số tập trung h. 16-1 nữa.



H. 16-1a,b

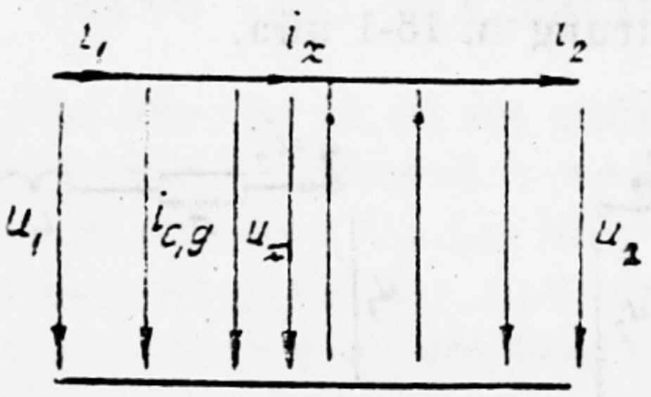
Thật vậy, bây giờ trong khi trường điện từ lan truyền dọc đường dây đã thể hiện một phần đáng kể của bước sóng, nên ở mỗi thời điểm t, cường độ trường ở những tọa độ x trên đường dây đã sai khác nhau đáng kể. Do đó dòng không còn bằng nhau ở mọi tọa độ x nữa, mà phân bố dọc bề dài đường dây theo một qui luật nào đó:

$$i = i(x, t). \qquad (16\text{-}2)$$

Rõ ràng sơ đồ với những phần tử tập trung (h. 16-1) không miêu tả được hiện tượng dòng biến thiên theo x. Cần đưa ra một sơ đồ khác mô tả đường dây.

Sở dĩ dòng biến thiên liên tục dọc đường dây theo (16-2) là vì ở tần số cao, dọc đường dây có những dòng chuyển dịch đáng kể (xem công thức M-22) chảy tắt từ dây này sang dây kia qua điện môi, và có những dòng điện rò chảy tắt qua điện môi không hoàn hảo. Tùy theo sự phân bố các dòng này, khiến cho dọc đường dây có đoạn dòng chảy nhỏ lại, có đoạn lại tăng lên.

Do sự phân bố dòng (16-2) liên tục, phải quan niệm có những dòng chảy tắt vô cùng nhỏ và phân bố rải trên mỗi vi phân đường dây. Vậy trên sơ đồ mô tả đường dây, cứ mỗi đoạn vi phân dài dx phải gắn một vi phân điện dung dC và một vi phân điện dẫn dG bắc ngang giữa 2 dây. Kể đến hiện tượng tiêu tán Jul và từ trường trên mỗi vi phân dài đường dây, ta đưa vào sơ đồ những vi phân điện trở dR và vi phân điện cảm dL (h. 16-2).



H. 16-2

Vậy sơ đồ mô tả một đoạn dây (đương dây) ở tần số cao phải gồm vô số mắt xích vi phân xâu chuỗi nhau. Sơ đồ như vậy gọi là *mạch có thông số rải*. Đường dây quan niệm như vậy gọi là *đường dây dài*. Chữ dài ở đây hiểu trong tương quan so sánh với bước sóng hoặc bề dài của xung. Nếu một đường dây *10m* đối với tần số công nghiệp (*50Hz*, bước sóng *6000km*) là rất ngắn, thì đối với tần số sóng ngắn *10MHz*, có bước sóng *30m* thì lại là dài. Đối với tần số công nghiệp một đường

dây 400 — 500km trở lên mới là dài, thì đối với những xung 10^{-9} s trải ra trên một đoạn 0,3m một đoạn dây cáp 0,1m cũng là dài.

Nếu ký hiệu điện trở Ôm dọc đường dây qui về một đơn vị dài (m hoặc km v.v...) là R (Ω/m hoặc Ω/km), điện cảm trên đơn vị dài là L (H/m hay H/km), điện dung là C (F/m hay F/km) và điện dẫn rò là G (S/m hoặc S/km) thì mỗi mắt xích vi phân của sơ đồ h. 16-2 sẽ có các thông số:

$$dR = Rdx,\ dL = Ldx,\ dC = Cdx,\ dG = Gdx. \quad (16\text{-}3)$$

Những thông số R, L, C, G đặc trưng các quá trình cơ bản dọc đường dây nên là những *thông số cơ bản*. Nếu các thông số này như nhau trên toàn bề dài đường dây dài, tức kích thước và hoàn cảnh đường dây như nhau, ta gọi nó là một *đường dây dài đều*.

Trong chương này sẽ xét các hiện tượng và thông số chủ yếu của đường dây dài đều ở chế độ xác lập điều hòa, là một đường dây dài cơ bản, làm việc ở một chế độ cơ bản. Trong thực tế còn dùng những đường dây dài không đều, có thể tìm đọc trong những sách báo tham khảo.

Với sơ đồ khác hẳn đường dây ngắn, hiện tượng trên đường dây dài sẽ khác hẳn. Ở đây có hiện tượng lan truyền sóng dọc đường dây, hiện tượng phản xạ ở cuối dây, hiện tượng phân bố dòng và áp không đơn điệu dọc đường dây v.v...

Về toán học vì dòng $i(x, t)$ và áp $u(x, t)$ là hàm của không gian và thời gian, chúng biến thiên qua mỗi vi phân dx và dt, nên phương trình trạng thái đường dây dài *mô tả sự biến thiên hai ẩn số ấy trên mỗi vi phân dx, và dt* phải là một hệ phương trình đạo hàm riêng theo không gian x và thời gian t.

Ta hãy thành lập hệ phương trình trạng thái cho đường dây dài đều dựa vào sơ đồ h. 16-2b.

Gọi $u(x, t)$ là điện áp trên đường dây ở tọa độ x (kể từ một gốc tọa độ nào đó), điện áp ở điểm $x + dx$ sẽ bằng $u + d_x u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Do đó áp dụng luật Kirhof 2 cho mắt xích vi phân, dễ thấy rằng sụt áp do dòng i gây trên điện trở và điện cảm Rdx, Ldx vừa bằng $-\frac{\partial u}{\partial x} dx$, hoặc:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx = Rdx \cdot i + Ldx \frac{\partial i}{\partial t},$$

hoặc

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Gọi $i(x, t)$ là dòng chảy trên đường dây ở tọa độ x, dòng chảy ở tọa độ $x + dx$ sẽ bằng $i + d_x i = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. Áp dụng luật Kirhof 1 cho nút ở đó, dễ thấy rằng dòng chảy tắt vào vi phân điện dung và điện dẫn Cdx, Gdx vừa bằng $-\frac{\partial i}{\partial x} dx$. Vì những điện dung và điện dẫn đó đặt dưới điện áp $u + d_x u$ nên dòng đó bằng:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = Cdx \frac{\partial}{\partial t} (u + d_x u) + Gdx (u + d_x u),$$

hoặc

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu.$$

Ở đây đã bỏ qua những vi phân $C \frac{\partial}{\partial t} (d_x u)$ và $G d_x u$ là những lượng vô cùng bé bậc cao.

Vậy quá trình đường dây dài đều miêu tả bởi hệ phương trình đạo hàm riêng phần dưới đây. Nó có dạng *phương trình điện báo*:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}4)$$

Một mặt giống phương trình vi phân thường với biến thời gian, trạng thái nghiệm ở thời điểm t chỉ phụ thuộc những trạng thái trước, không phụ thuộc trạng thái sau; mặt khác vì phương trình còn có đạo hàm riêng theo không gian, nên nghiệm ở một điểm x nào đó tùy thuộc những trạng thái trong không gian ở cả hai phía của x, và do đó phụ thuộc trạng thái ở hai đầu đường dây gọi là bờ của bài toán. Vì vậy bài toán đường dây dài là một *bài toán bờ có sơ kiện*. Riêng khi xét trạng thái xác lập, tức trạng thái không tùy thuộc sơ kiện nữa, ta có một bài toán bờ: nghiệm sẽ chỉ tùy thuộc điều kiện ở đầu và cuối đường dây.

Theo định nghĩa về các mô hình ở m.M-1 sơ đồ mô tả đường dây dài thực chất là một mô hình trường, vì xét đến sự phân bố không gian của quá trình. Tuy nhiên đây là một mô hình đặc biệt của trường điện từ vì trong đó ta giả thiết tồn tại khái niệm thế và áp. Ta gọi nó là *sơ đồ mạch có thông số rải*.

§ 16-2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG DÂY DÀI ĐỀU Ở CHẾ ĐỘ XÁC LẬP ĐIỀU HÒA

Ta xét một đường dây dài đều làm việc với nguồn điều hòa. Ở chế độ xác lập, đáp ứng áp và dòng ở mọi điểm trên đường dây cũng biến thiên theo qui luật điều

hòa với biệu dung và góc pha đầu phụ thuộc tọa độ x đường dây, dạng:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{2}\,U(x)\sin[\omega t + \psi_u(x)], \\ i(x,t) &= \sqrt{2}\,I(x)\sin[\omega t + \psi_i(x)]. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}5)$$

Do đó sự phân bố áp và dòng dọc theo đường dây thứ tự đặc trưng bởi những cặp số $U(x)$, $\psi_u(x)$ và $I(x)$, $\psi_i(x)$ là những hàm của tọa độ x.

Theo ch. 2, ta sẽ biểu diễn những hàm đó bằng những ảnh phức $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ với modul và argumen phụ thuộc tọa độ x:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &\leftarrow U(x)e^{j[\omega t+\psi_u(x)]} = \dot{U}(x), \\ i(x,t) &\leftarrow I(x)e^{j[\omega t+\psi_i(x)]} = \dot{I}(x). \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}6)$$

Với cách ấy đạo hàm riêng theo thời gian của các hàm được biểu diễn bằng lích của ảnh phức với $j\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \leftarrow j\omega\dot{U}(x); \quad \frac{\partial}{\partial t}i(x,t) \leftarrow j\omega\dot{I}(x). \quad (16\text{-}7)$$

Đó là vì khi đạo hàm theo thời gian (16-5) góc pha các hàm ấy tăng thêm $\pi/2$ và biệu dụng lớn lên ω lần.

Chú ý đạo hàm biểu thức (16-5) riêng theo x không có những kết quả đó, và chỉ ứng với đạo hàm vế phải (16-6) theo x thoi:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \leftarrow \frac{d}{dx}\dot{U}(x); \quad \frac{\partial}{\partial x}i(x,t) \leftarrow \frac{d}{dx}\dot{I}(x). \quad (16\text{-}8)$$

Thay (16-7), (16-8) vào (16-4) ta được *phương trình trạng thái* của đường dây dài đều ở chế độ xác lập điều hòa viết cho các ảnh phức biểu diễn áp và dòng:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = (R + j\omega L)\dot{I} = Z\dot{I}, \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= G\dot{U} + j\omega C\dot{U} = (G + j\omega C)\dot{U} = Y\dot{U}. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}9)$$

trong đó thông số $Z = R + j\omega L$ là *tổng trở dọc* trên đơn vị dài của đường dây và $Y = G + j\omega C$ là *tổng dẫn ngang* trên đơn vị dài. Là những hệ số của phương trình trạng thái cơ bản của đường dây chúng quyết định tính chất của nghiệm phương trình và do đó là những *thông số cơ bản* của đường dây ở chế độ xác lập điều hòa. Chú ý rằng ở đây tổng trở dọc Z và tổng dẫn ngang Y là hai lượng mô tả những hiện tượng khác nhau của đường dây và không phải là nghịch đảo nhau.

Đạo hàm một lần nữa (16-9) theo x ta sẽ đi đến một dạng gọn hơn. Thật vậy đạo hàm hai vế (16-9) rồi thay thế các đạo hàm cấp một theo (16-9) ta được:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} &= Z\frac{d\dot{I}}{dx} = -ZY\dot{U}, \\ \text{và} \\ -\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} &= Y\frac{d\dot{U}}{dx} = -ZY\dot{I}. \end{aligned}\right\}$$

hoặc

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} &= \gamma^2\dot{U}, \\ \frac{d^2\dot{I}}{dx^2} &= \gamma^2\dot{I} \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}10)$$

là những phương trình đối với riêng điện áp hoặc riêng dòng điện. Trong đó ta đặt tích ZY là γ^2.

Đó là một thông số đặc trưng đường dây vì nó quyết định tính chất nghiệm. Nó phụ thuộc tần số, ta có:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega). \qquad (16\text{-}11)$$

Như sẽ thấy ở dưới, thông số này đặc trưng quá trình truyền sóng dọc đường dây, nên gọi là *hệ số*

truyền sóng γ **của đường dây. Đơn vị của nó bằng** $\sqrt{(\Omega/m)\,(S/m)} = 1/m$ **hoặc** $1/km$.

Ví dụ 16-1. — **Cho một đường dây tải điện cao áp trên không với các thông số dọc đường dây** $R = 10^{-4}\Omega/m$; $G = 0{,}6 \cdot 10^{-9}$ S/m; $L = 10^{-6} H/m$; $C = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$ F/m. **Hãy tính tổng trở** Z, **tổng dẫn** Y, **hệ số truyền sóng** γ **ở tần số** 50 Hz ($\omega = 314$ rad/s), **và viết phương trình cho áp và dòng phức trên đường dây.**

GIẢI: Tổng trở dọc Z và tổng dẫn ngang Y trên 1m đường dây:

$$Z = R + j\omega L = 10^{-4} + j314 \cdot 10^{-6} = 3{,}31 \cdot 10^{-4} \underline{/72{,}3^\circ}\ \Omega/m.$$

$$Y = G + j\omega C = 0{,}6 \cdot 10^{-9} + j314 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-11} =$$

$$= 3{,}83 \cdot 10^{-9} \underline{/81^\circ}\ S/m.$$

Từ đó tính được hệ số truyền sóng:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{3{,}31 \cdot 10^{-4} \underline{/72{,}3^\circ} \cdot 3{,}83 \cdot 10^{-9} \underline{/81^\circ}} =$$

$$= 1{,}125 \cdot 10^{-6} \underline{/76{,}7^\circ} = 0{,}259 \cdot 10^{-6} + j\,1{,}09 \cdot 10^{-6}\ 1/m.$$

Vậy phương trình đường dây có dạng:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U}; \quad \frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I};$$

với $\gamma^2 = 1{,}265 \cdot 10^{-12} \underline{/153{,}4^\circ}\ 1/m^2$.

§ 16-3. NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG DÂY DÀI ĐỀU DƯỚI DẠNG SÓNG

Phương trình đường dây dài đều đối với điện áp phức và dòng điện phức (16-10 a, b) hoàn toàn giống nhau và là những phương trình vi phân thuần nhất cấp 2 với hệ số hằng:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = 0; \quad \frac{d^2\dot{I}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{I} = 0.$$

Phương trình đặc trưng của chúng có dạng:

$$p^2 - \gamma^2 = 0, \text{ với nghiệm } p = \pm\gamma = \pm(\alpha + j\beta). \quad (16\text{-}12)$$

Do đó nghiệm phương trình (16-10) sẽ có dạng tổng quát là các hàm mũ với số mũ $\pm\gamma x$ tức:

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{I}(x) = \dot{B}_1 e^{-\gamma x} + \dot{B}_2 e^{\gamma x}. \quad (16\text{-}13)$$

trong đó $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, $\dot{B}_1$, $\dot{B}_2$ là những hằng số tích phân phức xác định bởi điều kiện bờ của dòng và áp ở hai đầu đường dây. Ta thấy những hệ số phức $\dot{A}_1$, $\dot{B}_1$, và $\dot{A}_2$, $\dot{B}_2$ liên hệ nhau đôi một theo một quan hệ rất đơn giản.

Thật vậy thay (16-13a) vào (16-9a) ta được:

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z}\frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z}\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \frac{\gamma}{Z}\dot{A}_2 e^{\gamma x} =$$

$$= \frac{\dot{A}_1}{Z/\gamma} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z/\gamma} e^{\gamma x} \quad (16\text{-}14)$$

Ảnh phức dòng điện $\dot{I}(x)$ là hiệu của 2 số hạng, mỗi cái bằng thương của số hạng tương ứng của $\dot{U}$ chia cho Z/γ, có thứ nguyên cũng trở (vì $\dot{A}$ có thứ nguyên điện áp). Ta gọi số phức đó là *tổng trở sóng* của đường dây, và sẽ nói rõ ý nghĩa của nó trong mục dưới. Ta ký hiệu nó bằng chữ Z_c, với modul bằng chữ z_c và argumen bằng chữ θ, tức

$$Z_c = \frac{Z}{\gamma} = z_c e^{j\theta}. \quad (16\text{-}15)$$

Vì Z và γ là những thông số đường dây nên Z_c cũng là một thông số đường dây. Với ký hiệu như vậy (16-14) sẽ viết là:

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_c} e^{\gamma x} =$$

$$= \frac{\dot{A}_1}{z_c} e^{-\gamma x - j\theta} - \frac{\dot{A}_2}{z_c} e^{\gamma x - j\theta} \quad (16\text{-}14b)$$

Vậy mỗi phức số điện áp và dòng điện đều gồm 2 số hạng là những hàm mũ. Mỗi số hạng đó biểu diễn một *sóng chạy* dọc đường dây theo chiều ngược nhau.

Thật vậy giả sử các phức $\dot{A}_1$ và $\dot{A}_2$ thứ tự có modul và argumen là A_1, ψ_1 và A_2, ψ_2 nào đó, tức:

$$\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1} \quad \dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2} \tag{16-16}$$

Thay (16-16) cùng (16-12) vào (16-13) ta viết lại như sau:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x + j\psi_1} + A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x + j\psi_2} \\ \dot{I}(x) &= \frac{A_1}{z_c} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x + j\psi_1 - j\theta} - \frac{A_2}{z_c} e^{\alpha x} e^{j\beta x + j\psi_2 - j\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{16-13}$$

Theo cách biểu diễn phức các hàm điều hòa (chương 2), chúng biểu diễn các áp và dòng:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \\ &\quad + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x), \\ i(x,t) &= \sqrt{2} \frac{A_1}{z_c} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \psi_1 - \theta - \beta x) - \\ &\quad - \sqrt{2} \frac{A_2}{z_c} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \theta + \beta x). \end{aligned}\right\} \tag{16-17}$$

Ta biết hàm $\sin(\omega t + \psi_1 - \beta x)$ mô tả một sóng truyền thuận theo chiều x và $\sin(\omega t + \psi_2 + \beta x)$ một sóng truyền ngược chiều x.

Xét hàm thứ nhất, để gọn ta đặt $\psi_1 = 0$ và đổi dấu đối số:

$$\sin(\omega t - \beta x) = -\sin(\beta x - \omega t).$$

Ở thời điểm $t = 0$ phân bố không gian của hàm có dạng:

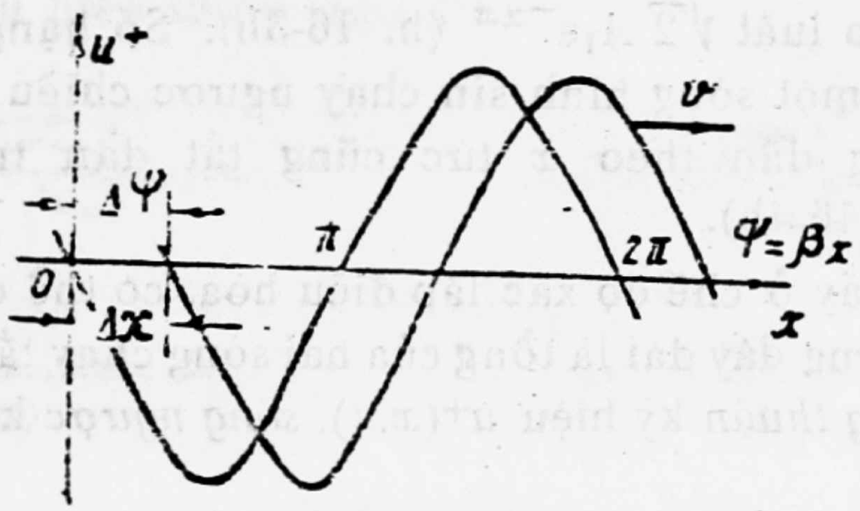
$$-\sin \beta x \tag{a}$$

vẽ trên h. 16-3a. Sau đó một khoảng Δt, phân bố không gian có dạng

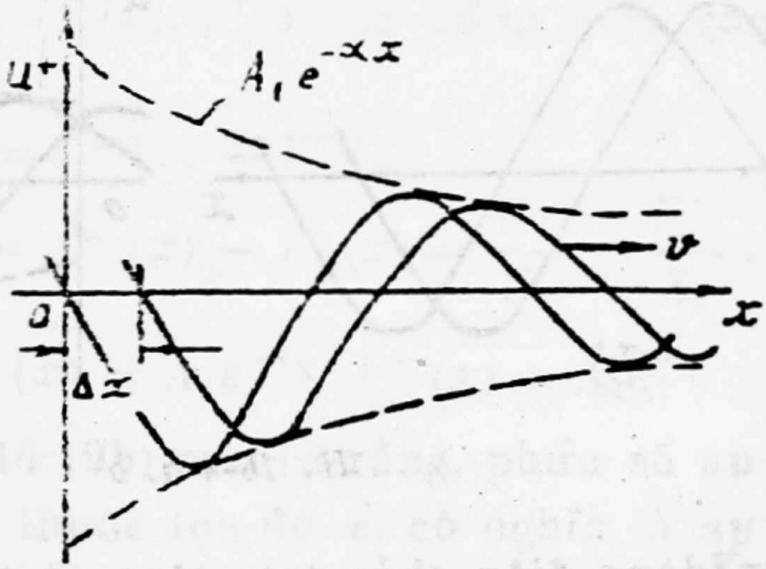
$$-\sin(\beta x - \omega \Delta t) \tag{b}$$

biểu thị bằng đường cong thứ hai trên h. 16-3a. Ta thấy đường cong (b) *lặp lại dạng của (a) nhưng dịch theo chiều x* một góc $\Delta\psi = \omega\Delta t$, ứng với một đoạn Δx:

$$\beta\Delta x = \Delta\psi, \text{ hoặc } \Delta x = \frac{\Delta\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\beta}\Delta t. \qquad (c)$$



a)



b)

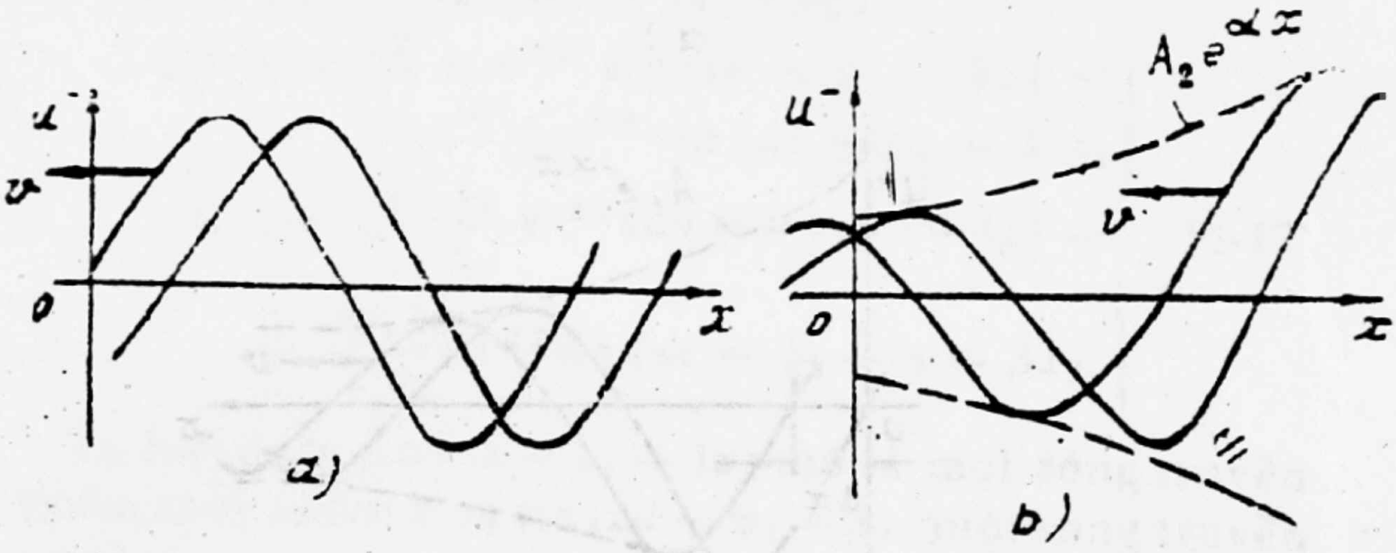
H. 16-3

Vậy suy ra hàm $\sin(\omega t - \beta x)$ với hai đối số ngược dấu nhau mô tả một sóng hình sin dịch chuyển theo chiều x với vận tốc dịch chuyển:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta}. \qquad (16\text{-}18)$$

Tương tự như vậy nghiệm thấy hàm sin $(\omega t + \beta x)$ với hai đối số không gian và thời gian cùng dấu, là một sóng hình sin dịch chuyển ngược chiều x (h. 16-4a), với tốc độ tính theo (16-18). Vậy số hạng thứ nhất (16-17) biểu thị một sóng hình sin chạy theo chiều x với vận tốc (16-18) nhưng với biên độ tắt dần theo x theo luật $\sqrt{2}\,A_1 e^{-\alpha x}$ (h. 16-3b). Số hạng thứ hai biểu thị một sóng hình sin chạy ngược chiều x với biên độ tăng dần theo x tức cũng tắt dần trong khi chạy (h. 16-4b).

Vậy ở chế độ xác lập điều hòa, có thể coi điện áp dọc đường dây dài là tổng của hai sóng chạy tắt dần (h. 16-5). *Sóng thuận* ký hiệu $u^+(x, t)$, *sóng ngược* ký hiệu $u^-(x, t)$.



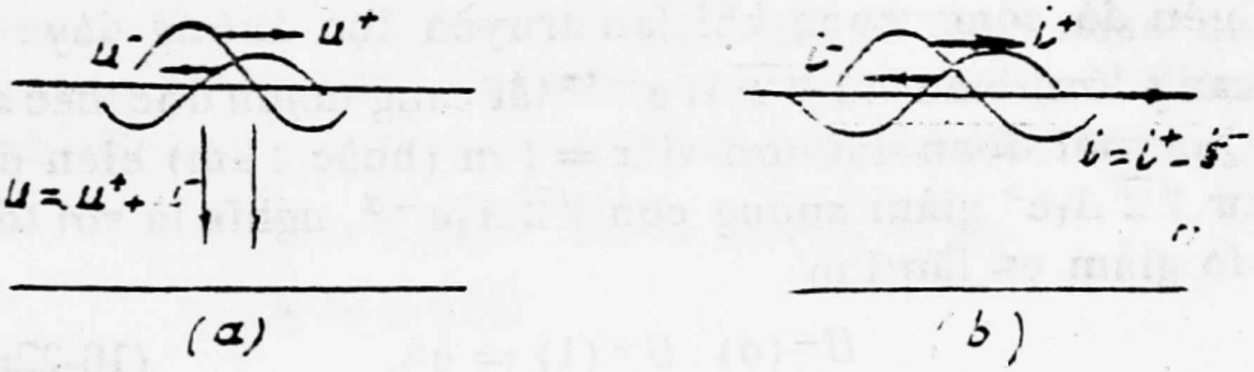
H. 16-4 a, b

Còn dòng điện chảy trên đường dây bằng hiệu của một dòng chảy xuôi với một dòng chảy ngược (dấu trừ trong biểu thức dòng ngược). Dòng chảy xuôi lan truyền thuận chiều x ứng với một sóng thuận ký hiệu $i^+(x, t)$. Dòng chảy ngược đồng thời lan truyền ngược chiều x ứng với một sóng ngược $i^-(x, t)$ như h. 16-5. Chúng đều tắt dần trong quá trình lan truyền.

Ta viết gọn lại (16-17) dưới dạng:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= u^{-}(x,t) + u^{-}(x,t), \\ i(x,t) &= i^{+}(x,t) - i^{-}(x,t). \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}19a)$$

Biểu thức (16-19a) cho thấy sơ bộ rằng ở mỗi thời điểm t dòng và áp phân bố dọc đường dây x với giá trị và chiều biến thiên theo x.



(a) (b)

H. 16-5 a, b

Ký hiệu các phức số áp và dòng thuận, ngược bằng $\dot{U}^{+}(x)$, $\dot{U}^{-}(x)$, $\dot{I}^{+}(x)$, $\dot{I}^{-}(x)$ ta cũng viết gọn (16-13) dưới dạng:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}^{+}(x) - \dot{U}^{-}(x) \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}^{+}(x) - \dot{I}^{-}(x) = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_c} - \frac{\dot{U}^{-}}{Z_c}. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}19b)$$

trong đó $\dot{U}^{+}(x) = \dot{A}_1 e^{-\gamma x}$ $\dot{U}^{-}(x) = \dot{A}_2 e^{\gamma x}$. (16-20)

Biểu thức (16-19b) nêu rõ rằng, phức số áp $\dot{U}(x)$ và dòng $\dot{I}(x)$ tùy thuộc tọa độ x, có nghĩa là áp và dòng ở mỗi điểm x đều biến thiên theo qui luật điều hòa nhưng với biên độ và pha đầu tùy thuộc tọa độ x.

§ 16-4. CÁC THÔNG SỐ ĐẶC TRƯNG SỰ TRUYỀN SÓNG TRÊN ĐƯỜNG DÂY DÀI

Ta trở lại phân tích biểu thức (16-17) để nêu rõ những thông số đặc trưng quá trình truyền sóng điều hòa trên

đường dây dài. Ta tùy ý chọn ví dụ sóng thuận để xét. Nó có biểu thức:

$$u^+(x,t) = \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \Psi_1 - \beta x). \quad (16\text{-}21)$$

Về mặt lan truyền sóng, trong biểu thức (16-21) quan trọng là các hệ số và β. Chúng nói rõ tính chất sự truyền sóng. Ta lần lượt xét từng hệ số.

1. **Hệ số tắt α.** Theo (16-21) hệ số α nói rõ tốc độ tắt biên độ sóng trong khi lan truyền dọc đường dây: α càng lớn, biên độ $\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x}$ tắt càng mạnh dọc theo x. Qua một đoạn dài đơn vị $x = 1$ m (hoặc 1 km) biên độ từ $\sqrt{2}A_1 e^0$ giảm xuống còn $\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha}$, nghĩa là với tốc độ giảm e^α lần/1 m:

$$U^+(0) : U^+(1) = e^\alpha, \quad (16\text{-}22a)$$

Hệ số α chính bằng lôga của tốc độ giảm ấy; ta gọi là *hệ số tắt* (hoặc hệ số suy giảm):

$$\ln \frac{U^+(0)}{U^+(1)} = \ln e^\alpha = \alpha. \quad (16\text{-}22b)$$

Đơn vị của α là nêpe/m hoặc nep/km v.v... Trong kỹ thuật vô tuyến còn dùng đơn vị là đêxibel (db).

2. **Hệ số pha β.** Theo (16-21) hệ số β trong biểu thức $\sin(\omega t + \Psi_1 - \beta x)$ nói lên tốc độ biến thiên góc pha của sóng thuận dọc đường dây.

Thật vậy ở một thời điểm t đã chọn pha ở điểm x bằng $\omega t + \Psi_1 - \beta x$ thì ở điểm $x + 1$ sẽ có pha bằng $\omega t + \Psi_1 - \beta x - \beta$. Vậy góc pha *biến thiên dọc đường dây với tốc độ* β rad/m hoặc rad/km. Tốc độ đó gọi là *hệ số pha*.

3. **Hệ số truyền sóng γ.** Cả hai hệ số tắt α và hệ số pha β đặc trưng quá trình truyền sóng của đường dây được gộp lại trong một số phức $\gamma = \alpha + j\beta$. Vì vậy γ được gọi là *hệ số truyền sóng* của đường dây.

Cần nhấn mạnh rằng vì $\gamma = \sqrt{ZY}$, nên nói chung hệ số truyền sóng γ cũng như các hệ số α, β đều phụ thuộc tần số và các thông số cơ bản của đường dây R, L, C, G.

4. **Vận tốc truyền sóng** v. Từ (16-18) đã biết vận tốc lan truyền một song thuận hoặc sóng ngược trên đường dây bằng ω/β. Tử số và mẫu số (16-18) phụ thuộc tần số ω, nên nói chung vận tốc truyền sóng không những tùy thuộc các thông số đường dây R, L, C, G mà còn tùy thuộc tần số. Những tín hiệu tần số khác nhau nói chung lan truyền với những vận tốc khác nhau. Riêng khi $R = 0$, $G = 0$, đường dây không tiêu tán, ta có

$$\gamma = \sqrt{j\omega L \cdot j\omega C} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta,$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC},$$

và

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}. \qquad (16\text{-}23)$$

Đó là vì theo Lý thuyết Trường điện từ, nghịch đảo của $\sqrt{LC}$ vừa đúng bằng $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$, trong đó ε_r và μ_r là hệ số điện môi và từ thẩm tương đối của môi trường quanh đường dây. Vậy riêng trường hợp không tiêu tan vận tốc truyền không phụ thuộc tần số; còn trường hợp có tiêu tán, nói chung vận tốc đó phụ thuộc tần số và bé hơn biểu thức (16-23).

5. **Tổng trở sóng** Z_c. Từ (16-14b) ta thấy tỉ số của phức số sóng điện áp thuận với phức số sóng dòng điện thuận, cũng như tỉ số của sóng áp ngược với sóng dòng ngược đều bằng một số phức có thứ nguyên điện trở. Ta gọi là tổng trở sóng:

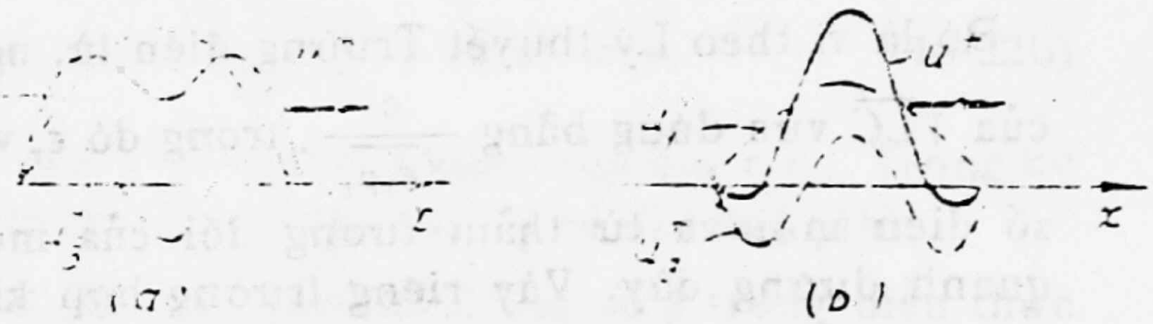
$$Z_c = \frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+} = \frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{Z}{\sqrt{ZY}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}. \qquad (16\text{-}24)$$

Ta thấy phức số tổng trở sóng:

$$Z_c = \sqrt{Z/Y} = z_c e^{j\theta}. \qquad (16\text{-}15)$$

phụ thuộc Z, Y tức phụ thuộc R, L, C, G của đường dây và tần số. Nó cũng là một thông số truyền sóng của đường dây, nói lên quan hệ giữa các sóng áp và sóng dòng.

Từ những lập luận trên suy ra nếu một tín hiệu là tổng một số sóng điều hòa có tần số khác nhau truyền dọc một đường dây tuyến tính có tiêu tán, thì nói chung các sóng sẽ truyền với vận tốc khác nhau với hệ số tắt khác nhau và gặp những tổng trở sóng khác nhau. Cho nên đến cuối đường dây tỉ số biên độ các điều hòa sẽ khác ở đầu dây, vị trí tương đối giữa chúng



H. 16-6

cũng khác đi, kết quả là sóng tổng sẽ khác đi (méo đi) như minh họa trong h. 16-6. Đó là hiện tượng *làm méo tín hiệu* truyền dọc đường dây dài có tiêu tán.

Ví dụ 16-2. Vẫn bài toán trong ví dụ 16-1, hãy tìm tổng trở sóng Z_c của đường dây và tốc độ lan truyền sóng. Nếu đã biết sóng điện áp thuận lan truyền từ đầu đường dây với hiệu dụng $\dot{U}_1 = 110/\underline{0^\circ}$ V, hãy viết biểu thức các sóng áp và dòng thuận.

Giải: Theo (16-24) tổng trở sóng

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{3,31.10^{-4}/72,3^\circ}{3.83.10^{-9}/81^\circ}} = 294/-4,35^\circ =$$

$$= 294/-0.076 \text{ rad } \Omega.$$

Điện áp thuận sẽ có biểu thức phức và điều hòa như sau:

$$\dot{U}^+(x) = \dot{U}_1 e^{-\gamma x} = 110\, e^{-0,259.10^{-6}x - j1,09.10^{-6}x}.$$

$$\leftrightarrow \sqrt{2}.\, 110\, e^{-0,259.10^{-6}x} \sin(314t - 1,09.10^{-6}x)\ V.$$

Dòng điện thuận có dạng:

$$\dot{I}^+(x) = \frac{\dot{U}^+(x)}{Z_c} = \frac{\dot{U}_1 e^{-\gamma x}}{294/-0.076} =$$

$$= 0.374\, e^{-0,259.10^{-6}x - j\,1,09.10^{-6}x + 0,076}.$$

$$\leftrightarrow \sqrt{2}.\, 0.374\, e^{-0,259.10^{-6}x} \sin(314t - 0.076 - 1,09.10^{-6}x)\ A.$$

§ 16-5. ĐƯỜNG DÂY DÀI KHÔNG MÉO

Trong mục trên đã rõ, nói chung đường dây dài có tiêu tán thường làm méo tín hiệu truyền dọc dây. Nhưng trường hợp đặc biệt một đường dây tiêu tán sẽ truyền tín hiệu không méo nếu bảo đảm tỷ lệ sau giữa các thông số dọc R, L và các thông số ngang G, C:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}. \qquad (16\text{-}25)$$

Muốn chứng minh điều ấy cần nêu rõ trong trường hợp này hệ số tắt α, vận tốc truyền v và tổng trở sóng Z_c không phụ thuộc tần số.

Ta có hệ số truyền sóng bằng:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} =$$

$$= \sqrt{R\left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right) G\left(1 + j\omega \frac{C}{G}\right)}.$$

Thay (16-25) vào ta có:

$$\gamma = \sqrt{RG\left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right)^2} = \sqrt{RG}\left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right) = \alpha + j\beta.$$

Vậy hệ số tắt không phụ thuộc tần số:

$$\alpha = \sqrt{RG}, \qquad (16\text{-}26)$$

Từ hệ số pha: $\beta = \omega L \sqrt{\frac{G}{R}}$ (16-27)

suy ra vận tốc truyền sóng cũng không phụ thuộc tần số

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{R}{G}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (16\text{-}28)$$

Ở đây theo (16-25) đã thay $\frac{R}{G}$ bằng $\frac{L}{C}$.

Ngoài ra xét tổng trở sóng, cũng không tùy thuộc tần số, mà lại là một số thực:

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{R\left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right)}{G\left(1 + j\omega \frac{C}{G}\right)}} = \sqrt{\frac{R}{G}}$$

(16-29)

Vậy đường dây có các thông số cơ bản thỏa mãn (16-25) *không làm méo* tín hiệu truyền đi.

Thông thường tự nhiên các thông số cơ bản của đường dây không thỏa mãn (16-25). Vì vậy trong các đường dây thông tin muốn tránh méo phải thực hiện quan hệ đó một cách nhân tạo. Pupin đã nêu cách thực

thêm vào đường dây những cuộn cảm tập trung L thích hợp để thỏa mãn (16-25). Phương pháp ấy gọi là việc *Pupin hóa đường dây*. thường dùng ở các đường dây thông tin dài.

Ví dụ 16-3 : Một đường dây thông tin có các số liệu cơ bản $R=10^{-4}$ [illegible] $L=8\ .\ 10^{-7}$ H/m ; $C=1{,}6\ .\ 10^{-11}$ F/m ; $G=0{,}4\ .\ 10^{-9}$ S/m [illegible] coi có méo hay không? Muốn Pupin hóa phải làm thế nào?

Giải : Đường dây này có méo vì không thỏa mãn quan hệ (16-25). Thật vậy

$$\frac{L}{R}=\frac{8\ .\ 10^{-7}}{10^{-4}}=8\ .\ 10^{-3} \neq \frac{C}{G}=\frac{1{,}6\ .\ 10^{-11}}{0{,}4\ .\ 10^{-9}}=4.10^{-2}.$$

Muốn không méo thì điện cảm trên đơn vị dài theo (16-25) phải bằng :

$$L_0=\frac{C}{G}R=4\ .\ 10^{-2}\ .\ 10^{-4}=4\ .\ 10^{-6}\ \text{H/m}.$$

Muốn Pupin hóa phải bù thêm cảm dọc đường dây với mức :

$$L_{bù}=L_0-L=4\ .\ 10^{-6}-0{,}8\ .\ 10^{-6}=3{,}2\ .\ 10^{-6}\ \text{H/m}$$

§ 16-6. KHÁI NIỆM VỀ PHẢN XẠ SÓNG TRÊN ĐƯỜNG DÂY DÀI

Ở trên đã phân tích điện áp và dòng điện trên đường dây dài thành những sóng thuận và ngược :

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}(x)&=\dot{U}^{+}(x)+\dot{U}^{-}(x)\\ \dot{I}(x)&=\dot{I}^{+}(x)-\dot{I}^{-}(x)=\frac{1}{Z_c}[\dot{U}^{+}(x)-\dot{U}^{-}(x)].\end{aligned}\right\}\quad(16\text{-}19b)$$

Ta có thể xây dựng một quan niệm về các sóng ấy *coi sóng ngược như là kết quả phản xạ của sóng thuận*

đi tới, và đề ra *hệ số phản xạ* $n(x)$ *ở điểm* x như là tỉ số của sóng ngược $\dot{U}^-(x)$ và $\dot{I}^-(x)$ với sóng thuận $\dot{U}^+(x)$ và $\dot{I}^+(x)$ ở điểm đó:

$$n(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)} \qquad (16\text{-}30)$$

Hệ số phản xạ $n(x)$ phụ thuộc vào các thông số đường dây R, L, C, G, tải Z_2 và tần số ω, do đó cũng là một thông số của đường dây có tải về mặt truyền sóng. Nếu đã biết $n(x)$ thì chỉ cần biết một trong 3 lượng: sóng thuận, sóng ngược và tổng hay hiệu của chúng là suy ra được 2 lượng còn lại.

Ví dụ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}^+ + \dot{U}^- = \dot{U}^+(x)\,(1+n) = \dot{U}^-(x)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \dots \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}^+ - \dot{I}^- = \dot{I}^+(x)\,(1-n) = \frac{\dot{U}^+(x)}{Z_c}\,(1-n) = \dots \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}31)$$

Ta hãy đi tìm công thức của hệ số phản xạ $n(x)$. Muốn thế ta viết lại (16-19b) dưới dạng:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x), \\ Z_c\dot{I}(x) &= \dot{U}^+(x) - \dot{U}^-(x). \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}19c)$$

Cộng vế với vế, và trừ vế với vế 2 phương trình đó ta có:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}^+(x) &= \frac{1}{2}\left[\dot{U}(x) + Z_c\,\dot{I}(x)\right], \\ \dot{U}^-(x) &= \frac{1}{2}\left[\dot{U}(x) - Z_c\,\dot{I}(x)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}32)$$

Do đó được:

$$n(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{U}(x) - Z_c\,\dot{I}(x)}{\dot{U}(x) + Z_c\,\dot{I}(x)}. \qquad (16\text{-}33)$$

Trong đó cần khử những biến trạng thái $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ không phải là thông số đặc trưng đường dây. Chúng tỉ lệ nhau qua một tổng trở $Z(x)$ nào đó, tất nhiên $Z(x)$ tùy thuộc các thông số cơ bản đường dây, tải Z_2, tọa độ x. Ta sẽ nói về tổng trở đó ở m. 16-9. Vậy thay vào (16-33) $\dot{U}(x) = Z(x)\ \dot{I}(x)$ và khử $\dot{I}(x)$ đi ta có công thức cần tìm :

$$n(x) = \frac{Z(x) - Z_c}{Z(x) + Z_c}, \qquad (16\text{-}34)$$

Ta thường cần xét quá trình phản xạ ở cuối đường dây, chỗ nối vào tải Z_2. Ở đó tổng trở $Z(x)$ chính là Z_2. Vậy ở đó hệ số phản xạ cuối dây bằng :

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z^c}{Z_2 + Z_c}. \qquad (16\text{-}35)$$

Tùy theo tương quan so sánh giữa tải Z_2 và tổng trở sóng Z_c, hệ số phản xạ sẽ có giá trị khác nhau, điều này đã dự đoán ngay từ đầu mục này.

Riêng khi tải Z_2 vừa bằng Z_c hệ số phản xạ bằng số không tức không có phản xạ

$$Z_2 = Z_c \text{ thì } n_2 = 0. \qquad (16\text{-}36)$$

Lúc đó nếu trên đường dây có một sóng thuận đi tới, sẽ không có sóng phản xạ ; áp và dòng trên đường dây chính bằng áp và dòng của sóng thuận này. Tải có trị số bằng Z_c của đường dây gọi là *tải hòa hợp* với đường dây.

Ví dụ 16-4 : Nối vào cuối đường dây xét ở ví dụ 16-2, một tải $Z_2 = 1200\ \Omega$. Hãy tính hệ số phản xạ ở cuối dây. Cho biết điện áp cuối dây $\dot{U}_2 = 110$ kV. Hãy tính điện áp sóng thuận (sóng tới) và sóng ngược (sóng phản xạ) ở cuối đường dây.

Giải — Ta tính hệ số phản xạ ở cuối đường dây với tải $Z_2 = 1200\,\Omega$:

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = \frac{1200 - 294\,/\underline{-4,35^\circ}}{1200 + 294\,/\underline{-4,35^\circ}} =$$

$$= \frac{1200 - (292,5 - j22,2)}{1200 + (292,5 - j22,2)} = \frac{908\,/\underline{1,4^\circ}}{1493\,/\underline{-0,85^\circ}} =$$

$$= 0,606\,/\underline{2,25^\circ} = 0,606 + j0,0238.$$

Ở cuối đường dây có:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^- = \dot{U}_2^+(1+n).$$

Do đó

$$\dot{U}_2^+ = \frac{\dot{U}_2}{1+n} = \frac{110}{1 + 0,606 + j\,0,0238} =$$

$$= \frac{110}{1,606\,/\underline{0,85^\circ}} = 68,5\,/\underline{-0,85^\circ}\ \text{kV}.$$

$$\dot{U}_2^- = n\dot{U}_2^+ = 0,606\,/\underline{2,25^\circ}\ \ 68,5\,/\underline{-0,85^\circ} = 41,6\,/\underline{1,4^\circ}\ \text{kV}.$$

§ 16-7. CHẾ ĐỘ ĐƯỜNG DÂY HÒA HỢP VỚI TẢI

Ta hãy xét chế độ đường dây làm việc hòa hợp với tải, tức là khi tổng trở sóng của đường dây vừa bằng tổng trở tải $Z_2 = Z_c$.

Lúc đó hệ số phản xạ cuối đường dây cũng như ở khắp dọc đường dây bằng số không, trên đường dây chỉ có sóng tới (sóng thuận) không có sóng phản xạ (sóng ngược). Vậy điện áp và dòng điện phức trên đường dây sẽ biến thiên theo quy luật hàm mũ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}^+(x) = U_0 e^{-\gamma x}, \\ \dot{I}(x) &= I^+(x) = I_0 e^{-\gamma x}, \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}37)$$

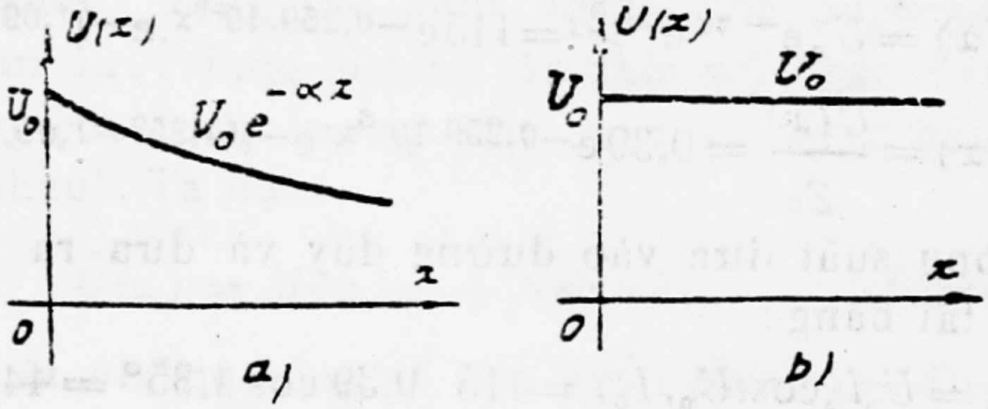
hoặc

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{U}^+(x)}{Z_c} = \frac{\dot{U}_0}{Z_c} e^{-\gamma x}.$$

trong đó $\dot{U}_0$ là điện áp ở gốc tọa độ ($x = 0$).

Trị hiệu dụng các lượng cũng tắt dần đơn điệu dọc đường dây như h. 16-7:

$$\left.\begin{aligned} U(x) &= |\dot{U}(x)| = U_0 e^{-\alpha x}, \\ I(x) &= |\dot{I}(x)| = \frac{U_0}{z_c} e^{-\alpha x}. \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}38)$$



H. 16-7

Trường hợp khi hệ số tắt bằng số không ($\alpha = 0$), dọc đường dây có tải hòa hợp, điện áp hiệu dụng và dòng điện hiệu dụng sẽ không thay đổi suốt dọc đường dây. (Tuy vậy góc pha vẫn biến thiên dọc đường dây, vì lúc đó theo (16-37), $\dot{U}(x) = \dot{U}_0 e^{-j\beta x}$).

Chú ý rằng bây giờ trên đường dây chỉ có những sóng thuận áp và dòng, và theo (16-24) tỉ số của chúng luôn bằng Z_c nên trong chế độ này mặc dù đường dây dài ngắn bao nhiêu, *tổng trở đường dây* hiểu là tỉ số $\dot{U}(x)$ trên $\dot{I}(x)$, luôn bằng Z_c là một hằng số.

Vấn đề truyền tải năng lượng qua một đường dây dài đều đến một tải hòa hợp có nhiều điểm đặc biệt. Ta sẽ xét vấn đề này trong một mục ở dưới.

Ví dụ 16-5: Vẫn đề bài ví dụ 16-2, nay cho đường dây đó cung cấp cho một tải hòa hợp; cho biết điện áp ở đầu đường dây 115 kV. Hãy tìm biểu thức phân

bố áp và dòng phức dọc đường dây, hiệu suất truyền tải năng lượng dọc đường dây, nếu đã biết độ dài đường dây là l?

Giải — Đường dây làm việc với tải hòa hợp, vậy tổng trở tải bằng:

$$Z_2 = Z_c = 294 \angle -4\,35^\circ\ \Omega.$$

Ta có phân bố áp và dòng phức dọc đường dây:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_0 e^{-\gamma x} e^{-j\beta x} = 115 e^{-0,259.10^{-6}x} . e^{-j1,09.10^{-6}x}\ \text{kV};$$

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{Z_c} = 0,39 e^{-0,259.10^{-6}x}\ e^{-j(4,35^\circ - 1,09.10^{-6}x)}\ \text{kA}.$$

Công suất đưa vào đường dây và đưa ra cuối dây đến tải bằng:

$$P_0 = U_0 I_0 \cos(\dot{U}_0, \dot{I}_c) = 115 . 0,39 \cos 4,35^\circ = 44,7\ \text{MW}.$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\dot{U}_2, \dot{I}_2) = U_0 e^{-\alpha l} . I_c e^{-\alpha l} \cos\theta =$$

$$= U_0 I_0 \cos\theta\ e^{-2\alpha l} = 44,7 . e^{-2\alpha l}\ \text{MW}.$$

Hiệu suất truyền tải:

$$\eta = P_2 : P_1 = e^{-2\alpha l}.$$

§ 16-8. NGHIỆM ÁP VÀ DÒNG DẠNG HÀM LƯỢNG GIÁC HYPERBOL

Trong các mục trên ta viết nghiệm phương trình đường dây dài đều ở chế độ xác lập điều hòa:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U};\quad \frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I}.$$

dưới dạng các sóng chạy thuận và ngược biểu diễn bằng các hàm mũ $\dot{A}_1 e^{-\gamma x}$, $\dot{A}_2 e^{\gamma x}$, v.v... Tuy không tính toán để xác định cụ thể các hằng số tích phân $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$ theo các điều kiện bờ ở 2 đầu đường dây, ta đã làm rõ

một số hiện tượng quan trọng: hiện tượng truyền sóng phản xạ, hòa hợp tải với đường dây, cũng như có khái niệm về sự phân bố phức tạp của dòng và áp dọc đường dây.

Để tiện xét sự phân bố dòng và áp dọc đường dây và một số khái niệm khác ta viết nghiệm (16-10) dưới một dạng khác: dạng các hàm lượng giác hyperbol. (Viết nghiệm dưới dạng tổ hợp các hàm mũ hoặc dưới dạng tổ hợp các hàm lượng giác $\text{ch}\gamma x$ và $\text{sh}\gamma x$ hoàn toàn như nhau). Ta đặt:

$$\dot{U}(x) = M\text{ch}\,\gamma x + N\text{sh}\,\gamma x. \qquad (16\text{-}39a)$$

với M và N là những hằng số tích phân phức xác định theo điều kiện bờ hai đầu đường dây.

Đồng thời theo (16-9), đạo hàm (16-39a) theo x ta được nghiệm tổng quát của phức số dòng $\dot{I}(x)$:

$$\dot{I}(x) = -\frac{1}{Z}\frac{d\dot{U}}{dx} = -\frac{\gamma}{Z}M\text{sh}\,\gamma x - \frac{\gamma}{Z}N\text{ch}\,\gamma x =$$

$$= -\frac{1}{Z_c}(M\text{sh}\,\gamma x + N\text{ch}\,\gamma x), \qquad (16\text{-}39b)$$

hoặc viết lại cho gọn ghẽ:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}(x) &= M\text{ch}\,\gamma x + N\text{sh}\,\gamma x,\\ -Z_c\dot{I}(x) &= M\text{sh}\,\gamma x + N\text{ch}\,\gamma x.\end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}40)$$

Ta xác định các hằng số tích phân M, N theo biên kiện. Gọi điện áp ở gốc tọa độ $x=0$ là $\dot{U}_0$, $\dot{I}_0$, thay vào (16-40) trị số $x=0$ và $\dot{U}_0$, $\dot{I}_0$ ta có:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_0 &= M\text{ch}0 + N\text{sh}0 = M,\\ -Z_c\dot{I}_0 &= M\text{sh}0 + N\text{ch}0 = N.\end{aligned}\right\}$$

Từ đó giải được:

$$M = \dot{U}_o, \quad N = -Z_c \dot{I}_o. \tag{16-41}$$

Thay (16-41) vào (16-40) ta được nghiệm $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ viết theo điều kiện ở gốc tọa độ, dưới dang các hàm hyperbol:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_c \operatorname{ch} \gamma x - Z_c \dot{I}_o \operatorname{sh} \gamma x, \\ \dot{I}(x) &= -\frac{\dot{U}_o}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x + \dot{I}_o \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned}\right\} \tag{16-42}$$

Chú ý rằng ở đây ta không quy định gắn gốc tọa độ vào những điểm đặc biệt nào trên đường dây cả. Tùy theo sự tiện dùng có thể gắn gốc đó một cách linh hoạt vào đầu hoặc cuối đường dây.

Cụ thể khi biết trị số áp và dòng $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ ở đầu đường dây (nguồn) ta nên gắn gốc tọa độ $x = 0$ vào đầu đường dây, hướng chiều x về phía cuối dây như (h. 16-8a). Phương trình (16-42) trong hệ tọa độ ấy sẽ chuyển thành:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_c \operatorname{sh} \gamma x, \\ \dot{I}(x) &= -\dot{U}_1 \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{Z_c} + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned}\right\} \tag{16-43}$$

Ngược lại khi biết điện áp $\dot{U}_2$ và dòng điện $\dot{I}_2$ ở cuối dây, trong yêu cầu thực tế việc truyền tải năng lượng xoay chiều thường là như vậy, ta nên gắn gốc tọa độ vào cuối dây, và thay vào (16-42) những giá trị ở cuối dây.

Nhưng trong hệ tọa độ chọn như ở trên (h. 16-8b) tọa độ đường dây (ở phía trước gốc tọa độ) sẽ âm. Để tránh bất tiện ấy ta dùng trục tọa độ Ox' hướng ngược lại với Ox từ phía cuối dây lên phía đầu dây.

Trong hệ Ox' đó có:

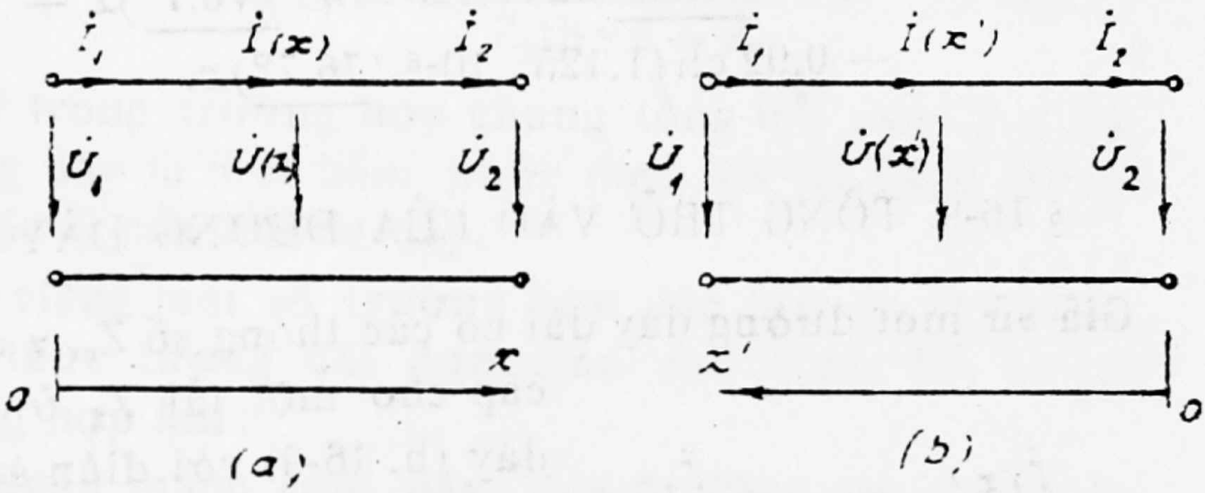
$$x = -x'\text{; do đó } \mathrm{sh}\gamma x = -\mathrm{sh}\gamma x'\text{; } \mathrm{ch}\gamma x = \mathrm{ch}\gamma x'. \quad (16\text{-}44)$$

Thay (16-44) và $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ vào (16-42) ta được:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_2 \mathrm{ch}\gamma x' + Z_c \dot{I}_2 \mathrm{sh}\gamma x', \\ \dot{I}(x') &= \dot{U}_2 \frac{\mathrm{sh}\gamma x'}{Z_c} + \dot{I}_2 \mathrm{ch}\gamma x'. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}45a)$$

Trong thực tế khi viết biểu thức phân bố dòng và áp theo điều kiện cuối dây ta thường quy ước hướng trục tọa độ từ cuối lên đầu dây. Vì vậy trong (16-45a) thường không cần đánh dấu phẩy nữa mà hiểu ngầm quy ước đó. Vậy có:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \mathrm{ch}\gamma x + \dot{I}_2 Z_c \mathrm{sh}\gamma x, \\ \dot{I}(x) &= \dot{U}_2 \frac{\mathrm{sh}\gamma x}{Z_c} + \dot{I}_2 \mathrm{ch}\gamma x. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}45b)$$



H. 16-8

Ở đây chỉ cần chú ý rằng khi trước $\mathrm{sh}\gamma x$ đặt dấu trừ như (16-43) là trục tọa độ hướng từ đầu đến cuối, khi trước đó có dấu cộng như (16-45b) là trục tọa độ hướng ngược lại.

Dùng (16-43, 45) có thể tính ra sự phân bố áp và dòng hiệu dụng dọc đường dây (không nêu trong cuốn sách này).

áp, dọc đường dây dạng hàm hyperbol (xem đường dây nêu trong ví dụ 16-4, khi tải $Z_2 = 1200\Omega$ và $\dot{U}_2 = 110$ kV.

Giải — Từ các ví dụ trên đã tìm được:

$\gamma = 1,125 . 10^{-6} \underline{/ 76,7°}$ 1/m, $Z_c = 294 \underline{/ -4,35°}\ \Omega$.

Ta có thêm

$\dot{U}_2 = 110$ kV, $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 : Z_2 = 110 : 1200 = 0,92 \underline{/ 0°}$ kA.

Ta có phương trình phân bố áp và dòng viết theo điều kiện $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$:

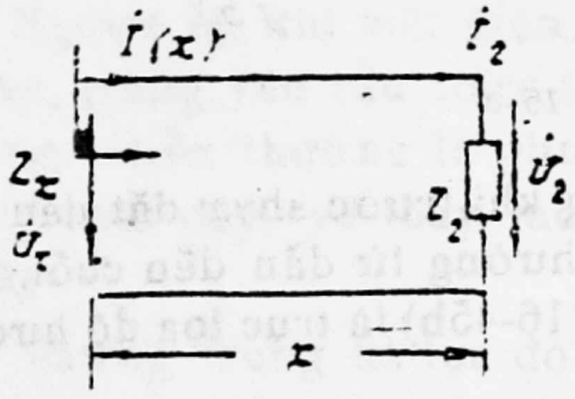
$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \mathrm{ch}\gamma x - \dot{I}_2 Z_c \mathrm{sh}\gamma x, \\ \dot{I}(x) &= \dot{U}_2 \frac{\mathrm{sh}\gamma x}{Z_c} + \dot{I}_2 \mathrm{ch}\gamma x. \end{aligned}\right\}$$

Thay số vào ta có:

$$\dot{U}(x) = 110 \,\mathrm{ch}\,(1,125 . 10^{-6} \underline{/ 76,7°})x - $$
$$- 270 \,\mathrm{sh}\,(1,125 . 10^{-6} \underline{/ 76,7°})x.$$
$$\dot{I}(x) = 0,374 \underline{/ 4,35°}\ \mathrm{sh}\,(1,125 . 10^{-6} \underline{/ 76,7°})x + $$
$$- 0,92 \,\mathrm{ch}\,(1,125 . 10^{-6} \underline{/ 76,7°})x.$$

§ 16-9. TỔNG TRỞ VÀO CỦA ĐƯỜNG DÂY

Giả sử một đường dây dài có các thông số Z_c, γ cung cấp cho một tải Z_2 ở cuối dây (h. 16-9) với điện áp $\dot{U}_2$ và dòng $\dot{I}_2$. Điện áp và dòng điện phức sẽ phân bố dọc các toạ độ x (từ cuối dây lên) theo (16-45b). Ứng với toạ độ x (kể từ cuối lên) $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ có những trị khác nhau.



H. 16-9

Tỉ số của $\dot{U}(x)$ với $\dot{I}(x)$ ứng với tọa độ (độ dài) ấy chính là tổng trở vào của đường dây có độ dài x với tải Z_2. Tất nhiên tổng trở vào phụ thuộc các thông số đường dây, Z_c, tần số và độ dài x của đường dây:

$$Z(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} \qquad (16\text{-}46)$$

Ta hãy tìm biểu thức $Z(x)$ theo (16-46) và (16-45b):

$$Z(x) = \frac{\dot{U}_2 \mathrm{ch}\gamma x + Z_c \dot{I}_2 \mathrm{sh}\,\gamma x}{\frac{\dot{U}_2}{Z_c}\mathrm{sh}\,\gamma x + \dot{I}_2 \mathrm{ch}\,\gamma x} = \frac{Z_2 \dot{I}_2 \mathrm{ch}\,\gamma x + \dot{I}_2 Z_c \mathrm{sh}\,\gamma x}{\frac{Z_2 \dot{I}_2}{Z_c}\mathrm{sh}\,\gamma x + \dot{I}_2 \mathrm{ch}\,\gamma x} =$$

$$= Z_c \frac{Z_2 \mathrm{ch}\,\gamma x + Z_c \mathrm{sh}\,\gamma x}{Z_2 \mathrm{sh}\,\gamma x + Z_c \mathrm{ch}\,\gamma x}, \qquad (16\text{-}47)$$

hoặc ước lược với $\mathrm{ch}\gamma x$ ta có

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_2 + Z_c \,\mathrm{th}\,\gamma x}{Z_2 \mathrm{th}\,\gamma x + Z_c} \qquad (16\text{-}48)$$

Vậy trong trường hợp chung tổng trở vào $Z(x)$ của đường dây là một hàm phức theo tọa độ hoặc độ dài x (hoặc l) của đường dây.

Chỉ riêng một số trường hợp đặc biệt ta có những công thức tương đối đơn giản cho $Z(x)$. Đó là các trường hợp khi:

a) Ngắn mạch cuối dây, $Z_2 = 0$. Thay vào (16-48) ta có tổng trở vào một đường dây dài l bằng:

$$Z(l) = Z_c \mathrm{th}\,\gamma l.$$

b) Hở mạch cuối dây, $Z_2 = \infty$. Thay vào (16-48) có:

$$Z(l) = Z_c \,\mathrm{cth}\,\gamma l$$

c) Hòa hợp với tải, $Z_2 = Z_c$. Thay vào (16-48) có:

$$Z(l) = Z_c = Z_2$$

Công thức này đã nêu ở m. 16-7.

§ 16-10. ĐƯỜNG DÂY DÀI ĐỀU KHÔNG TIÊU TÁN

Trong các đường dây dài thường gặp trong kỹ thuật dòng mạnh cũng như kỹ thuật dòng yếu, tiêu tán thường rất ít. Điện trở và điện dẫn trên đơn vị dài thứ tự bé hơn nhiều so với cảm kháng và dung dẫn:

$$R \ll \omega L; \quad G \ll \omega C.$$

Vì vậy với độ chính xác đủ dùng có thể bỏ qua hiện tượng tiêu tán và coi gần đúng đường dây không tiêu tán, tức coi $R = 0, G = 0$. Do đó việc xét đường dây dài không tiêu tán có một ý nghĩa thực tiễn phổ biến.

Mục này sẽ làm rõ về những thông số truyền sóng, về phương trình và nghiệm của đường dây này.

1) **Hệ số truyền sóng.** Thay vào (16-11) $Z = j\omega L$, $Y = j\omega C$ ta có hệ số truyền sóng:

$$\gamma = \sqrt{j\omega L \cdot j\omega C} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta.$$

Vậy hệ số tắt α bằng số không và hệ số pha tỉ lệ với tần số ω.

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{LC}. \tag{16-49}$$

Sóng lan truyền dọc đường dây này không tắt.

2. **Vận tốc sóng v.** Ở (16-25) đã nêu rõ, ở đây lại thấy vận tốc sóng không tùy thuộc tần số:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \tag{16-23}$$

Vì vậy mọi điều hòa của tín hiệu đều lan truyền với vận tốc như nhau.

Tính chất này được dùng trong kỹ thuật siêu cao để làm chậm trễ các tín hiệu một đoạn thời gian ngắn T. Muốn thế ta cho tín hiệu chạy qua một đoạn đường dây cáp chuyên dụng gọi là đường dây trễ, có các thông

số L, C (do đó v) và độ dài l nào đó. Thời gian T để sóng chạy hết đoạn đường dây bằng $l : v$, và truyền qua một đơn vị dài đường dây là $1 : v$. Thay vào đó biểu thức (16-23) ta có *thời gian trễ* trên 1 m dây là :

$$T_0 = \frac{1}{v} = \sqrt{LC}. \qquad (16\text{-}49b)$$

3. **Tổng trở sóng Z_c.** Theo (16-15) ta có tổng trở sóng là một số thực và không tùy thuộc tần số :

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = z_c \underline{/0°} \qquad (16\text{-}50)$$

4. Từ 3 điểm trên suy ra sóng lan truyền trên đường dây này không tắt, có tốc độ như nhau, với tổng trở sóng thực và như nhau, do đó không bị méo. Ngoài ra dạng sóng điện áp và dòng điện giống hệt nhau. Đó là những điều đặc biệt không có ở những đường dây có tiêu tán.

5. **Phương trình trạng thái đường dây không tiêu tán.** Từ (16-4) và (16-10) ta suy ra phương trình trạng thái cơ bản của đường dây dài đều không tiêu tán dưới dạng tức thời là :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L\frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C\frac{\partial u}{\partial t}; \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}51a)$$

và dưới dạng số phức là :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} &= -\omega^2 LC\dot{U} = (j\beta)^2\dot{U}, \\ \frac{d^2\dot{I}}{dx^2} &= -\omega^2 LC\dot{I} = (j\beta)^2\dot{I}. \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}51b)$$

6. **Nghiệm của phương trình.** Từ nghiệm phương trình đường dây có tiêu tán ta đi đến nghiệm phương

trình đường dây không tiêu tán bằng cách thay γ bằng $j\beta$ và Z_c bằng z_c.

Chú ý rằng theo công thức Ơle suy ra:

$$ch(j\beta x) = \cos\beta x; \quad sh(j\beta x) = j\sin\beta x. \quad (16\text{-}52)$$

Đem thay vào (16-45b) ta được nghiệm tính theo điều kiện cuối dây:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \cos\beta x + j\dot{I}_2 z_c \sin\beta x, \\ \dot{I}(x) &= j\frac{\dot{U}_2}{z_c}\sin\beta x + \dot{I}_2 \cos\beta x. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}53)$$

So với (16-45b) công thức (16-53) với đối số thực βx đơn giản hơn nhiều.

Ví dụ 16-7. Một đường dây cáp cao tần tiêu tán rất ít có thể bỏ qua, có các thông số cơ bản $R = 0$, $G = 0$, $L = 10^{-6}\ H/m$, $C = 2{,}8.10^{-11}\ F/m$. Hãy tính các thông số truyền sóng. Biết rằng $\dot{U}_2 = 100V$, $Z_2 = 500\Omega$. Hãy viết biểu thức điện áp dòng điện dọc đường dây cáp. Biết tần số $\omega = 3.10^7\ rad/s$ tính thời gian để một sóng hoặc xung truyền qua một đoạn dây $1m$.

Giải: Theo (16-49), (16-23), (16-15) ta có các thông số truyền sóng:

$$\alpha = 0,\ \beta = \omega\sqrt{LC} = 3.10^7\sqrt{10^{-6}.2{,}8.10^{-11}} = 0{,}159 rad/m,$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}.2{,}8.10^{-11}}} = 1{,}89.10^8 m/s$$

(bé hơn c).

Thời gian truyền sóng T. Qua $1m$ đường dây có:

$$T_0 = \frac{1}{v} = \sqrt{LC} = \frac{1}{1{,}89.10^8} = 5{,}3.10^{-9} s.$$

tức là qua mỗi mét đường dây sóng bị giữ chậm lại $5{,}3.10^{-9}s$. Tổng trở sóng của đường dây bằng:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{2{,}8.10^{-11}}} = 189\underline{/0^\circ}\ \Omega.$$

điện áp và dòng ở cuối đường dây bằng:

$$\dot{U}_2 = 100\text{V},\ \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{100}{500} = 0{,}2\underline{/0^\circ}\ \text{A}.$$

Thay vào (16-53) được biểu thức phân bố các phức số dòng và áp theo x:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}(x) &= 100\cos 0{,}159x + j37{,}8\sin 0{,}159x,\\ \dot{I}(x) &= j0{,}531\sin 0{,}159x + 0{,}2\cos 0{,}159x.\end{aligned}\right\}$$

Biểu thức này rất đơn giản cho ta tính được dễ dàng dòng và áp phức ở mỗi trị x đã cho.

§ 16-11. PHÂN BỐ HIỆU DỤNG ĐIỆN ÁP DỌC ĐƯỜNG DÂY DÀI KHÔNG TIÊU TÁN

Ở trên đã có công thức phân bố áp và dòng hiệu dụng dọc một đường dây dài không tiêu tán (16-53). Trong mục này sẽ dựa vào đó để tính sự phân bố điện áp dọc đường dây.

1. **Trường hợp đường dây hở mạch ở cuối tức $\dot{I}_2 = 0$.** Từ (16-53) với $I_2 = 0$, ta được

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}_2\cos\beta x,\\ \dot{I}(x) &= j\frac{\dot{U}_2}{z_c}\sin\beta x.\end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}54)$$

Ta thấy một hiện tượng đặc sắc là khi hở mạch cuối dây trị hiệu dụng của áp và dòng phân bố theo qui luật hàm cos và sin dọc đường dây.

$$\left.\begin{aligned}U(x) &= U_2|\cos\beta x|,\\ I(x) &= \frac{U_2}{z_c}|\sin\beta x|.\end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}55)$$

Trị hiệu dụng bằng U_2 ở cuối dây giảm dần đến số không ở tọa độ $\beta x = \frac{\pi}{2}$ hay $x = \frac{2\pi}{\beta}\frac{1}{4} = \frac{\lambda}{4}$, tức ở cách cuối dây một phần tư bước sóng. Sau đó lại tăng lên giá trị U_2 ở tọa độ $\beta x = \pi$ hay $x = \frac{\lambda}{2}$ để rồi lại giảm đến số không ở tọa độ $\frac{3}{2}\lambda$. Những điểm có $U = 0$ gọi là điểm *nút* của áp, và những chỗ có trị hiệu dụng cực đại bằng U_2 gọi là điểm *bụng*. Ta thấy bụng và nút phân bố xen kẽ nhau, cách nhau những quãng bằng $\lambda/4$. Phân bố hiệu dụng của dòng điện dọc đường dây cũng có nút và bụng xen kẽ nhau, cách nhau $\lambda/4$. Chỉ khác là nút của áp trùng với bụng của dòng và nút của dòng trùng với bụng của áp (h. 16-10a).

Ở những nút áp hoặc dòng, các giá trị hiệu dụng U hoặc I triệt tiêu, tức giá trị tức thời $u(t)$ hoặc $i(t)$ triệt tiêu. Do đó công suất và năng lượng tỉ lệ với u và i, không chảy qua các nút được.

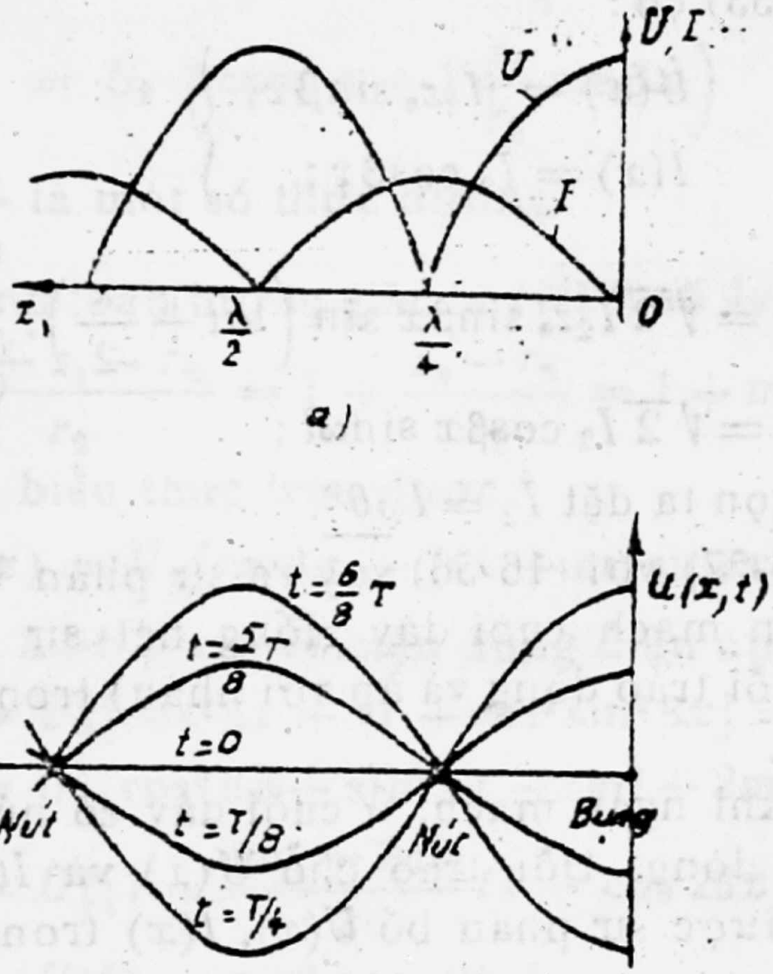
Năng lượng chỉ chuyển vận, trao đổi cục bộ trong một vùng giữa hai nút. Do không trao đổi với một nguồn nào cả cho nên đó chỉ có thể là dao động giữa điện trường và từ trường (giữa các nguyên tố dL, dC) trong vùng giữa 2 nút.

Về trị số tức thời từ (16-54) suy ra (với $\dot{U}_2 = U_2\underline{/0°}$):

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{2}\,U_2 \cos\beta x \sin\omega t, \\ i(x,t) &= \sqrt{2}\,\frac{U_2}{z_c}\sin\beta x \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}56)$$

Vậy điện áp ở mỗi điểm x có trị hiệu dụng khác nhau (theo 16-55) nhưng đều dao động điều hòa với góc pha như nhau (nói đúng hơn vì cứ qua nửa bước sóng hàm $\cos\beta x$ lại đổi dấu ứng với góc pha sai lệch nhau π).

Điện áp đó không di chuyển dọc dây vì các nút cố định, mà biến thiên đập mạch, giống một sợi dây đàn căng giữa 2 điểm. H 16-10b vẽ sự phân bố tức thời $u(x, t)$



H. 16-10

ở những thời điểm khác nhau. Sự biến thiên như vậy gọi là những *sóng đứng*. Dòng điện cũng biến thiên theo dạng sóng đứng như vậy với các nút xê dịch so với nút áp $\lambda/4$, và với góc pha lệch so với áp $\pi/2$ (xem 16-54 hoặc 16-56). Chính vì lệch pha $\pi/2$ nên công suất ở mọi điểm có tính chất dao động thuần túy, phản kháng thuần túy.

Vậy trên đường dây không tiêu tán hở mạch chỉ có sóng đứng, năng lượng không truyền tải dọc đường dây,

mà chỉ dao động cục bộ trong từng đoạn dây (trên những quãng $\lambda/4$), và không có sóng chạy.

2. **Trường hợp ngắn mạch ở cuối dây $\dot{U}_2 = 0$.** Ở đây cũng có hiện tượng sóng đứng như khi hở mạch. Thật vậy theo (16-53) có:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}(x) &= j\dot{I}_2 z_c \sin\beta x, \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_2 \cos\beta x; \end{aligned}\right\}$$

hoặc

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{2}\, I_2 z_c \sin\beta x \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \\ i(x,t) &= \sqrt{2}\, I_2 \cos\beta x \sin\omega t; \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}57)$$

trong đó để gọn ta đặt $\dot{I}_2 = I_2 \underline{/0°}$.

So sánh (16-57) với (16-56) suy ra sự phân bố áp và dòng khi ngắn mạch cuối dây giống hệt sự phân bố dòng và áp (đổi tráo dòng và áp với nhau) trong trường hợp hở mạch.

Tất nhiên khi ngắn mạch, ở cuối dây có nút của áp và bụng của dòng. Đổi tráo chỗ $U(x)$ và $I(x)$ trong h. 16-10a ta được sự phân bố $U(x)$, $I(x)$ trong trường hợp này.

3. **Trường hợp đường dây nối đến một tải thuần trở r_2**

Tiếp theo ta xét sự phân bố áp và dòng hiệu dụng dọc theo đường dây khi tải r_2 thuần trở. Tất nhiên bây giờ năng lượng phải được truyền từ nguồn đến tải. Vậy không thể có hiện tượng nút của áp và dòng như hai trường hợp trên được.

Sở dĩ khảo sát trường hợp $Z_2 = r_2$ thuần trở là vì phân tích tính toán đơn giản hơn, và vì ở đường dây truyền tải năng lượng và trong các mạch siêu cao tần, thực tế tải cuối đường dây thường thuần trở. Do đó bài toán này có một ý nghĩa thực tiễn rộng rãi.

Ta sẽ đi từ công thức (16-53) trong đó đặt $\dot{U}_2 = U_2/0°$. Do đó có $\dot{I}_2 = U_2/r_2$. Thay vào (16-53) ta có phân bố phức số áp:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cos\beta x + j\frac{U_2 z_c}{r_2}\sin\beta x =$$

$$= U_2\left(\cos\beta x + j\frac{z_c}{r_2}\sin\beta x\right)$$

trong đó $\frac{z_c}{r_2}$ là một số thực dương.

Để tiện tính toán lượng giác ta viết tỉ số ấy dưới dạng:

$$\frac{z_c}{r_2} = \frac{r_2 + z_c - r_2}{r_2} = 1 + \frac{z_c - r_2}{r_2} = 1 + m. \qquad (16\text{-}57)$$

Thay vào biểu thức trên được:

$$\dot{U}(x) = U_2[\cos\beta x + j(1+m)\sin\beta x]. \qquad (16\text{-}58)$$

Từ đó có bình phương hiệu dụng điện áp:

$$U^2(x) = U_2^2[\cos^2\beta x + (1+m)^2\sin^2\beta x] =$$

$$= U_2^2[\cos^2\beta x + \sin^2\beta x + (m^2+2m)\sin^2\beta x] =$$

$$= U_2^2\left[1 + \frac{(m^2+2m)}{2}(1 - \cos 2\beta x)\right] =$$

$$= U_2^2[1 + n - n\cos 2\beta x];$$

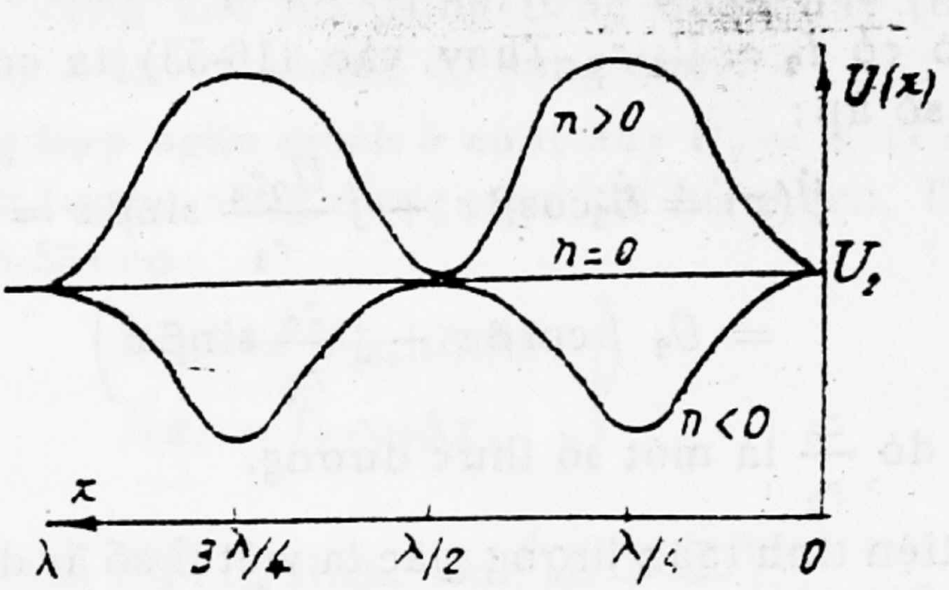
trong đó ta đặt

$$n = \frac{m^2+2m}{2} = \frac{1}{2}\frac{z_c^2 - r_2^2}{r_2^2}, \qquad (16\text{-}59)$$

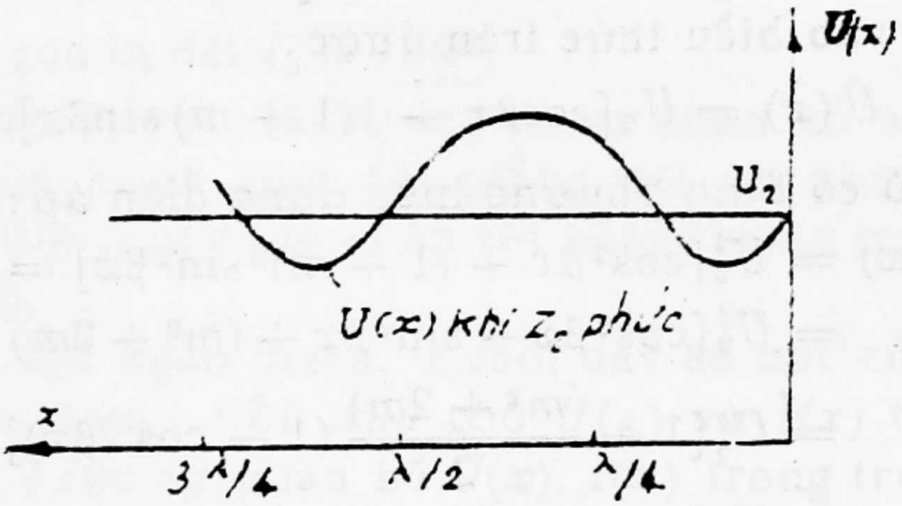
Vậy $$U(x) = U_2\sqrt{1 + n - n\cos 2\beta x}. \qquad (16\text{-}60)$$

Biểu thức này nêu rõ sự phân bố hiệu dụng điện áp dọc đường dây có tính chất dao động với chu kỳ bằng π ứng với khoảng cách $\lambda/2$. Ta thấy dạng phân bố điện áp phụ thuộc hệ số n tức phụ thuộc tương quan giữa r_2 và z_c.

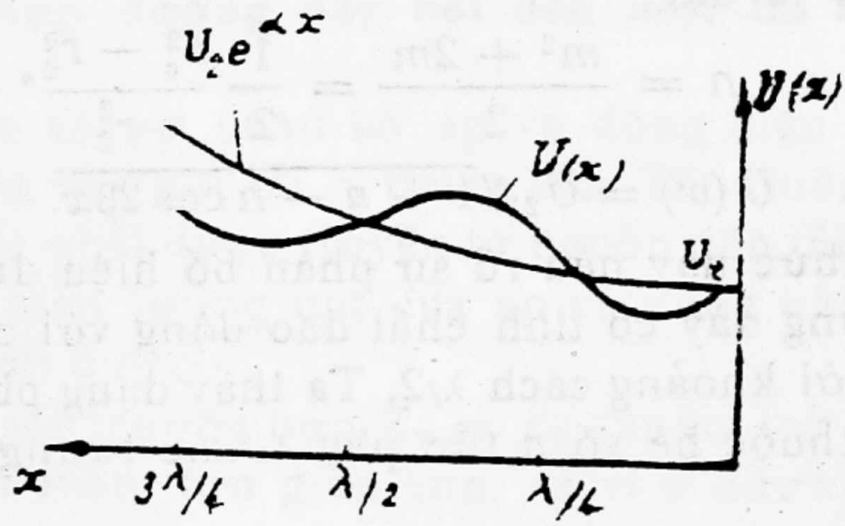
H. 16-11 vẽ đường cong phân bố hiệu dụng điện áp dọc đường dây không tiêu tán, với tải thuần trở. Gọi


U(x)
n>0
n=0
U₂
n<0
x
λ
3λ/4
λ/2
λ/4
0

a)


U(x)
U₂
U(x) khi Z₂ phức
x
3λ/4
λ/2
λ/4

b)


U₂e^αx
U(x)
U(x)
U₂
x
3λ/4
λ/2
λ/4

c)

H. 16-11

U_2 là điện áp cuối dây, với những tương quan giữa r_2 và z_c khác nhau ta có những dạng khác nhau.

Khi $r_2 < z_c$, $n > 0$, trị hiệu dụng $U(x)$ sẽ dao động giữa cực tiểu bằng U_2 khi $\cos 2\beta x = 1$, và cực đại $U_2\sqrt{1+2n}$ khi $\cos 2\beta x = -1$ (h. 16-11, đường cong a).

Khi $r_2 > z_c$, $n < 0$, trị hiệu dụng $U(x)$ dao động giữa cực tiểu $U_2\sqrt{1-|2n|}$ ở $\cos 2\beta x = -1$ và cực đại bằng U_2 ở $\cos 2\beta x = 1$ (h. 16-11 đường cong b).

Riêng khi $r_2 = z_c$ tức là khi hòa hợp đường dây với tải, $n = 0$, điện áp $U(x)$ trên đường dây là hằng số và bằng U_2.

Khi tải có cả điện kháng, tức Z_2 là một số phức, dạng đường cong cũng tương tự như vậy nhưng không bám riêng một phía đường cong $U(x) = U_2$, mà ở cả 2 phía (h. 16-11b).

Khi đường dây có tiêu tán, nếu hòa hợp tải đường cong $U(x)$ sẽ có dạng $U_2 e^{-\alpha x}$ và khi không hòa hợp, phân bố điện áp cũng có dạng dao động quanh đường cong đó (h. 16-11c).

Ví dụ 16-8. Tính và vẽ sự phân bố áp dọc đường dây không tiêu tán đã xét ở ví dụ 16-7. Biết $\dot{Z}_c = 189\ \underline{/0^\circ}\ \Omega$, $Z_2 = 500\ \Omega > Z_c$, $U_2 = 100$ V.

Giải. Trong ví dụ trên đã tìm được biểu thức điện áp phức:

$$\dot{U}(x) = 100 \cos 0{,}159x + j\,37{,}8 \sin 0{,}159x.$$

Ở đây sẽ tính phân bố hiệu dụng áp theo công thức (16-60). Ta có hệ số:

$$n = \frac{1}{2}\,\frac{z_c^2 - r_2^2}{r_2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{189^2 - 500^2}{500^2} = -0{,}429;$$

và:

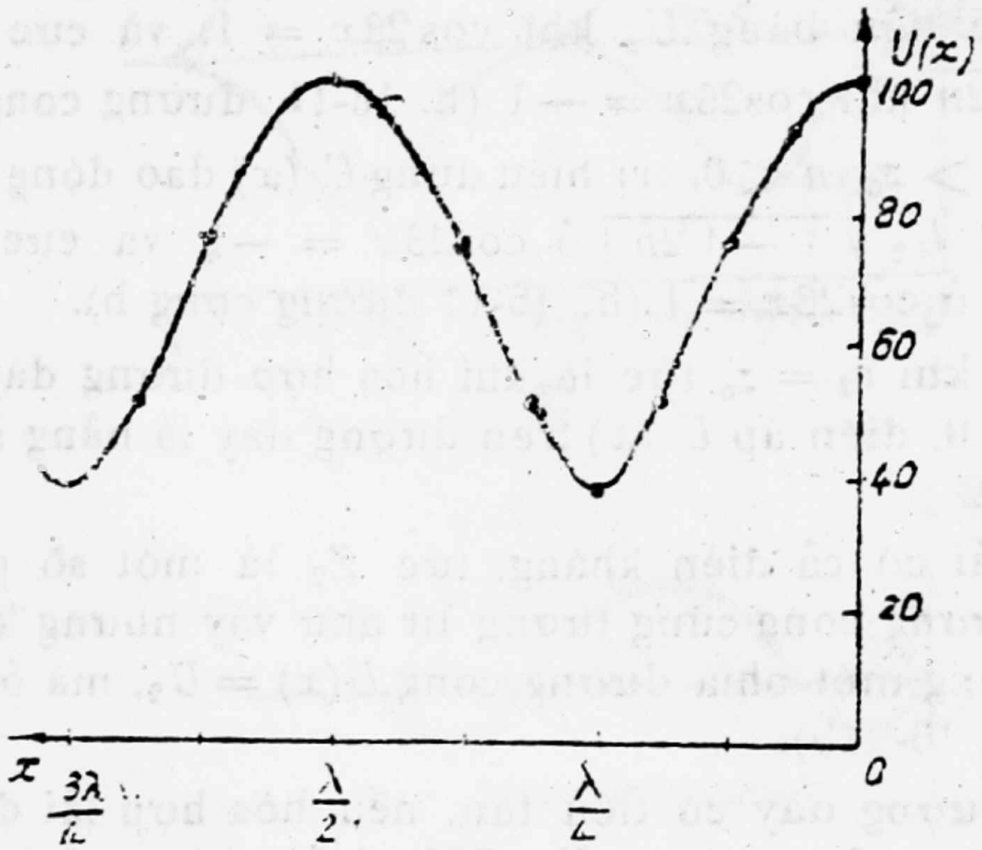
$$2\beta = 2 \cdot 0{,}159 = 0{,}318.$$

Thay vào (16-60) được :

$$U(x) = 100\sqrt{1 - 0{,}429 + 0{,}429\cos 0{,}318x} =$$

$$= 100\sqrt{0{,}571 + 0{,}429\cos 0{,}318x}.$$

H. 16-12 vẽ đường cong phân bố $U(x)$ của bài toán, theo các số liệu tính trong bảng dưới.



H. 16-12

$2\beta x$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
$\frac{x}{\lambda}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$
$U(x)$	100	93,5	75,5	51,7	37,7	75,5	100	75,5	v.v...

§ 16-12 TỔNG TRỞ VÀO CỦA ĐƯỜNG DÂY KHÔNG TIÊU TÁN

Mục 16-9 đã xét tổng trở vào của đường dây với biểu thức (16-48). Mục này sẽ xét trường hợp đường dây

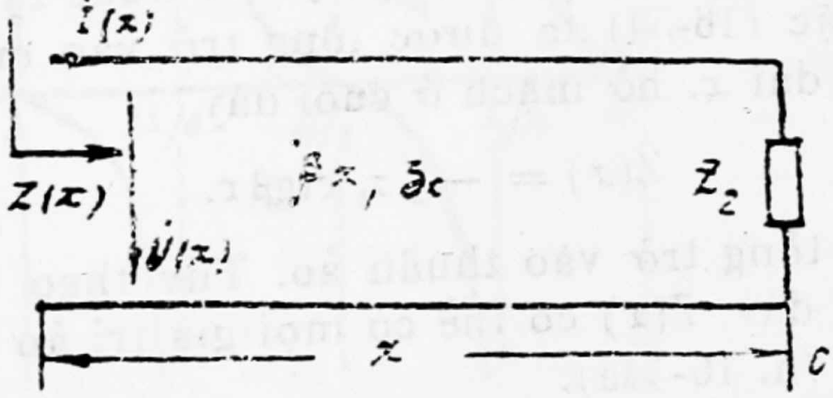
không tiêu tán, có chú ý những đặc điểm của tổng trở vào trong các trường hợp ngắn mạch và hở mạch ở cuối dây.

Từ (16-48) cho đường dây có tiêu tán, cũng như từ (16-53) đều có thể đi đến công thức $Z(x)$. Thật vậy chia $U(x)$ cho $I(x)$ trong (16-53) ta được tổng trở vào của đường dây có độ dài x và có tải Z_2 ở cuối dây (h. 16-13):

$$Z(x) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_c \dot{I}_2 \cos\beta x + j z_c \dot{I}_2 \sin\beta x}{j \frac{Z_2 \dot{I}_2}{z_c} \sin\beta x + \dot{I}_2 \cos\beta x} =$$

$$= z_c \frac{Z_2 + j z_c \operatorname{tg}\beta x}{z_c + j Z_2 \operatorname{tg}\beta x} \qquad (16\text{-}61)$$

Một đường dây có các thông số β và z_c xác định với các độ dài x khác nhau và nối với những tải khác nhau sẽ có những tổng trở vào $Z(x)$ khác nhau.



H. 16-13

Dưới đây ta sẽ xét tổng trở vào $Z(x)$ trong những trường hợp đặc biệt:

1. Trường hợp đường dây hòa hợp với tải, tức có $Z_2 = z_c$.

Lúc đó trong (16-61) thay vào $Z_2 = z_c$ ta có tổng trở vào là một hằng số thực:

$$Z(x) = z_c \qquad (16\text{-}62)$$

đến tải sẽ nguyên vẹn không bị méo lệch.

Có quan niệm cho rằng ở chế độ hòa hợp, công suất đưa đến tải sẽ là lớn nhất, đưa vào lý lẽ là lúc đó không có sóng phản xạ đưa bớt năng lượng trở lại. Nhưng tính toán nói lên rằng điều đó không hoàn toàn xác thực. Bằng cách lập luận vật lý cũng thấy rằng điều khẳng định trên không hoàn toàn đúng. Đó là vì tuy có sóng phản xạ lại nhưng không nhất thiết sóng tới vẫn giữ giá trị như khi hòa hợp; nó có thể khác đi.

Chỉ có thể khẳng định rằng khi hòa hợp phụ tải với một đường dây không tiêu tán tín hiệu được truyền đi không méo và không tắt. Ngoài ra còn có một ưu điểm khác là có thể lượng tính được dễ dàng năng lượng truyền tải:

$$P = UI = \frac{U^2}{z_c} \qquad (16\text{-}62b)$$

2. **Trường hợp hở mạch cuối đường dây** $I_2 = 0$; $z_2 = \infty$.

Trong trường hợp này thay $I_2 = 0$ hoặc $z_2 = \infty$ vào (16-61) hoặc (16-54) ta được tổng trở vào của đường dây có độ dài x, hở mạch ở cuối dây:

$$Z(x) = -j z_c \operatorname{ctg}\beta x. \qquad (16\text{-}63)$$

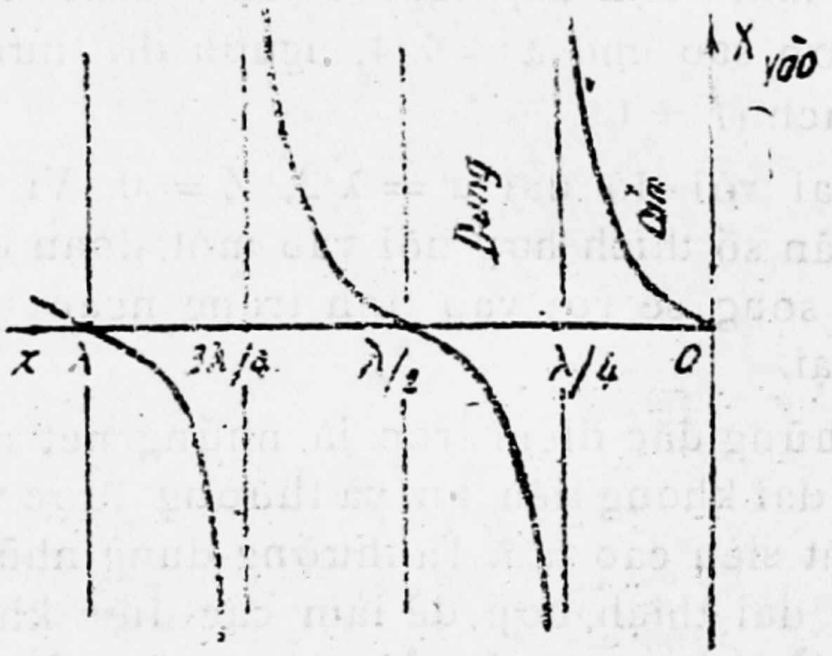
Ta thấy tổng trở vào thuần ảo. Tuỳ theo độ dài x của đường dây, $Z(x)$ có thể có mọi giá trị ảo từ $-j\infty$ đến $+j\infty$ (h. 16-14a).

Với những độ dài x từ 0 đến $\lambda/4$, ứng với góc βx từ 0 đến $\pi/2$, tổng trở vào có những trị số ảo từ $-j\infty$ đến $-j0$. Với x từ $\lambda/4$ đến $\lambda/2$ tức là βx từ $\pi/2$ đến π, tổng trở vào biến thiên từ $+j0$ đến $+j\infty$. Như vậy với những độ dài khác nhau đường dây hở mạch biểu hiện như

là một điện kháng thuần túy. Đặc biệt chú ý là với $x = \lambda/4$ tổng trở vào $Z(\lambda/4) = 0$; thành ra một đoạn dây phần tư sóng hở mạch biểu hiện hệt như một sự



a) Hở mạch cuối dây



b) Ngắn mạch cuối dây

H. 13-14

ngắn mạch, làm ngắn mạch nguồn điện nối vào đường dây. Ngược lại một đoạn dây nửa sóng hở mạch lại có tổng trở vào vô cùng lớn; nối nó vào một nguồn với

tần số thích hợp sao cho độ dài đoạn dây bằng nửa sóng có nghĩa là cho nguồn làm việc ở chế độ hở mạch.

3. Trường hợp ngắn mạch cuối đường dây $\dot{I}_2 = 0$, $Z_2 = 0$.

Từ (16-61) hoặc (16-57) ta tìm được tổng trở vào một đoạn dây ngắn mạch có độ dài x:

$$Z(x) = j z_c \operatorname{tg}\beta x. \qquad (16\text{-}63)$$

Cũng như trường hợp hở mạch, với những độ dài x thích hợp, đoạn dây ngắn mạch biểu hiện như là một điện kháng thuần túy với mọi trị từ $-j\infty$ đến $+j\infty$.

Với $0 < x < \lambda/4$ nó biểu hiện như một cảm kháng và với $\lambda/4 < x < \lambda/2$ như một dung kháng (h. 16-14b).

Đặc biệt với $x = \lambda/4$, $Z(\lambda/4) = j\infty$, nên nếu nối một nguồn vào một đoạn dây ngắn mạch ở cuối và nếu tần số thích hợp sao cho $x = \lambda/4$, nguồn đó thực tế làm việc hở mạch ($\dot{I} = 0$).

Ngược lại với độ dài $x = \lambda/2$, $Z = 0$. Vì vậy một nguồn có tần số thích hợp nối vào một đoạn dây ngắn mạch nửa sóng sẽ rơi vào tình trạng ngắn mạch, có thể nguy hại.

Tất cả những đặc điểm trên là những nét riêng của đường dây dài không tiêu tán, và thường được vận dụng vào kỹ thuật siêu cao tần. Ta thường dùng những đoạn dây với độ dài thích hợp để làm các điện kháng, lắp vào mạch để làm hòa hợp tải với nguồn, để thay đổi tải, để tạo các mạch dao động siêu cao tần v.v...

Ví dụ 16-9 : Trong kỹ thuật siêu cao tần muốn thực hiện một điện kháng phẩm chất tốt người ta thường dùng những đoạn dây không tiêu tán với độ dài thích hợp. Hỏi ở tần số $\omega = 5 \cdot 10^7$ rad/s một đoạn dây có thông số $L = 10^{-6}$ H/m, $C = 2 \cdot 10^{-11}$ F/m, dài $l = 1{,}5$m

thực hiện được những điện kháng lớn bé bao nhiêu khi ngắn mạch và khi hở mạch cuối dây?

Giải : Ta hãy tính các thông số truyền sóng của đoạn dây :

$$\beta l = l\omega\sqrt{LC} = 1{,}5 \cdot 5 \cdot 10^7 \sqrt{10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-11}} =$$

$$= 0{,}336 \text{ rad} = 19{,}3°.$$

$$Z_c = \sqrt{L/C} = \sqrt{10^{-6} : 2 \cdot 10^{-11}} = 224\ \Omega.$$

Vậy trong hai trường hợp ngắn mạch và hở mạch đoạn dây thực hiện các điện kháng :

$$Z_{ng} = jz_c \operatorname{tg}\beta l = j\,224 \operatorname{tg}19{,}3° = j\,74{,}5\ \Omega,$$

$$Z_{hở} = -jz_c \operatorname{ctg}\beta l = -j\,224 \operatorname{ctg}19{,}3° = -j\,690\ \Omega.$$

Chúng thứ tự tương đương với những điện cảm và điện dung bằng :

$$L = \frac{z_{ng}}{\omega} = \frac{74{,}5}{5 \cdot 10^7} = 1{,}49 \cdot 10^{-6}\ \text{H},$$

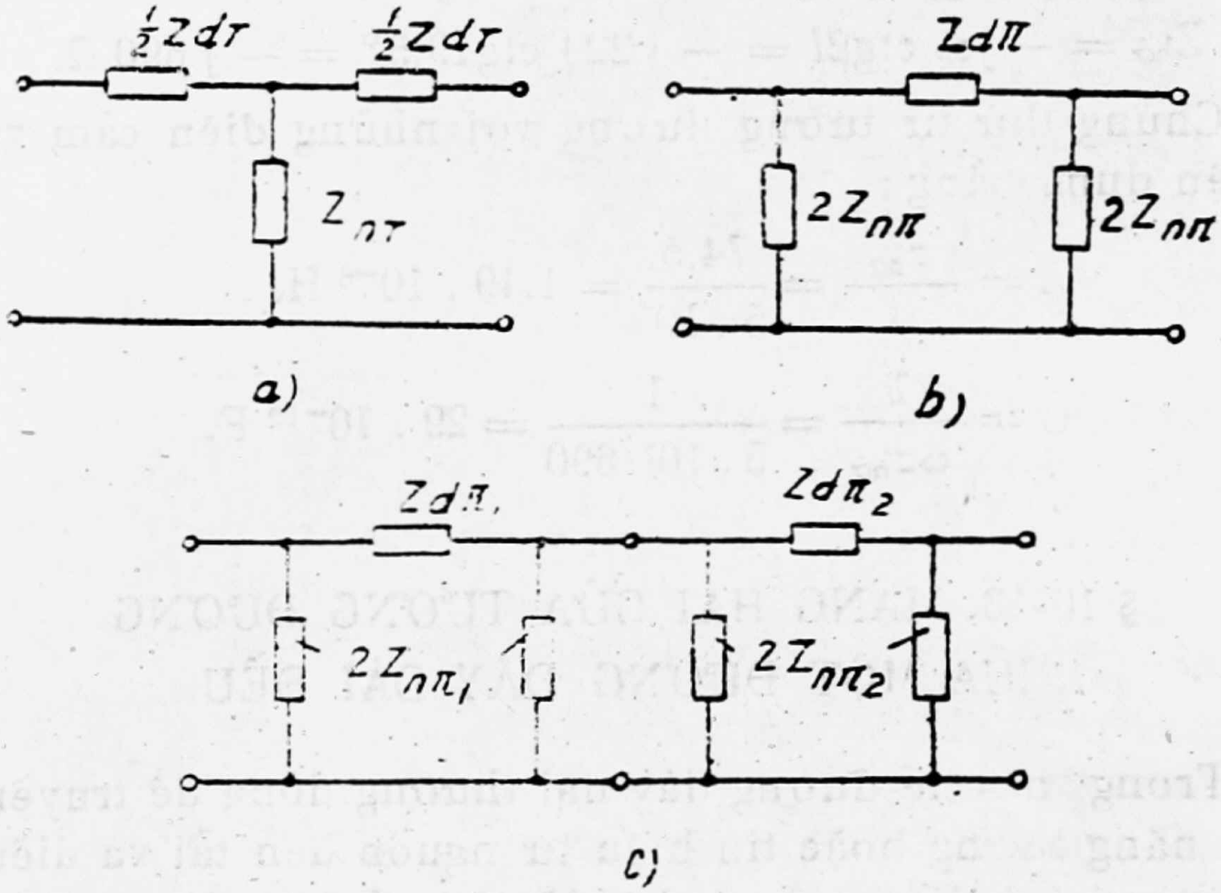
$$C = \frac{1}{\omega z_{hở}} = \frac{1}{5 \cdot 10^7 \cdot 690} = 29 \cdot 10^{-12}\ \text{F}.$$

§ 10-13. MẠNG HAI CỬA TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA MỘT ĐƯỜNG DÂY DÀI ĐỀU

Trong thực tế đường dây dài thường dùng để truyền tải năng lượng hoặc tín hiệu từ nguồn đến tải và điều mà ta chú ý đến là quan hệ giữa các lượng dòng và áp ở hai đầu đường dây chứ không phải sự phân bố của quá trình học trên đường dây nữa. Với cách nhìn đó ta đã coi một đường dây dài là một mạng hai cửa không nguồn. Tất nhiên do kết cấu đối xứng của đường dây, mạng hai cửa đường dây dài là đối xứng. Tất cả tính thân ấy đều thể hiện rõ nét trong các phương trình (10-26b).

Ở đây khi xét quan hệ giữa $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ và $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ ở hai đầu đường dây có các thông số Z_c, γl (độ dài l), phương trình (16-45b) có dạng viết giống hệ phương trình dạng A của một mạng hai cửa đối xứng như sau:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh}\gamma l = \dot{U}_2 A_{11} + \dot{I}_2 A_{12} \\ \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z_c} + \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l = \dot{U}_2 A_{21} + \dot{I}_2 A_{22} \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}64)$$



H. 16-15

Ta thấy đúng là giữa các hệ số A_{ik} của đường dây dài có các quan hệ:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = \operatorname{ch}\gamma l, \\ A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} &= \operatorname{ch}^2\gamma l - \operatorname{sh}^2\gamma l = 1. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}65)$$

Hệ phương trình (16-64) miêu tả đầy đủ việc truyền tải của đường dây dài Z_c, γl.

Trong kỹ thuật, để tiện hình dung và vận dụng phương pháp tính toán về mạng hai cửa ta thường thay thế một đường dây dài bằng một mạng hai cửa tương đương, có thông số tập trung phản ánh đúng quan hệ truyền đạt giữa 2 cửa.

Theo lý thuyết mạng hai cửa, mạch tương đương này gồm 3 phần tử nối hình T hoặc hình π đối xứng h. 16-15 tính theo các công thức (8-30) và (8-31). Ví dụ 2 đường dây dài $Z_{c1}, \gamma_1 l_1$ và $Z_{c2}, \gamma_2 l_2$, nối chuỗi nhau truyền đến một tải Z_t, về phương diện truyền đạt sẽ được miêu tả tương đương với sơ đồ h. 16-15c. Theo các công thức (8-30), (8-31) cũng dễ tìm được các thông số của mạng 2 cửa tương đương.

Thật vậy đối với sơ đồ hình T đối xứng với các tổng trở dọc gộp lại là Z_{dT} và ngang là Z_{nT} (hoặc nghịch đảo của nó là tổng dẫn ngang gộp lại là Y_{nT}) ta có:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Z_{dT}}{2} &= \frac{A_{11}-1}{A_{21}} = Z_c \frac{\mathrm{ch}\gamma l - 1}{\mathrm{sh}\gamma l}, \\ \text{và} \quad Z_{nT} &= \frac{1}{A_{21}} = \frac{Z_c}{\mathrm{sh}\gamma l}. \end{aligned}\right\} \tag{16-66}$$

Cũng vậy ta được các thông số cho mạch hình π:

$$\left.\begin{aligned} Z_{d\pi} &= A_{12} = Z_c \,\mathrm{sh}\,\gamma l, \\ \text{và} \quad 2Z_{n\pi} &= \frac{A_{12}}{A_{11}-1} = Z_c \frac{\mathrm{sh}\,\gamma l}{\mathrm{ch}\,\gamma l - 1} \end{aligned}\right\} \tag{16-67}$$

Riêng khi đường dây đủ ngắn, hiểu theo nghĩa tích $|\gamma l|$ đủ bé, tức là

$$|\gamma l| \ll 1 \quad \text{hoặc} \quad l \ll \frac{1}{|\gamma|} \tag{16-68}$$

công thức (16-66) và (16-67) sẽ cho các thông số giống như đối với đường dây có thông số tập trung thông thường.

Thật vậy khi ấy ta có:

$$\text{sh}\,\gamma l \# \gamma l,\ \text{ch}\,\gamma l \# 1 + \frac{(\gamma l)^2}{2}.$$

Thay vào (16-66) ta tìm được các thông số gần đúng trong mạch hình T:

$$\frac{Z_{dT}}{2} = Z_c \frac{\gamma l}{2} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}\sqrt{ZY}\,\frac{l}{2} = \frac{Z \cdot l}{2} \qquad (16\text{-}69a)$$

chính bằng nửa tổng trở dọc gộp lại (tập trung lại) của đường dây dài với các thông số Z và l.

Và:

$$Y_{dT} = \frac{1}{Z_{dT}} = \frac{\text{sh}\,\gamma l}{Z_c} = \frac{\gamma}{Z_c} l = \frac{\sqrt{ZY}}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}} l = Y \cdot l, \qquad (16\text{-}69b)$$

chính bằng tổng các tổng dẫn ngang tập trung lại của đường dây với các thông số Y và l.

Cũng tính tương tự ta thấy trong trường hợp đường dây ngắn ($l \ll 1/|\gamma|$) các thông số của sơ đồ hình π sẽ bằng:

$$\left.\begin{aligned} Z_{d\pi} &= Z \cdot l, \\ \text{và} \qquad \frac{1}{2} Y_{n\pi} &= \frac{1}{2} Y \cdot l; \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}70)$$

thứ tự là tổng trở và 1/2 tổng dẫn gộp lại của đường dây ngắn với các thông số Z, Y, l.

Ví dụ 16-10. Cho một đường dây dài $l = 300$ km, $\gamma = 1{,}125 \cdot 10^{-6} \angle 76.7°$ 1/m, $Z_c = 294 \angle -4{,}35°$

Hãy tính mạch hình T tương đương.

Giải: Ta có hệ số $\gamma l = 1{,}125 \cdot 10^{-6} \underline{/\,76{,}7°} \cdot 3 \cdot 10^5 =$
$= 0{,}3375 \underline{/\,76{,}7°}$.

Môđun của hệ số này không bé lắm so với 1, song cũng không lớn. Do đó để tìm $ch\gamma l$ và $sh\gamma l$ có thể tính gần đúng:

$$ch\gamma l = 1 + \frac{\gamma l^2}{2} + \frac{\gamma^4 l^4}{24} + \ldots$$

$$ch\gamma l - 1 = \frac{1}{2} \cdot 0.3375^2 \underline{/\,153.4°} + \frac{1}{24} \cdot 0{,}3375^4 \underline{/\,306{,}8°} =$$

$$= -0{,}0507 + j\,0{,}0251 = 0{,}0565 \underline{/\,153{,}65°};$$

$$sh\gamma l = \gamma l + \frac{\gamma^3 l^3}{6} = 0.3375 \underline{/\,76.7°} + \frac{1}{6} \cdot 0{,}3375^3 \underline{/\,230.1°} =$$

$$= 0{,}0736 + j\,0{,}3231 = 0{,}332 \underline{/\,77{,}2°}.$$

Thay vào (16-66) ta tìm được các thông số mạch tương đương hình T:

$$\frac{Z_{nT}}{2} = Z_c \frac{ch\gamma l - 1}{sh\gamma l} = 294 \underline{/\,-4.35°} \frac{0{,}0565 \underline{/\,153{,}65°}}{0{,}332 \underline{/\,77{,}2°}} =$$

$$= 50 \underline{/\,72{,}1°}\ \Omega.$$

và $$Z_{nT} = \frac{Z_c}{sh\gamma l} = \frac{294 \underline{/\,-4{,}35°}}{0{,}332 \underline{/\,77.2°}} = 885 \underline{/\,-81{,}55°}\ \Omega,$$

hoặc $$Y_{nT} = \frac{1}{Z_{nT}} = 1{,}13 \cdot 10^{-3} \underline{/\,81{,}55°}\ S.$$

Ví dụ 16-11: Tính sơ đồ tương đương hình π của một đường dây không tiêu tán trong ví dụ 16-9 với $\beta l = 0.336$ rad $= 19.3°$; $z_c = 224\ \Omega$.

Giải: Vì đường dây không tiêu tán nên $\gamma l = j\beta l$; thay vào (16-67) ta được công thức tìm thông số mạch hình π:

$$Z_{n\pi} = Z_c\, sh\gamma l = Z_c\, sh j\beta l = j z_c \sin\beta l = j\,224 \sin 19.3° =$$

$$= j\,74\ \Omega.$$

$$2Z_{n\pi} = Z_c \frac{\text{sh}\,\gamma l}{\text{ch}\,\gamma l - 1} = z_c \frac{\text{sh}\,j\beta l}{\text{ch}\,j\beta l - 1} = jz_c \frac{\sin \beta l}{\cos \beta l - 1} =$$

$$= j224 \frac{\sin 19.3°}{\cos 19{,}3° - 1} = j224 \cdot \frac{0{,}33}{0{,}944 - 1} = -j1320\Omega.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là một đường dây dài? Một đường dây có độ dài $l = 50$ km truyền tải điện 50Hz có dài không? Một đoạn cáp 5m để nối một máy phát sóng 25m lên anten có dài không? Một đoạn cáp 1m nối từ một máy phát xung nanogiây (10^{-9}s) đến dao động ký xung có dài không? (có, vì $\lambda_{xung} \approx 0{,}3$m).

2. Thành lập và cắt nghĩa phương trình trạng thái của đường dây dài nói chung và nói riêng khi làm việc với nguồn hình sin. Dẫn ra các phương trình cho đường dây dài không tiêu tán. Dẫn ra và cắt nghĩa nghiệm dạng sóng trong trường hợp nguồn hình sin. Cắt nghĩa các thông số đường dây dài α, β, γ, v Z_c. Các thông số đó tính thế nào? phụ thuộc những gì?

3. Dẫn ra khái niệm và công thức của hệ số phản xạ ở cuối đường dây. Hệ số phản xạ dùng để tính toán quan hệ giữa các sóng tới, phản xạ và dòng áp thế nào?

4. Tại sao nói chung đường dây dài làm méo tín hiệu? Khi nào đường dây không méo? Pupin hóa một đường dây là thế nào? Đường dây không tiêu tán có méo không? Đối với đường dây không méo Z_c, α, v bằng bao nhiêu, có phụ thuộc tần số không?

5. Dẫn ra phương trình phân bố điện áp và dòng điện phức dọc đường dây theo hàm hyperbol. Sự phân bố hiệu dụng các lượng ấy có đơn điệu không?

6. Các thông số truyền sóng đường dây không tiêu tán có gì đặc biệt? Sự phân bố điện áp và dòng điện phức và hiệu dụng trên đường dây không tiêu tán như thế nào đặc biệt trong trường hợp ngắn mạch, hở mạch và tải thuần trở ở cuối dây? Khi nào có hiện tượng sóng đứng, khi có sóng đứng có truyền tải năng lượng không?

7. Công thức tổng trở đầu vào đường dây dài viết thế nào? Phụ thuộc những gì? Trường hợp đường dây dài không tiêu

tán viết thế nào, đặc biệt khi ngắn mạch và hở mạch ở cuối dây?

8. Hãy lập luận dẫn ra mạng 2 cửa tương đương của đường dây dài. Sơ đồ đó dùng làm gì? Chứng minh rằng trường hợp một đường dây ngắn, mạng 2 cửa tương đương sẽ chuyển thành sơ đồ gộp tập trung thông số Z, Y của đường dây.

BÀI TẬP

16-1. Một đường dây dài đều có các thông số cơ bản $r = 0{,}3$ Ω/km, $L = 2{,}1$ mH/km, $C = 3{,}5 \cdot 10^{-9}$ F/km và $g = 0$ dùng để thông tin. Tính hệ số truyền sóng, tốc độ, bước sóng và tổng trở sóng ở tần số $f_1 = 50$ Hz và $f_2 = 10^4$ Hz.

Đáp số: a) f_1: $Y = (0{,}108 + j1{,}05) \cdot 10^{-3}$ 1/km; $v = 2{,}99 \cdot 10^5$ km/s; $Z_c = 600/-5{,}9°$ Ω. b) f_2: $\gamma = 6{,}2 + j0{,}209$ rad/km; $v = 3{,}1 \cdot 10^5$ km/s; $\lambda = 30$km.

16-2. Chứng minh rằng một đường dây dài đối với tần số đủ cao tốc độ sẽ gần tiến đến $1/\sqrt{LC}$, tổng trở sóng tiến đến $\sqrt{L/C}$ và ở tần số thấp hệ số truyền tiến đến $\sqrt{rG}$, tổng trở sóng tiến đến $\sqrt{r/G}$.

16-3. Một đường dây điện thoại khi ở tần số làm việc có tổng trở sóng $Z_c = 600/-15°$ Ω, nối vào một máy thu ở cuối dây có tổng trở $Z_2 = 1700/30°$ Ω. Tính hệ số phản xạ ở cuối dây.

Đáp: $0{,}79/25°$.

16-4. Một đường dây điện thoại có các thông số cơ bản $r = 5{,}5$ Ω/km, $L = 2$ mH/km; $g = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ S/km; $C = 6 \cdot 10^{-9}$ F/km. Hỏi mỗi km dài phải thêm bao nhiêu điện cảm L_0 để khỏi méo? *Đáp*: 64 mH/km.

16-5. Một đường dây không mất mát có tổng trở sóng $Z_c = 867$ Ω dài $l = 200$km, đặt vào một điện áp $U_1 = 50$V ở tần số $f = 1000$Hz. Tính và vẽ sự phân bố hiệu dụng áp và dòng theo đường dây. Tính tổng trở đầu vào trong 2 trường hợp hở mạch và ngắn mạch ở cuối dây. Hỏi khi bề dài đường dây bằng bao nhiêu 2 tổng trở vào đó có giá trị bằng nhau?

Đáp: $Z_{1\,hở} = -j500\Omega$; $Z_{1ng} = j1500\Omega$; khi $l = \lambda/8$.

16-6. Tính và vẽ sự phân bố điện áp trong bài toán trên khi tổng trở tải cuối dây bằng 1200Ω, và bằng $1200/30^\circ\Omega$.

Đáp: $U(x) = 50\sqrt{0{,}619 - 0{,}381\cos 4{,}2 \cdot 10^{-5} x}$.

16-7. Tính độ dài các đoạn dây để thực hiện các điện kháng $jx = j600\Omega$, $jx = -j200\Omega$, biết thông số truyền sóng của dây $Z_c = 70\Omega$, $\beta = 10$ rad/m.

Đáp: ngắn mạch $l_1 = 14{,}5$cm; hở mạch $l_2 = 3{,}36$cm. (coi tốc độ sóng $v = c$).

CHƯƠNG XVII

KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH ĐIỆN

Mục đích:

1) Hiểu rõ quá trình quá độ trong mạch điện là gì và nguyên nhân phát sinh của nó.

2) Thấy rõ bài toán về quá trình quá độ là bài toán giải hệ phương trình vi phân của mạch với các điều kiện đầu.

3) Nắm vững các luật đóng mở và biết vận dụng chúng để xác định các điều kiện đầu.

17-1. ĐỊNH NGHĨA QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH ĐIỆN VÀ ĐẶT BÀI TOÁN QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ

Ta đã biết động lực học của mạch điện được mô tả bởi một hệ phương trình liên hệ các biến trạng thái (dòng i và áp u) của mạch trong thời gian t. Gốc thời gian (thời điểm đầu $t = 0$) là một thời điểm tùy ý, thường chọn là thời điểm nguồn kích thích (nguồn s.đ.đ,

nguồn dòng điện) bắt đầu ... lúng hay thời điểm các thông số (điện trở, điện cảm, điện dung) của mạch có biến thiên đột ngột. Ta sẽ gọi chung các tác động làm biến thiên đột ngột kích thích hay thông số của mạch là *tác động đóng mở*. (Trên sơ đồ tác động đóng mở thường biểu diễn bằng việc đóng hay mở các dao. Thời điểm đầu cũng gọi là thời điểm đóng mở.

Đáp ứng trong mạch trong giai đoạn đầu sau khi xảy ra đóng mở không những phụ thuộc nguồn kích thích ngoài và các thông số mạch mà *còn phụ thuộc trạng thái ban đầu của mạch*. Đáp ứng này gọi là *đáp ứng quá độ*.

Sau một thời gian đủ lớn (về lý thuyết là vô cùng lớn) đáp ứng quá độ sẽ tiến tới *đáp ứng xác lập*, chỉ xác định bởi nguồn kích thích và các thông số của mạch mà không phụ thuộc vào trạng thái ban đầu nữa. Chế độ trong mạch lúc này gọi là chế độ xác lập. Vậy có thể định nghĩa *quá trình quá độ trong mạch điện là quá trình mạch chuyển từ một trạng thái ban đầu tới một chế độ xác lập*.

Sau khi xảy ra đóng mở, nói chung trong mạch thường không thành lập ngay chế độ xác lập được. Đó là do trong mạch có những vùng tích trữ năng lượng điện trường (kho điện — điện dung C) và năng lượng từ trường (kho từ — điện cảm L). Để cho năng lượng trong các kho từ những trị số ban đầu nào đó phân bố lại ứng với chế độ xác lập mới, thường cần có một quá trình thời gian. Đó chính là quá trình quá độ.

Vì nhiều lý do việc nghiên cứu và tính toán quá trình quá độ có ý nghĩa rất quan trọng.

Quá trình quá độ thường xảy ra trong những mạch và hệ thống thuộc các lĩnh vực kỹ thuật khác nhau như kỹ thuật điện, vô tuyến điện, đo lường, tự động

điều khiển... Thường cần nghiên cứu để biết rõ tư thái, quy luật chung của mạch và hệ thống trong chế độ quá độ, hoặc để tìm đáp ứng của mạch và hệ thống đối với những kích thích cụ thể, hoặc xét ảnh hưởng của các điều kiện đầu v.v... Trong một số trường hợp cần xét quá trình quá độ để phòng tránh tác hại. Chẳng hạn như dòng điện, điện áp quá độ có thể có những giá trị vượt xa giá trị xác lập, ảnh hưởng tới an toàn của thiết bị. Có khi quá trình quá độ cần phải được khống chế sớm kết thúc, như quá trình mở máy các động cơ điện, quá trình dao động của các cơ cấu động trong các dụng cụ đo v.v...

Tóm lại cần nghiên cứu quá trình quá độ hoặc là để sử dụng nó hoặc là để hạn chế tác hại của nó. Vì vậy bài toán quá trình quá độ rất quan trọng về mặt lý luận cũng như thực tiễn, cần được chú ý đặc biệt.

17-2. CÁC ĐIỀU KIỆN ĐẦU VÀ CÁC LUẬT ĐÓNG MỞ

Giải quá trình quá độ trong mạch là tìm nghiệm hệ phương trình vi phân của mạch thỏa mãn các điều kiện đầu. Trong tính toán thực tế phải biết xác định lấy các điều kiện đầu cần thiết.

Ta gọi các điều kiện đầu của bài toán quá độ trong mạch là giá trị các nghiệm dòng áp trong mạch và các đạo hàm của chúng ở một lân cận đủ nhỏ quanh khởi điểm bài toán tức quanh thời điểm đóng mở. Để xác định các điều kiện trong các kho ta thường dựa vào các luật đóng mở sau đây:

Luật đóng mở 1: «*Dòng điện trong điện cảm biến liên liên tục (tức không gián đoạn) tại thời điểm đóng mở.*

Thật vậy từ phương trình trạng thái trên điện cảm

$$u_L = L \frac{di_L}{dt},$$

nếu chấp nhận điện áp trên điện cảm là hữu hạn thì tốc độ biến thiên của dòng điện trong điện cảm $\frac{di_L}{dt}$ phải hữu hạn, do đó dòng điện trong điện cảm i_L mọi thời điểm phải liên tục và riêng ở thời điểm đóng mở cũng phải liên tục.

Nếu ký hiệu $t = 0$ là thời điểm đóng mở, $t = -0$ là một lân cận đủ nhỏ trước thời điểm đóng mở và $t = +0$ là một lân cận nhỏ sau thời điểm đóng mở thì trị số dòng điện trong điện cảm ngay sau khi đóng mở phải bằng trị số của nó ngay trước khi đóng mở :

$$i_L (+0) = i_L (-0). \qquad (17\text{-}1)$$

Luật đóng mở 2 : « Điện áp trên điện dung u_C biến thiên liên tục tại thời điểm đóng mở ».

Tương tự như trên xuất phát từ phương trình trạng thái của điện dung

$$i_C = C \frac{du_C}{dt},$$

cho rằng i_C hữu hạn sẽ có $\frac{du_C}{dt}$ = hữu hạn, tức u_C liên tục và riêng tại thời điểm đóng mở ta có đẳng thức :

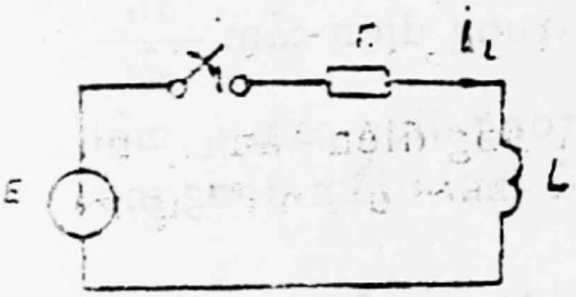
$$u_C (+0) = u_C (-0). \qquad (17\text{-}2)$$

Đôi khi nếu không sợ lầm lẫn, để gọn ta có thể bỏ dấu + trước số không trong (17-1) và (17-2) tức ký hiệu $i_L (0)$ thay cho $i_L (+0)$ và $u_C (0)$ thay cho $u_C (+0)$ và các đẳng thức (17-1) và (17-2) như sau :

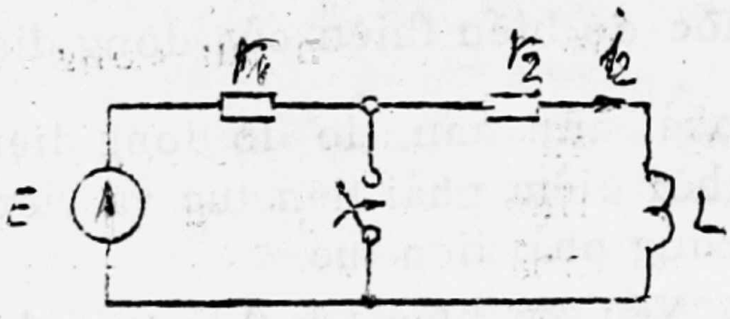
$$i_L (0) = i_L (-0),$$
$$u_C (0) = u_C (-0).$$

Ví dụ 17-1. Nếu đóng mạch một cuộn dây điện cảm trước vốn hở mạch $i_L(-0) = 0$ vào một nguồn điện áp (h. 17-1) thì dòng điện ở thời điểm đầu ngay sau khi đóng mạch cũng bằng không:

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 0.$$



H. 17-1



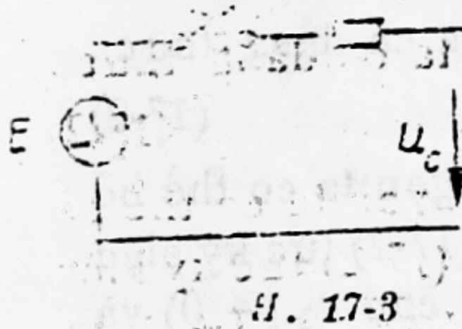
H. 17-2

Ví dụ 17-2. Nếu ngắn mạch cuộn dây điện cảm trong mạch h. 17-2 trong đó E là nguồn s.đ.đ 1 chiều, và chế độ trước khi đóng dao là xác lập thì dòng điện qua điện cảm ở thời điểm đầu vẫn giữ giá trị xác lập cũ:

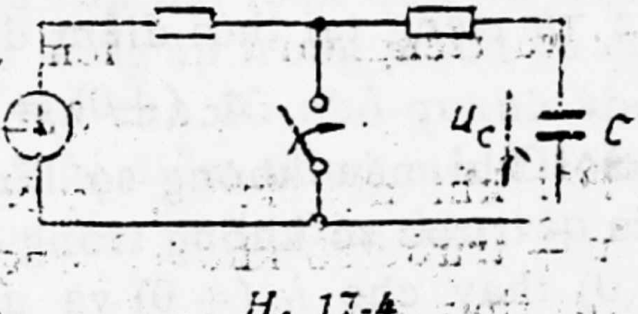
$$i_L(+0) = i_L(-0) = \frac{E}{r_1 + r_2}.$$

Ví dụ 17-3: Nếu đóng một tụ điện vốn chưa được nạp điện $u_C(-0) = 0$ vào một nguồn điện áp (h. 17-3) thì điện áp trên điện dung ở thời điểm đầu cũng bằng không:

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0.$$



H. 17-3



H. 17-4

Ví dụ 17-4: Nếu ngắn mạch tụ điện trong mạch (h. 17-4) trong đó E là nguồn s.đ.đ. không đổi và chế

độ trước khi đóng dao là xác lập thì điện áp trên điện dung ở thời điểm đầu vẫn giữ giá trị xác lập cũ :

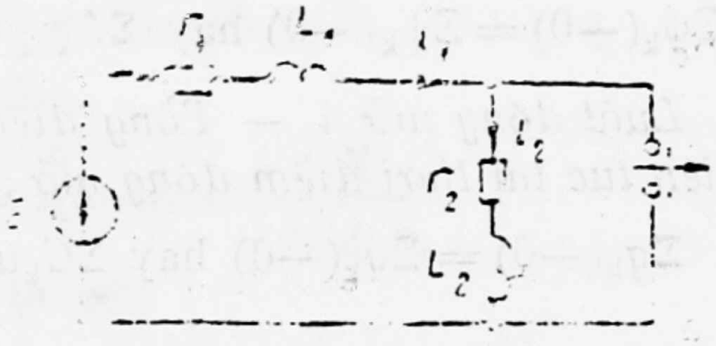
$$u_C(+0) = u_C(-0) = E.$$

Khi i_L và u_C liên tục thì năng lượng từ trường w_M và năng lượng điện trường w_E trong các kho gắn liền với i_L và u_C ($w_M = \frac{1}{2}Li_L^2$ và $w_E = \frac{1}{2}Cu_C^2$) cũng liên tục. Ta gọi bài toán đảm bảo sự liên tục của năng lượng là *bài toán chỉnh*.

Nhưng có những trường hợp do kết cấu của mạch và tác động đóng mở, dòng điện trong điện cảm và điện áp trên điện dung bắt buộc phải biến thiên gián đoạn và do đó năng lượng cũng bắt buộc phải biến thiên gián đoạn tại thời điểm đóng mở. Ta gọi bài toán **không đảm** bảo sự liên tục của năng lượng là *bài toán không chỉnh*.

Để làm ví dụ về bài toán không chỉnh ta xét các mạch h. 17-5 và h. 17-6.

Trong mạch h. 17-5 tại $t = -0$ khi dao chưa mở ta có $i_{1L}(-0) \neq 0$ và $i_{2L}(-0) = 0$. Khi dao mở ra tại $t = 0$ tạo thành một nút mà các nhánh đều chứa điện cảm (L_1 và L_2). Theo luật Kirhof 1 cho nút tại $t = +0$ bắt buộc phải có :



H. 17-5

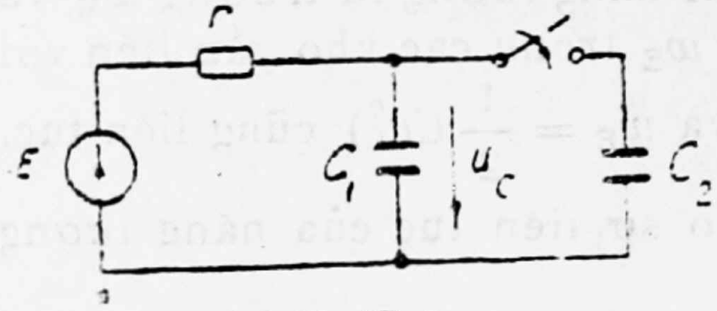
$$i_L(+0) = i_2(+0)$$

Trong khi đó $i_{1L}(-0) \neq i_{2L}(-0)$.

Như vậy bắt buộc các dòng trong điện cảm i_{1L} và i_{2L} phải gián đoạn tại $t = 0$.

Trong mạch h. 17-6 tại $t = -0$ khi dao chưa đóng ta có $u_{C1}(-0) \neq 0$ và $u_{C2}(-0) = 0$. Khi dao đóng vào tại

$t = 0$ tạo thành một vòng chỉ gồm các điện dung C_1 và C_2. Theo luật Kirhof 2 cho vòng tại $t = +0$ ắt buộc phải có



H. 17-6

$$u_{C1}(+0) = u_{C1}(-0)$$

Trong khi đó

$$u_{C1}(-0) = u_{C2}(-0).$$

Như vậy các điện áp trên điện dung u_{C1} và u_{C2} bắt buộc phải gián đoạn tại $t = 0$.

Để tính các giá trị đầu của dòng điện trong điện cảm và điện áp trên điện dung trong bài toán không chỉnh ta phải dùng các luật đóng mở đối với bài toán không chỉnh sau đây:

Luật đóng mở 3: *«Tổng từ thông móc vòng trong một vòng kín phải liên tục tại thời điểm đóng mở»*:

$$\Sigma\psi_k(+0) = \Sigma\psi_k(-0) \text{ hay } \Sigma L_k i_k(+0) = \Sigma L_k i_k(-0) \quad (17\text{-}3)$$

Luật đóng mở 4 — Tổng điện tích tại một nút phải liên tục tại thời điểm đóng mở:

$$\Sigma q_k(+0) = \Sigma q_k(-0) \text{ hay } \Sigma C_k u_{Ck}(+0) = \Sigma C_k u_{Ck}(-0). \quad (17\text{-}4)$$

Đó là vì nếu không đảm bảo điều kiện (17-3) tổng từ thông móc vòng trong vòng kín sẽ gián đoạn tại $t = 0$, khiến sức điện động cảm ứng tổng trong vòng sẽ vô cùng lớn. Nếu (17-4) không được thỏa mãn điện tích ở nút sẽ gián đoạn khiến dòng điện ở nút sẽ vô cùng lớn.

Ví dụ 17-5: Đối với mạch h. 17-5 theo (17-3) ta phải có

$$L_1 i_1(+0) + L_2 i_2(+0) = L_1 i_1(-0).$$

Đối với mạch h. 17-6 theo (17-4) ta phải có

$$C_1 u_{C1}(+0) + C_2 u_{C2}(+0) = C_1 u_{C1}(-0).$$

17-4. XÁC ĐỊNH CÁC ĐIỀU KIỆN ĐẦU

Để tìm các điều kiện đầu của quá trình quá độ được dễ dàng ta chia chúng ra làm hai loại: các điều kiện đầu về trạng thái kho ($i_L(+0)$ và $u_C(+0)$) và các điều kiện đầu khác.

a. Các điều kiện đầu về trạng thái kho $i_L(+0)$ và $u_C(+0)$.

Trong bài toán chỉnh, các điều kiện đầu về trạng thái kho được xác định trực tiếp từ các luật đóng mở (17-1) và (17-2):

$$i_L(+0) = i_L(-0),$$
$$u_C(+0) = u_C(-0).$$

Như vậy chúng hoàn toàn được xác định bởi trạng thái trên các kho (L và C) ở một lân cận nhỏ trước khi đóng mở $t = -0$.

Ví dụ 17-6. Trong mạch (h. 17-1) ta có:

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 0,$$

và trong mạch (h. 17-2):

$$i_L(+0) = i_L(-0) = \frac{E}{r_1 + r_2}.$$

Trong mạch (h. 17-3) ta có:

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0,$$

và trong mạch (h. 17-4):

$$u_C(+0) = u_C(-0) = E.$$

Trong bài toán không chỉnh để tìm $i_{Lk}(+0)$ ta phải dùng:

1. Luật đóng mở (17-3): $\Sigma L_k i_k(+0) = \Sigma L_k i_k(-0)$;

2. Các phương trình theo luật Kirhof 1 cho các nút mà các nhánh đính vào đó đều chứa điện cảm hoặc nguồn dòng:

$$\Sigma i_{Lk}(+0) = \Sigma j_k(+0).$$

Ví dụ, trong mạch h. 17-5 ta có các phương trình sau :

$$L_1 i_1 (+0) + L_2 i_2 (+0) = L_1 i_1 (-0),$$

và $$i_1 (+0) - i_2 (+0) = 0.$$

Từ đó giải được :

$$i_1 (+0) = i_2 (+0) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1 (-0).$$

Để tính $u_{Ck} (+0)$ trong bài toán không chỉnh ta phải dùng :

1. Luật đóng mở (17-4) : $\Sigma C_k u_{Ck}(+0) = \Sigma C_k u_{Ck}(-0)$.

2. Các phương trình theo luật Kirhof 2 cho các vòng kín chứa toàn điện dung và nguồn áp :

$$\Sigma u_{Ck}(+0) = \Sigma e_k(+0)$$

Ví dụ, trong mạch h. 17-6 ta có các phương trình sau :

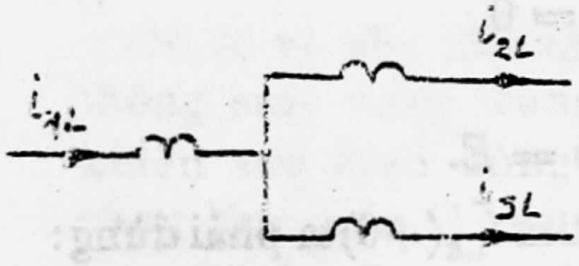
$$C_1 u_{C1}(+0) + C_2 u_{C2}(+0) = C_1 u_{C1}(-0),$$

và $$u_{C1}(+0) - u_{C2}(+0) = 0.$$

Từ đó giải được

$$u_{C1}(+0) = u_{C2}(+0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_{C1} (-0).$$

Trong các điều kiện đầu về kho $i_L(+0)$ và $u_C(+0)$ người ta còn có thể phân biệt các điều kiện đầu độc lập và không độc lập.



H. 17-7c

Ví dụ nếu có ba điện cảm nối cùng vào một nút (h. 17-7) giá trị đầu của các dòng điện qua chúng liên hệ với nhau bởi một phương trình theo luật Kirhof 1 :

$$i_{1L}(+0) - i_{2L}(+0) - i_{3L}(+0) = 0.$$

Như vậy chỉ có hai trong ba giá trị đầu của các dòng điện qua các điện cảm này là điều kiện đầu độc lập.

b. *Các điều kiện đầu khác.*

Sau khi xác định được các điều kiện đầu về trạng thái kho $i_L(+0)$ và $u_C(+0)$ ta sẽ xác định các điều kiện đầu khác là những giá trị đầu của các dòng, áp khác và giá trị đầu của đạo hàm tất cả các dòng, áp trong mạch như $i_r(+0)$, $i_C(+0)$, $u_L(+0)$, $u_r(+0)$, $i'_L(+0)$, $u'_C(+0)$ v.v...

Là những lượng của mạch, chúng phải liên hệ với nhau và với các điều kiện đầu về kho bởi hệ phương trình mô tả mạch sau khi đóng mở viết theo các định luật Kirhof. Vì vậy *muốn xác định các điều kiện đầu này phải dựa vào các điều kiện đầu về kho và các luật Kirhof.*

Ví dụ 17-7 : Trong mạch h. 17-1 hãy tính giá trị đầu của điện áp trên điện cảm $u_L(+0)$ và giá trị đầu của đạo hàm cấp một của dòng điện $i'(+0)$.

Giải : Từ ví dụ 17-1 ta đã biết điều kiện đầu của kho là $i(+0) = 0$.

Từ phương trình viết theo luật Kirhof 2 cho mạch ta được :

$$u_r(+0) + u_L(+0) = E,$$

mà $$u_r(+0) = ri(+0) = 0.$$

Vậy : $$u_L(+0) = E.$$

Do $u_L = Li'$ nên $i'(+0) = \dfrac{u_L(+0)}{L} = \dfrac{E}{L}$.

Ví dụ 17-8 : Trong mạch h. 17-2, hãy tính giá trị đầu của dòng điện $i(+0)$ và giá trị đầu của đạo hàm cấp một của điện áp trên điện dung $u'_C(+0)$.

Giải : Từ ví dụ 17-3 ta đã biết điều kiện đầu của kho là $u_C(+0) = 0$. Từ phương trình viết theo luật Kirhof 2 cho mạch này ta có :

$$u_r(+0) + u_C(+0) = E.$$

Vậy $u_r(+0) = E$.

Từ đó $i(+0) = \frac{u_r(+0)}{r} = \frac{E}{r}$.

Do $i = Cu'_C$ nên $u'_C(+0) = \frac{i(+0)}{C} = \frac{E}{rC}$.

Để xác định giá trị đầu của các dòng, áp và các đạo hàm của chúng trong một mạch phức tạp ta làm như sau :

1. Đầu tiên dựa vào các luật đóng mở xác định các điều kiện đầu của kho $i_L(+0)$ và $u_C(+0)$.

2. Viết các phương trình mạch theo luật Kirhof cho mạch điện ở thời điểm lân cận sau đóng mở $t = +0$. Thay vào đó các giá trị $i_L(+0)$ và $u_C(+0)$ đã biết, ta sẽ giải được giá trị đầu của đạo hàm cấp một các dòng điện qua điện cảm $i'_L(+0)$ và giá trị đầu các dòng điện khác.

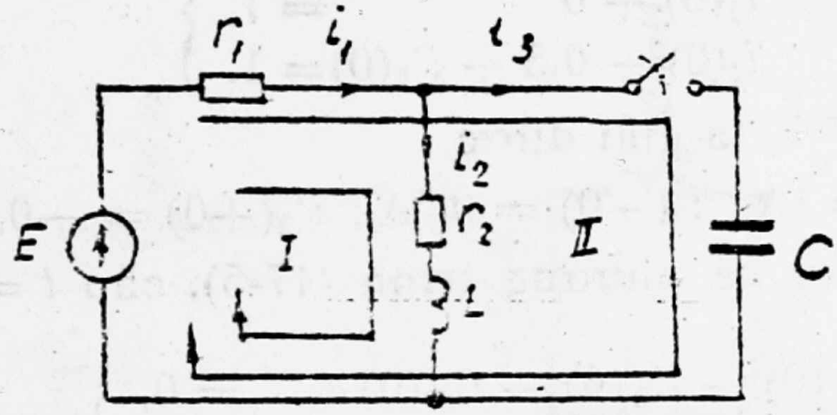
3. Đạo hàm các phương trình trạng thái mạch đã lập, cho $t = +0$ thay vào đó các giá trị $i'_L(+0)$ và $i(+0)$ đã biết, ta sẽ xác định được giá trị đầu của đạo hàm cấp hai các dòng qua điện cảm $i''_L(+0)$ và của đạo hàm các dòng điện khác.

4. Đạo hàm các phương trình trạng thái mạch một lần nữa cho $t = +0$ và thay vào đó các giá trị $i''_L(+0)$ và $i'(+0)$ đã biết, ta sẽ xác định các giá trị đầu của đạo hàm cấp ba các dòng điện qua điện cảm $i'''_L(+0)$ và giá trị đầu của đạo hàm cấp hai các dòng điện khác v.v...

Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ xác định được tất cả các điều kiện đầu cần thiết.

Ví dụ 17-9. Cho mạch điện h. 17-8, với các thông số $E = 1V$ không đổi, $r_1 = r_2 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$. Tính các giá trị đầu các dòng $i_1(+0)$, $i_2(+0)$, $i_3(+0)$ và giá trị đầu các đạo hàm của chúng $i'_1(+0)$, $i'_2(+0)$,

$i'_3(+0)$. Chế độ trước khi đóng dao là xác lập. Tụ điện C ban đầu chưa được nạp điện.



H. 17-8

Giải :

1. Đầu tiên ta hãy xác định các điều kiện đầu của kho $i_2(+0)$ và $u_C(+0)$.

Trong chế độ xác lập trước khi đóng dao :

$$i_1(-0) = i_2(-0) = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{1}{1+1} = 0{,}5\text{A}.$$

Theo luật đóng mở 1 :

$$i_2(+0) = i_2(-0) = 0{,}5\text{A}.$$

Vì tụ điện ban đầu chưa được nạp điện nên theo luật đóng mở 2 :

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0.$$

2. Hệ phương trình mạch viết theo các luật Kirhof là

$$\left.\begin{aligned} &i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ &r_1 i_1 + u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_3 dt = E, \\ &r_1 i_1 + r_2 i_2 + L i'_2 = E. \end{aligned}\right\} \quad (17-$$

Ở thời điểm $t = +0$ ta có

$$\left.\begin{aligned} &i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0. \\ &r_1 i_1(0) + u_C(0) = E. \\ &r_1 i_1(0) + r_2 i_2(0) + L i'_2(0) = E. \end{aligned}\right\} \quad (17-6$$

Thay vào hệ phương trình (17-6) các điều kiện đầu của kho đã biết $i_2(+0) = 0{,}5\text{A}$ và $u_C(+0) = 0$ và thay thông số bằng các số đã cho, ta có

$$\left.\begin{aligned} i_1(0) - 0{,}5 - i_3(0) &= 0, \\ i_1(0) + 0 &= 1, \\ i_2(0) + 0{,}5 - i'_2(0) &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}7)$$

Từ hệ (17-7) ta giải được

$$i_1(+0) = 1\text{A};\ i_3(+0) = 0{,}5\text{A};\ i'_2(+0) = -0{,}5\text{A/s}.$$

Đạo hàm hệ phương trình (17-5), cho $t = +0$ ta được:

$$\left.\begin{aligned} i'_1(0) - i'_2(0) - i'_3(0) &= 0, \\ r_1 i'_1(0) + \frac{i_3(0)}{C} &= 0, \\ r_1 i'_1(0) + r_2 i'_2(0) + L i''_2(0) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}8)$$

Thay vào các phương trình này $i'_2(+0) = -0{,}5\text{ A/s}$ và $i_3(+0) = 0{,}5\text{ A}$ đã tìm được ở trên ta có:

$$\left.\begin{aligned} i'_1(0) - 0{,}5 - i'_3(0) &= 0, \\ i'_1(0) + 0{,}5 &= 0, \\ i'_1(0) - 0{,}5 + i''_2(0) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}9)$$

Từ các phương trình (17-9) sẽ giải được

$$i'_3(+0) = 0;\ i'_1(+0) = -0{,}5\text{A/s};\ i''_2(+0) = 1\text{A/s}^2.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

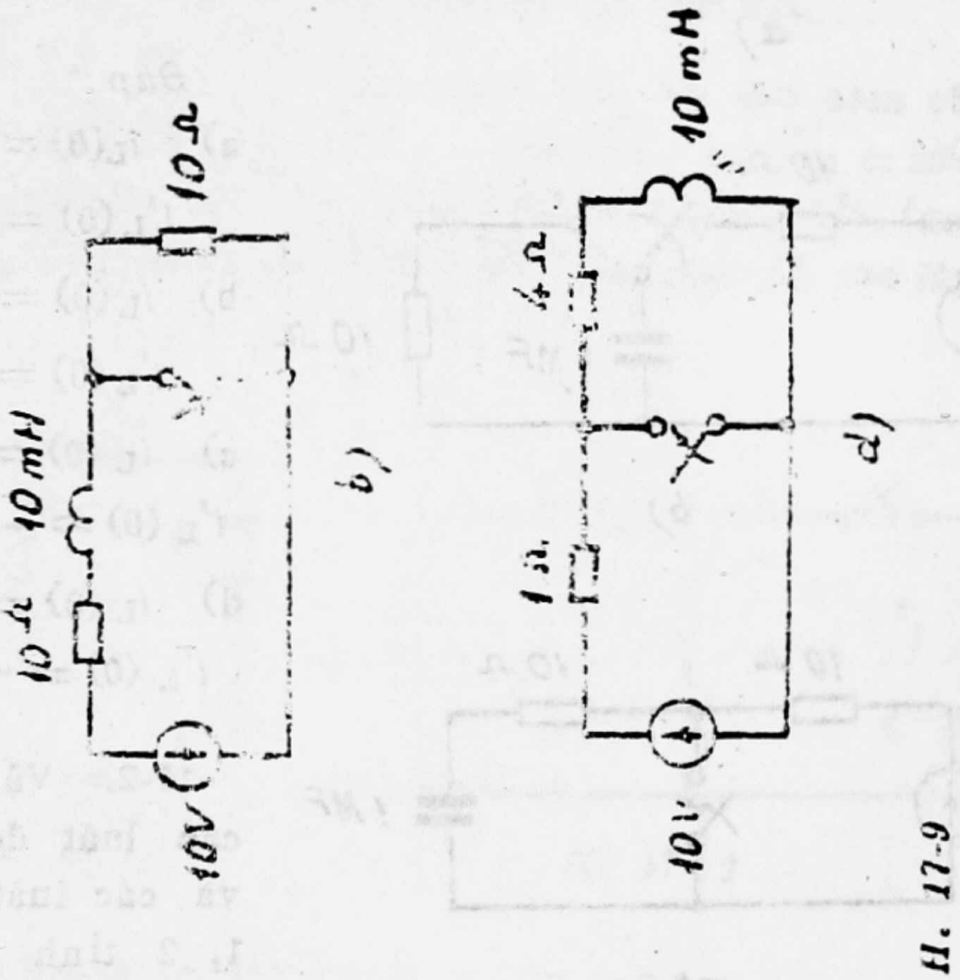
1. Quá trình quá độ trong mạch điện là gì? Vì sao sự chuyển tiếp từ một trạng thái ban đầu sang một chế độ xác lập thường qua một quá trình quá độ? Trong điều kiện nào sẽ không có quá trình quá độ khi đóng mở mạch?

2. Vì sao các lượng i_L, ψ, u_C và q thường không biến thiên gián đoạn? Những lượng nào trong mạch điện có thể gián đoạn?

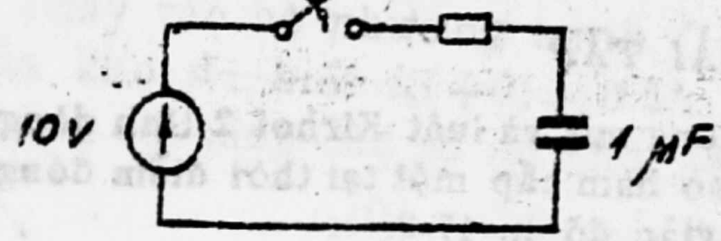
3. Các điều kiện đầu của bài toán quá trình quá độ trong mạch điện là gì? Thế nào là điều kiện đầu của kho? Phát biểu các luật đóng mở và phân tích cách tìm các điều kiện đầu.

BÀI TẬP

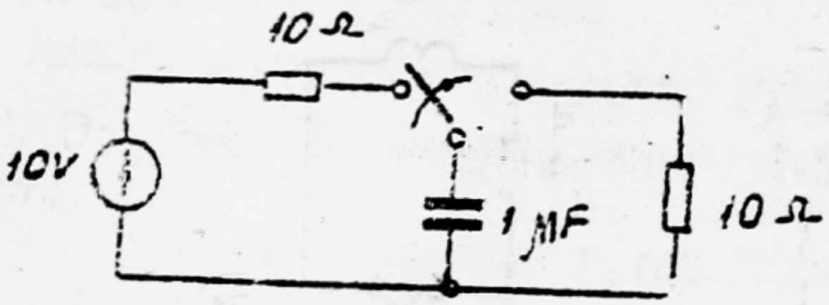
17-1. Vận dụng các luật đóng mở và luật Kirhof 2 tính dòng điện trong điện cảm cùng đạo hàm cấp một tại thời điểm đóng mở $i_L(+0)$, $i'_L(0)$ trong các giản đồ h. 17-9.



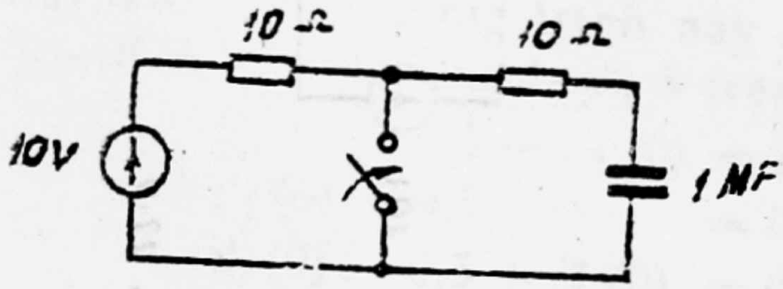
H. 17-9



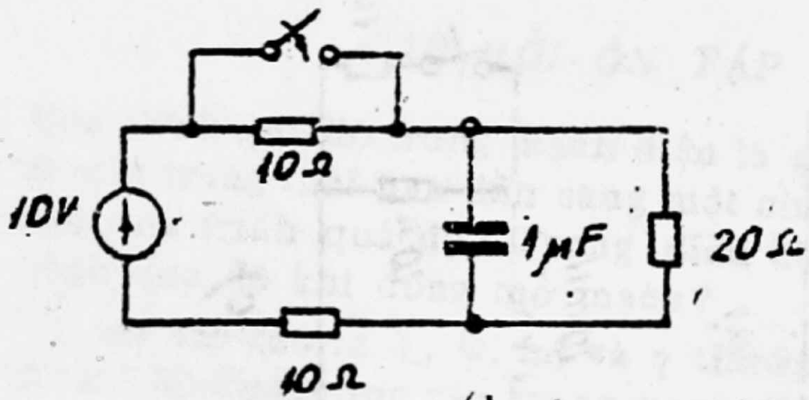
a)



b)



c)



d)

H. 17-10

nguồn điện đều là nguồn không đổi (một chiều), chế độ trước khi đóng mở là xác lập.

Đáp :

a) $i_L(0) = 0$,

$i'_L(0) = 1000$ A/s.

b) $i_L(0) = 0,5$A,

$i'_L(0) = 500$ A/s.

c) $i_L(0) = 2$A ;

$i'_L(0) = -1000$ A/s.

d) $i_L(0) = 2$A ;

$i'_L(0) = -800$ A/s.

17-2. Vận dụng các luật đóng mở và các luật Kirhof 1, 2 tính điện áp trên điện dung cùng đạo hàm cấp một của nó tại thời điểm đóng mở $u_C(0)$ và u'_C trong các giản đồ h. 17-10.

Biết các nguồn đều là nguồn không đổi (một chiều), chế độ trước khi đóng mở là xác lập.

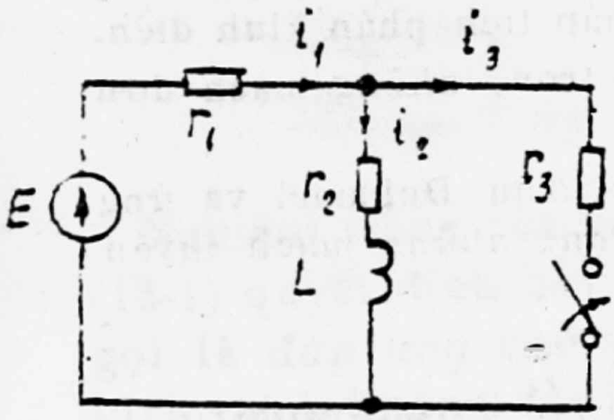
Đáp : a) $u_C(0) = 0$; $u'_C(0) = 10^6$ V/s.

b) $u_C(0) = 10$V ; $u'_C(0) = -10^6$ V/s.

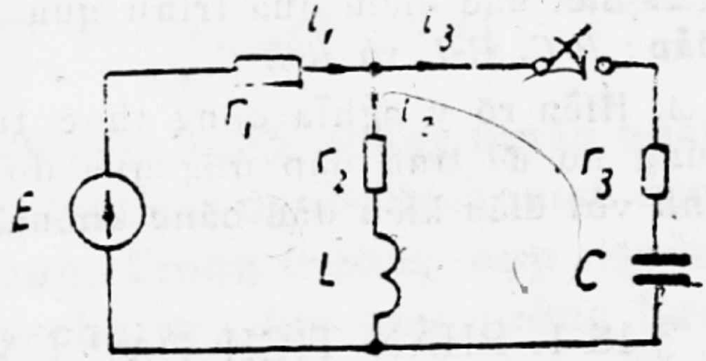
c) $u_C(0) = 10$V ; $u'_C(0) = -10^6$ V/s.

d) $u_C(0) = 5$V ; $u'_C(0) = 2{,}4 \cdot 10^5$ V/s.

17-3. Tìm giá trị đầu của các dòng điện và đạo hàm cấp một của chúng trong giản đồ h. 17-11. Cho biết : $r_1 = r_3 = 50\Omega$, $r_2 = 10\Omega$, $C = 100$ μF, $L = 1$H, nguồn điện không đổi (một chiều) $E = 120$ V, và chế độ trước khi đóng mở đã xác lập.



H. 17-11



H. 17-12

Đáp : $i_1(0) = 2{,}2$ A ; $i_2(0) = 2$ A ; $i_3(0) = 0{,}2$ A

$i_1'(0) = -5$ A/s ; $i_2'(0) = -10$ A/s ; $i_3'(0) = 5$ A/s.

17-4. Cũng hỏi như bài 3 nhưng đối với sơ đồ h. 17-12. Cho biết : $E = 120$ V (một chiều), $r_1 = r_3 = 50\ \Omega$, $r_2 = 10\ \Omega$, $L = 1$H, $C = 100$ μF.

Đáp : $i_1(0) = 2.2$ A ; $i_2(0) = 2$ A ; $i_3(0) = 0{,}2$ A ;

$i_1'(0) = -25$ A/s ; $i_2'(0) = -10$ A/s $i_3'(0) = -15$A/s.

CHƯƠNG XVIII

TÍNH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH ĐIỆN TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KINH ĐIỂN

Mục đích :

1. Hiểu rõ ý nghĩa việc phân tích đáp ứng quá độ trong mạch tuyến tính thành đáp ứng tự do xếp chồng với đáp ứng xác lập. Nắm vững tính chất của đáp ứng tự do và dạng của nó.

2. Biết tính quá trình quá độ trong những mạch tuyến tính cấp một và cấp hai bằng phương pháp tích phân kinh điển.

3. Biết đặc điểm quá trình quá độ trong những mạch đơn giản : *R-C*, *R-L* và *R-L-C*.

4. Hiểu rõ ý nghĩa công thức tích phân Đuhamel và ứng dụng nó để tính đáp ứng quá độ trong những mạch tuyến tính với điều kiện đầu bằng không.

§ 18-1. PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH TUYẾN TÍNH THÀNH ĐÁP ỨNG TỰ DO XẾP CHỒNG VỚI ĐÁP ỨNG XÁC LẬP

Như nói trên quá trình quá độ của mạch điện được mô tả bởi một hệ phương trình vi phân viết theo các luật Kirhof. Đối với mạch tuyến tính ta có một hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma i_h &= \Sigma j, \\ \Sigma\left(r_h i_h + L_h \frac{di_h}{dt} + \frac{1}{C_h}\int i_h dt\right) &= \Sigma e_h. \end{aligned}\right\} \quad (18\text{-}1)$$

trong đó j, e là những nguồn dòng và nguồn s.đ.đ.

Do tính chất tuyến tính nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân không thuần nhất (18-1) bằng nghiệm tổng quát của hệ phương trình thuần nhất tương

ứng (được từ hệ (18-1) bằng cách cho vế phải $\Sigma j = 0$, $\Sigma e_h = 0$), cộng với nghiệm riêng của hệ phương trình không thuần nhất (18-1).

Hệ phương trình vi phân thuần nhất ứng với mạch điện không có nguồn kích thích ngoài nên nghiệm của nó không phụ thuộc qui luật biến thiên của nguồn kích thích mà chỉ phụ thuộc riêng tính chất mạch. Do đó nghiệm của hệ phương trình thuần nhất được gọi là *đáp ứng tự do*, kí hiệu là $i_{h\,td}$.

Hệ phương trình đối với đáp ứng tự do viết :

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma i_{htd} = 0, \\ &\Sigma\left(r_h i_{htd} + L_h \frac{di_{htd}}{dt} + \frac{1}{C_h}\int i_{htd}dt\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}2)$$

Nghiệm riêng của hệ phương trình không thuần nhất (18-1) quyết định bởi qui luật của nguồn kích thích nên gọi là *đáp ứng cưỡng bức*. Trong trường hợp nguồn kích thích không đổi hay chu kỳ, đáp ứng cưỡng bức cũng không đổi hay biến thiên với chu kỳ của kích thích, ta gọi chúng là *đáp ứng xác lập*, kí hiệu $i_{h\,xl}$.

Như vậy dựa trên tính chất tuyến tính của mạch có thể phân tích đáp ứng quá độ trong mạch tuyến tính thành đáp ứng tự do xếp chồng với đáp ứng xác lập :

$$i_h = i_{htd} + i_{hxl}. \qquad (18\text{-}3)$$

Tương ứng, quá trình quá độ trong mạch tuyến tính được coi là quá trình tự do xếp chồng với quá trình xác lập.

Ta đã biết có thể lấy nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (18-2) dưới dạng :

$$i_{h\,td} = \sum_{k=1}^{n} A_{hk}\, e^{p_k t}, \qquad (18\text{-}4)$$

trong đó A_{hk} là các hằng số tích phân.

p_k là các số mũ, xác định được từ phương trình đặc tính ứng với hệ phương trình vi phân đã cho (xem m. 18-3).

Về mặt vật lý, do không được nguồn kích thích ngoài duy trì và vì trong mạch thường có tiêu tán nên đáp ứng tự do thường phải tắt dần theo thời gian, và các số mũ tắt p_k của đáp ứng tự do thường phải có phần thực âm.

Chú ý rằng tất cả các đáp ứng tự do trong mạch (dòng điện i_{htd} trong nhánh h bất kỳ hay điện áp u_{htd} trên phần tử h bất kỳ) đều phải có cùng chung các số mũ tắt p_k. Có như vậy các phương trình theo luật Kirhof 1, 2 cho các đáp ứng tự do (18-2) mới được thỏa mãn ở mọi thời điểm.

Vậy có thể viết đáp ứng quá độ dạng:

$$i_h = i_{hxl} + \sum_{k=1}^{n} A_{hk} e^{p_k t}. \qquad (18\text{-}3)$$

Để xác định n hằng số tích phân A_{hk} phải dùng các điều kiện đầu là các trị số đầu của đáp ứng và đạo hàm từ cấp một đến cấp $n-1$ của nó $i(0), i'(0), \ldots, i^{(n-1)}(0)$ (Việc xác định các điều kiện đầu đã xét ở m. 17-4).

Phương pháp tính đáp ứng quá độ trong mạch tuyến tính bằng cách phân tích thành đáp ứng tự do xếp chồng với đáp ứng xác lập và xác định các hằng số tích phân theo điều kiện đầu gọi là *phương pháp tích phân kinh điển.*

Trong hai thành phần của đáp ứng quá độ, ta đã tính quen đáp ứng xác lập, nên chỉ còn phải xét việc tính đáp ứng tự do. Mục dưới đây sẽ xét việc tính đáp ứng tự do.

§ 18-2. CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG. DẠNG CỦA ĐÁP ỨNG TỰ DO

1. Cách lập phương trình đặc trưng.

Để tính được các số mũ p_k trong biểu thức đáp ứng tự do (18-4), cần phải lập và giải phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân (18-2).

Ta đã biết nếu mỗi hàm $A_{h1}e^{p_1t}$, $A_{h2}e^{p_2t}$, $A_{hn}e^{p_nt}$... là nghiệm của (18-2) thì do tính chất tuyến tính, nghiệm tổng quát i_{htd} sẽ là tổng các thành phần đó :

$$i_{htd} = \sum_{k=1}^{n} A_{hk}\, e^{p_k t}. \qquad (18\text{-}4)$$

Xét (18-1) thấy rằng để xác định được dòng tự do, chủ yếu cần tìm được các số mũ tắt p_k. Dưới đây sẽ nói việc tìm p_t.

Mỗi số mũ p_k đều là nghiệm phương trình đặc trưng nên để tìm phương trình đặc trưng có thể chỉ xét một thành phần dạng Ae^{pt} của đáp ứng tự do.

Đặt $$i_{td} = Ae^{pt}, \qquad (18\text{-}6)$$

ta sẽ có : $$\frac{di_{td}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_{td}, \qquad (18\text{-}7)$$

và $$\int i_{td}dt = \int Ae^{pt}dt = \frac{1}{p}Ae^{pt} = \frac{i_{td}}{p}. \qquad (18\text{-}8)$$

Tức đạo hàm và tích phân đối với i_{td} bằng tích hay thương của nó với p.

Áp dụng vào hệ phương trình thuần nhất (18-2) ta sẽ được một hệ phương trình đại số thuần nhất đối với i_{td} :

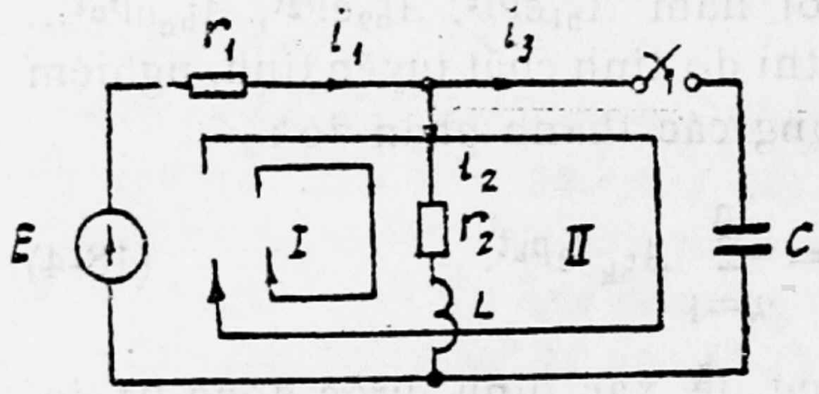
$$\left.\begin{aligned} &\Sigma i_{htd} = 0, \\ &\Sigma\left(r_h + pL_h + \frac{1}{pC_h}\right) i_{htd} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}9)$$

Muốn hệ (18-9) có nghiệm không tầm thường $i_{kld} \neq 0$ thì định thức các hệ số $\Delta(p)$ của hệ phải triệt tiêu:

$$\Delta(p) = 0. \qquad (18\text{-}10)$$

Vậy p phải thỏa mãn phương trình (18-10).

Nói cách khác (18-10) cho ta xác định được các số mũ p của các đáp ứng tự do trong mạch. Nó chính là *phương trình đặc trưng* của mạch.



H. 18-1

Ví dụ 18-1: Lập phương trình đặc trưng của mạch điện h. 18-1.

Ta có hệ phương trình mạch theo các luật Kirhof đối với các dòng điện tự do:

$$\left.\begin{aligned} & i_{1td} - i_{2td} - i_{3td} = 0, \\ & r_1 i_{1td} + \frac{1}{C}\int i_{3td}dt = 0, \\ & r_1 i_{1td} + r_2 i_{2td} + L\frac{di_{2td}}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}11)$$

Sau khi đại số hóa ta được:

$$\left.\begin{aligned} & i_{1td} - i_{2td} - i_{3td} = 0, \\ & r_1 i_{1td} + \frac{1}{pC} i_{3td} = 0, \\ & r_1 i_{1td} + (r_2 + pL) i_{2td} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}12)$$

Ta được phương trình đặc trưng bằng cách lập định thức hệ số của (18-12) và cho nó bằng không:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ r_1 & 0 & \dfrac{1}{pC} \\ r_1 & r_2 + pL & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18\text{-}13)$$

Sau khi khai triển định thức ta được:

$$p^2(r_1LC) + p(r_2r_1C + L) + (r_1 + r_2) = 0. \qquad (18\text{-}14)$$

Ở đây phương trình đặc trưng là một phương trình bậc hai. Nếu hai nghiệm của nó là p_1 và p_2 thì theo (18-5) đáp ứng tự do sẽ có dạng tổng của 2 hàm mũ:

$$i_{htd} = A_{h1}\, e^{p_1 t} + A_{h2}\, e^{p_2 t}. \qquad (18\text{-}15)$$

Chú ý.

Ta cũng có thể được phương trình đặc trưng bằng một cách khác, không cần viết hệ phương trình (18-9) và lập định thức hệ số của nó.

Như trên đã nói, mỗi đáp ứng quá độ trong một mạch điện đều có những số mũ p_k giống nhau. Vì vậy có thể chỉ cần tìm những số mũ tắt cho *riêng một dòng điện tự do nào đó*, mà không cần phải lập phương trình dạng (18-12) cho tất cả các dòng điện.

Chú ý rằng theo (18-9) các dòng và áp tự do liên hệ với nhau bằng những phương trình đại số, với các hệ số là những tổng trở:

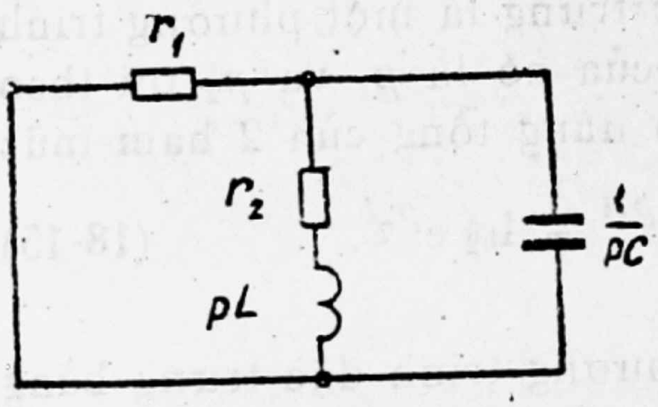
$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pc}$$

có dạng giống tổng trở phức đối với dòng điện hình sin

$$Z(j\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Do đó mạch điện đối với các đáp ứng tự do có thể biểu thị bằng sơ đồ như h. 18-2, trong đó thay thế các điện cảm bằng tổng trở pL, điện dung bằng $1/pC$, và trong đó không có nguồn ngoài nào cả. Đối với sơ đồ đó mọi tính toán đều dùng những phương trình đại số, ví dụ (18-12) chẳng hạn. Từ những nhận xét đó ta có thể dẫn ra một phương pháp giản tiện tìm phương trình đặc trưng như sau:

Với sơ đồ như h. 18-2, nếu lấy dòng tự do một nhánh h nào đó nhân với tổng trở đầu vào đối với nhánh ấy $Z_{hh}(p)$ thì vì s.đ.đ. trong nhánh bằng số không, nên tích đó phải triệt tiêu tức:



H. 18-2

$$Z_{hh}(p)\, i_{htd} = 0 \quad (18\text{-}16a)$$

Thực tế các dòng tự do tồn tại, khác không, nên muốn thỏa mãn (18-16a) phải có:

$$Z_{hh}(p) = 0 \quad (18\text{-}16b)$$

Các hệ số p_k phải thỏa mãn phương trình (18-16b) này, nói khác đi (18-16b) chính là phương trình đặc trưng của mạch. Vì vậy ta suy ra, muốn thành lập phương trình đặc trưng không cần qua các thủ tục (18-11, 12 và 13), mà chỉ việc từ sơ đồ đối với dòng tự do vẽ theo kiểu h. 18-2, tìm biểu thức tổng trở đầu vào đối với một nhánh bất kỳ $Z_{hh}(p)$ nào đó, và cho nó bằng số không như (18-16b).

Ví dụ với mạch h. 18-1 ta có thể được phương trình đặc trưng bằng cách cho tổng trở toàn từ đầu vào đối với nhánh *1*, nhánh 2 hay nhánh 3 bằng không:

$$Z_{11}(p) = r_1 + \frac{(r_2 + pL)\frac{1}{pC}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}} = 0, \quad (18\text{-}17)$$

hoặc:

$$Z_{22}(p) = r_2 + pL + \frac{r_1\frac{1}{pC}}{r_1 + \frac{1}{pC}} = 0, \quad (18\text{-}18)$$

$$Z_{33}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{r_1(r_2 + pL)}{r_1 + r_2 + pL} = 0. \quad (18\text{-}19)$$

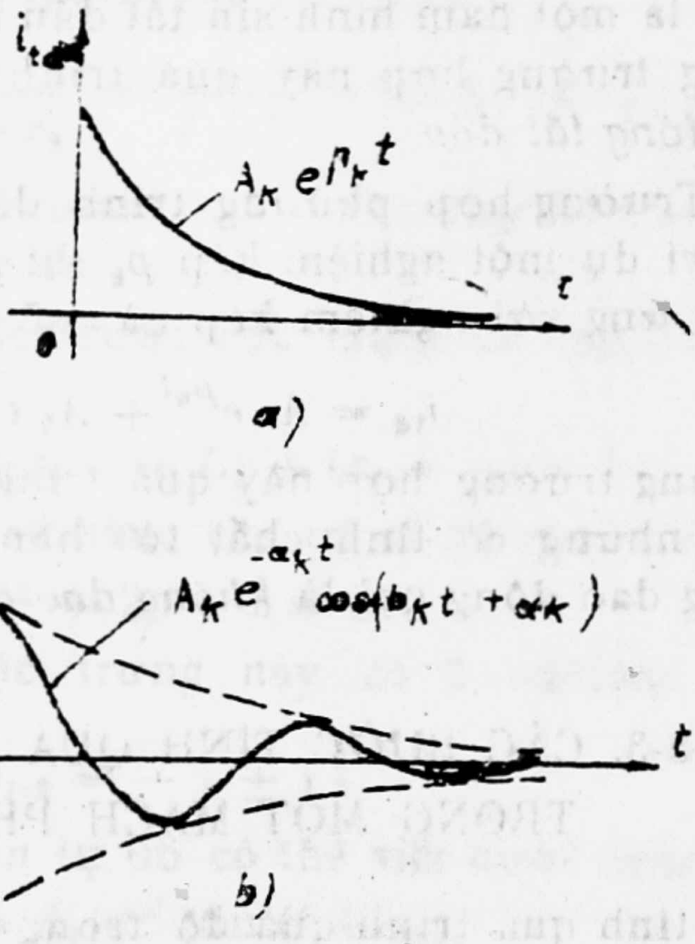
Sau khi rút gọn các phương trình (18-17, 18 và 19) ta đều đi đến phương trình (18-14) đã lập ở trên.

2. *Dạng của đáp ứng tự do.*

Dạng của đáp ứng tự do phụ thuộc vào sơ đồ mạch, vào các thông số r, L, C, và quyết định bởi nghiệm của phương trình đặc trưng. Có thể gặp các trường hợp sau đây:

1) Trường hợp phương trình đặc trưng có các nghiệm thực, đơn và thường âm, đáp ứng tự do có dạng:

$$i_{td} = \Sigma A_k e^{p_k t} \qquad (18\text{-}20)$$



H. 18-3

Mỗi số hạng $A_k e^{p_k t}$ là một hàm số mũ tắt dần như đồ thị vẽ trên (h. 18-3a). Quá trình tự do có tính chất *không dao động.*

2) Trường hợp phương trình đặc trưng có một nghiệm phức $p_k = -a_k + j b_k$, bởi vì các hệ số phương trình đặc

trưng là số thực nên $\widehat{p}_k = -a_k - jb_k$ cũng là một nghiệm của phương trình đặc trưng. Lúc đó hai hằng số tích phân tương ứng cũng là 2 số phức liên hợp:

$$A_k = |A_k| e^{+ja_k} \text{ và } \widehat{A} = |A_k| e^{-ja_k}$$

Đối với một cặp nghiệm phức liên hợp như vậy thành phần đáp ứng tự do sẽ có dạng

$$i_{td} = A_k e^{p_k t} + \widehat{A}_k e^{\widehat{p}_k t} = 2\,\mathrm{Re}\{A_k e^{p_k t}\} =$$

$$= 2|A_k| e^{+a_k t} \cos(b_k t + \alpha_k). \qquad (18\text{-}21)$$

Đó là một hàm hình sin tắt dần như vẽ trên h. 18-3b. Trong trường hợp này quá trình tự do có tính chất *dao động tắt dần*.

3) Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm bội, ví dụ một nghiệm kép p_k thì thành phần đáp ứng tự do ứng với nghiệm kép này sẽ có dạng:

$$i_{td} = A_1 e^{p_k t} + A_2 t e^{p_k t}. \qquad (18\text{-}22)$$

Trong trường hợp này quá trình quá độ không dao động nhưng có tính chất tới hạn giữa dao động và không dao động gọi là *không dao động tới hạn*.

§ 18-3. CÁC BƯỚC TÍNH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MỘT MẠCH PHỨC TẠP

Để tính quá trình quá độ trong một mạch phức tạp bằng phương pháp tích phân kinh điển ta làm các bước sau đây:

1) Tính chế độ xác lập mới sau khi đóng mở để tìm các đáp ứng xác lập mới.

2) Lập và giải phương trình đặc trưng để tìm dạng của các đáp ứng tự do.

3) Tìm các điều kiện đầu dùng để xác định các hằng số tích phân trong biểu thức các đáp ứng quá độ.

Ví dụ 18-2. Để làm ví dụ ta tính các dòng điện quá độ trong mạch h. 18-1 với các thông số :

$r_1 = r_2 = 1\ \Omega$; $L = 1$H, $C = 1$F. $E = 1$V. Chú ý rằng, bài tính này đã được xét 1 phần ở ví dụ 17-9.

Giải :

1. Tính các dòng điện xác lập sau khi đóng mở.

Trong chế độ xác lập với nguồn s.đ.đ không đổi, dòng điện chỉ khép mạch qua r_1, r_2, và L :

$$i_{1xl} = i_{2xl} = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{1}{1+1} = 0{,}5\ \text{A}, \text{ và } i_{3xl} = 0.$$

2. Lập và giải phương trình đặc trưng để tìm dạng của các đáp ứng tự do :

Phương trình đặc trưng của mạch đã lập trong ví dụ 18-1 :

$$p^2 (r_1 LC) + p (r_2 r_1 C + L) + (r_1 + r_2) = 0.$$

Thay các thông số bằng các trị số đã cho ta được :

$$p^2 + 2p + 2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có 2 nghiệm phức liên hợp

$$p_{1,2} = -1 \pm j\,1.$$

Vậy các dòng điện tự do có thể viết dưới dạng :

$$i_{1td} = A_1\, e^{-t} \sin (t + \alpha_1),$$
$$i_{2td} = A_2\, e^{-t} \sin (t + \alpha_2),$$
$$i_{3td} = A_3\, e^{-t} \sin (t + \alpha_3).$$

3. Xác định các hằng số tích phân theo các điều kiện đầu.

Dòng điện quá độ bằng tổng các thành phần xác lập và tự do:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= i_{1xl} + i_{1td} = 0{,}5 + A_1\, e^{-t} \sin(t + \alpha_1), \\ i_2 &= i_{2xl} + i_{2td} = 0{,}5 + A_2\, e^{-t} \sin(t + \alpha_2), \\ i_3 &= i_{3xl} + i_{3td} = \quad\quad A_3\, e^{-t} \sin(t + \alpha_3) \end{aligned}\right\}$$

Trong ví dụ (17-9) đã tìm được các điều kiện đầu của bài toán này. Ta sử dụng chúng để xác định các hằng số tích phân A_1, α_1, A_2, α_2, và A_3, α_3.

Thay các điều kiện đầu đã tìm được $i_1(0) = 1$ và $i_1'(0) = -0{,}5$ vào biểu thức của i_1 tại $t = 0$ ta có:

$$i_1(0) = 0{,}5 + A_1 \sin \alpha_1 = 1.$$

Đạo hàm biểu thức của i_1 rồi thay $t = 0$, ta được:

$$i_1'(0) = A_1(-\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1) = -0{,}5.$$

Từ hai phương trình này giải được $A_1 = 0{,}5$ và $\alpha_1 = \pi/2$.

Vậy: $i_1 = 0{,}5 + 0{,}5\, e^{-t} \sin(t + \pi/2)$ A.

Tương tự như trên theo các điều kiện đầu: $i_2(0) = 0{,}5$ và $i_2'(0) = -0{,}5$, xác định được $A_2 = -0{,}5$ và $\alpha_2 = 0$.

Vậy $$i_2 = 0{,}5 - 0{,}5\, e^{-t} \sin t \text{ A}.$$

Cuối cùng theo các điều kiện đầu $i_3(0) = 0{,}5$ và $i_3'(0) = 0$, xác định được $A_3 = 0{,}707$ và $\alpha_3 = 45^\circ$.

Vậy: $$i_3 = 0{,}707\, e^{-t} \sin(t + 45^\circ) \text{ A}.$$

Dưới đây ta sẽ dùng phương pháp tích phân kinh điển để nghiên cứu quá trình quá độ trong những mạch đơn giản có nhiều ứng dụng thực tế.

§ 18-4. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH *r-C*.

1. Quá trình tự do trong mạch *r-C*.

Giả thiết một tụ điện được nạp tới điện áp U_0 rồi phóng điện qua một điện trở r (h. 18-4). Trong mạch

không có nguồn ngoài nên quá trình quá độ trùng với quá trình tự do.

Phương trình trạng thái theo các luật Kirhof có dạng :

$$ri_{td} + u_{Ctd} = 0.$$

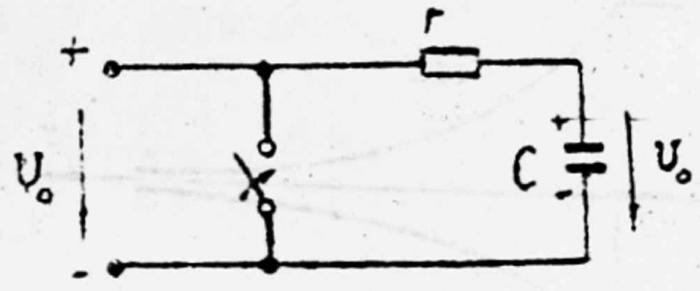
Vì

$$i_{td} = Cu'_{Ctd}$$

nên :

$$rCu'_{Ctd} + u_{Ctd} = 0$$

Phương trình đặc trưng



H. 18-4

$$rCp + 1 = 0.$$

có nghiệm là

$$p = -\frac{1}{rC}. \qquad (18\text{-}23)$$

Vậy điện áp tự do trên điện dung có dạng :

$$u_{Ctd} = A\,e^{pt} = A\,e^{-\frac{t}{rC}}$$

Theo điều kiện đầu $u_C(0) = u_C(-0) = U_0$ ta xác định được hằng số tích phân $A = U_0$.

Cuối cùng :

$$u_{Ctd} = U_0\,e^{-\frac{t}{rC}}$$

Điện áp tự do trên tụ điện tắt dần với hệ số tắt bằng $\frac{1}{rC}$. Nghịch đảo của hệ số tắt là :

$$\tau = rC, \qquad (18\text{-}24)$$

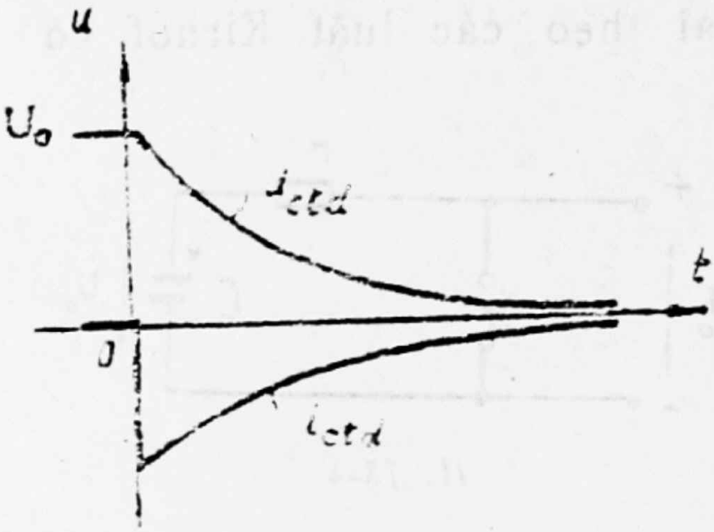
có thứ nguyên thời gian gọi là *hằng số thời gian*. Nó đặc trưng cho tốc độ tắt của quá trình : Sau một thời gian bằng τ điện áp tự do trên điện dung giảm đi e lần so với trị số đầu. Thật vậy :

$$u_{Ctd}(t + \tau) : u_{Ctd}(t) = A\,e^{-\frac{t+\tau}{\tau}} : A\,e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-1}$$

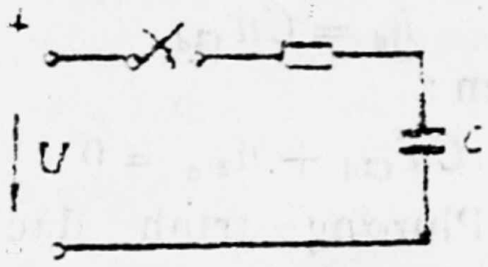
Dòng phóng điện của tụ :

$$i_d = Cu'_{Ctd} = -\frac{U_0}{r}e^{-\frac{t}{rC}}, \qquad (18\text{-}25)$$

tắt nhiên cũng tắt dần với hằng số thời gian $\tau = rC$. H. 18-5 vẽ các đường cong $u_{Ctd}(t)$ và $i_{td}(t)$.



H. 18-5



H. 18-6

2. Đóng mạch *r-C* vào một điện áp không đổi.

Khi đóng một mạch có điện dung C nối tiếp với một điện trở r vào một nguồn điện áp không đổi (h. 18-6) thì điện áp quá độ trên điện dung sẽ gồm một thành phần tự do có dạng đã xét ở trên:

$$u_{Ctd} = A\, e^{-\frac{t}{rC}},$$

và một thành phần xác lập không đổi $u_{Cxl} = U$ tức:

$$u_C = U + A\, e^{-\frac{t}{rC}} \qquad (18\text{-}26a)$$

Để xác định hằng số tích phân A ta dùng điều kiện đầu

$$u_C(0) = u_C(-0) = 0 = U + A.$$

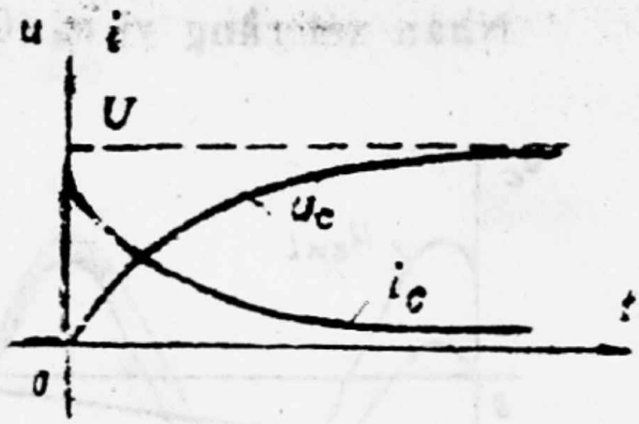
tức: $A = -U$

Vậy: $$U_C = U\left(1 - e^{-\frac{t}{rC}}\right) \qquad (18\text{-}26b)$$

Dòng nạp cho tụ điện bằng:

$$i = Cu'_C = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}} \qquad (18\text{-}27)$$

Đồ thị $u_C(t)$ và $i(t)$ theo (18-26, 27) vẽ trên h. 18-7.



H. 18-7

Ta thấy điện áp trên điện dung biến thiên liên tục từ trị số ban đầu bằng không tới trị số xác lập U, còn dòng điện lúc đầu nhảy vọt từ 0 đến $\frac{U}{r}$ rồi giảm dần đến không.

3. Đóng mạch r—C vào một điện áp hình sin.

Nếu đóng mạch rC vào một nguồn điện áp hình sin $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ thì điện áp xác lập trên điện dung cũng có dạng hình sin:

$$u_{Cxl} = \frac{U_m}{z} x_C \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) =$$

$$= U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2); \qquad (18\text{-}28)$$

trong đó:

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} - \frac{1}{r\omega C} \qquad (18\text{-}29)$$

Còn thành phần điện áp tự do vẫn có dạng

$$u_{Ctd} = A e^{-\frac{t}{rC}}$$

nên điện áp quá độ trên điện dung bằng

$$u_C = u_{Cxl} + u_{Ctd} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) + A e^{-\frac{t}{rC}} \qquad (18\text{-}30)$$

Theo điều kiện đầu $u_C(0) = u_C(-0) = 0$ ta có:

$$U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \pi/2) + A = 0,$$

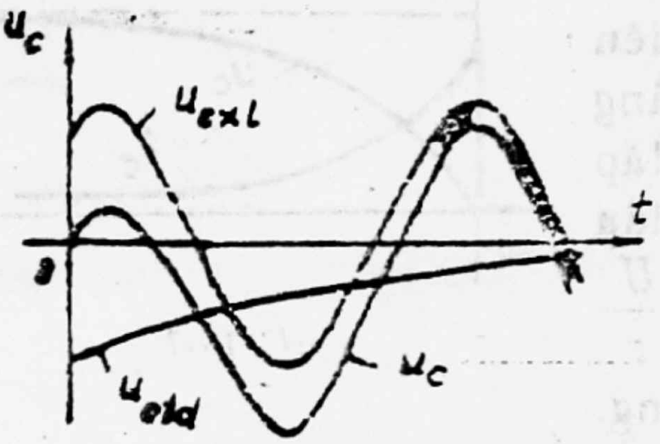
tức: $$A = -U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \pi/2).$$

Cuối cùng:

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) - U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \pi/2) e^{-\frac{t}{rC}}. \qquad (18\text{-}31)$$

Đường cong $u_C(t)$ được vẽ trên h. 18-8.

Nhận xét rằng vì $u_C(0) = u_{Cxl}(0) - u_{Ctd}(0) = 0$ nên $u_{Ctd}(0) = -u_{Cxl}(0)$. Nếu khi đóng mạch đúng lúc điện áp xác lập trên tụ điện đi qua trị số 0 thì $u_{Ctd}(0) = A = 0$ nên $u_{Ctd} = 0$ và $u_C = u_{Cxl}$ tức quá trình xác lập được thành lập ngay lập tức không qua quá trình quá độ.



H. 18-8

Dòng điện bằng :

$$i = Cu'_C = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{I_m}{r\omega C}\sin(\psi - \varphi - \pi/2)\, e^{-\frac{t}{rC}} \qquad (18\text{-}33)$$

Vì ở thời điểm đầu $u_C(0) = 0$ tụ điện như bị ngắn mạch, điện áp của nguồn hoàn toàn đặt trên điện trở r nên $i(0) = \frac{u(0)}{r} = \frac{U_m \sin\psi}{r}$. (18-34)

Vì vậy nếu đóng mạch r-C khi điện áp nguồn đi qua trị số cực đại và điện trở r nhỏ thì dòng điện ở thời điểm ban đầu có thể rất lớn.

§ 18-5. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH r-L

Việc tính quá trình quá độ trong mạch r-L hoàn toàn giống như tính mạch r-C, chỉ có điều đáng chú ý là phương trình đối với dòng điện tự do trong mạch r-L (h. 18-9) có dạng :

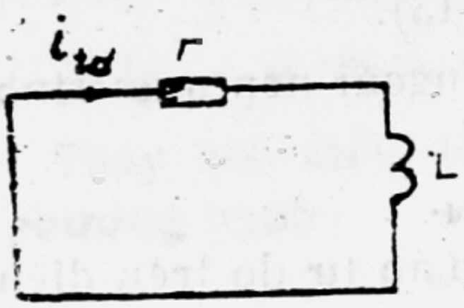
$$ri_{td} + L\frac{di_{td}}{dt} = 0. \qquad (18\text{-}35)$$

Phương trình đặc trưng:

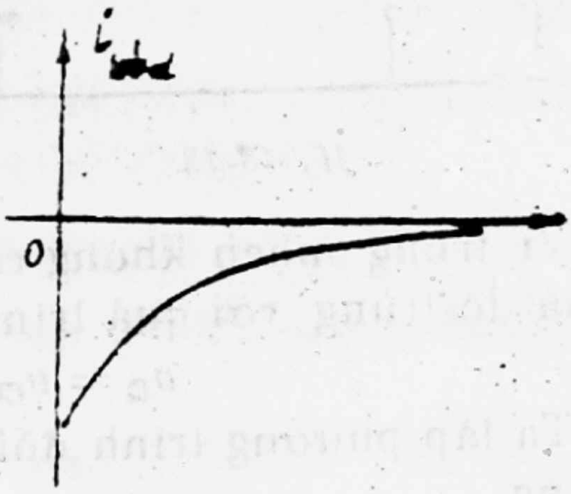
$$r + pL = 0$$

có nghiệm là

$$p = -\frac{r}{L}. \qquad (18\text{-}36)$$



H. 18-9

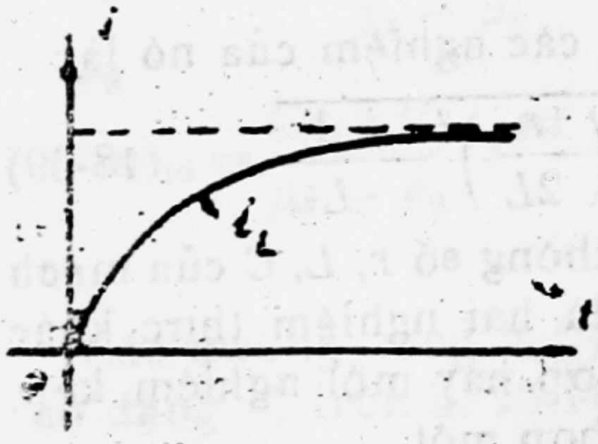


H. 18-10

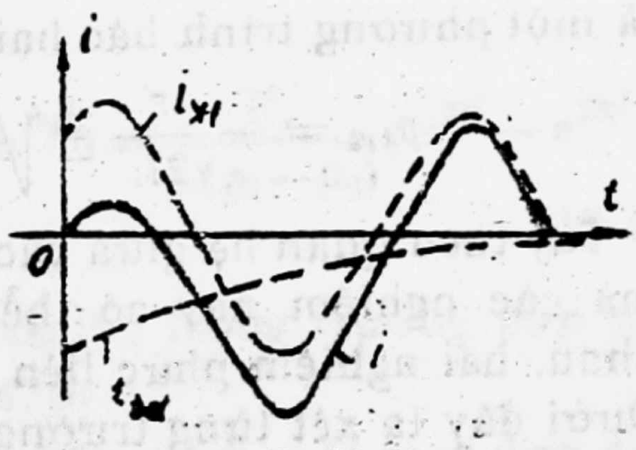
Do đó dòng điện tự do có dạng $i_{td} = A\ e^{-\frac{t}{L}} = A\ e^{-\frac{t}{\tau}}$

trong đó: $$\tau = \frac{L}{r} \qquad (18\text{-}37)$$

là *hằng số thời gian của mạch r-L*. Dưới đây nêu các đồ thị cho thấy dạng biến thiên của dòng điện tự do



H. 18-11

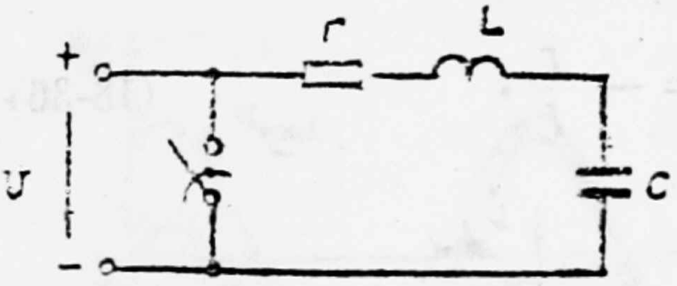


H. 18-12

trong mạch r-L (h. 18-10), dòng điện khi đóng mạch r-L vào một điện áp không đổi (h. 18-11) và khi đóng vào một điện áp hình sin (h. 18-12).

§ 18-6. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH *r-L-C*

1. Quá trình tự do trong mạch *r-L-C*.



H. 18-13

Giả thiết một tụ điện được nạp điện trước tới điện áp U_0 rồi phóng điện qua một cuộn dây có điện trở r và điện cảm L (h. 18-13).

Vì trong mạch không có nguồn ngoài nên quá trình quá độ trùng với quá trình tự do

$$u_C = u_{Ctd} \; ; \; i = i_{td}.$$

Ta lập phương trình đối với điện áp tự do trên điện dung.

Trong phương trình : $ri_{td} + Li'_{td} + u_{Ctd} = 0$ thay $i = Cu'_{Ctd}$ ta được

$$u''_{Ctd} + \frac{r}{L} u'_{Ctd} + \frac{1}{LC} u_{Ctd} = 0. \qquad (18\text{-}38a)$$

Phương trình đặc trưng:

$$p^2 + \frac{r}{L} p + \frac{1}{LC} = 0, \qquad (18\text{-}38b)$$

là một phương trình bậc hai ; các nghiệm của nó là :

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \qquad (18\text{-}39)$$

Tùy theo quan hệ giữa các thông số r, L, C của mạch mà các nghiệm này có thể là hai nghiệm thực khác nhau, hai nghiệm phức liên hợp hay một nghiệm kép. Dưới đây ta xét từng trường hợp một.

a) *Trường hợp phóng điện không dao động.*

Khi $$r \geqslant 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (18\text{-}40)$$

phương trình đặc trưng có 2 nghiệm khác nhau. Điện áp trên điện dung có dạng:

$$u_{Ctd} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \qquad (18\text{-}41)$$

và dòng điện:

$$i_{td} = -Cu'_{Ctd} = -C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \qquad (18\text{-}42)$$

Để xác định các hằng số tích phân A_1 và A_2 trong (18-41) và (18-42) ta dùng các điều kiện đầu:

$$u_C(0) = u_C(0) = U_o \text{ và } i(0) = i_L(0) = i_L(-0) = 0.$$

Thay các điều kiện đầu vào (18-41, 42) ta được hệ phương trình:

$$\left.\begin{aligned} U_o &= A_1 + A_2, \\ 0 &= A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{aligned}\right\}$$

Từ đó giải được:

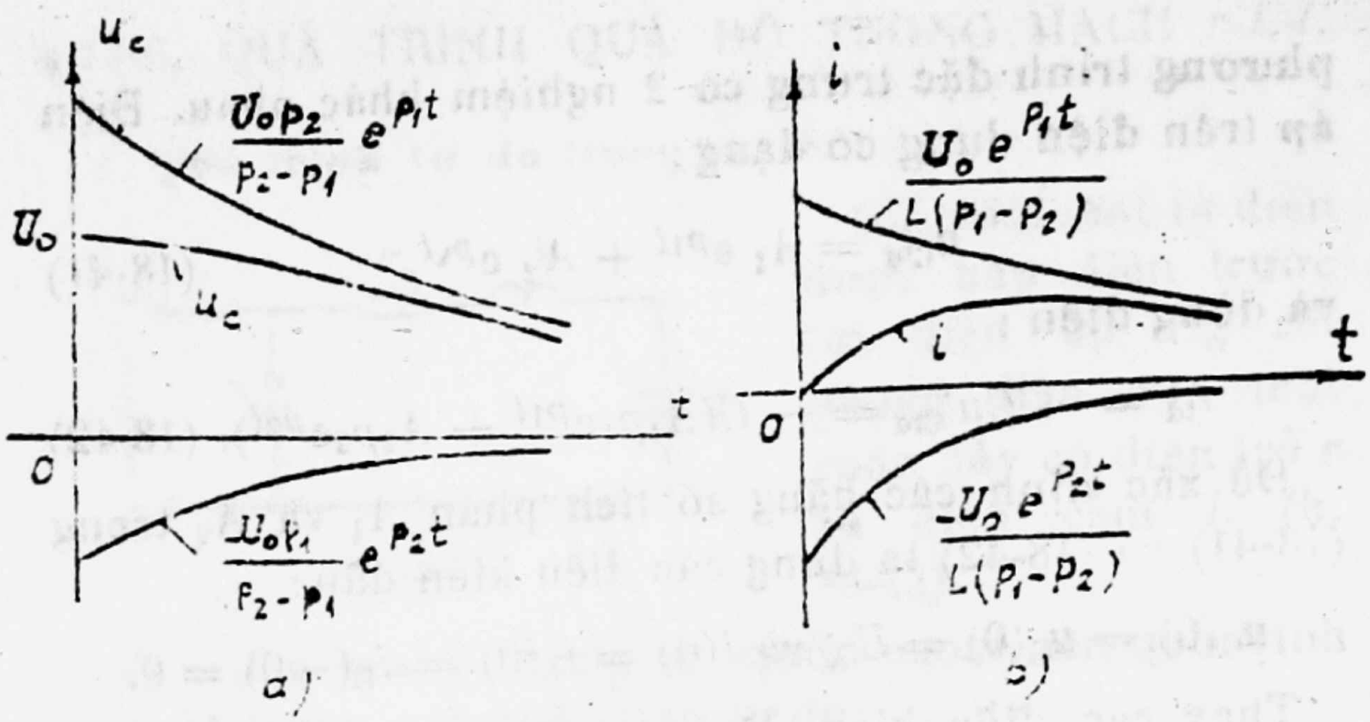
$$A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} U_o \text{ và } A_2 = -\frac{p_1}{p_2 - p_1}. \qquad (18\text{-}43)$$

Cuối cùng:

$$\left.\begin{aligned} u_C = u_{Ctd} &= \frac{U_o}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \\ \text{và} \\ i = i_{td} &= \frac{C p_1 p_2 U_o}{p_1 - p_2}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{U_o}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}44)$$

Các đường cong $u_C(t)$ và $i(t)$ trong trường hợp này có dạng vẽ trên h. 18-14 a, b.

Ta thấy điện áp trên tụ điện giảm một cách đơn điệu từ trị số ban đầu U_o đến không và dòng điện phóng điện có chiều không đổi. Vậy quá trình phóng điện có tính chất không dao động.



H. 18-14

b) *Trường hợp phóng điện dao động.*

Khi $$r < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (18\text{-}45a)$$

nghiệm (18-39) của phương trình đặc trưng sẽ là 2 số phức liên hiệp:

$$\left.\begin{aligned} &p_1 = -\alpha + j\omega_0,\ p_2 = -\alpha - j\omega_0; \\ &\text{với} \quad \alpha = \frac{r}{2L} \text{ và } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}45b)$$

Điện áp trên điện dung và dòng điện có dạng:

$$\left.\begin{aligned} &u_{Cd} = A\, e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \beta), \\ &i_{Cd} = -C\, u'_{Cd} = -(CA e^{-\alpha t}[\sin(\omega_0 t + \beta) + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \beta)] \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}46)$$

Từ các điều kiện đầu $u_C(0) = U_0$ và $i(0) = 0$, ta tính được

$$A = \frac{U_0}{\omega_0 \sqrt{LC}} \text{ và } \beta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\alpha}. \qquad (18\text{-}47)$$

Cuối cùng sau khi rút gọn ta được :

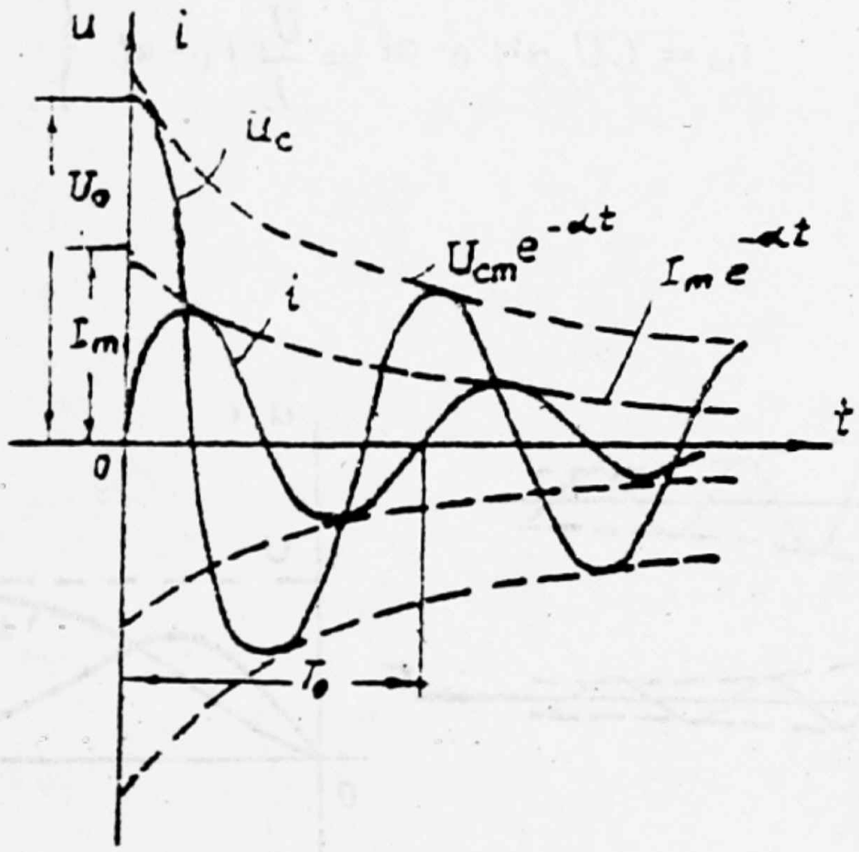
$$\left.\begin{aligned} u_{Ctd} &= U_{Cm}\, e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \beta), \\ i_{td} &= I_m\, e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}48)$$

trong đó :

$$U_{Cm} = A \quad \text{và} \quad I_m = \frac{U_0}{\omega_0 L}. \qquad (18\text{-}49)$$

Điện áp trên điện dung và dòng điện dao động tắt dần với tần số góc ω_0, và hệ số tắt α, xác định bởi các thông số của mạch.

Các đường cong $u_C(t)$ và $i(t)$ có dạng vẽ trên h. 18-15.



H. 18-15

Trong trường hợp này quá trình phóng điện của tụ điện có tính chất dao động do có sự trao đổi năng lượng giữa kho điện của tụ điện và kho từ của cuộn dây.

c) Trường hợp phóng điện không dao động tới hạn.

Nếu

$$r = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (18\text{-}50)$$

thì hai nghiệm (18-39) của phương trình đặc trưng là thực và trùng nhau.

$$p_1 = p_2 = -\frac{r}{2L} = -\alpha. \qquad (18\text{-}51)$$

và nghiệm của phương trình vi phân sẽ có dạng

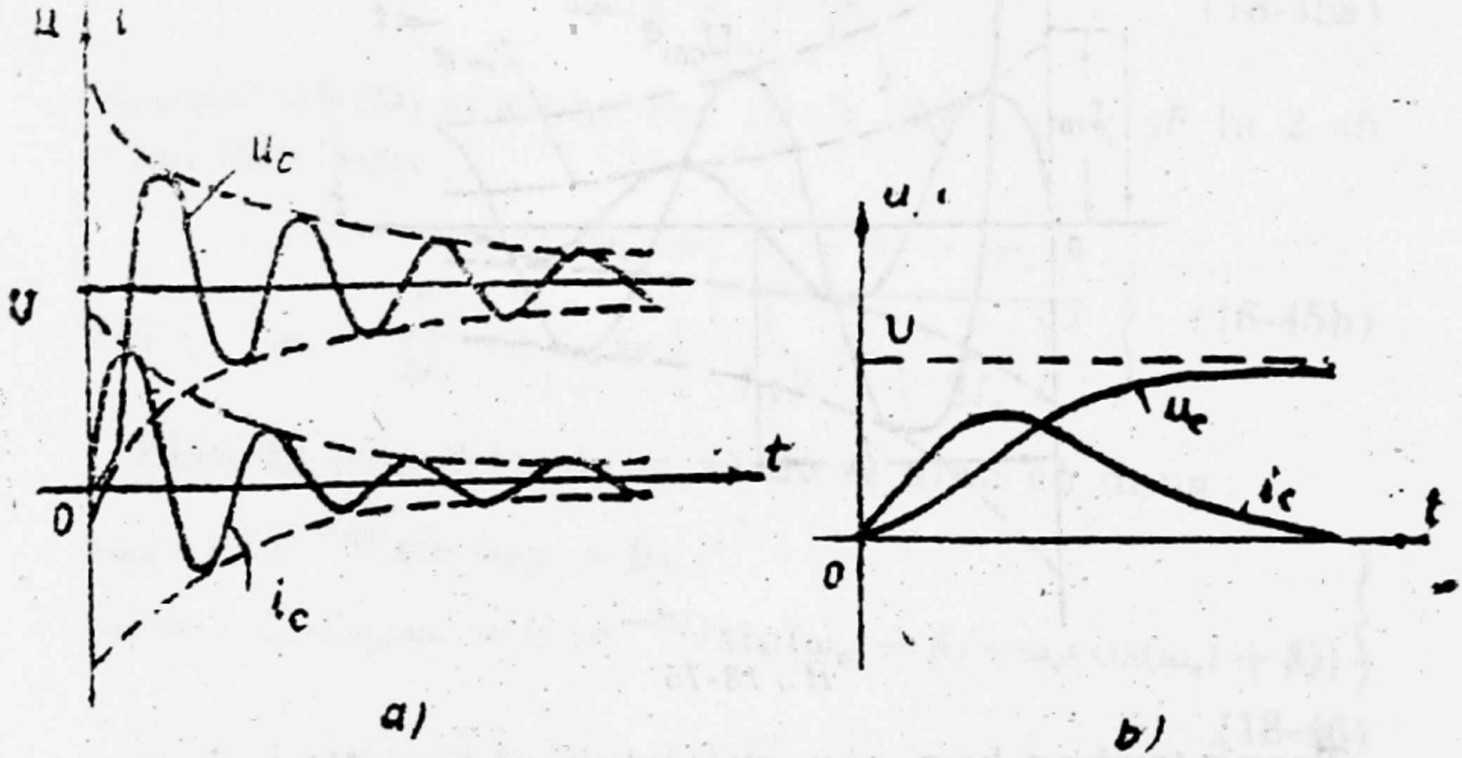
$$\left.\begin{aligned} u_{Cld} &= (A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t} \\ i_{ld} &= -Cu'_{Cld} = -C(A_2 - \alpha A_1 - \alpha A_2 t)\, e^{-\alpha t}. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}51)$$

Thay vào nghiệm đó các điều kiện đầu $u_C(0) = U_0$ và $i(0) = 0$ ta xác định được:

$$A_1 = U_0 \text{ và } A_2 = \alpha U_0.$$

Cuối cùng

$$\left.\begin{aligned} u_{Cld} &= U_0(1 + \alpha t)\, e^{-\alpha t}, \\ i_{ld} &= CU_0\alpha^2 t\, e^{-\alpha t} = \frac{U_0}{L} t\, e^{-\alpha t} \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}52)$$



H. 18-16

Các đường cong $u_{Cld}(t)$ và $i_{ld}(t)$ trong trường hợp này có dạng giống như trường hợp phóng điện không dao động (h. 18-14).

2. Đóng mạch *r-L-C* vào một điện áp không đổi.

Khi đóng mạch *r-L-C* vào một nguồn điện áp không đổi, điện áp trên điện dung sẽ biến thiên từ trị số ban đầu bằng không đến trị số xác lập bằng điện áp của nguồn U, còn dòng điện cũng biến thiên từ trị số ban đầu bằng không cuối cùng lại trở về xác lập bằng không. Trong trường hợp $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ quá trình quá độ có tính chất dao động còn trong trường hợp $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ quá trình có tính chất không dao động.

Các đường cong $u_C(t)$ và $i_C(t)$ trong trường hợp đầu vẽ trên h. 18-16a và trong trường hợp sau vẽ trên h. 18-16b.

3. Đóng mạch r-L-C vào một điện áp hình sin.

Trong trường hợp đóng mạch r-L-C vào một điện áp hình sin dòng điện xác lập và điện áp xác lập trên tụ điện biến thiên hình sin theo thời gian với tần số của nguồn. Dòng điện và điện áp tự do cũng có tính chất dao động hay không là tùy theo quan hệ giữa các thông số r, L và C. Nhưng tùy theo quan hệ giữa tần số riêng của mạch ω_0 với tần số của nguồn ω và tùy thời điểm đóng mạch, quá trình quá độ sẽ có nhiều vẻ rất khác nhau.

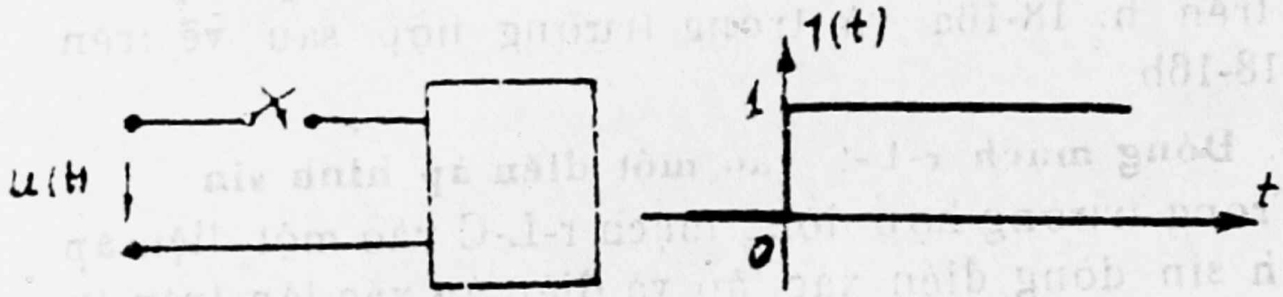
§ 18-7. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN DUHAMEL

Để tính đáp ứng (dòng điện hay điện áp) quá độ trong trường hợp đóng một mạng một cửa hay hai cửa tuyến tính không nguồn với các điều kiện đầu độc lập bằng không [$i_L(0) = 0$ và $u_c(0) = 0$] vào một nguồn kích thích biến thiên theo thời gian theo quy luật tùy ý, đặc biệt là kích thích dạng bước nhảy, dạng xung

phân Đuhamel. Có thể cắt nghĩa phương pháp này dựa trên nguyên tắc xếp chồng các đáp ứng quá độ đối với các kích thích dạng bước nhảy. Vì vậy trước hết cần xét đáp ứng đối với kích thích bước nhảy.

1. Đáp ứng quá độ đối với kích thích bước nhảy đơn vị 1 (t).

Giả thiết ở đầu vào một mạng một cửa không nguồn với các điều kiện đầu độc lập bằng không, có tác dụng một điện áp bước nhảy đơn vị $u(t) = 1(t)$ định nghĩa như sau (h. 18-17) :



H. 18-17a *H. 18-17b*

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 \text{ với } t > 0, \\ 0 \text{ với } t < 0. \end{cases} \quad (18\text{-}53)$$

Kích thích bước nhảy đơn vị $1(t)$ là một loại kích thích cơ bản. Nó dùng làm cơ sở cho phương pháp tích phân Đuhamel và cho nhiều phần lý thuyết khác.

Dễ thấy rằng đáp ứng quá độ của mạch đối với kích thích bước nhảy vọt $1(t)$ chính là đáp ứng quá độ khi đóng mạch vào một nguồn điện áp không đổi có trị số bằng $1V$ ở thời điểm $t = 0$.

Ví dụ đối với mạch r-C đóng vào một điện áp không đổi U ta đã có dòng điện và điện áp quá độ trên điện dung (mục 18-4) bằng :

$$i(t) = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}} \qquad u_C(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{rC}}\right).$$

Thay $U = 1$ vào các biểu thức trên ta sẽ được đáp ứng quá độ của mạch r-C đối với điện áp bước nhảy đơn vị:

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{r}\, e^{-\frac{t}{rC}}, \\ u_C(t) &= 1 - e^{-\frac{t}{rC}}. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}54)$$

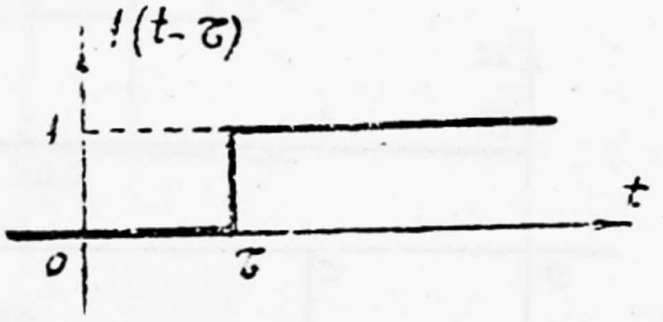
Trong trường hợp chung ta ký hiệu đáp ứng quá độ đối với kích thích bước nhảy đơn vị là $A(t)$; nó có thứ nguyên điện dẫn khi đáp ứng là dòng điện, kích thích là điện áp như (18-54a) hay không có thứ nguyên nếu đáp ứng và kích thích đều là điện áp như (18-54b). Có thể tính đáp ứng quá độ đối với kích thích bước nhảy đơn vị bằng cách tính quá trình quá độ đối với nguồn điện áp không đổi, nên ở dưới đây ta sẽ coi nó là đã biết.

2. **Đáp ứng quá độ đối với điện áp bước nhảy đơn vị $1(t-\tau)$.**

Điện áp bước nhảy đơn vị bắt đầu tác dụng từ thời điểm $t = \tau\ (\tau > 0)$, ký hiệu $1(t-\tau)$ định nghĩa như sau:

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{với } t > \tau \\ 0 & \text{với } t < \tau \end{cases} \qquad (18\text{-}55)$$

Đồ thị của hàm $1(t-\tau)$ vẽ trên h. 18-18. Điện áp $1(t-\tau)$ chính là điện áp $1(t)$ tác dụng chậm một thời gian bằng τ, nên nếu đáp ứng quá độ đối với $1(t)$ là $A(t)$ thì đáp ứng quá độ đối với $1(t-\tau)$ sẽ là $A(t-\tau)$, được bằng cách thay đổi số t trong biểu thức của $A(t)$ bằng $(t-\tau)$.



H. 18-18

Ví dụ 18-3 : Đã biết đáp ứng của mạch *r-C* đối với điện áp bước nhảy $1(t)$ là các biểu thức (18-54) ta suy ra đáp ứng của mạch đối với điện áp bước nhảy $1(t-\tau)$ là

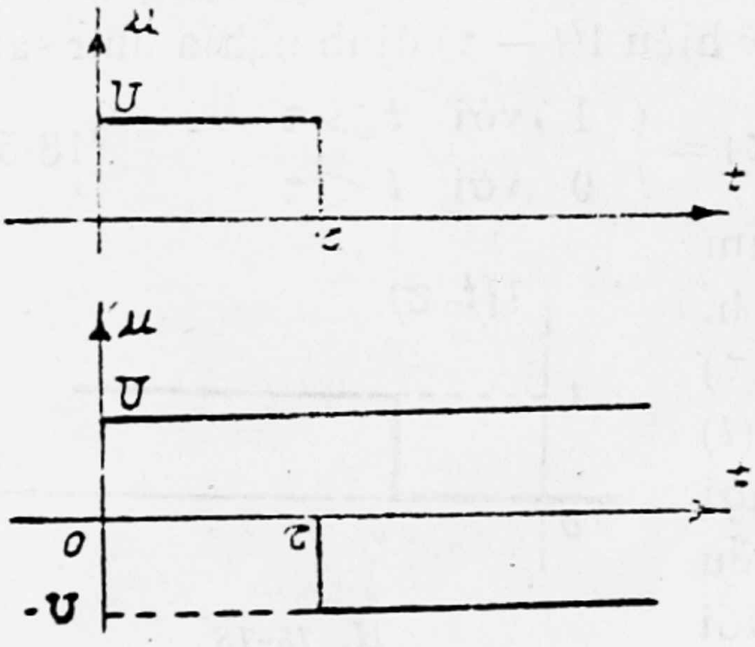
$$\left.\begin{aligned} i(t-\tau) &= \frac{1}{r} e^{-\frac{t-\tau}{rC}} \\ u_C(t-\tau) &= 1 - e^{-\frac{t-\tau}{rC}} \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}56)$$

Ví dụ 18-4 : Tính đáp ứng quá độ đối với điện áp xung chữ nhật.

Cho một điện áp xung chữ nhật như h. 18-19 :

$$u(t) = \begin{cases} U & \text{với } 0 < t < \tau. \\ 0 & \text{với } t > \tau. \end{cases} \qquad (18\text{-}57)$$

tác dụng vào một mạng hai cực.



H. 18-19

Điện áp xung chữ nhật này có thể coi là sự xếp chồng của hai điện áp bước nhảy $U.1(t)$ tác dụng từ $t=0$ và $-U.1(t-\tau)$ tác dụng từ $t=\tau$ như h. 18-19. Do đó đáp ứng quá độ trong khoảng thời gian $0<t<\tau$ sẽ là $U.A(t)$.

Còn trong khoảng thời gian $t > \tau$,đáp ứng ;bằng :

$$U.A(t) - U.A(t-\tau) = U[A(t) - A(t-\tau)].$$

Đáp ứng của mạch r-C đối với một điện áp xung chữ nhật ở $0 < t < \tau$ bằng:

$$i\,(0 < t < \tau) = \frac{U}{r}\, e^{-\frac{t}{rC}},$$

$$u_C\,(0 < t < \tau) = U\,(1 - e^{-\frac{t}{rC}}).$$

Còn ở $t > \tau$ bằng:

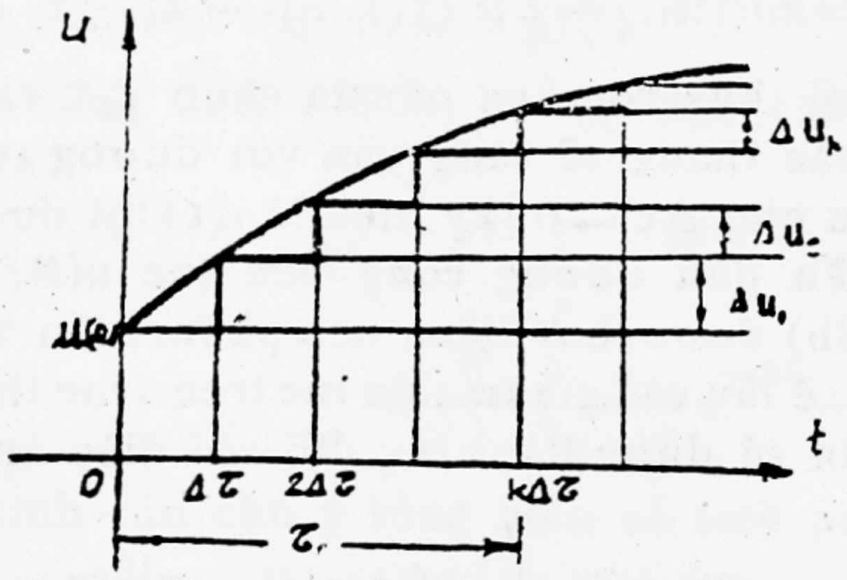
$$i(t > \tau) = \frac{U}{r}\, e^{-\frac{t}{rC}} - \frac{U}{r}\, e^{-\frac{t-\tau}{rC}} = \frac{U}{r}\, e^{-\frac{t}{rC}}\,(1 - e^{\frac{\tau}{rC}}),$$

$$u_C(t > \tau) = U(1 - e^{-\frac{t}{rC}}) - U(1 - e^{-\frac{t-\tau}{rC}}) =$$

$$= U e^{-\frac{t}{rC}}\,(e^{\frac{\tau}{rC}} - 1).$$

3. Đáp ứng quá độ đối với kích thích biến thiên theo quy luật tùy ý.

Bây giờ ta tìm đáp ứng quá độ khi điện áp của nguồn kích thích biến thiên theo thời gian theo một quy luật tùy ý, ví dụ có dạng vẽ trên h. 18-20.



H. 18-20

Đầu tiên ta xét gần đúng coi là điện áp kích thích biến thiên theo bậc thang, được bằng cách chia trục thời gian thành những khoảng $\Delta\tau$ bằng nhau, và lấy

các trị số điện áp tương ứng với đường cong $u(t)$ tại các thời điểm $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta\tau$, $t_2 = 2\Delta\tau$, ..., $t_k = k\Delta\tau$.

Điện áp bậc thang này lại coi là sự xếp chồng của điện áp bước nhảy $u(0)$ tác dụng từ $t = 0$ và các điện áp bước nhảy Δu_1, Δu_2, ..., Δu_k, ... tác dụng từ các thời điểm $t_1 = \Delta\tau$, $t_2 = 2\Delta\tau$, ..., $t_k = k\Delta\tau$, ...

Do đó đáp ứng qua độ đối với điện áp bậc thang sẽ bằng tổng các đáp ứng đối với các điện áp bước nhảy đó:

$$u(0)\,A(t) + \Delta u_1 \,.\, A(t-\Delta\tau) + \ldots + \Delta u_k \,.\, A(t-k\Delta\tau) + \ldots = \\ = u(0)\,A(t) + \sum_k \Delta u_k \,.\, A(t - k\Delta\tau). \quad (18\text{-}58, a)$$

Ký hiệu $k\Delta\tau = \tau_k$, và thay trị gần đúng của Δu_k tính theo độ dốc của đường cong $u(t)$ ở thời điểm $t = \tau_k$:

$$\Delta u_k = \frac{du}{dt}(\tau_k) \,.\, \Delta\tau = u'(\tau_k) \,.\, \Delta\tau.$$

Ta viết lại (18-58) dưới dạng:

$$\text{Đáp ứng} = u(0)\,A(t) + \sum_k u'(\tau_k) \,.\, A(t - \tau_k)\,\Delta\tau. \quad (18\text{-}58b)$$

Từ hình vẽ thấy rõ rằng nếu ta chọn $\Delta\tau$ càng nhỏ thì đường bậc thang sẽ càng gần với đường cong $u(t)$ đã cho. Nếu cho $\Delta\tau \to 0$ (ký hiệu là $d\tau$) thì đường bậc thang sẽ tiến đến đường cong liên tục $u(t)$, tổng Σ trong (18-58b) được thay bằng tích phân, biến $\tau_k = k\Delta\tau$ với $\Delta\tau \to 0$ sẽ lấy các giá trị liên tục trên trục thời gian, ký hiệu τ, ta sẽ được đáp ứng đối với điện áp $u(t)$ đã cho.

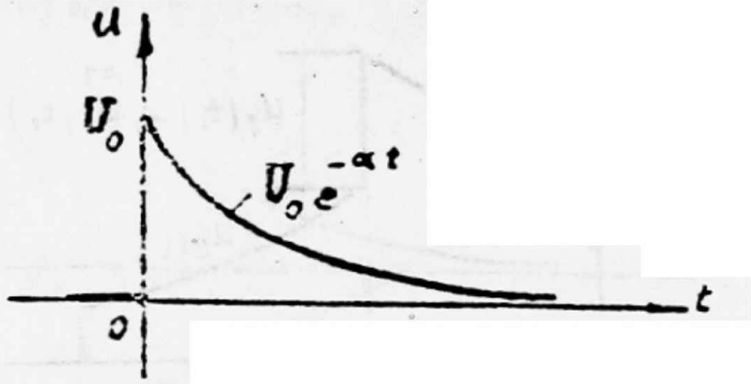
$$\text{Đáp ứng} = u(0)\,A(t) + \int_0^t u'(\tau)\,A(t-\tau)\,d\tau. \quad (18\text{-}59)$$

Công thức (18-59) được gọi là công thức tích phân Đuhamel.

Bằng cách biến đổi tích phân (18-59) ta còn có thể được 5 dạng viết khác của công thức tích phân Đuhamel

(xem A.V Nhietusil và X.V. Xtrakhov. Cơ sở kỹ thuật điện tập II. Nhà xuất bản Giáo dục Hà nội 1962).

Ví dụ 18-5. — Tính dòng điện quá độ khi đóng mạch rC vào một điện áp biến thiên theo hàm số mũ tắt dần $u(t) = U\,e^{-\alpha t}$ (h. 18-21).



H. 18-21

Giải. — Dòng điện quá độ của mạch rC đối với điện áp bước nhảy $1(t)$ là :

$$A(t) = \frac{e^{-\beta t}}{r} \quad \text{với } \beta = \frac{1}{rC}.$$

Tốc độ biến thiên của điện áp kích thích là :

$$u'(\tau) = -\alpha U_0\, e^{-\alpha t}$$

Theo công thức (18-59), dòng điện quá độ ở trong mạch là :

$$i = \frac{U_0}{r} e^{-\beta t} + \int_0^t -\alpha U_0 e^{-\alpha\tau} \frac{1}{r} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau =$$

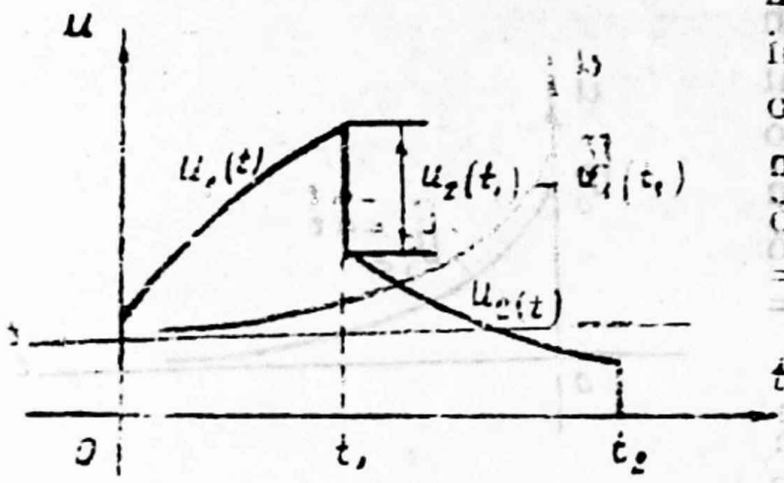
$$= \frac{U_0}{} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} \right).$$

Khi tính cần chú ý rằng biến số tích phân là τ nên thừa số $e^{-\beta t}$ có thể đưa ra ngoài dấu tích phân.

4. Đáp ứng đối với kích thích có dạng giải tích từng đoạn.

Nếu điện áp kích thích cho bởi các hàm giải tích khác nhau trong những khoảng thời gian khác nhau và có thể có những điểm gián đoạn loại một, ta có thể tính được

đáp ứng quá độ bằng cách áp dụng công thức tích phân Đuhamel (18-59) cho những khoảng thời gian khác nhau.



Hình 18-22

Ví dụ cho điện áp biến thiên theo đồ thị vẽ trên h. 18-22.

Trong khoảng thời gian $0 < t < t_1$ chỉ có điện áp $u_1(t)$ tác dụng nên đáp ứng bằng:

$$\text{Đáp ứng } (0 < t < t_1) = u_1(0)\, A(t) + \int_0^t u'_1(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau. \tag{18-60}$$

Tại $t = t_1$ điện áp nhảy từ $u_1(t_1)$ đến $u_2(t_1)$ rồi sau đó biến thiên theo quy luật khác $u_2(t)$ nên với $t_1 < t < t_2$ đáp ứng bằng:

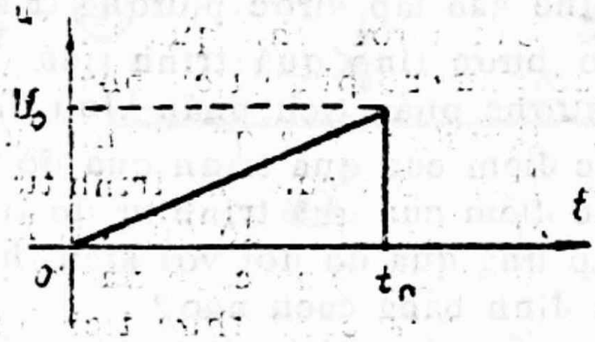
$$\text{Đáp ứng } (t_1 < t < t_2) = u_1(0)\, A(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) A(t-\tau)\, d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]\, A(t-t_1) + \int_{t_1}^{t} u'_2(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau. \tag{18-61}$$

Cần chú ý rằng, trong công thức trên tích phân thứ nhất là một tích phân xác định với các cận là 0 và t_1.

Cuối cùng nếu xét đáp ứng ở $t > t_2$, thì tích phân thứ hai chỉ lấy đến cận t_2, ngoài ra phải kể thêm đến bước nhảy điện áp ở $t = t_2$ từ $u_2(t_2)$ đến số không.

$$\text{Đáp ứng } (t > t_2) = u_1(0)\, A(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]\, A(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau + [0 - u_2(t_2)]\, A(t-t_2). \quad (18\text{-}62)$$

Ví dụ 18-6. Tính dòng điện khi đóng mạch r-C vào một điện áp xung hình tam giác (h. 18-23).



H. 18-23

Giải. Phương trình của điện áp xung hình tam giác trong khoảng $(0, t_0)$ là:

$$u = \frac{U_0}{t_0} t \text{ và } u'(\tau) = \frac{U_0}{t_0}.$$

Ứng dụng công thức tích phân Đuhamel ta tính được dòng điện qua độ trong mạch ở những khoảng thời gian khác nhau. Trong khoảng $0 < t < t_0$:

$$i\,(0 < t < t_0) = \int_0^t \frac{U_0}{r t_0} e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \frac{U_0}{r \beta t_0}(1 - e^{-\beta t}).$$

Trong khoảng $t > t_0$.

$$i\,(t > t_0) = \frac{U_0}{r t_0} \int_0^{t_0} e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau - \frac{U_0}{r} e^{-\beta(t-t_0)} =$$

$$= \frac{U_0}{r}\left[\left(\frac{1}{\beta t_0} - 1\right) e^{\beta t_0} - \frac{1}{\beta t_0}\right] e^{-\beta t}$$

CÂU HỎI

1) Vì sao có thể phân tích quá trình quá độ trong mạch tuyến tính thành quá trình tự do xếp chồng với quá trình xác lập.

2) Ý nghĩa và tính chất của đáp ứng tự do.

3. Tại sao các đáp ứng dòng và áp tự do trong các nhánh khác nhau của một mạch phức tạp đều có cùng các số mũ tắt. Xác định các số mũ tắt này bằng cách nào?

Làm thế nào lập được phương trình đặc trưng?

4. Các bước tính quá trình quá độ trong mạch phức tạp bằng phương pháp tích phân kinh điển.

5. Đặc điểm của quá trình quá độ trong mạch *rC* (và *r-L*).

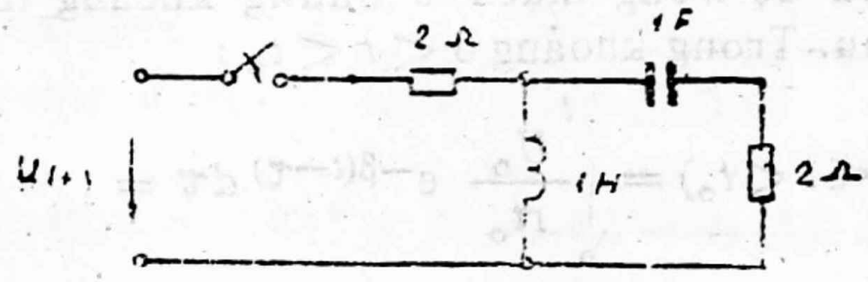
6. Đặc điểm của quá trình tự do trong mạch *r-L-C*.

7. Đáp ứng quá độ đối với kích thích bước nhảy đơn vị là gì? Xác định bằng cách nào?

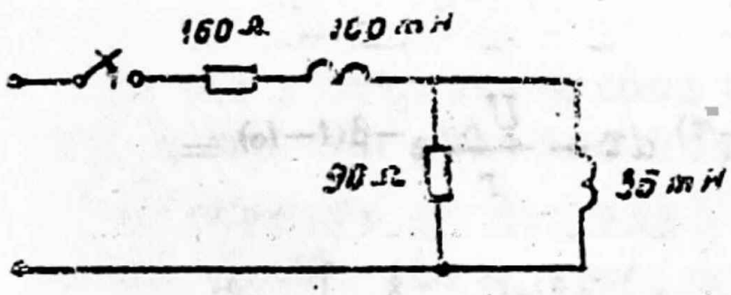
8. Ý nghĩa công thức tích phân Đuhamel. Ứng dụng công thức tích phân Đuhamel tiện lợi trong trường hợp nào?

BÀI TẬP

18-1. Viết hệ phương trình vi phân đối với các dòng điện quá độ và dòng điện tự do cho mạch h. 18-24.



H. 18-24

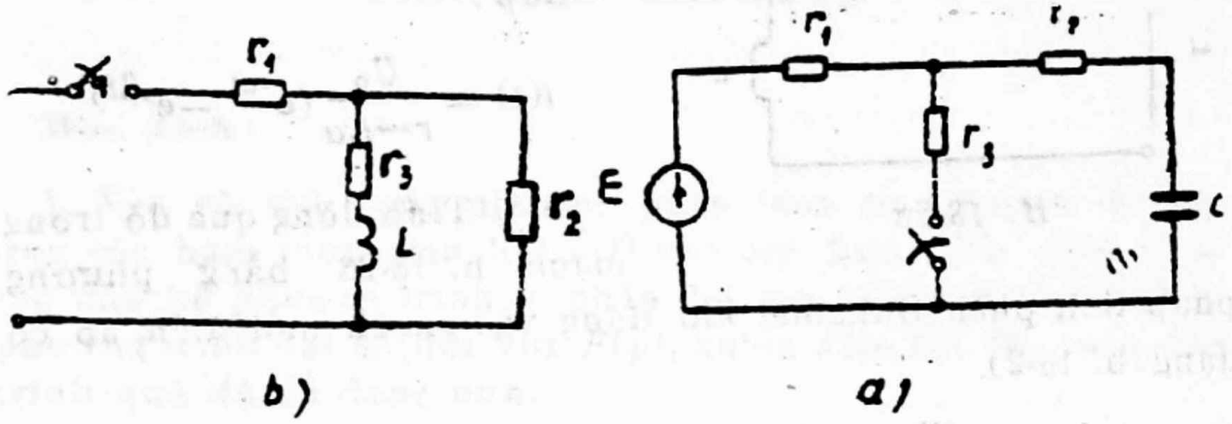


H. 18-25

Lập phương trình đặc trưng, tìm nghiệm của nó và nói tính chất của qua trình quá độ trong mạch.

18-2 Cũng hỏi như trên đối với mạch h. 18-25.

18-3. Lập phương trình đặc trưng, tìm nghiệm của nó và nói rõ đặc tính quá trình quá độ trong mạch h. 18-26a và b.



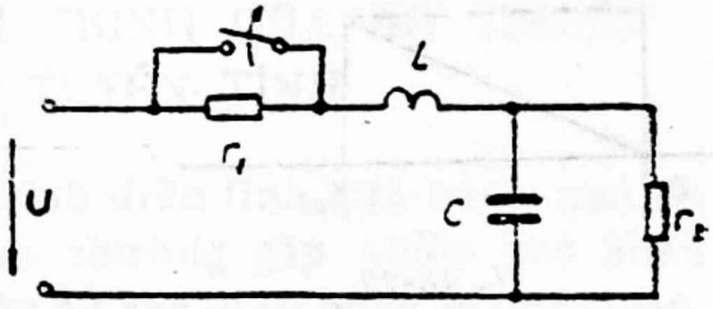
H. 18-26

18-4. Tính các dòng quá độ trong mạch h. 18-24 nếu $u(t)=100$V.

18-5. Tính các dòng điện quá độ trong mạch h. 18-25 nếu $u(t) = 48$V.

18-6. Tìm các dòng quá độ trong mạch h. 18-27 cho biết các thông số:

$r_1 = r_2 = r = 100\Omega$; $L = 1$H; $C = 100\ \mu F$; $U = 2000$ V.



H. 18-27

Đáp: Phương trình đặc trưng:

$$CL\,r_2\,p^2 + (Cr_1\,r_2 + L)\,p + (r_1 + r_2) = 0.$$

có nghiệm là:

$$p_{1,2} = -100 \pm j\,100.$$

Các điều kiện đầu:

$$i_1(o) = 20\text{ A};\ i_2(o) = 20\text{ A};\ i_3(o) = 0;$$

$$i_1'(o) = -2000;\ \text{A/s}\ i_2'(o) = 0;\ i_3'(o) = -2000.$$

Các dòng quá độ:

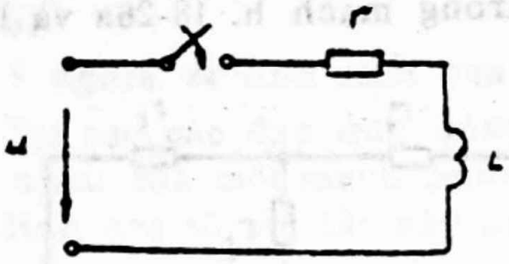
$$i_1 = 10 + 10\sqrt{2}\,e^{-100t}\sin(100t + 135°)\text{ A}.$$

$$i_2 = 10 + 10\sqrt{2}\,e^{-100t}\sin(100t + 45°)\text{ A},$$

$$i_3 = -20e^{-100t}\sin 100t\text{ A}.$$

18-7. Tính dòng quá độ trong mạch h. 18-28 bằng phương pháp tích phân Đuhamel khi đóng mạch vào một điện áp

$$u = U_0 e^{-\alpha t}$$



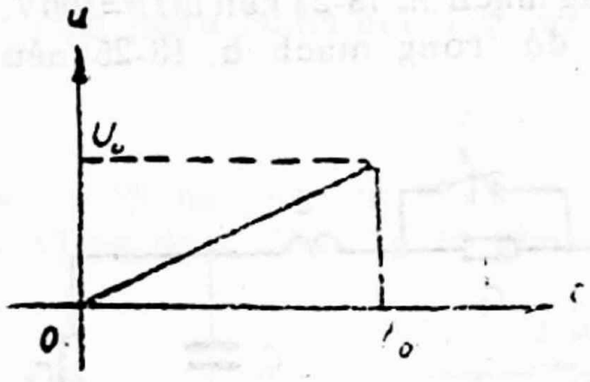
H. 18-28

Đáp:

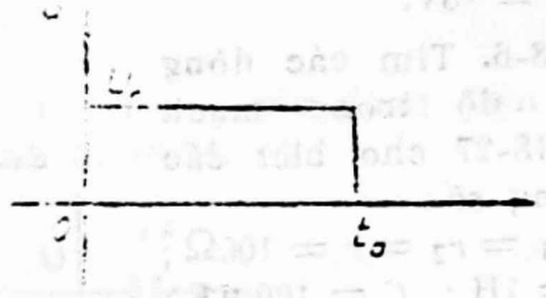
$$i(t) = \frac{U_0}{r - La}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)$$

18-8. Tính dòng quá độ trong mạch h. 18-28 bằng phương pháp tích phân Đuhamel khi đóng vào mạch một điện áp có dạng h. 18-29.

Đáp: $i(t) = \frac{U_0}{r} e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)} + \frac{U_0 L}{r^2 t_0}\left[1 - \frac{r}{L} - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right]$.



H. 18-29



H. 18-30

18-9. Tính dòng quá độ trong mạch h. 18-28 bằng phương pháp tích phân Đuhamel khi đóng mạch vào một xung điện áp như h. 18-30.

Đáp: $i = \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t}\left(e^{+\frac{r}{L}t_0} - 1\right)$.

CHƯƠNG XIX

TÍNH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLAXƠ

Mục đích:

1. Nêu rõ nội dung phương pháp toán tử Laplaxơ là làm ứng các hàm thời gian $1(t)\,f(t)$ với các hàm biến phức $F(p)$ sao cho hệ phương trình vi phân đối với $f(t)$ ứng với một hệ phương trình đại số đối với $F(p)$, khiến việc xét bài toán quá trình quá độ dễ dàng hơn.

2. Nêu cách lập và dùng sơ đồ toán tử của mạch điện để tính quá trình quá độ trong mạch. Đồng thời trình bày nội dung các bước giải bài toán quá độ bằng phương pháp toán tử.

§ 19-1. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ ĐỂ TÍNH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH TUYẾN TÍNH

Dùng phương pháp kinh điển tính quá trình quá độ trong các mạch cấp cao thường gặp nhiều khó khăn khi tìm các điều kiện đầu để xác định hằng số tích phân, vì số điều kiện đầu quá nhiều. Khó khăn sẽ gấp bội nếu nguồn kích thích biến thiên theo một quy luật phức tạp. Ngoài ra phương pháp kinh điển thường không tiện phân tích tổng quát quá trình quá độ xảy ra trong các mạch điện phức tạp.

Để tránh những nhược điểm trên có thể dùng phương pháp toán tử.

Nội dung cơ bản của phương pháp toán tử theo biến đổi Laplaxơ là làm ứng một hàm $1(t)\,f(t)$ của thời gian, mà ta cần tìm, với một đối tượng toán học F nào đó,

sao cho phép tính đạo hàm của $1(t)\ f(t)$ ứng với phép nhân F với một lượng p. Nhờ vậy, hệ phương trình vi phân đối với $f(t)$ sẽ tương ứng với một hệ phương trình đại số đối với F. Sau khi tính toán với phương trình đại số tìm ra F ta sẽ tìm được nghiệm $1(t)\ f(t)$ tương ứng.

Hàm thời gian $f(t)$ được gọi là *gốc* và F gọi là *ảnh*:

Tinh thần trên do Hêvixaid (Heaviside), một kỹ sư Anh, đề ra đầu tiên năm 1893, lúc đó ông chưa cắt nghĩa được chặt chẽ, nên bị nhiều người chỉ trích.

Mãi đến năm 1922, Carxơn (Carson), một nhà toán học Anh đã dùng phép biến đổi tích phân Laplaxơ để cắt nghĩa những quan hệ tương ứng nêu trên. Từ đó trở đi, phương pháp toán tử đã có một cơ sở toán học tương đối vững chắc, dựa trên lý thuyết về hàm biến phức, ngày càng phát triển và thịnh hành trong việc khảo sát các hệ tuyến tính.

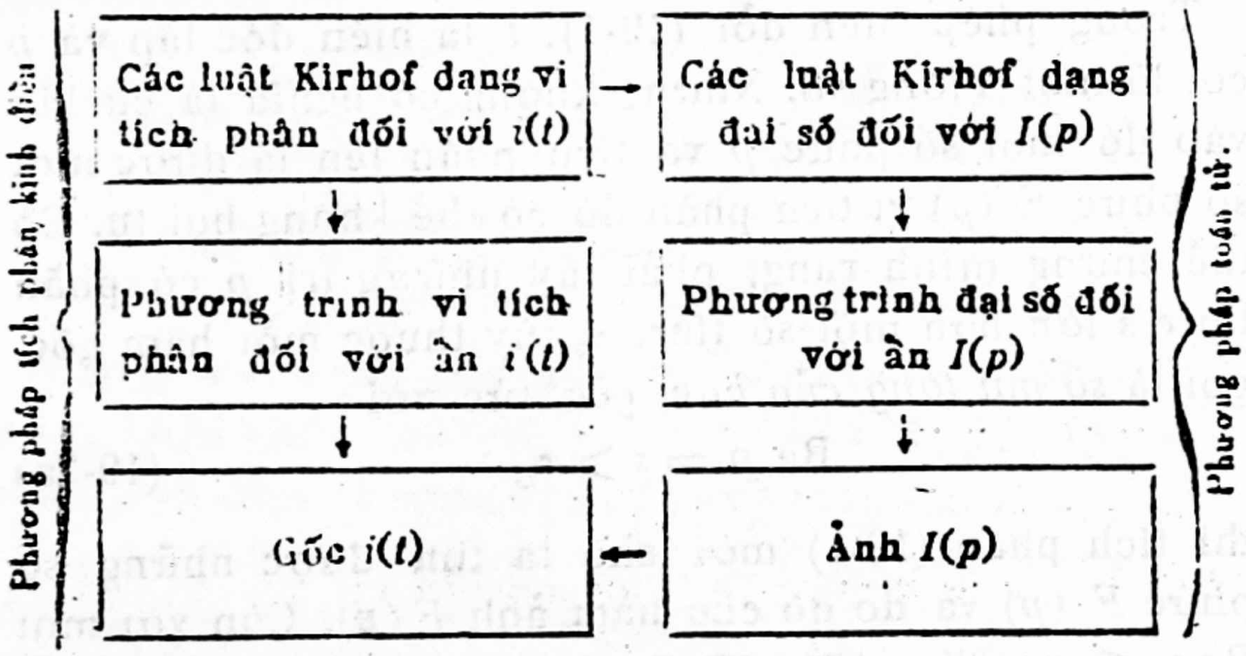
Đến 1949, Micuxinky (Jan Mikusinski), một nhà toán học Ba lan, lại cắt nghĩa tinh thần của Hêvixaid theo một cách khác hẳn, và xây dựng nên một lý thuyết toán tử đẹp đẽ và hoàn thiện. Tuy vậy cho đến nay, trong kỹ thuật phép tính toán tử theo biến đổi Laplaxơ vẫn được dùng phổ biến hơn. Đó là vì, một mặt do quen với phương pháp toán tử Laplaxơ từ mấy chục năm nay, và mặt khác, tuy phép tính toán tử Micuxinxky hoàn thiện hơn về mặt lý luận, nhưng về khối lượng tính toán thực tiễn thì trong nhiều bài toán kỹ thuật, nó không khác với phương pháp toán tử theo biến đổi Laplaxơ nhiều.

Vì vậy, ở đây cũng sẽ trình bày phương pháp toán tử theo biến đổi Laplaxơ, nhưng chú trọng nêu bật nội dung cơ bản của phương pháp là tinh thần của Hêvixaid mà không đi vào các chi tiết của phép biến đổi Laplaxơ.

Chú ý nêu những ứng dụng thực tiễn của phép tính toán tử vào lý thuyết mạch điện như cách thành lập sơ đồ toán tử, cách tìm gốc theo ảnh bằng công thức phân tích Hêvixaiđ.

Áp dụng phép tính toán tử theo biến đổi Laplaxơ vào bài toán quá độ trong mạch điện tuyến tính ta sẽ chuyển được hệ phương trình mạch theo luật Kirhof dưới dạng vi tích phân đối với ẩn dòng $i(t)$, hoặc áp $u(t)$ thành một hệ phương trình đại số đối với ẩn là các ảnh $I(p)$, hoặc $U(p)$. Giải hệ phương trình đại số tìm các ảnh đó rồi đem đối chiếu ngược ta sẽ được các gốc $i(t)$ hoặc $u(t)$ cần tìm.

Sơ đồ dưới đây minh họa so sánh cách giải bài toán quá trình quá độ bằng phương pháp tích phân kinh điển và bằng phương pháp toán tử.



§ 19-2. BIẾN ĐỔI LAPLAXƠ. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

1. Biến đổi Laplaxơ.

Carxơn đã cắt nghĩa rằng ảnh $F(p)$ của một hàm gốc $1(t)\,f(t)$ là một hàm của biến phức $p = s + j\omega$ xác

định trên mặt phẳng phức p. Ảnh đó được làm ứng với gốc $1(t)\,f(t)$ bằng phép biến đổi tích phân Laplaxơ :

$$F(p) = \int_{+0}^{\infty} 1\,(t)\,f\,(t)\,e^{-pt}\,dt. \qquad (19\text{-}1)$$

trong đó thừa số nhân $1\,(t)$ là hàm bước nhảy đơn vị khiến cho hàm gốc triệt tiêu ở mọi $t \leqslant -0$ và bằng $f\,(t)$ ở $t \geqslant +0$. Về sau, khi không sợ làm lẫn, ta có thể không viết thêm thừa số $1\,(t)$ trong hàm gốc nữa, nhưng vẫn phải hiểu rằng hàm gốc luôn có thừa số đó.

Ta ký hiệu quan hệ tương ứng giữa ảnh và gốc bằng một mũi tên 2 chiều :

$$1(t)\,f(t) \leftrightarrow F(p). \qquad (19\text{-}1b)$$

Trong phép biến đổi (19-1), t là biến độc lập và p coi là một thông số. Nhưng không có nghĩa là cứ lấp vào đó mọi số phức p và tích phân lên là được một số phức $F\,(p)$ vì tích phân đó có thể không hội tụ. Có thể chứng minh rằng, phải lấy những trị p có phần thực s lớn hơn một số thực s_0 tùy thuộc mỗi hàm gốc, gọi là *số mũ tăng của hàm gốc*, tức với :

$$\mathrm{Re}\,p = s > s_0 \qquad (19\text{-}2a)$$

thì tích phân (19-1) mới cho ta tìm được những số phức $F\,(p)$ và do đó cho hàm ảnh $F\,(p)$. Còn với mọi $\mathrm{Re}p < s_0$, tích phân (19-1) thường cho những lượng vô cùng lớn, trong khi đó ảnh $F\,(p)$ tính với $s > s_0$ căn bản xác định trên toàn mặt phẳng phức (chỉ trừ một số đếm được các điểm đặc biệt).

Khái niệm về số mũ tăng s_0 của gốc $1\,(t)\,f\,(t)$ như sau. Cho một hàm gốc, nếu trị tuyệt đối của nó $1\,(t)\,|\,f(t)\,|$ trong khi biến thiên theo t, luôn bé hơn, hay

nhiều nhất bằng một hàm mũ $Me^{s_0 t}$ với các lượng M và s_0 dương giới nội nào đó, tức :

$$1(t)\,|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}, \qquad (19\text{-}2b)$$

thì số mũ s_0 nói lên tốc độ tăng của $1(t)\,|f(t)|$. Ta gọi nó là số mũ tăng của $1(t)\,f(t)$.

Ví dụ gốc $1(t)\,Ae^{at}$ luôn bé hơn hoặc bằng một hàm mũ Me^{at} với $M > A$, vậy có số mũ tăng là $s_0 = a$.

Các gốc $1(t)$, $1(t)\sin t$, đều bé hơn hoặc bằng một hàm mũ Me^{0t} với $M > 1$; vậy có số mũ tăng là $s_0 = 0$.

Ví dụ 19-1. Để minh họa (19-1) ta thử tìm ảnh của hàm mũ $1(t)\,e^{at}$, là một hàm rất cơ bản. Thay gốc đó vào (19-1) ta có :

$$F(p) = \int_{+0}^{\infty} 1(t)\,e^{at}\,e^{-pt}\,dt = \frac{1(t)\,e^{(a-p)t}}{a-p}\Bigg|_{+0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1(t)\,e^{(a-s-j\omega)t}}{a-p}\Bigg|_{+0}^{\infty}$$

Với $p = s + j\omega$ sao cho $s < a$ tức $a - s > 0$, thì trong biểu thức cuối cùng với cận $t \to \infty$, kết quả tích phân tiến đến vô cùng lớn. Nhưng với p sao cho $s > a$, tức $a - s < 0$ thì với cận trên (∞) tích phân cho số không, và với cận dưới $(+0)$ ta được $1/(p-a)$. Vậy chú ý khái niệm về số mũ tăng ta được :

$$1(t)\,e^{at} \leftrightarrow F(p) = \frac{1}{p-a} \qquad (19\text{-}3a)$$

Từ gốc này dễ suy ra ảnh một số gốc khác. Với $a = 0$, ta có hàm gốc bước nhảy $1(t)$, và công thức trên cho ta

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \qquad (19\text{-}3b)$$

Kết hợp hàm mũ dương $+a$ và âm $-a$, ta dẫn ra ảnh các hàm hyperbol, ví dụ:

$$\frac{1(t)}{2}(e^{at}+e^{-at}) = 1(t)\,\mathrm{ch}at \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right)=\frac{p}{p^2-a^2}.$$

Với a ảo bằng $j\omega$ ta dẫn ra ảnh của $1(t)\,e^{j\omega t}$ và sau đó của các hàm lượng giác tròn $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ v.v...

Trong Pl-3 nêu một bảng tương ứng giữa một số gốc và ảnh.

Cách cắt nghĩa của Carxơn bằng tích phân Laplaxơ có ưu điểm là làm ứng hàm gốc với một hàm biến phức $F(p)$ dễ khảo sát trên mặt phẳng phức p. Nhưng do sự bó buộc của khái niệm số mũ tăng, nên cách cắt nghĩa này có một số hạn chế. Thứ nhất là dùng (19-1) không phải với mọi thông số p đều tìm được F (p), trong khi $F(p)$ lại xác định với mọi p trừ một số đếm được điểm p_k đặc biệt. Hai là điều ấy lại khiến những gốc tăng nhanh hơn mọi hàm mũ $M\exp(s_0 t)$ ví dụ gốc $\exp(t^2)$, thì dùng (19-1) tức là lý thuyết dựa trên biến đổi Laplaxơ thông thường sẽ không tìm được ảnh $F(p)$. Do đó dùng phép tính toán tử theo biến đổi Laplaxơ thông thường không giải được các bài toán có những lượng kích thích hoặc đáp ứng như vậy khiến có nguy cơ bỏ sót nghiệm. Nhưng để giải những bài toán có những biến như vậy có thể dùng lý thuyết toán tử của Micuxinxky hoặc dùng cách xây dựng phép tương ứng (19-1b) theo một cách khác (1).

Cuối cùng đối với một hàm biến phức $F(p)$ một điều quan trọng là cần biết rõ ở miền nào trên mặt phẳng phức p hàm đó là giải tích và không có điểm cực và ở miền nào có những điểm cực (là những điểm p_k ở đó

(1) N.B. Thành. TS Toán lý, 5-1967. TS Khoa học kỹ thuật, BĐHK, 5-1967.

$F(p_k)$ vô cùng lớn). Qua khái niệm số mũ tăng s_0 ta thấy rằng ở nửa mặt phẳng phải thỏa mãn điều kiện (19-2a), hàm $F(p)$ không có điểm cực. Còn ở nửa mặt phẳng trái:

$$\text{Re } p < s_0,$$

hàm $F(p)$ có thể có một số điểm cực. Ví dụ ảnh hàm mũ (19-3a) có cực ở chính điểm $p = a = s_0$; ảnh hàm bước nhảy (19-3b) có điểm cực $p = 0$.

Vậy ta có biến đổi thuận (19-1) từ gốc ra ảnh. Ngược lại lý thuyết hàm biến phức chứng minh rằng biết ảnh $F(p)$ có thể tìm được gốc $1(t)\,f(t)$ bằng phép biến đổi:

$$1(t)\,f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp. \qquad (19\text{-}4)$$

Vế phải là một tích phân đường với thông số t và biến p lấy dọc một đường thẳng song song với trục ảo đi từ $a - j\infty$ đến $a + j\infty$, trong đó a phải lớn hơn số mũ tăng s_0 của hàm $1(t)\,f(t)$, tức trục đó nằm trong miền không có cực của $F(p)$.

Công thức này gọi là tích phân *Riman — Melinh* (*Riemann — Melling*). Nó có một giá trị lý thuyết; còn trong tính toán thực tế để tính (19-4) ta thường dùng lý thuyết về thặng dư. Một cách thực dụng ta thường dùng các định lý khai triển của Hêvixaid dẫn ra trong mục 19-3, hoặc các phương pháp gần đúng, ví dụ phương pháp hình thang ở mục 20-5.

2. Ảnh của đạo hàm gốc.

Giả thiết hàm gốc $1(t)\,f(t)$ có ảnh là $F(p)$, ta hãy tìm phép tính lên ảnh $F(p)$ ứng với phép đạo hàm lên

hàm $f(t)$, tức là tìm ảnh của $1(t)\,f'(t)$. Theo công thức (19-1) ảnh của gốc $1(t)\,f'(t)$ bằng:

$$1(t)\,f'(t) \leftarrow \int_{+0}^{\infty} 1(t)\,f'(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

hoặc

$$1(t)\,f'(t) \leftarrow \int_{+0}^{\infty} 1(t)\,e^{-pt}\,df(t)$$

Áp dụng công thức tích phân phân đoạn ta tìm được:

$$1(t)\,f'(t) \leftarrow 1(t)\,e^{-pt}f(t)\Big|_{t=+0}^{\infty} + p\int_{+0}^{\infty} 1(t)\,f(t)\,e^{-pt}\,dt$$

Dễ thấy rằng số hạng thứ nhất (với $Re\,p > s_0$) khi thay $t=0$ sẽ bằng không và khi thay $t=+0$ sẽ bằng $-f(+0)$, còn số hạng thứ hai là p lần ảnh Laplaxơ của hàm $1(t)\,f(t)$. Do đó:

$$1(t)\,f'(t) \leftarrow pF(p) - f(+0). \qquad (19\text{-}5a)$$

tức là: *Ảnh của gốc $1(t)\,f'(t)$ (với $f'(t)$ là đạo hàm của $f(t)$) bằng p lần ảnh của gốc $1(t)\,f(t)$ trừ đi giá trị đầu của gốc tại thời điểm $+0$* (1).

Dùng công thức (19-5a) dễ suy ra ảnh đạo hàm cấp hai của hàm $f(t)$ bằng:

$$1(t)\,f''(t) = 1(t)\,[f'(t)] \leftarrow p[pF(p) - f(+0)] - f'(+0) =$$
$$= p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0).$$

và công thức đối với đạo hàm bậc n:

$$1(t)\,f^{(n)}(t) \leftarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(+0) -$$
$$- p^{n-2}f'(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0). \qquad (19\text{-}5b)$$

---

(1) Chú ý rằng (19-5a) là ảnh của hàm $1(t)\,f'(t)$. Còn ảnh của $[1(t)\,f(t)]'$ bằng $pF(p)$. Xem N.B. Thành; Tập san khoa học kỹ thuật. IX-1964.

Khi điều kiện đầu của gốc và các đạo hàm của nó ở $t = +0$ bằng không, ta có một phép làm tương ứng rất đơn giản:

$$1(t)\, f'(t) \leftarrow p\, F(p),$$
$$1(t)\, f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p). \qquad (19\text{-}5\ c)$$

Các công thức (19-5) cắt nghĩa rõ qua biến đổi Laplaxơ, *các phép đạo hàm lên gốc $f(t)$ ứng với các phép tính đại số lên ảnh và điều kiện đầu của chúng*. Vì tích phân Laplaxơ theo định nghĩa ở đây chỉ lấy ở miền $t \geqslant 0$ nên các phép tính trên ảnh phải kể đến điều kiện đầu ở $t = +0$. Cuối cùng, chú ý rằng, cách cắt nghĩa phép toán tử Hêvixaid bằng biến đổi Laplaxơ không phải là duy nhất.

3. **Ảnh của tích phân gốc.**

Từ công thức (19-5 a) về ảnh đạo hàm của $f(t)$ ta dễ suy ra ảnh của tích phân hàm đó. Thật vậy, đặt ảnh của tích phân là $\Phi(p)$:

$$\int_{+0}^{t} f(t)\, dt \leftarrow \Phi(p),$$

thì: $$f(t) = \frac{d}{dt}\int_{+0}^{t} f(t)dt \leftarrow F(p) = p\Phi(p) - \left[\int_{0}^{t} f(t)dt\right]_{t=0}$$

Số hạng sau cùng khi thay $t = 0$ sẽ bằng không, nên:

$$\int_{0}^{t} f(t)\, dt \leftarrow \frac{F(p)}{p}. \qquad (19\text{-}6\ a)$$

tức là, *ảnh tích phân từ 0 đến t một hàm $f(t)$ bằng thương của ảnh hàm đó với p.*

Một cách tổng quát công thức (19-6 a) cho ảnh tích phân bội n:

$$\underbrace{\int_{+0}^{t} \ldots \int_{+0}^{t}}_{\text{bội n}} f(t)\, dt^n \leftarrow \frac{F(p)}{p^n} \qquad (19\text{-}6\ b)$$

4. Tính chất tuyến tính.

Từ tính chất tuyến tính của tích phân Laplaxơ:

$$\int_{+0}^{\infty} \sum_k a_k f_k(t)\, e^{-pt}\, dt = \sum_k a_k \int_{+0}^{\infty} f_k(t)\, e^{-pt}\, dt$$

suy ra ảnh của tổng:

$$\sum_k a_k f_k(t) \leftrightarrow \sum_k a_k F_k(p): \qquad (19\text{-}7)$$

trong đó a_k là những hằng số, còn $F_k(p)$ là ảnh của hàm gốc $1(t)\, f_k(t)$.

Vậy phép biến đổi Laplaxơ có *tính chất tuyến tính*. Tính chất này quan trọng ở chỗ cho ta làm ứng một hệ phương trình vi phân tuyến tính đối với gốc với một hệ phương trình đại số đối với ảnh. Vận dụng tính chất này cũng có thể tìm được ảnh những gốc bằng cách phân tích chúng thành tổng những hàm gốc đơn giản.

Ví dụ 19-2:

Tìm ảnh các hàm $\sin\omega t$ và $\cos\omega t$.

Giải: Theo công thức Ơle có:

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right].$$

Trong đó, ta đã biết ảnh của hàm $1(t)\, e^{at}$ bằng:

$$1(t)\, e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-a}. \qquad (19\text{-}3)$$

Vậy, theo tính chất tuyến tính, có:

$$1(t)\sin\omega t \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \qquad (19\text{-}8\,a)$$

Tương tự, ta tìm được:

$$1(t)\cos\omega t = \frac{1(t)}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}. \qquad (19\text{-}8\,b)$$

5. Một số tính chất khác.

Từ tích phân Laplaxơ (19-1), dễ chứng minh được một số tính chất khác của phép biến đổi Laplaxơ. Những tính chất này miêu tả bởi các định lý và công thức sau :

a) *Định lý dịch gốc (chậm trễ).*

$$1(t-\tau)\, f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p). \qquad (19\text{-}9)$$

b) *Định lý dịch ảnh:*

$$F(p \mp \lambda) \leftrightarrow 1(t)\, e^{\pm \lambda t} f(t). \qquad (19\text{-}10)$$

c) *Định lý đồng dạng:*

$$1(t)\, f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \qquad (19\text{-}11)$$

d) *Định lý tích xếp:*

$$\int_{+0}^{t} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau \leftrightarrow F_1(p)\, F_2(p). \qquad (19\text{-}12)$$

e) *Định lý đạo hàm ảnh:*

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \leftrightarrow 1(t)\,(-t)^n f(t). \qquad (19\text{-}13)$$

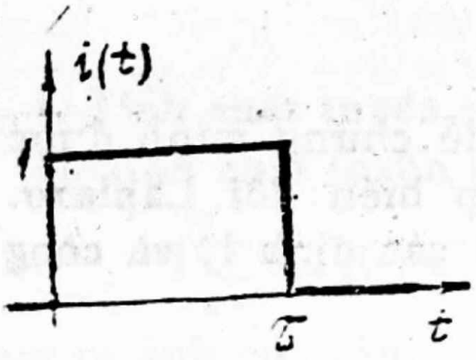
f) *Định lý tích phân ảnh:*

$$\int_{0}^{\infty} F(p)\, dp \leftrightarrow 1(t)\, \frac{f(t)}{t}. \qquad (19\text{-}14)$$

g) *Các trị giới hạn:*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t \to +0} 1(t)\, f(t) &= \lim_{p \to \infty} pF(p). \\ \lim_{t \to \infty} f(t) &= \lim_{p \to 0} pF(p). \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}15)$$

Ta thường vận dụng các công thức nêu trên để tìm ảnh theo gốc hoặc gốc theo ảnh cho một số hàm thường gặp.



H. 19-1

Ví dụ 19-3 :

Tìm ảnh của một xung dòng điện chữ nhật (h. 19-1).

Giải :

Hàm thời gian của dòng điện này là :

$$i(t) = 1(t) - 1(t-\tau).$$

Vậy, theo (19-3b) và (19-9) ảnh của nó bằng :

$$i(t) \leftarrow \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau}).$$

Ví dụ 19-4 :

Tìm ảnh của các hàm dòng điện $i_1 = 1(t)\, e^{-\beta t} \sin \omega_0 t$ và $i_2 = 1(t)\, e^{-\beta t} \cos \omega_0 t$.

Giải :

Theo (19-8) và (19-9) ta dễ tìm được :

$$i_1(t) = 1(t)\, e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \leftarrow \frac{\omega_0}{(p+\beta)^2 + \omega_0^2}.$$

$$i_2(t) = 1(t)\, e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \leftarrow \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_0^2}.$$

§ 19-3. VẤN ĐỀ TÌM GỐC—ẢNH THEO BIẾN ĐỔI LAPLAXƠ

Khi tính quá trình quá độ trong mạch điện bằng phương pháp toán tử Laplaxơ, ta cần đối chiếu các gốc — ảnh tức giải bài toán tìm ảnh theo gốc đã cho và nhất là bài toán ngược tìm gốc theo ảnh đã cho.

Muốn giải các bài toán này về nguyên tắc có thể trực tiếp dùng tích phân Laplaxơ (19-1), tích phân Riman—Melinh (19-4) và áp dụng các tính chất của biến đổi Laplaxơ đã nêu ở trên (từ công thức (19-5) đến (19-15)).

Tuy nhiên tính các tích phân đó thường khó khăn. Vì thế để giải bài toán đối chiếu gốc-ảnh, nhất là bài toán tìm gốc theo ảnh đã biết thường dùng hai phương pháp sau:

1. Phương pháp dùng bảng gốc-ảnh;

2. Phương pháp dùng các công thức phân tích Hêvixaiđ.

Ở P.I. 3 cho bảng ảnh-gốc của một số hàm đơn giản nhất thường gặp. Muốn đối chiếu các ảnh-gốc khác có thể tra trong các sổ tay toán học.

Ngoài những ảnh đơn giản cho ở bảng ấy, khi tính toán quá trình quá độ bằng phương pháp toán tử, ta thường gặp những ảnh có dạng *phân thức hữu tỉ*:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m - b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} \quad (19\text{-}16)$$

trong đó: $a_n, a_{n-1} \ldots a_0$; $b_m, b_{m-1} \ldots b_0$ là các hằng số và các phương trình $F_1(p) = 0$, $F_2(p) = 0$ thường không có nghiệm chung và trong trường hợp bài toán chỉnh bậc của tử thức thường bé hơn bậc của mẫu thức, tức $m < n$, chúng là những số nguyên, dương.

Trong trường hợp đó muốn tìm gốc của (19-16), ta phân tích nó thành tổng của những phân thức tối giản loại (19-3 a) mà gốc là những hàm mũ quen biết. Do đó tìm được gốc một cách dễ dàng. Đó là cách khai triển ảnh của Hêvixaiđ.

Dưới đây ta xét hai công thức khai triển Hêvixaiđ.

1. *Trường hợp $F_2(p) = 0$ chỉ có các nghiệm đơn.*

Giả thiết $F_2(p) = 0$ chỉ có các nghiệm đơn p_1, p_2, ... p_n, tức đa thức $F_2(p)$ có thể viết dưới dạng:

$$F_2(p) = a(p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_k) \ldots (p - p_n),$$

Trong trường hợp này có thể khai triển phân thức hữu tỉ (19-16) thành:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{A_k}{p-p_k} + \ldots \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p-p_k},$$

trong đó $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n$ là các hằng số cần tìm. Muốn tìm hằng số A_k, ta nhân hai vế phương trình trên với $p - p_k$ và cho $p \to p_k$, sẽ được:

$$A_k = \lim_{p \to p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k).$$

Vì p_k là một nghiệm đơn của $F_2(p) = 0$ nên giới hạn này có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Áp dụng qui tắc Lôpitan (L'Hôpital) ta tính được:

$$A_k = \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}. \qquad (19\text{-}17)$$

Vậy có *công thức khai triển Hêvixaid* khi $F_2(p)$ có các nghiệm đơn p_k:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} \frac{1}{p-p_k} \leftarrow\!\!\!\bullet \sum_{k=1}^{n} 1(t) \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t} \qquad (19\text{-}18)$$

trong đó đã thay gốc của những phân thức tối giản theo (19-3a):

$$\frac{1}{p-p_k} \leftarrow\!\!\!\bullet\ 1(t)\ e^{p_k t}$$

Ví dụ 19-5.

Tìm gốc của dòng điện toán tử dạng:

$$I(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

trong đó $-a \neq -b$ là những nghiệm đơn của $F_2(p) = 0$.

Giải.

Theo 19-17, (viết tắt bỏ các thừa số $1(t)$) ta có gốc :

$$i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F'_2(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F'_2(p_2)} e^{p_2 t}.$$

trong đó :

$$F_1(p) = 1 = \text{const}, \quad F'_2(p) = (p+a) + (p+b).$$

Với $p_1 = -a$ và $p_2 = -b$ thì :

$$F'_2(p_1) = b - a, \qquad F'_2(p_2) = a - b.$$

Thay kết quả đó vào biểu thức $i(t)$ ta được :

$$i(t) = \frac{1}{b-a} e^{-at} + \frac{1}{a-b} e^{-bt} = \frac{1}{a-b} (e^{-at} - e^{-bt}).$$

Chú ý có thể tra được kết quả này từ bảng ảnh-gốc (công thức 12, Pl 3).

2. *Trường hợp $F_2(p) = 0$ có nghiệm bội.*

Giả thiết phương trình $F_2(p) = 0$ ngoài k nghiệm đơn $p_1, p_2, \ldots, p_k$ đã xét ở trên còn có một nghiệm p_l bội r, tức là đa thức $F_2(p)$ có thể viết dưới dạng :

$$F_2(p) = a(p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_k)(p - p_l)^r.$$

Khi đó, có thể khai triển phân thức nữa tỉ (19-16) thành :

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{A_k}{p - p_k} + \frac{A_{l1}}{(p - p_l)} + \frac{A_{l2}}{(p - p_l)^2} + \ldots + \frac{A_{lr}}{(p - p_l)^r}. \quad (19\text{-}19)$$

Trong đó, các hằng số $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ứng với các nghiệm đơn $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vẫn xác định theo công thức (19-17) và do đó gốc của những số hạng tương ứng với chúng có dạng :

$$\frac{A_k}{p - p_k} \leftrightarrow A_k e^{p_k t} = \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t}.$$

Ta tìm A_{lr}. Nhân hai vế phương trình (19-19) với $(p-p_l)^r$ rồi cho $p \to p_l$ thì vế thứ hai sẽ bằng A_{lr}, nên:

$$A_{lr} = \left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_l)^r\right]_{p=p_l}. \qquad (19\text{-}20a)$$

Ta tìm $A_{l,r-1}$. Sau khi nhân hai vế phương trình (19-19) với $(p-p_l)^r$, ta lấy đạo hàm của chúng theo p, rồi cho $p \to p_l$ thì vế hai sẽ bằng $A_{l,r-1}$. Vậy:

$$A_{l,r-1} = \frac{d}{dp}\left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_l)^r\right]_{p=p_l} \qquad (19\text{-}20b)$$

Lập luận tương tự như trên sẽ được:

$$A_{l,r-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_l)^r\right]_{p=p_l} \qquad (19\text{-}20c)$$

$$A_{l1} = \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_l)^r\right]\right\}_{p=p_l} \qquad (19\text{-}20d)$$

Theo công thức 10 bảng ảnh-gốc các số hạng ứng với nghiệm bội bằng:

$$\frac{A_{lq}}{(p-p_l)^q} \leftrightarrow A_{lq}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}e^{p_l t}.$$

Vậy, tóm lại trong trường hợp này, gốc của phân thức hữu tỉ (19-19) có dạng:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \leftrightarrow \sum_{k=1}^{k}\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}e^{p_k t} + \left[\frac{A_{l1}}{0!} + \frac{A_{l2}t}{1!} + \frac{A_{l3}t^2}{2!} + \ldots + \frac{A_{lr}t^{r-1}}{(r-1)!}\right]e^{p_l t} \qquad (19\text{-}21)$$

trong đó các hệ số A_{l1}, A_{l2}..., A_{lr} xác định theo các công thức (19-20), và $0! = 1$

Ví dụ 19-6.

Tìm gốc của dòng điện toán tử $I(p) = \dfrac{p+2}{p(p+3)^2}$.

Giải :

Trong trường hợp này, $F_2(p) = p(p+3)^2 = 0$ có một nghiệm đơn $p_1 = 0$ và một nghiệm kép $p_2 = -3$, nên theo (19-21) có :

$$i(t) = \frac{F_1(0)}{F'_2(0)} + (A_{21} + A_{22}\, t)\, e^{-3t},$$

trong đó :

$$F_1(0) = 0 + 2 = 2,$$

$$F'_2(p) = (p+3)^2 + 2p(p+3),$$

$$F'_2(0) = 3^2 = 9,$$

$$A_{22} = \left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p+3)^2\right]_{p=-3} = \left[\frac{p+2}{p}\right]_{p=-3} = \frac{1}{3}$$

$$A_{21} = \frac{d}{dp}\left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p+3)^2\right]_{p=-3} = \frac{d}{dp}\left[\frac{p+2}{p}\right]_{p=-3} =$$

$$= -\frac{2}{p^2}\Big|_{p=-3} = -\frac{2}{9}.$$

Vậy :

$$i(t) = \frac{2}{9} + \left[-\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\, t\right] e^{-3t} = \frac{1}{9}\left[2 + (-2+3t)\, e^{-3t}\right]$$

Khi tìm gốc của (19-16) có thể gặp trường hợp $F_2(p) = 0$ có các cặp nghiệm phức liên hiệp. Khi ấy, chú ý đến tính chất các đa thức của p với hệ số thực sẽ không cần lặp lại một số tính toán không cần thiết theo các công thức (19-18) và (19-21). Thật vậy, giả thiết $(p_k, \widehat{p_k})$ là một cặp nghiệm phức liên hiệp của $F_2(p) = 0$, thì $F_1(\widehat{p_k})$ và $F'_2(\widehat{p_k})$ sẽ là liên hiệp của $F_1(p_k)$ và $F'_2(p_k)$. Cho nên :

$$\frac{F_1(\widehat{p_k})}{F'_2(\widehat{p_k})} = \frac{\widehat{F_1(p_k)}}{\widehat{F'_2(p_k)}}.$$

Do đó theo (19-18), gốc ứng với cặp nghiệm phức liên hiệp sẽ có dạng :

$$i_k(t) = \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t} + \frac{F_1(\widehat{p_k})}{F'_2(\widehat{p_k})} e^{\widehat{p_k} t} =$$

$$= 2 \operatorname{Re}\left[\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t}\right]. \qquad (19\text{-}22\,a)$$

Nếu đặt :

$$\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} = A_k = |A_k| e^{j\alpha},$$

và

$$p_k = -\beta + j\omega_0,$$

công thức trên sẽ chuyển thành

$$i_k(t) = 2 \operatorname{Re}\left[|A_k| e^{-\beta t} e^{j(\omega_0 t + \alpha)}\right] =$$

$$= 2|A_k| e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (19\text{-}22b)$$

Như vậy chỉ cần tìm $A_k = |A_k| e^{j\alpha}$ có thể dẫn ra ngay (19-22b) mà không cần phải tính các số hạng chứa p_k, do đó khối lượng tính toán bớt đi một nửa.

Ví dụ 19-7 :

Tìm gốc của dòng điện ảnh :

$$I(p) = \frac{4p + 4}{p^2 + 6p + 34}.$$

Giải: Phương trình $F_2(p)=0$ có một cặp nghiệm phức liên hiệp :

$$p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 34} = -3 \pm j5;$$

Vậy gốc sẽ có dạng (19-22) :

$$i(t) = 2 \operatorname{Re}\left[\frac{F_1(p_1)}{F'_2(p_1)} e^{p_1 t}\right].$$

trong đó :

$$F_1(p_1) = 4(-3 + j5) + 4 = -8 + j20,$$

$$F'_2(p_1) = 2(-3 + j5) + 6 = j10.$$

Vậy :

$$i(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{-8 + j\,20}{j\,10}\, e^{(-3 + j5)t}\right] =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[(2 + j\,0{,}8)\, e^{(-3 + j5)t}\right] =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[2{,}15\, e^{-3t}\, e^{j(5t + 21°50')}\right] =$$

$$= 4{,}3\, e^{-3t} \cos(5t + 21°50').$$

(Cần nhắc lại một lần nữa rằng, ở đây để gọn ta đã bỏ thừa số nhân $1(t)$).

§ 19-4. CÁC LUẬT KIRHOF DẠNG TOÁN TỬ. SƠ ĐỒ TOÁN TỬ

Trong các mục trên ta thấy rõ rằng dùng phương pháp toán tử Laplaxơ các phép tính vi tích phân của gốc sẽ được làm ứng với các phép tính nhân chia p lên ảnh. Ta áp dụng những kết quả đó vào mạch điện và nói rõ rằng nhờ phép biến đổi Laplaxơ những luật Kirhof dạng vi phân đối với các biến trạng thái sẽ chuyển thành những phương trình đại số đối với các ảnh. Trước hết ta xét các luật và sơ đồ của các phần tử cơ bản r, L, C của mạch dưới dạng toán tử.

Điện trở r.

Ta đã biết luật Ôm dạng :

$$u_r(t) = r\, i\,(t).$$

Qua phép tính toán tử, ta làm tương ứng $u_r(t) \leftrightarrow U_r(p)$ $i(t) \leftrightarrow I(p)$, nên :

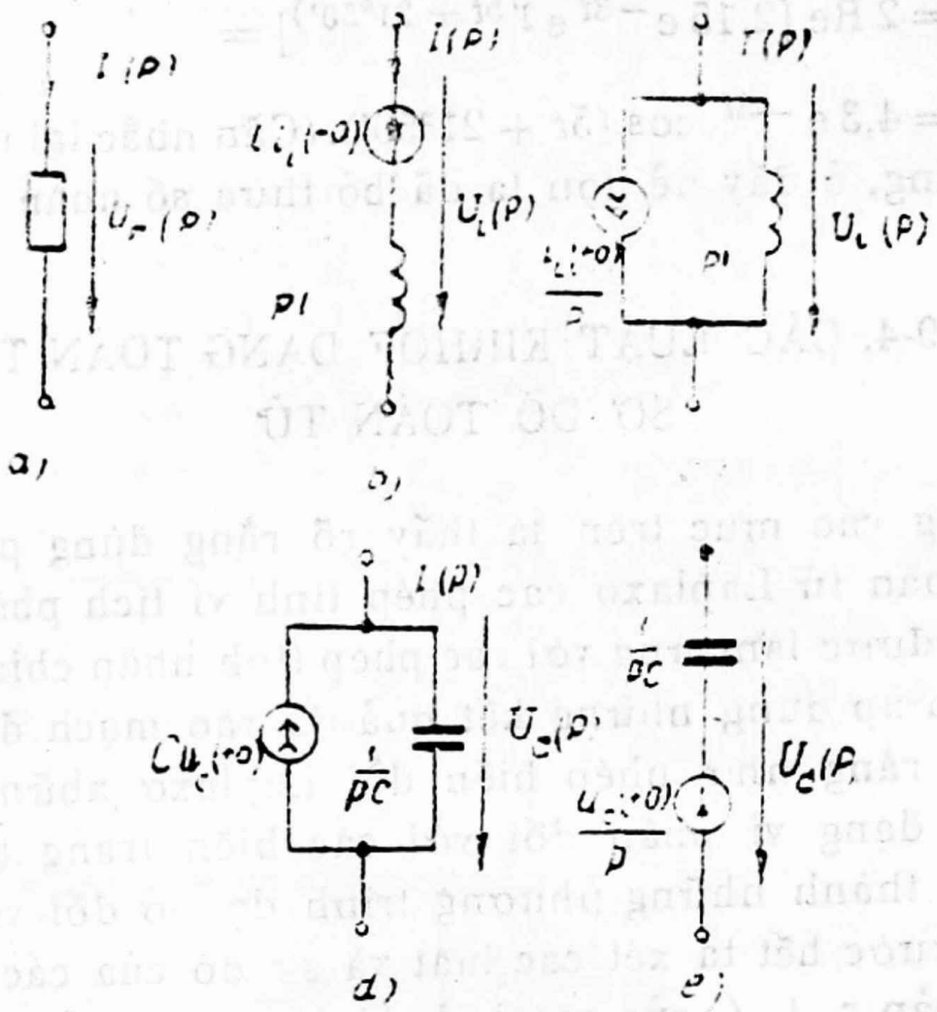
$$U_r(p) = r\, I\,(p). \qquad (19\text{-}23)$$

Vậy, chuyển sang dạng toán tử sơ đồ cho điện trở r vẫn là chính nó (h. 19-2a).

Điện cảm L.

Theo luật Lenx, với chiều dương của u_L và i như nhau ta có :

$$u_L(i) = \frac{L\,di(t)}{dt}$$



H. 19-2

Theo (19-5 a), phép tính tương ứng dưới dạng toán tử Laplaxơ là :

$$U_L(p) = p\,L\,I(p) - Li_L(+0). \qquad (19\text{-}24\ a)$$

Công thức này có dạng luật Kirhof. Nó nêu rõ khi chuyển sang dạng toán tử, *điện cảm L được thay thế bằng hai phần tử nối tiếp* (h. 19-2 b). Số hạng $pL\,I(p)$ là một điện áp ảnh, tỉ lệ với dòng điện ảnh $I(p)$. Vậy phần tử thứ nhất của sơ đồ thay thế là một tổng trở

toán tử pL. Phần tử thứ hai $Li_L(+0)$ là một nguồn áp hay một nguồn s.đ.đ. Dấu số hạng thứ nhất là dương và số hạng thứ hai là âm nên chiều dương quy ước của dòng điện, điện áp và s.đ.đ. phải trùng nhau (h. 19-2b).

Mặt khác, theo định lý Nortơn (m 4-3) sơ đồ nối tiếp tổng trở pL và nguồn áp $Li_L(+0)$ có thể thay bằng sơ đồ nối song song tổng trở pL và nguồn dòng $Li_L(+0)/pL = i_L(+0)/p$. (h. 19-2c) theo phương trình:

$$I(p) = \frac{U_L(p)}{pL} - \frac{i_L(+0)}{p}. \qquad (19\text{-}24\text{ b})$$

Điện dung C.

Ta đã biết dòng chảy qua điện dung C bằng:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}.$$

Chuyển sang dạng toán tử ta có:

$$I(p) = pCU_C(p) - Cu_C(+0) = \frac{U_C(p)}{\frac{1}{pC}} - Cu_C(+0). \qquad (19\text{-}25a)$$

Công thức này có dạng luật Kirhof 1. Nó nêu rõ khi chuyển sang dạng toán tử *điện dung C được thay thế bằng hai phần tử nối song song (h. 19-2d)*. Số hạng $pCU_C(p)$ là một dòng điện ảnh tỉ lệ với điện áp ảnh $U_C(p)$. Vậy phần tử thứ nhất là một tổng dẫn toán tử pC hay tổng trở toán tử $\frac{1}{pC}$. Phần tử thứ hai, là một nguồn dòng $Cu_C(+0)$. Căn cứ vào dấu của chúng nên chiều dương các dòng điện $I(p)$, $Cu_C(+0)$ và điện áp $U_C(p)$ phải như h. 19-2, tức chiều dương nguồn dòng $Cu_C(+0)$ ngược với của điện áp $U_C(p)$.

Cuối cùng theo định lý Têvênin (m. 4-3) sơ đồ nối song song tổng trở $\frac{1}{pC}$ và nguồn dòng $Cu_C(+0)$ có thể chuyển thành sơ đồ nối tiếp tổng trở $\frac{1}{pC}$ và nguồn áp $Cu_C(+0)\frac{1}{pC} = \frac{u_C(+0)}{p}$ tương đương với nó (h. 19-2e) theo phương trình:

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(+0)}{p}. \qquad (19\text{-}25b)$$

Qua phân tích trên ta thấy sơ đồ toán tử của những phần tử kho L và C có chứa thêm các nguồn s.đ.đ hoặc nguồn dòng điện tùy thuộc $i_L(+0)$ và $u_C(+0)$, tức giá trị dòng qua điện cảm và áp trên điện dung ở thời điểm đầu sau khi đóng mở. Khi các điều kiện đầu này bằng không thì sơ đồ toán tử của các phần tử L và C (h. 19-2), sẽ giống như sơ đồ của những phần tử này dưới dạng số phức ở chế độ xác lập hình sin nếu thay $j\omega$ bằng p.

Ta chuyển sang xét các luật Kirhof và sơ đồ toán tử của mạch điện.

Luật Kirhof 1.

Ta đã biết luật Kirhof 1 cho một nút:

$$\Sigma i(t) = 0.$$

Theo tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplaxơ, phương trình trên sẽ ứng với phương trình toán tử:

$$\Sigma I(p) = 0. \qquad (19\text{-}26)$$

Vậy, *tổng đại số các dòng điện ảnh tới một nút bằng số không.*

Luật Kirhof 2.

Ta có luật Kirhof 2 dạng vi tích phân đối với các biến trạng thái:

$$\Sigma\left(ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt\right) = \Sigma e,$$

hoặc :

$$\Sigma (u_r + u_L + u_C) = \Sigma e.$$

Theo tính chất tuyến tính và các công thức (19-23) (19-24a), (19-25b), ta chuyển được phương trình vi phân đối với các lương tức thời thành phương trình đại số dưới dạng toán tử:

$$\Sigma \left[\left(r + pL + \frac{1}{pC}\right) I(p) - Li_L(+0) + \frac{u_C(+0)}{p}\right] = \Sigma E(p),$$

hoặc chuyển các số hạng nguồn s.đ.đ. sang vế hai và thay $r + pL + 1/pC$ bằng $Z(p)$ ta có:

$$\Sigma Z(p) I(p) = \Sigma \left[E(p) + Li_L(+0) - \frac{u_C(+0)}{p}\right]. \quad (19\text{-}27)$$

Các phương trình (19-26) và (19-27) miêu tả các luật Kirhof 1 và 2 dưới dạng toán tử. Ta hãy xét ý nghĩa của chúng.

Trong trường hợp các điều kiện đầu của kho bằng không:

$$i_L(+0) = 0, \quad u_C(+0) = 0,$$

những phương trình này có dạng:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma I(p) = 0, \\ &\Sigma Z(p) I(p) = \Sigma E(p). \end{aligned}\right\}$$

Chúng hoàn toàn tương tự với các luật Kirhof dạng phức:

$$\Sigma \dot{I} = 0, \quad \Sigma Z\dot{I} = \Sigma \dot{E}.$$

trong đó

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC},$$

tương tự với

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Nói chung khi các điều kiện đầu của kho khác không; các luật Kirhof 1 và 2 dưới dạng toán tử vẫn tương tự với các luật Kirhof 1 và 2 dưới dạng phức nếu ta thêm các s.đ.đ. $Li_L(+0)$ và $u_C(+0)/p$ vào s.đ.đ. ảnh. Chúng được gọi là các *nguồn s.đ.đ. trong.*

Trên đây ta đã phân tích cho các bài toán chỉnh cũng như không chỉnh. Các s.đ.đ. toán tử trong $Li_L(+0)$ và $u_C(+0)/p$ phụ thuộc vào điều kiện đầu của kho ở thời điểm sau khi đóng mở, tức thời điểm $t = +0$. Đối với bài toán chỉnh vì $i_L(+0) = i_L(-0)$ và $u_C(+0) = u_C(-0)$ nên có thể viết các s.đ.đ. trong bằng $-Li_L(-0)$ và $u_C(-0)/p$.

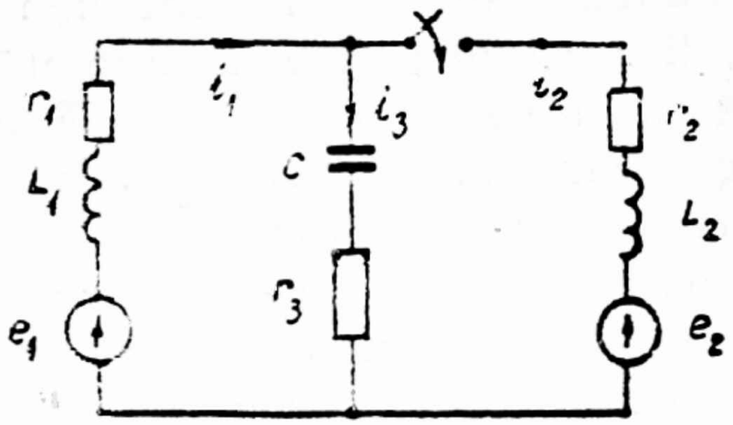
Cũng có thể chứng minh rằng *điều này đúng cả với các bài toán không chỉnh.* Ở đây trong sơ đồ toán tử ta cứ lắp vào các s.đ.đ. $Li_L(-0)$ và $u_C(-0)/p$ mà tính; các luật đóng mở không chỉnh (17-3, 4) sẽ tự động được thỏa mãn (1). Do đó đối với các bài toán quá độ nói chung, đặc biệt là đối với các bài toán quá độ không chỉnh, *ta chỉ cần tính các điều kiện đầu của kho ở thời điểm trước khi đóng mở* ($t = -0$) *là đủ mà không cần biết điều kiện đầu ở* $t = +0$.

Với các luật Kirhof dưới dạng toán tử ta dễ thành lập được sơ đồ toán tử của mạch điện. Sơ đồ toán tử tương tự với sơ đồ tính mạch điện ở chế độ xác lập hình sin bằng phương pháp số phức nếu thay r, L, C bằng r, pL, $\frac{1}{pC}$ và đưa thêm các s.đ.đ. trong $Li_L(+0)$ và $u_C(+0)/p$ vào mạch. Ví dụ sơ đồ toán tử của mạch điện h. 19-3a có dạng vẽ trên h. 19-3b. Từ các sơ đồ này *để*

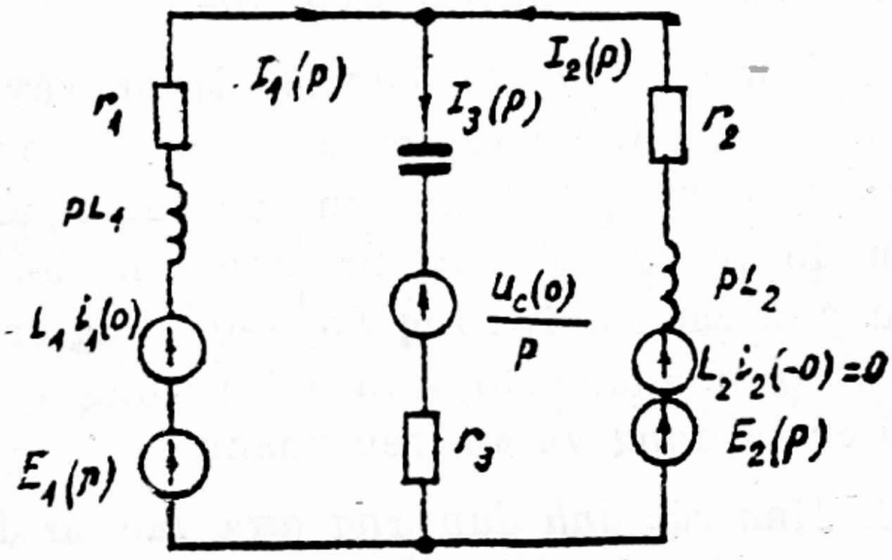
(1) Xem TSKHKT. IX-1964. N.B. Thành.

viết ngay được các phương trình theo luật Kirhof dưới dạng toán tử :

$$\begin{cases} I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) = 0, \\ (r_1 + pL_1)\, I_1(p) + \left(\dfrac{1}{pC} + r_3 \right) I_3(p) = \\ \qquad = E_1(p) - \dfrac{u_C(-0)}{p} + L_1 i_1(-0), \\ (r_2 + pL_2)\, I_2(p) + \left(r_3 + \dfrac{1}{pC} \right) I_3(p) = E_2(p) - \dfrac{u_C(-0)}{p} \end{cases}$$



a)



b)

Hình 10-2

§ 19-5. CÁC BƯỚC TÍNH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ

Mục trên đã nêu rõ các luật Kirhof và sơ đồ mạch điện dạng toán tử về hình thức tương tự với các luật Kirhof và sơ đồ mạch điện dạng số phức để tính quá trình xác lập. Như vậy có thể khẳng định rằng: Để tính các dòng và áp ảnh, có thể dùng tất cả các phương pháp và công thức tính như đã làm đối với dòng và áp phức ở chế độ xác lập hình sin. Cụ thể có thể dùng các phương pháp cơ bản: dòng điện nhánh, dòng điện vòng, điện thế nút; dùng các tính chất tuyến tính, xếp chồng và tương hỗ, dùng các phương pháp biến đổi tương đương, dùng lý thuyết về mạng hai cửa, một cửa... Đây là một trong những ưu điểm chính của phương pháp toán tử. Nó cho phép ta *bằng công cụ đại số* tính toán và phân tích chế độ quá độ của mạch dưới dạng toán tử. Sau khi tính được các dòng và áp ảnh có thể dùng bảng ảnh—gốc hoặc các định lý khai triển Hêvixaid tìm ra gốc.

Có thể chia việc *tính quá trình quá độ bằng phương pháp toán tử thành 3 bước chính*:

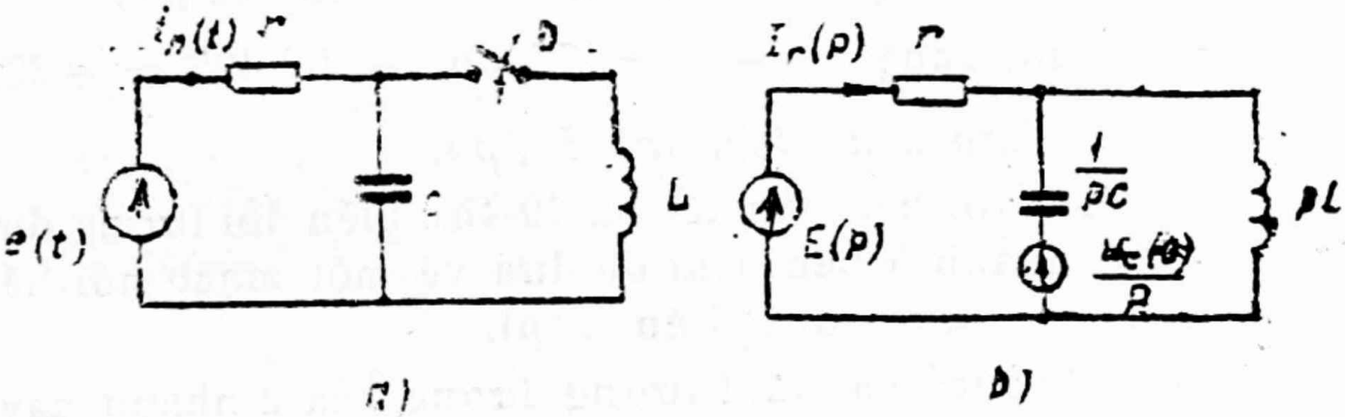
1. *Thành lập sơ đồ toán tử.* Muốn vậy cần tính chế độ trước khi đóng mở tìm ra các s.đ.đ trong $Li_L(-0)$ và $u_C(-0)/p$, đồng thời tìm ảnh của các nguồn kích thích. Sau đó vẽ sơ đồ toán tử dạng h. 19-3. Khi vẽ cần chú ý là các s.đ.đ trong $Li_L(-0)$ cùng chiều với dòng và áp trên nhánh đó, còn s.đ.đ trong $u_C(-0)/p$ ngược với chiều dòng và áp trên nhánh.

2. *Tính các ảnh đáp ứng* dựa vào sơ đồ toán tử và dùng tất cả các phương pháp giống như đối với số phức trong việc tính chế độ xác lập điều hòa.

3. *Tìm các đáp ứng quá độ* theo các ảnh đã tính được. Ta thường dùng các định lý khai triển Hêvixaid và bảng ảnh—gốc.

Ví dụ 19-8.

Ở thời điểm $t = 0$ ta đóng dao D (h. 19-4a). Hãy tính dòng điện quá độ $i_r(t)$. Cho $e = 180 \sin 314t V$, $r = 20\Omega$, $C = 30\mu F$, $L = 0{,}5H$. Biết chế độ trước khi đóng dao là xác lập.



H. 19-4

Giải.

1. *Thành lập sơ đồ toán tử.*

Sơ đồ toán tử có dạng vẽ trên h. 19-4b. Trong đó theo công thức 21 của bảng ảnh — gốc, ta có:

$$e(t) \leftrightarrow E(p) = 180. \frac{314}{p^2 + 314^2} = \frac{56{,}5 . 10^3}{p^2 + 314^2},$$

và $u_C(0) = u_C(-0)$, là điện áp trên điện dung ở trước thời điểm đóng dao cắt D. Vì chế độ trước khi đóng dao D đã là xác lập nên ta có thể tính điện áp này bằng phương pháp số phức. Trước khi đóng dao D ta có một mạch r-C nối tiếp, vậy tổng trở phức của mạch là:

$$Z = r - \frac{j}{\omega C} = 20 - \frac{j}{314 . 30 . 10^{-6}} = 20 - j106 =$$

$$= 107{,}8 \underline{/ -79° 18'}\ \Omega$$

Dòng điện phức và điện áp phức trên tụ điện bằng :

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{Z} = \frac{180}{107,8\ \underline{/ -79°18'}} = 1,67\ \underline{/ 79°18'}\ A,$$

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{I}_m \cdot \left(\frac{-j}{\omega C}\right) = 1,67\ \underline{/ 79°18'} \cdot (-j\ 106) =$$

$$= 177\ \underline{/ -10°\ 42'}\ V,$$

Điện áp tức thời trên điện dung bằng :

$$u_C(t) = 177 \sin (314\ t - 10°\ 42')\ V.$$

Cuối cùng $u_C(-0) = 177 \sin (-10°\ 42') = -32,8$ V.

2. *Tính dòng điện ảnh* $I_r(p)$.

Đối với bài toán xét (h. 19-4b), biến đổi tương đương hai nhánh ở bên phải để đưa về một mạch nối tiếp ta dễ tìm được dòng điện $I_r(p)$.

Tổng trở và s.đ.đ tương đương của 2 nhánh này là :

$$Z_{LC}(p) = \frac{pL \dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{pL}{p^2 LC + 1}$$

tính như $U_{hở}$.

$$E_{LC}(p) = \frac{\dfrac{u_C(0)}{p} pC}{\dfrac{1}{Z_{LC}(p)}} = \frac{p\,LC\,u_C(0)}{p^2 LC + 1}.$$

Vậy ảnh $I_r(p)$ bằng :

$$I_r(p) = \frac{E(p) - E_{LC}(p)}{r + Z_{LC}(p)} = \frac{(p^2 LC + 1)\,E(p) - pLC\,u_C(0)}{r(p^2 LC + 1) + pL}.$$

Thay số liệu cụ thể của bài tính vào ta được

$$I_r(p) = \frac{(p^2 15 \cdot 10^{-6} + 1)\,\dfrac{56,5 \cdot 10^3}{p^2 + 314^2} - p\,15 \cdot 10^{-6}\,(-32,8)}{20\,(p^2\,15 \cdot 10^{-6} + 1) + 0,5p}.$$

Rút gọn lại ta được:

$$I_r(p) = \frac{0,492\,p^3 + 847\,p^2 + 48,5 \cdot 10^3\,p + 56,5 \cdot 10^6}{(p^2 + 314^2)\,(0,3\,p^2 + 500\,p + 20.000)}.$$

3. *Tìm gốc* $i_r(t)$.

Dòng điện ảnh $I_r(p)$ có dạng (19-16):

$$I_r(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

trong đó dễ thấy rằng $F_2(p)$ có 4 nghiệm đơn: 2 nghiệm thực $p_1 = -1625$, $p_2 = -41,7$ và 2 nghiệm phức liên hiệp $p_3 = +j314$, $p_4 = -j314$. Vậy theo công thức khai triển (19-18) và (19-22), gốc sẽ có dạng:

$$i_r(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t}\right],$$

trong đó:

$$F_1(p_1) = 0,492\,(-1625)^3 + 847\,(-1625)^2 + \\ + 48,5 \cdot 10^3\,(-1625) + 56,5 \cdot 10^6 = 97 \cdot 10^6;$$

$$F_1(p_2) = 0,492\,(-41,7)^3 + 847\,(-41,7)^2 + \\ + 48,5 \cdot 10^3\,(-41,7) + 56,5 \cdot 10^6 = 55,9 \cdot 10^6,$$

$$F_1(p_3) = 0,492\,(j\,314)^3 + 847\,(+j\,314)^2 + \\ + 48,5 \cdot 10^3\,(j\,314) + 56,5 \cdot 10^6 = -27,5 \cdot 10^6,$$

và:

$$F_2'(p) = (p^2 + 314^2)\,(0,6\,p + 500) + \\ + 2p\,(0,3\,p^2 + 500\,p + 20.000),$$

$$F_2'(p_1) = [(-1625)^2 + 314^2]\,[(0,6\,(-1625) + 500] = \\ = -1300 \cdot 10^6,$$

$$F_2'(p_2) = [(-41,7)^2 + 314^2][0,6\,(-41,7) + 500] = 48 \cdot 10^6,$$

$$F_2'(p_3) = 2 \cdot j314\,[0,3\,(j\,314)^2 + 500 \cdot j314 + 20.000] = \\ = (-98,5 - j\,6,2)\,10^6 = -98,5 \cdot 10^6 \angle 3°30'.$$

Vậy bỏ các thừa số $1(t)$ ta được kết quả:

$$i_r(t) = \frac{97}{-1300} e^{-1625t} + \frac{55,9}{48} e^{-41,7t} +$$

$$+ 2\mathrm{Re} \frac{-27,5}{-98,5\underline{/3°30'}} e^{j314t} =$$

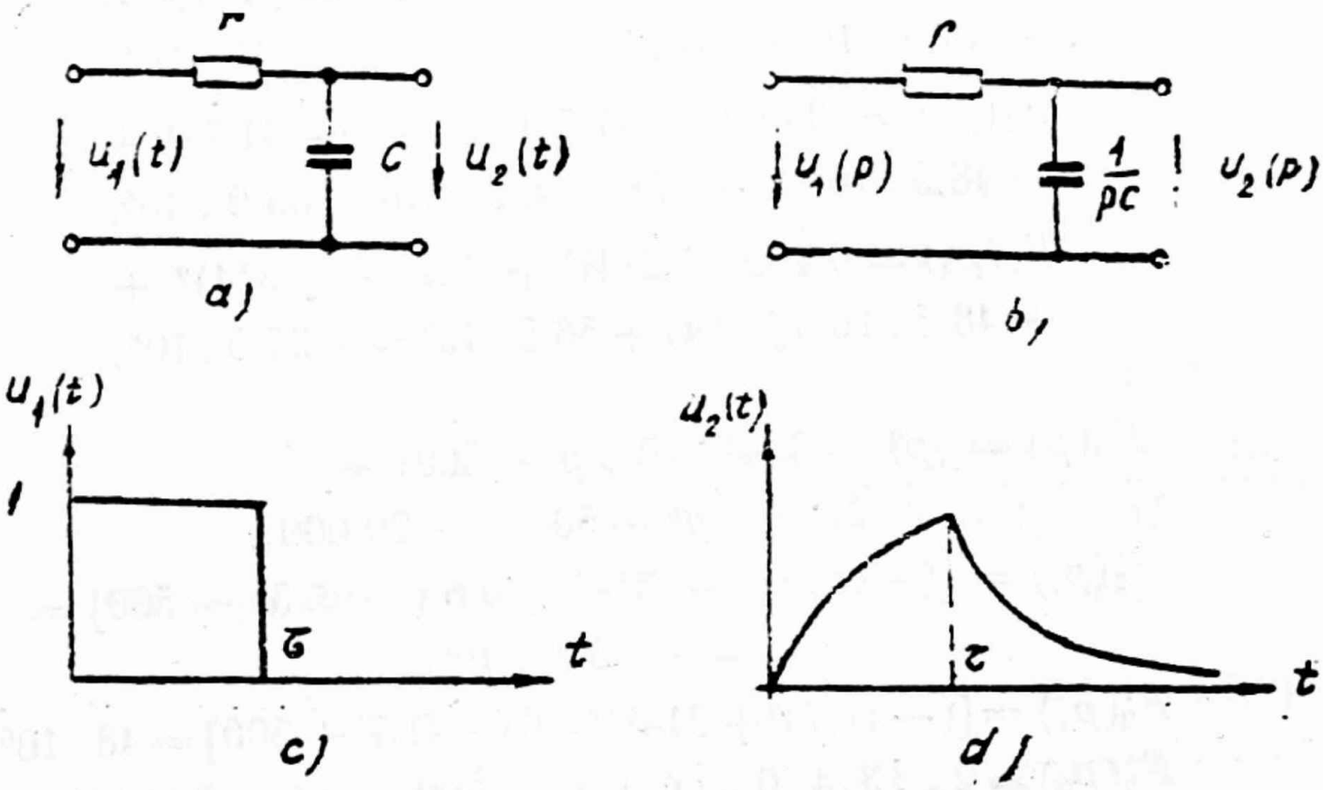
$$= -0,08e^{-1625t} + 1,16\, e^{-41,7t} + 0,55\cos(314t - 3°30') \text{ A}.$$

Ví dụ 19-9:

Cho một mạng 2 cửa tích phân h. 19-5 a. Giả thiết điện dung ban đầu không nạp điện $[u_2(-0) = 0]$. Hỏi:

a) Hàm truyền đạt điện áp toàn từ khi hở mạch đầu ra bằng bao nhiêu?

b) Dùng hàm truyền đạt tính điện áp ra khi điện áp vào là một xung chữ nhật (h. 19-5 c).



H. 19-5

Giải :

Sơ đồ toán tử của mạng 2 cửa với điều kiện đầu $u_C(-0) = 0$ vẽ trên h. 19-5 b. Từ sơ đồ này ta dễ tính được hàm truyền đạt điện áp toán tử khi đầu ra hở mạch :

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{prC + 1}$$

Theo ví dụ 19-3, ảnh điện áp vào bằng :

$$U_1(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau}).$$

Vậy ảnh điện áp ra bằng :

$$U_2(p) = K_U(p)\, U_1(p) = \frac{1 - e^{-p\tau}}{p\,(prC + 1)}.$$

Theo công thức số 11 bảng ảnh-gốc tìm được :

$$\frac{1}{p(prC + 1)} = \frac{\frac{1}{rC}}{p\left(p + \frac{1}{rC}\right)} \leftrightarrow 1(t).(1 - e^{-\frac{t}{rC}}).$$

Mặt khác, theo định lý dịch gốc (19-9) suy ra :

$$-\frac{1}{p(prC+1)} e^{-p\tau} \leftrightarrow -1(t-\tau)\,(1 - e^{-\frac{t-\tau}{rC}}) =$$

$$= -1(t-\tau)\,(1 - e^{-\frac{t}{rC}}\, e^{\frac{\tau}{rC}}).$$

Do đó điện áp ra bằng:

$$u_2(t) = 1(t)\,[1 - e^{-\frac{t}{rC}}] - 1(t-\tau)\,[1 - e^{-\frac{t}{rC}} e^{\frac{\tau}{rC}}].$$

Trong biểu thức này có nhân thêm các hàm bước nhảy đơn vị :

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \leqslant -0, \\ 1 & \text{khi } t \geqslant +0, \end{cases}$$

và

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \leqslant \tau - 0, \\ 1 & \text{khi } t \geqslant \tau + 0. \end{cases}$$

Điều này nói rõ rằng điện áp ra sẽ bằng :

a) Khi $0 \leqslant t \leqslant \tau$: $u_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{rC}}$.

b) Khi $\tau \leqslant t$: $u_2(t) = (1 - e^{-\frac{t}{rC}}) - (1 - e^{-\frac{t}{rC}} e^{\frac{\tau}{rC}}) =$

$$= e^{-\frac{t}{rC}} (e^{\frac{\tau}{rC}} - 1).$$

Đường cong $u_2(t)$ có dạng vẽ trên (h. 19-5 d).

CÂU HỎI

1. Nội dung cơ bản của việc tính quá trình quá độ trong mạch điện bằng phương pháp toán tử Laplaxơ là gì? So với phương pháp kinh điển nó có những ưu điểm gì?

2. Hãy nêu nghĩa phép tương ứng của Hêvixaid bằng biến đổi Laplaxơ. Giải thích rõ tại sao lại có sự tương ứng giữa hệ phương trình vi phân đối với gốc và hệ phương trình đại số đối với ảnh.

3. Trên thực tế, muốn tìm gốc theo ảnh thường làm thế nào? Tại sao?

4. Thành lập và nói rõ ý nghĩa của các luật Kirhof dưới dạng toán tử. Cách thành lập và ứng dụng của sơ đồ toán tử.

5. Nội dung các bước tính quá trình quá độ trong mạch điện bằng phương pháp toán tử là gì? Bước nào khó khăn nhất?

BÀI TẬP

19-1. Dùng bảng ảnh-gốc, tìm ảnh các hàm gốc sau :

1. $e_1 = 127\sqrt{2} \sin 314\,t$ V,

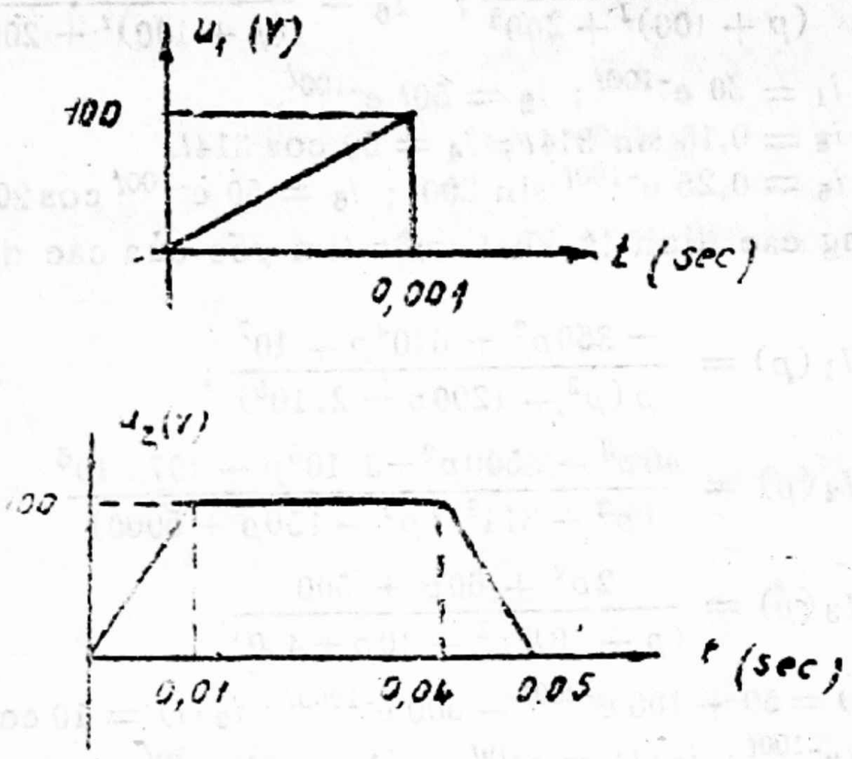
   $e_2 = 127\sqrt{2} \cos 314\,t$ V.

2. $e_3 = 127\sqrt{2} \sin (314t + 30^\circ)$ V,

   $e_4 = 127\sqrt{2} \cos (314t + 30^\circ)$ V.

3. $e_5 = 100\, e^{-1000t}$ V; $e_6 = 100\,(1 - e^{-1000t})$ V.

4. Xung điện áp hình tam giác và hình thang (19-6).



H. 19-6

Đáp : 1. $E_1(p) = \dfrac{56^{\cdot}00}{p^2 + 314^2}$; $E_2(p) = \dfrac{180p}{p^2 + 314^2}$.

2. $E_3(p) = \dfrac{90p + 49600}{p^2 + 314^2}$ $E_4(p) = \dfrac{156p - 28300}{p^2 + 314^2}$.

3. $E_5(p) = \dfrac{10^{\cdot}}{p+1000}$ $E_6(p) = \dfrac{10^5}{p(p + 1000)}$.

4. **Dùng bảng ảnh — gốc và định lý dịch gốc được**

$$U_1(p) = \frac{10^5}{p^2}\left[1 - e^{-0{,}001p}(1 + p)\right];$$

$$U_2(p) = \frac{10^4}{p^2}\left[1 - e^{-0{,}01p} - e^{-0{,}04p} + e^{-0{,}05p}\right].$$

19-2. **Dùng bảng ảnh — gốc, tìm gốc của các hàm sau :**

1. $I_1 = \dfrac{30}{p + 100}$; $I_2 = \dfrac{50}{(p + 100)^2}$.

2. $I_3 = \dfrac{50}{p^2 + 314^2}$; $I_4 = \dfrac{50p}{p^2 + 314^2}$.

3. $I_5 = \dfrac{50}{(p+100)^2+200^2}$; $I_6 = \dfrac{50(p+100)}{(p+100)^2+200^2}$.

Đáp: 1. $i_1 = 30\,e^{-100t}$; $i_2 = 50t\,e^{-100t}$.

2. $i_3 = 0{,}16 \sin 314t$; $i_4 = 50 \cos 314t$.

3. $i_5 = 0{,}25\,e^{-100t} \sin 200t$; $i_6 = 50\,e^{-100t} \cos 200t$.

19-3. Dùng các định lý khai triển tìm gốc của các dòng điện ảnh sau:

$$I_1(p) = \frac{-350p^2 + 6\,10^4 p + 10^7}{p(p^2 + 1200p + 2.10^5)};$$

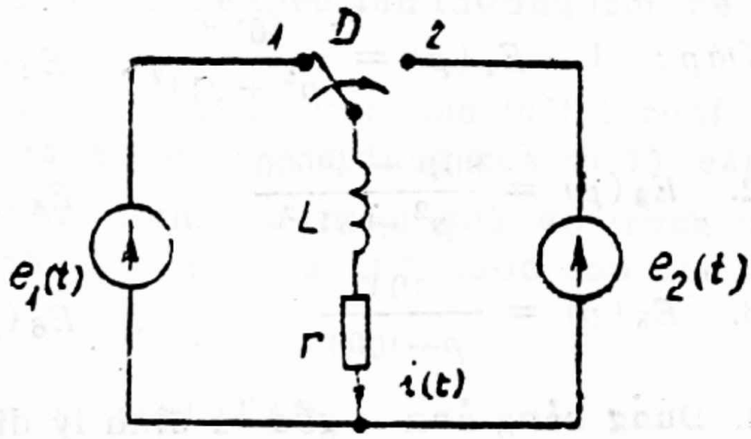
$$I_2(p) = \frac{40p^3 + 3500p^2 + 3.10^6 p + 197.10^6}{(p^3 + 314^2)(p^2 + 150p + 5000)};$$

$$I_3(p) = \frac{2p^2 + 60p + 500}{(p+10)(p^2 + 40p + 400)}.$$

Đáp: $i_1(t) = 50 + 100\,e^{-200t} - 500\,e^{-1000t}$; $i_2(t) = 10 \cos 314t + 10\,e^{-50t} + 20\,e^{-100t}$; $i_3(t) = e^{-10t} + (1 - 10t)\,e^{-20t}$.

19-4. Tính dòng quá độ $i(t)$ trong mạch h. 19-7 sau khi chuyển dao D từ 1 sang 2. Biết chế độ trước khi chuyển dao là xác lập và dao chuyển ở thời điểm $t = 0$.

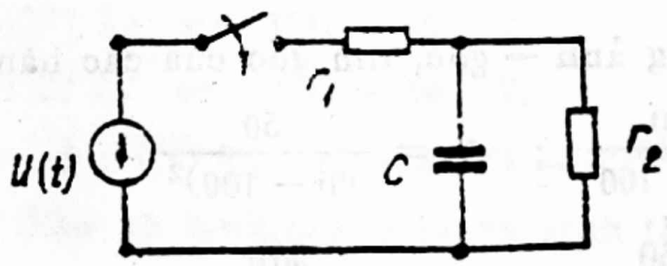
Cho $L = 0{,}5$ H; $r = 100\,\Omega$; $e_1(t) = 220\sqrt{2} \sin 314\,t$ V; $e_2(t) = 200\,e^{-100t}$.



H. 19-7

Đáp: $i(t) = 4\,e^{-100t} - 2{,}6\,e^{-200t}$ A.

19-5. Tính dòng quá độ qua điện trở r_2 h. 19-8.



H. 19-8

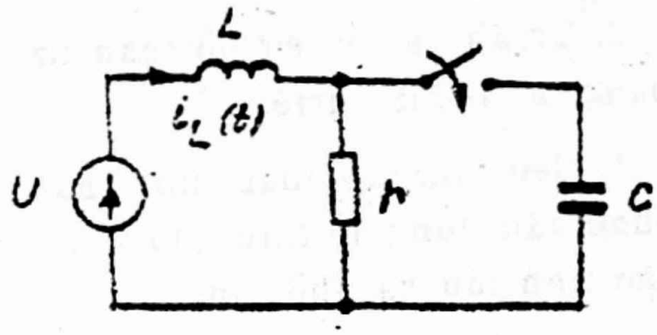
Cho $r_1 = 2k\Omega$; $r_2 = 3k\Omega$; $C = 10\mu F$, $u(t) = 200(1 - e^{-100t})kV$.

Đáp : $i_2(t) = 40 + 200\,e^{-100t} - 240\,e^{-88,3t}$ A.

19-6. Tính dòng quá độ $i_L(t)$ sau khi đóng dao (h. 19-9). Biết : $r = 40\,\Omega$, $L = 0,5$ H, $C = 50\,\mu F$, $U = 400$ V (một chiều).

Chế độ trước khi đóng dao đã là xác lập.

Đáp : $i_L(t) = 10 + 2,67\,e^{-100t} - 2,67\,e^{-400t}$.



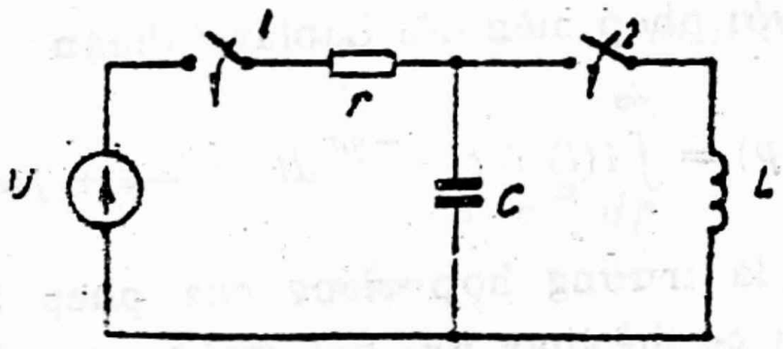
H. 19-9

19-7. Cho và hỏi giống như ở bài tập trước, nhưng nguồn hình sin $u(t) = 380\sqrt{2}$ sin $314t$ V. Đóng ở thời điểm $t = 0$.

Đáp : $i_L(t) = 3,74$ sin $(314t - 78,6^0) - 0,15\,e^{-100t} + 0,63\,e^{-400t}$.

19-8. Cho mạch h. 19-10. Dao 2 đóng sau dao 1 là 0,01 s. Cho $U = 100$V (một chiều); $r = 1000\Omega$; $C = 20\,\mu F$; $L = 1$ H. Tính dòng qua điện trở r.

Đáp : $i_r(t) = 0,1 + 0,044\,e^{-25t}$ sin $(222t - 66^0)$ A.



H. 19-10

XÉT QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ BẰNG BIẾN ĐỔI FURIÊ (FOURIER)

Mục đích.

1. Trình bày khái niệm về các phép biến đổi Furiê, ảnh Furiê, phổ tần tín hiệu, đặc tính tần của mạch.

2. Trình bày về sơ đồ toán tử và cách xét quá trình quá độ bằng biến đổi Furiê.

3. Nêu phương pháp hình thang là một trong những phương pháp gần đúng để tính quá trình quá độ theo các đường cong đặc tính tần và phổ tần.

§20-1. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI FURIÊ

1. Biến đổi Furiê thuận và ngược.

a) Trong phép tính toan tử ta làm ứng một hàm gốc $1(t)\,f(t)$ triệt tiêu ở mọi $t<0$ và khả tích tuyệt đối trong khoảng $[0, \infty]$ với một ảnh $F(j\omega)$ là một hàm giá trị phức của biến ảo $j\omega$ bằng phép biến đổi Furiê thuận:

$$F(j\omega) = \int_{0-}^{\infty} 1(t)\, f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad (20\text{-}1)$$

So sánh với phép biến đổi Laplaxơ thuận:

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} 1(t)\, f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad p = s + j\omega.$$

ta thấy đó là trường hợp riêng của phép biến đổi Laplaxơ khi có thể thay $p = j\omega$, tức cho $s = 0$.

Bằng phép biến đổi Laplaxơ ta làm ứng một gốc $1(t)\,f(t)$ với một ảnh $F(p)$ xác định và giải tích trên mặt phẳng $p = s + j\omega$ trừ một số điểm cực ở đó $F(p) = \infty$.

Bằng phép biến đổi Furiê gốc đó được làm ứng với một ảnh $F(j\omega)$ xác định và giải tích trên trục ảo $j\omega$, trừ một số điểm cực có $F(j\omega) = \infty$.

Coi $F(j\omega)$ là ảnh Laplaxơ trên trục ảo, thì theo (19-2a ảnh đó sẽ không có cực trên trục $j\omega$ nếu gốc có số mũ tăng âm $s_o < 0$, tức gốc có độ lớn tắt dần theo thời gian vì $1(t)\,|f(t)| < M\exp(-at)$, $|s_{oi}| > a > 0$.

Chú ý rằng tích phân $\int_0^\infty M\exp(-at)\,dt$ giới nội, suy ra $\int_0^\infty |1(t)|\,dt$ giới nội. Vậy trong trường hợp này gốc $1(t)\,f(t)$ *khả tích tuyệt đối.*

Ngược lại nếu gốc không thỏa mãn điều kiện khả tích ấy, ảnh Furiê có thể có cực trên trục $j\omega$, ví dụ trường hợp gốc $1(t)$, $1(t)\sin t$, $1(t)\exp(jat)$, $1(t)\,t$ v.v...

b) Bằng phép *biến đổi Furiê ngược*, còn gọi là *tích phân Furiê* ta làm ứng một ảnh $F(j\omega)$ với một gốc $1(t)\,f(t)$ triệt tiêu ở mọi $t < 0$:

$$1(t)\,f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,e^{jt\omega}\,d\omega. \qquad (20\text{-}2)$$

Đó là trường hợp riêng của tích phân Riman—Melinh dưới đây khi có thể thay $p = j\omega$, $a = 0$:

$$1(t)\,f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)\,e^{tp}\,dp.$$

Ta sẽ ký hiệu sự tương ứng một — một giữa gốc và ảnh Furiê như sau:

$$1(t)\,f(t) \leftrightarrow F(j\omega). \qquad (20\text{-}3)$$

Vậy nói chung có thể tìm được ảnh Furiê $F(j\omega)$ từ ảnh Laplaxơ $F(p)$ bằng cách thay p bằng $j\omega$, tức:

$$F(j\omega) = F(p) \mid_{p=j\omega}. \qquad (20\text{-}4)$$

Ví dụ hàm bước nhảy đơn vị $1(t)$ có ảnh theo Laplaxơ là $F(p) = 1/p$, thì cũng có ảnh Furiê $F(j\omega) = 1/j\omega$, tức:

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}.$$

Cũng vậy:

$$1(t)e^{at} \leftrightarrow \left.\frac{1}{p-a}\right|_{p=j\omega} = \frac{1}{j\omega - a},$$

$$1(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \left.\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}\right|_{p=j\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

2. **Phổ tần của gốc** $1(t)\,f(t)$. Xét một gốc $1(t)\,f(t)$ có ảnh Furiê. Ta hãy so sánh tích phân Furiê:

$$1(t)\,f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(j\omega)d\omega}{\pi}e^{j\omega t}, \qquad (20\text{-}5)$$

với chuỗi Furiê (6-10) của hàm chu kỳ:

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\omega_1 t} \qquad (20\text{-}6)$$

Ta thấy tích phân (20-5) nêu rõ hàm gốc $1(t)\,f(t)$ được phân tích thành một tổng vô hạn những hàm điều hòa *có tần số lấy mọi giá trị liên tục từ* $-\infty$ *đến* ∞, *với biên độ vô cùng nhỏ*:

$$dA(j\omega) = \frac{1}{\pi}F(j\omega)\,d\omega.$$

Từ đó có:

$$F(j\omega) = \pi\frac{dA(j\omega)}{d\omega}. \qquad (20\text{-}7)$$

Vậy $F(j\omega)$ coi là biên độ phức của thành phần điều hòa tần số ω chia cho $d\omega/\pi$, tức có thể coi là nó biểu diễn phổ tần $dA(j\omega)$ của gốc $1(t)\,f(t)$ với một tỉ lệ xích khác.

Theo (20-7) ta gọi $F(j\omega)$ là *mật độ phổ tần của* $1(t)f(t)$ hoặc gọi tắt là *phổ tần của gốc* đó.

Là một hàm giá trị phức của biến $j\omega$, có thể viết phổ tần dưới dạng:

$$F(j\omega) = F(\omega)\, e^{j\psi(\omega)}, \qquad (20\text{-}8)$$

trong đó $F(\omega)$ gọi là *phổ biên độ*, $\psi(\omega)$ là *phổ pha của gốc*.

Cũng có thể viết thành 2 phần thực, ảo:

$$Fj(\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega), \qquad (20\text{-}9)$$

trong đó $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ gọi là *phổ tần thực và ảo của gốc*.

Vậy tóm lại một gốc $1(t)\,f(t)$ được làm ứng với một phổ tần phức $F(j\omega)$, hoặc một cặp phổ tần biên và pha $F(\omega)$, $\psi(\omega)$ hoặc một cặp phổ tần thực và ảo $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$. *Chúng đặc trưng đầy đủ gốc* $1(t)\,f(t)$. Chúng nói chung là những hàm liên tục của tần số, vậy là những *phổ tần liên tục hoặc phổ đặc*, khác với phổ vạch của những hàm chu kỳ.

Dưới đây nêu những ví dụ về phổ tần của một số gốc thường gặp: $1(t)$, $1(t)\exp(-at)$, $1(t)\sin\omega_0 t$.

Qua đó sẽ nhận xét thấy: *phổ tần biên* $F(\omega)$ *và phổ tần thực* $F_1(\omega)$ *là những hàm chẵn*:

$$F(\omega) = F(-\omega), \quad F_1(\omega) = F_1(-\omega). \qquad (20\text{-}10)$$

Còn *phổ tần pha và phổ tần ảo là những hàm lẻ*:

$$\psi(\omega) = -\psi(-\omega), \quad F_2(\omega) = -F_2(-\omega). \qquad (20\text{-}11)$$

Điều này sẽ được chứng minh ở công thức (20-22).

Ví dụ 20-1: Một hàm mũ tắt dần $1(t)\,f(t) = 1(t)\,e^{-at}$,

$$F(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}.$$

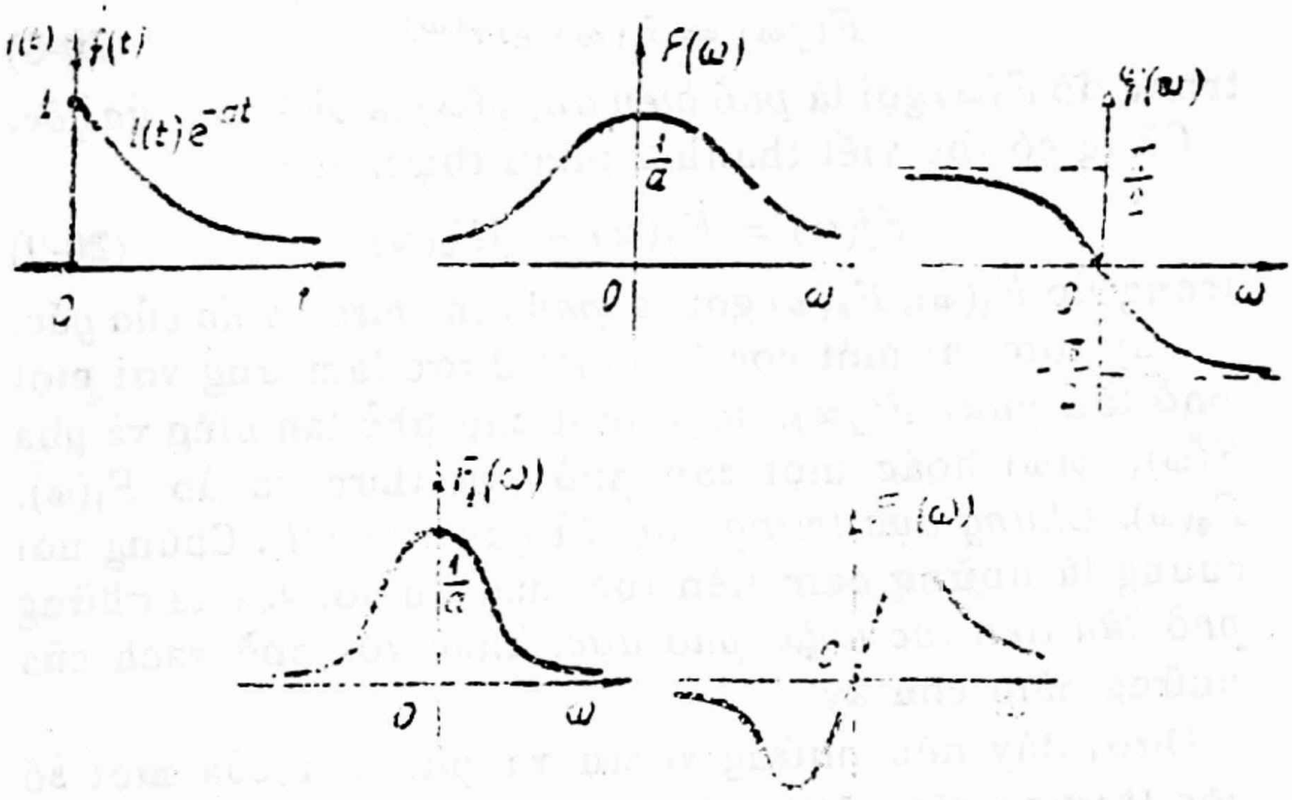
Từ đây dễ tìm được phổ biên độ và phổ pha

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \psi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a}.$$

Cũng vậy, phổ tần thực và phổ tần ảo bằng :

$$F_1(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}, \text{ và } F_2(\omega) = \frac{-\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

H. 20-1 vẽ hàm thời gian và các phổ tần đó.



H. 20-1

Ví dụ 20-2 : Hàm bước nhảy đơn vị 1(t) có phổ tần :

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

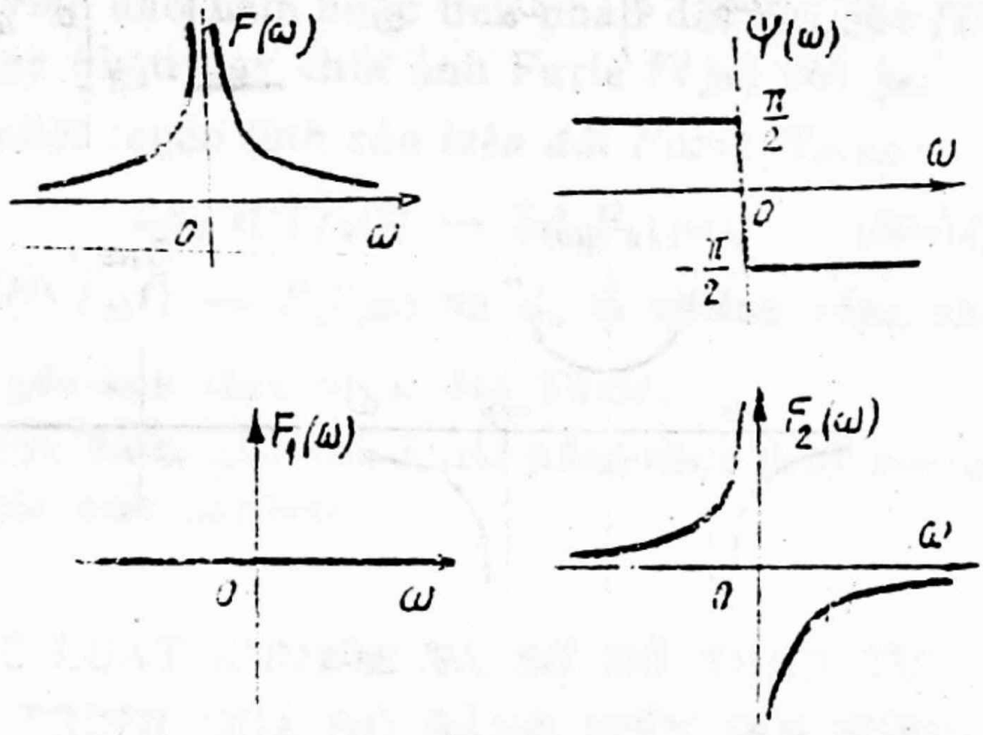
Do đó có :

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega}\ ;\ \psi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{với } \omega > 0. \\ \pi/2 & \text{với } \omega < 0. \end{cases}$$

và $$F_1(\omega) = 0\ ;\ F_2(\omega) = -1/\omega.$$

H. 20-2 vẽ các phổ tần của hàm này.

Phổ tần của hàm bước nhảy đơn vị có một điểm cực tại $\omega = 0$.



H. 20-2

Ví dụ 20-3 : Hàm $1(t) \sin \omega_0 t$ có phổ tần $F(j\omega) = \dfrac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

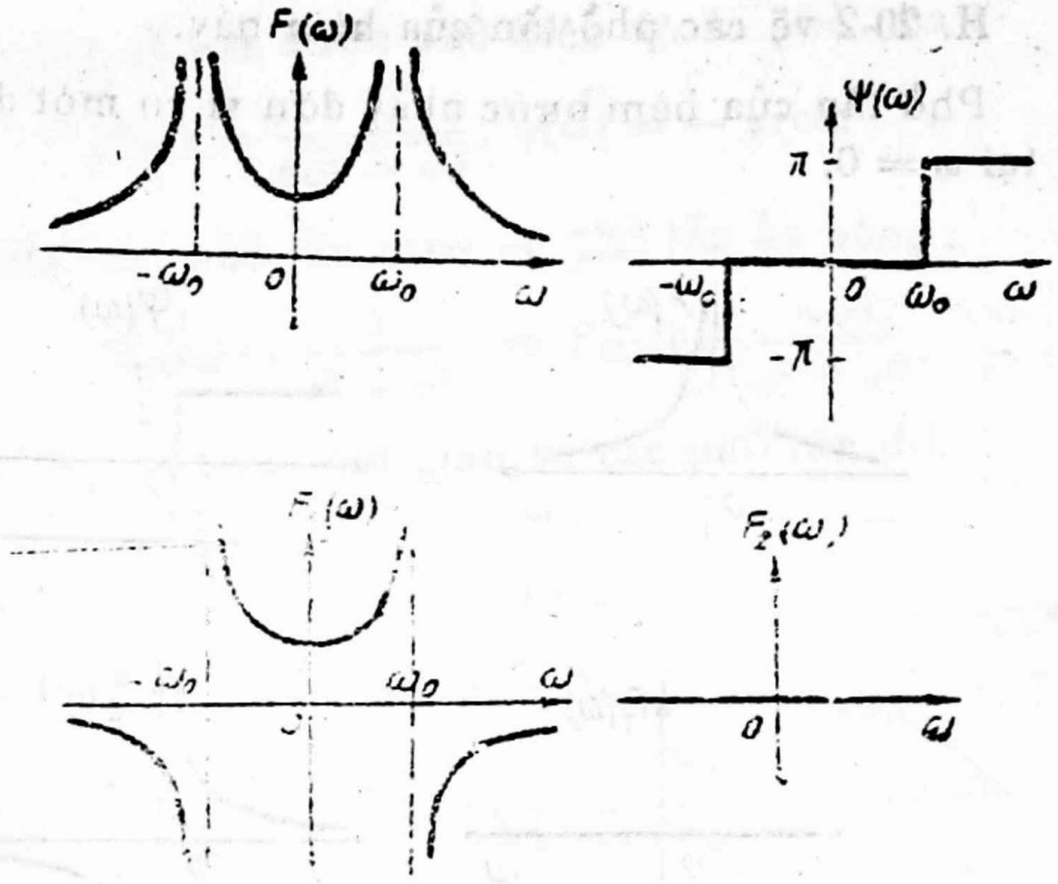
Do đó có phổ biên độ và pha :

$$F(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega} : \psi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{với } -\omega_0 < \omega < \omega_0, \\ \pi & \text{với } \omega > \omega_0, \\ -\pi & \text{với } \omega < -\omega_0. \end{cases}$$

Còn phổ tần thực và ảo bằng :

$$F_1(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad F_2(\omega) = 0.$$

H. 20-3 vẽ các phổ tần của hàm này. Ta thấy chúng có điểm cực ở $\omega = \pm \omega_0$, vì hàm sin không thỏa mãn điều kiện khả tích tuyệt đối.



H. 20-3

3. Các tính chất của ảnh Furiê.

Vì ảnh Furiê là một trường hợp riêng của ảnh Laplaxơ, nên nó có tất cả các tính chất cơ bản của ảnh Laplaxơ. Ta sẽ được tất cả các công thức và định lý đối với ảnh Furiê bằng cách thay $p = j\omega$ vào các công thức đối với ảnh Laplaxơ.

Để làm ví dụ, dưới đây nêu vài công thức và định lý quan trọng nhất :

a) *Ảnh của đạo hàm gốc.*

Nếu $1(t)\, f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$,

thì : $$1(t)\, f'(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega) - f(+0). \quad (20\text{-}12a)$$

Với $f(+0) = 0$, thì :

$$f'(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega). \quad (20\text{-}12b)$$

b) *Ảnh của tích phân gốc*. Ta có:

$$\int_{+0}^{t} 1(t)\, f(t)\, dt \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega}. \qquad (20\text{-}13)$$

Ta thấy việc đạo hàm hoặc tích phân đối với gốc $f(t)$ ứng với việc nhân hay chia ảnh Furiê $F(j\omega)$ với $j\omega$.

c) *Tính chất tuyến tính của biến đổi Furiê*. Ta có:

$$\Sigma A_k\, 1(t)\, f_k(t) \leftrightarrow \Sigma A_k F_k(j\omega), \qquad (20\text{-}14)$$

trong đó $1(t)\, f_k(t) \leftrightarrow F_k(j\omega)$ và A_k là những hằng số.

4. Bảng gốc-ảnh theo biến đổi Furiê.

Ta sẽ được bảng gốc-ảnh Furiê bằng cách thay $p = j\omega$ vào bảng gốc-ảnh Laplaxơ.

20-2. CÁC LUẬT KIRHOF VÀ SƠ ĐỒ TOÁN TỬ. XÉT QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ BẰNG BIẾN ĐỔI FURIÊ.

Từ sự tương tự giữa 2 phép biến đổi Furiê và Laplaxơ, suy ra các luật Kirhof dạng toán tử và sơ đồ toán tử đối với ảnh Furiê cũng tương tự như đối với ảnh Laplaxơ với $p = j\omega$.

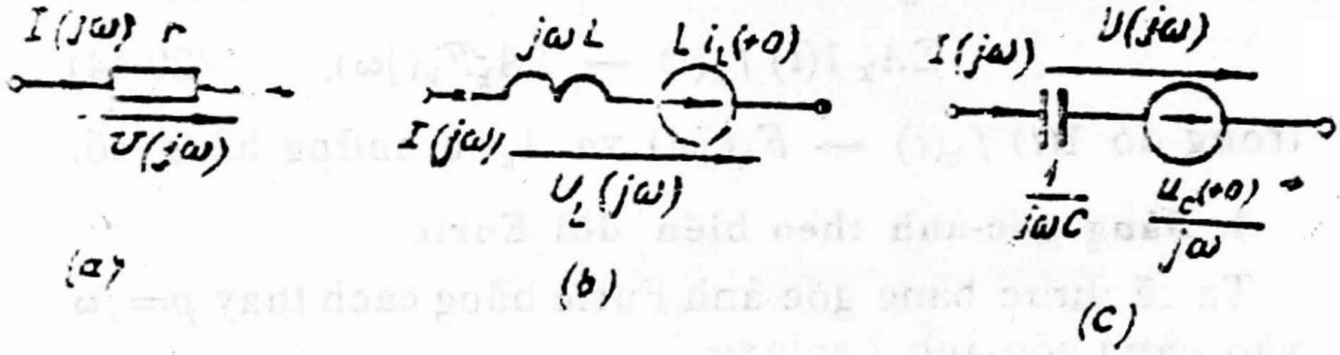
1. *Các luật Kirhof* đối với ảnh Furiê có dạng:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma I(j\omega) &= 0, \\ \Sigma Z(j\omega)\, I(j\omega) &= \Sigma\left[E(j\omega) + L\, i_L(+0) - \frac{u_C(+0)}{j\omega C}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (20\text{-}15)$$

trong đó các biến $I(j\omega)$ là ảnh Furiê, tức phổ tần của dòng các nhánh, $Z(j\omega) = r + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}$ là tổng trở toán tử đối với các ảnh Furiê, $E(j\omega)$ là ảnh Furiê của s.đ.đ. ngoài, $Li_L(+0)$, $u_C(+0)/j\omega C$ là ảnh các s.đ.đ. trong, liên quan đến điều kiện đầu.

Đặc biệt nhận thấy biểu thức tổng trở toán tử đối với ảnh Furiê giống hệt tổng trở phức đối với chế độ xác lập hình sin.

2. Tương tự như ở chương 19 ta cũng dẫn ra *giản đồ toán tử* đối với ảnh Furiê của các phần tử r, L, C, như h. 20-4.



H. 20-4

3. Ta cũng suy ra *đường lối xét quá trình quá độ bằng phương pháp biến đổi Furiê*:

Lập sơ đồ toán tử đối với các ảnh Furiê có kể đến sơ kiện như trong h. 20-4. Thành lập hệ phương trình mạch đối với ảnh. Dùng các phương pháp đại số xét hoặc giải hệ tìm các ảnh dòng $I(j\omega)$ hoặc áp $U(j\omega)$. Nếu cần ta tra bảng gốc-ảnh hoặc dùng công thức Hêvixaid hoặc tích phân Furiê (20-12) tìm các gốc $i(t)$, $u(t)$.

Phương pháp ảnh Furiê rất tiện dùng tính quá trình quá độ trong các mạng 1 cửa và 2 cửa không nguồn với các điều kiện đầu $i_L(+0) = 0$, $u_C(+0)=0$. Ta xét hai trường hợp ấy.

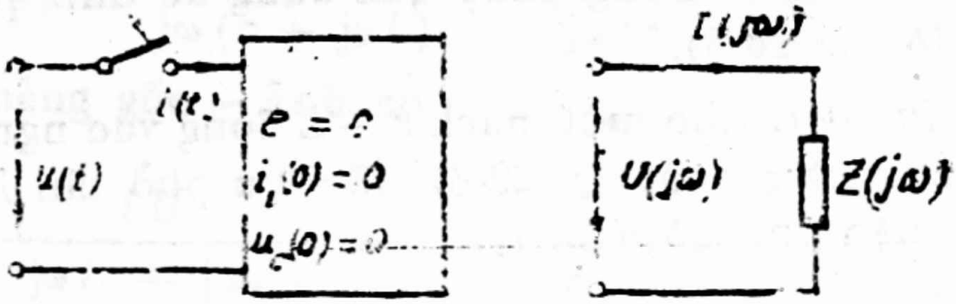
20-3. XÉT QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠNG MỘT CỬA KHÔNG NGUỒN BẰNG BIẾN ĐỔI FURIÈ

Xét một mạng một cửa không nguồn với sơ kiện $i_L(0)=0$, $u_C(0)=0$ đóng vào một nguồn, ví dụ nguồn áp $u(t)$ như h. 20-5.

Dùng ảnh Furiê $\dot{I}(j\omega)$, $\dot{U}(j\omega)$ ta có quan hệ :

$$I(j\omega) = Y(j\omega)\,\dot{U}(j\omega) = U(j\omega) / Z(j\omega). \quad (20\text{-}16)$$

Từ các ảnh đó có thể tìm ra đáp ứng quá độ.



H. 20-5

Trong (20-16) $Z(j\omega)$, $Y(j\omega)$ là những đặc tính tần trở, dẫn của mạng một cửa :

$$Z(j\omega) = z(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega), \quad (20\text{-}17)$$

với $z(\omega)$, $\varphi(\omega)$ và $r(\omega)$, $x(\omega)$ cũng là những cặp đặc tính tần đặc trưng hành vi của mạng. Cũng như $Z(j\omega)$, $Y(j\omega)$ *chúng hoàn toàn xác định hành vi quá độ của mạng.*

Nếu biết rõ kết cấu và thông số của mạng, có thể dùng các phương pháp ảnh phức (ch. 2, 3, 4, 7) tìm các đặc tính ấy.

Nếu không rõ kết cấu hoặc không tiện tính vì mạng quá phức tạp, có thể *làm thí nghiệm đo lấy các đặc tính tần.* Muốn vậy ta đặt vào mạng một nguồn kích thích điều hòa, ở chế độ xác lập ta đo lấy đáp ứng về modul và pha. Cho tần số những giá trị khác nhau, ta đo và tính ra các đặc tính tần :

$$\left.\begin{aligned} z(\omega) &= \frac{U(\omega)}{I(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \psi_u(\omega) - \psi_i(\omega), \\ \text{hoặc} \\ r(\omega) &= z(\omega)\cos\varphi(\omega), \quad x(\omega) = z(\omega)\sin\varphi(\omega). \end{aligned}\right\} \quad (20\text{-}18)$$

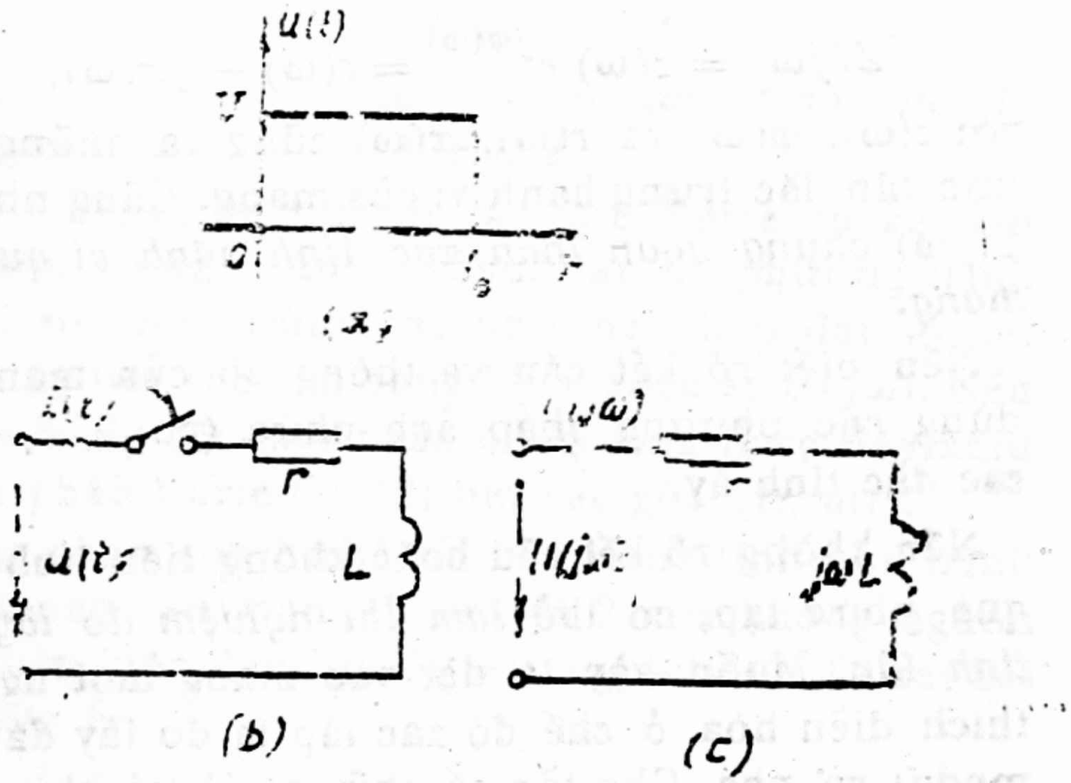
Việc đo được bằng thực nghiệm những đặc tính tần tạo nên một ưu thế lớn của phương pháp biến đổi Furiê. Những đặc tính ấy thường được dưới dạng đường cong hoặc bảng số. Trong trường hợp đo có thể dùng những phương pháp gần đúng để tính quá trình qua đó (m. 20-5).

Ví dụ 20-4. Cho một mạch $r - L$ đóng vào nguồn điện áp xung chữ nhật (h. 20-6), hãy tìm phổ tần $I(j\omega)$ và dòng điện qua đó $i(t)$.

Giải.

Điện áp xung chữ nhật có thể viết dưới dạng :

$$U \cdot 1(t) - U \cdot 1(t - t_0).$$



H. 20-6

Tra bảng gốc — ảnh và dùng định lý chậm trễ (ch. 19, m 2) ta có phổ tần của xung :

$$U(j\omega) = \frac{U}{j\omega}(1 - e^{-j\omega t_0}).$$

Tổng trở toán tử của mạch $r - L$ là :

$$Z(j\omega) = r + j\omega L.$$

Do đó theo (20-6) có phổ tần của dòng quá độ :

$$I(j\omega) = \frac{U}{j\omega(r + j\omega L)} - \frac{U}{j\omega(r + j\omega L)} e^{-j\omega t_0}.$$

Tra bảng gốc — ảnh có :

$$\frac{iU}{j\omega(r + j\omega L)} \leftrightarrow 1(t)\frac{U}{r}(1 - e^{-\frac{r}{L}t}).$$

Theo định lý chậm trễ :

$$\frac{U}{j\omega(r + j\omega L)} e^{-j\omega t_0} \leftrightarrow \frac{U}{r} 1(t - t_0)[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}].$$

Vậy dòng quá-độ :

$$i(t) = 1(t)\frac{U}{r}(1 - e^{-\frac{r}{L}t}) - 1(t - t_0)\frac{U}{r}[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}].$$

Biểu thức này nói rõ với $0 < t < t_0$ (tức $1(t - t_0) = 0$, và $1(t) = 1$) :

$$i(t) = \frac{U}{r}(1 - e^{-\frac{r}{L}t});$$

và với $t > t_0$ (tức $1(t) = 1$ và $1(t - t_0) = 1$) ta có :

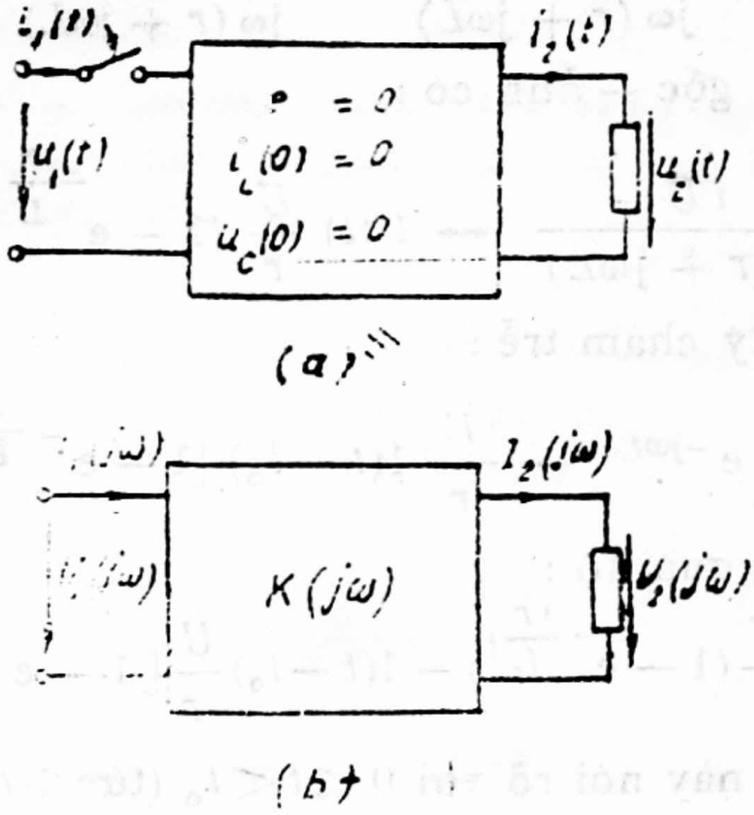
$$i(t) = \frac{U}{r}[e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)} - e^{-\frac{r}{L}t}].$$

20-4. XÉT QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ MẠNG HAI CỬA BẰNG BIẾN ĐỔI FURIÈ.

Cho một mạng hai cửa không nguồn với các sơ kiện $i_L(0) = 0$, $u_C(0) = 0$ đóng vào một nguồn kích thích, ví dụ một nguồn áp $u_1(t)$ như h. 20-7.

Nếu đã biết các đặc tính tần truyền đạt $K(j\omega)$ hoặc $A(j\omega)$ có thể tìm được ảnh và sau đó gốc của tín hiệu ra quá độ, ví dụ :

$$U_2(j\omega) = K(j\omega)\, U_1(j\omega), \qquad (20\text{-}19)$$



(a) (b)

H. 20-7

trong đó $K(j\omega)$ cũng giống hệt hàm truyền đạt đối với chế độ xác lập điều hòa.

Đặc biệt dùng biến đổi Furiê xét quá trình quá độ những mạng hai cửa còn tiện lợi hơn biến đổi Laplaxơ ở chỗ có thể dùng một số phương pháp hình học như phương pháp Mikhailov, phương pháp Naiquit (Nyquist) để xét tính ổn định của quá trình truyền đạt nhất là của những mạng hai cửa có phản hồi. Vấn đề này thường được nêu trong các giáo trình « Cơ sở tự động học ».

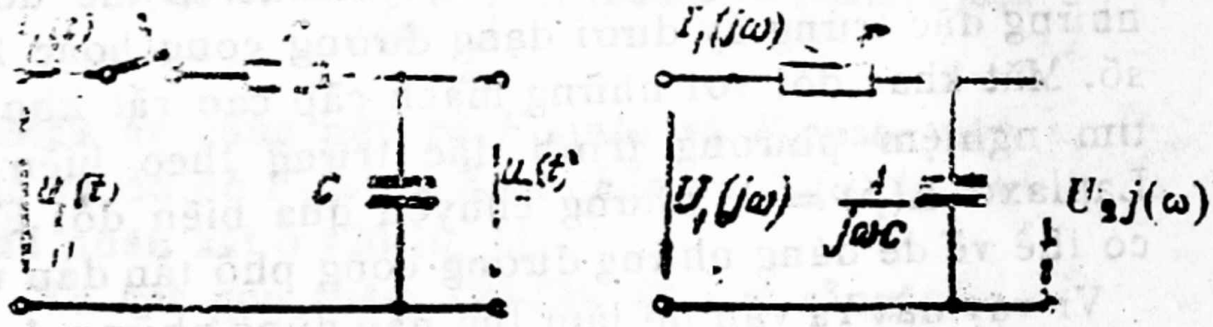
Đối với những mạng hai cửa phức tạp hoặc không biết rõ kết cấu (thường gọi là *hộp đen*) có thể *làm thí*

nghiệm lấy được đặc tính tần $K(j\omega)$ hoặc $A(j\omega)$. Chỉ cần đặt lên cửa vào một điện áp điều hòa rồi đo điện áp đầu ra và góc lệch pha giữa chúng. Lặp lại thí nghiệm với những tần số khác nhau ta lập được đặc tính tần truyền đạt:

$$\left.\begin{aligned} k(\omega) &= \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \psi_2(\omega) - \psi_1(\omega), \\ \text{hoặc} \\ K_1(\omega) &= k(\omega)\cos\varphi(\omega), \quad K_2(\omega) = k(\omega)\sin\varphi(\omega). \end{aligned}\right\} \quad (20\text{-}20)$$

Ta thường dùng những đặc tính tần thực nghiệm dưới dạng đường cong hoặc bảng số để xét quá trình quá độ bằng những phương pháp gần đúng nêu trong mục dưới.

Ví dụ 20-5: Một mạng hai cửa có sơ đồ như h. 20-8 được đóng vào một xung điện áp chữ nhật $u_1(t) = U[1(t) - 1(t - t_0)]$. Hãy tính điện áp truyền đạt đến tụ điện $U_2(j\omega)$ và $u_2(t)$.



H. 20-8

Giải:

Phổ tần của điện áp vào:

$$U_1(j\omega) = \frac{U}{j\omega}(1 - e^{-j\omega t_0}).$$

Hàm truyền đạt điện áp của mạng hai cửa:

$$K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{r + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega rC}.$$

Phổ tần của điện áp ra:

$$U_2(j\omega) = K(j\omega)\,U_1(j\omega) = \frac{U}{j\omega(1 + j\omega rC)} - \frac{U}{j\omega(1 + j\omega rC)} e^{-j\omega t_0}$$

Theo bảng gốc-ảnh ta có:

$$\frac{U}{j\omega(1 + j\omega rC)} \leftrightarrow 1(t)\,U(1 - e^{-t/rC}).$$

Áp dụng định lý chậm trễ được điện áp ra:

$$u_2(t) = 1(t)\,U(1 - e^{-t/rC}) - 1(t - t_0)\,U\,(1 - e^{-(t-t_0)/rt}).$$

20-5. PHƯƠNG PHÁP HÌNH THANG TÍNH GẦN ĐÚNG QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ THEO ĐƯỜNG CONG PHỔ TẦN ẢO.

Ta đã biết cách đo bằng thực nghiệm lấy các đặc tính tần $Z(j\omega)$ hoặc $K(j\omega)$, $A(j\omega)$ các mạng một, hai cửa. Đối với những hộp đen về nguyên tắc có thể đo lấy những đặc trưng ấy dưới dạng đường cong hoặc bảng số. Mặt khác đối với những mạch cấp cao rất khó giải tìm nghiệm phương trình đặc trưng theo biến đổi Laplaxơ $\Delta(p) = 0$, nhưng chuyển qua biến đổi Furiê có thể vẽ dễ dàng những đường cong phổ tần đáp ứng.

Vì vậy nảy ra vấn đề làm thế nào dùng những đường cong đặc tính tần hoặc phổ tần ấy để tính gần đúng đáp ứng quá độ. Mục này trình bày một trong những phương pháp gần đúng gọi là *phương pháp hình thang* do V.V. Xolođovnikov nêu năm 1948.

1. Một công thức biến đổi ảnh — gốc.

Ta dẫn ra một công thức biến đổi từ phổ tần ảo ra gốc. Giả sử phổ tần $F(j\omega)$ với phổ thực và ảo đã biết:

$$F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega). \qquad (20\text{-}21)$$

Thay vào tích phân ngược Furiê:

$$\exp(j\omega t) = \cos\omega t + j\sin\omega t,$$

khi tất cả các cực của ảnh $F(p)$ đều phân bố trên nửa trái mặt phẳng p ta có:

$$1(t)\,f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{jt\omega}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F_1\cos t\omega - F_2\sin t\omega)\,d\omega +$$

$$+ \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F_1\sin t\omega + F_2\cos t\omega)\,d\omega. \qquad (20\text{-}22)$$

Vì gốc là một hàm giá trị thực nên tích phân thứ hai phải triệt tiêu. Vậy:

$$1(t)f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F_1\cos t\omega - F_2\sin t\omega)d\omega. \qquad (20\text{-}23)$$

Điều ấy cũng nêu rõ $F_1\sin t\omega$ và $F_2\cos t\omega$ phải là hàm lẻ và do đó $F_1(\omega)$ *là hàm chẵn và* $F_2(\omega)$ *là hàm lẻ* như đã nhận xét ở (20-10, 11).

Ta rút gọn thêm (20-23). Chú ý rằng gốc triệt tiêu với mọi t âm, có nghĩa là nếu thay vào vế phải (20-23) thông số $-t$, tích phân đó phải triệt tiêu. Vậy có quan hệ:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_1\cos(-t\omega) - F_2\sin(-t\omega)]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F_1\cos t\omega + F_2\sin t\omega)\,d\omega = 0. \qquad (20\text{-}24)$$

Lấy (20-23) trừ đi (20-24) ta được biểu thức liên hệ gốc $1(t)\,f(t)$ với riêng phổ tần ảo $F_2(\omega)$:

$$1(t)\,f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)\sin t\omega\, d\omega. \qquad (20\text{-}25)$$

Cuối cùng do tính chất chẵn đối với ω của $F_2(\omega)\sin t\omega$, tích phân trong cận đối xứng $(-\infty, \infty)$ phải bằng 2 lần tích phân trong nửa cận $(0, \infty)$:

$$1(t)\,f(t) = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_2(\omega)\sin t\omega\, d\omega. \qquad (20\text{-}26)$$

Phương pháp gần đúng nêu ở dưới cần bản dựa trên phép biến đổi (20-26), nhưng viết dưới một dạng chuẩn sau:

$$1(t)\,f(t) = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \omega F_2(\omega)\frac{\sin t\omega}{\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} Q(\omega)\frac{\sin t\omega}{\omega}\, d\omega. \qquad (20\text{-}27)$$

trong đó ta đặt

$$Q(\omega) = -\omega F_2(\omega). \qquad (20\text{-}28)$$

Ví dụ khi đóng mạch r-L vào một nguồn điện áp bước nhảy đơn vị $1(t)$ có ảnh $1/j\omega$, dòng điện ảnh có dạng:

$$I(j\omega) = I_1(\omega) + jI_2(\omega) = \frac{1}{j\omega(r + j\omega L)} = \frac{-\omega L - jr}{\omega(\omega^2 L^2 + r^2)}.$$

Ta có

$$Q(\omega) = -\omega I_2(\omega) = \frac{r}{\omega^2 L^2 + r^2},$$

và dòng quá độ :

$$1(t)\, i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{r}{\omega^2 L^2 + r^2} \cdot \frac{\sin t\omega}{\omega}\, d\omega.$$

2. Quan hệ $Q(\omega)$ với kích thích $F(j\omega)$.

Với một mạch đã biết các đặc tính tần $Z(j\omega)$, $Y(j\omega)$, hoặc $K(j\omega)$, và với nguồn kích thích có phổ tần $F(j\omega)$ đã cho ta tìm được phổ tần ảo của đáp ứng $X_2(\omega)$. Thật vậy phổ đáp ứng bằng :

$$X(j\omega) = K(j\omega)\, F(j\omega) = (K_1 + jK_2)(F_1 + jF_2). \quad (20\text{-}29)$$

Từ đó có phổ ảo :

$$X_2(\omega) = K_1(\omega)\, F_2(\omega) + K_2(\omega)\, F_1(\omega). \quad (20\text{-}30)$$

Riêng trường hợp kích thích là hàm bước nhảy Hêvixaid $1(t)$ hoặc hàm xung Đirac $\delta(t)$, (20-30) sẽ rất gọn. Vì :

$$1(t) \longrightarrow -j\frac{1}{\omega} \qquad \delta(t) \longrightarrow 1,$$

nên đối với kích thích bước nhảy đơn vị $1(t)$ có :

$$Q(\omega) = -\omega X_2(\omega) = -\omega K_1(\omega)\, F_2(\omega) = K_1(\omega), \quad (20\text{-}31a)$$

do đó :

$$1(t)\, x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_1(\omega) \frac{\sin t\omega}{\omega}\, d\omega. \quad (20\text{-}31b)$$

Vậy biết đặc tính tần thực $K_1(\omega)$ có thể tìm được đáp ứng đối với $1(t)$.

Với kích thích xung Đirac $\delta(t)$ có :

$$Q(\omega) = -\omega X_2(\omega) = -\omega K_2(\omega)\, F_1(\omega) = -\omega K_2(\omega), \quad (20\text{-}32a)$$

do đó :

$$1(t)\, x(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega K_2(\omega) \frac{\sin t\omega}{\omega}\, d\omega. \quad (20\text{-}32b)$$

Vậy biết đặc tính tần ảo $K_2(\omega)$ có thể tìm được đáp ứng đối với $\delta(t)$.

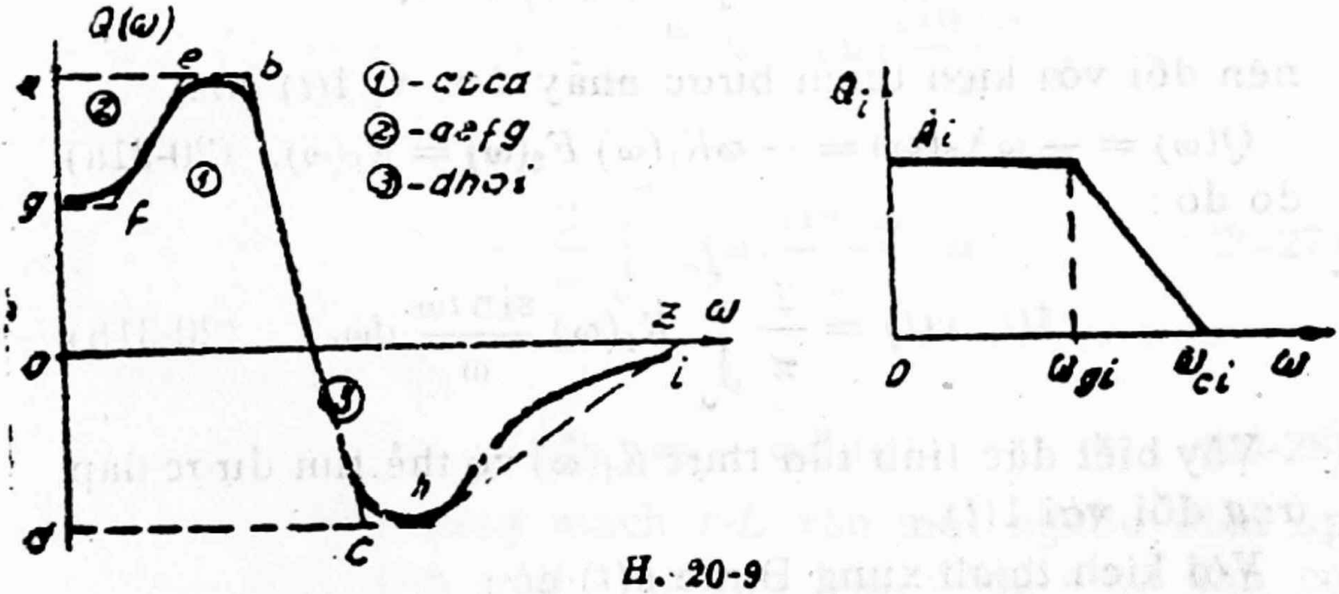
3. Tinh thần phương pháp hình thang.

Ta thường gặp trường hợp các đặc tính tần $K_1(\omega)$, $K_2(\omega)$ là những đường cong đo bằng thực nghiệm hoặc vẽ được theo hàm $K(j\omega)$ đã biết.

Tinh thần phương pháp hình thang tính gần đúng gốc $1(t)\,x(t)$ theo phổ tần $X_2(\omega)$ cho dưới dạng đường cong là :

Phân tích gần đúng đường cong $Q(\omega) = -\omega X_2(\omega)$ (trường hợp 20-31a là $K_1(\omega)$ và 20-32a là $-\omega K_2(\omega)$), thành những đường cong dạng hình thang vuông $Q_i(\omega)$ như h. 20-9. Mỗi hình thang có cạnh đứng A_i bám vào trục đứng và các cạnh nằm song song với trục ngang thứ tự dài ω_{gi} (tần số giữa) và ω_{ci} (tần số cuối), tức :

$$Q(\omega) \# \Sigma Q_i(\omega) = \Sigma Q_i(A_i, \omega_{gi}, \omega_{ci}). \qquad (20\text{-}33)$$



H. 20-9

Nếu làm rõ được mỗi hình thang đó ứng với một thành phần gốc $1(t)\,x_i(t)$ mà ta có thể lập bảng tra :

$$1(t)\,x_i(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} Q_i(\omega)\frac{\sin t\omega}{\omega}\,d\omega, \qquad (20\text{-}34)$$

thì cộng lại ta được gốc gần đúng:

$$1(t)\,x(t) = \Sigma\, 1(t)\,x_i(t). \qquad (20\text{-}35)$$

4. Bảng tra cứu và cách dùng bảng.

a) *Gốc chuẩn* $h_\chi(\tau)$.

Như nói ở trên, mỗi hình thang vuông $Q_i(\omega)$ có 3 thông số: chiều cao A_i, tần số cuối ω_{ci} và tỉ số tần số giữa với tần số cuối:

$$\chi = \omega_{gi}/\omega_{ci},$$

tức:

$$Q_i(\omega) = \begin{cases} A_i, & \text{ở } 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_{gi}, \\ A_i \dfrac{\omega_{ci} - \omega}{\omega_{ci} - \omega_{gi}} & \text{ở } \omega_{gi} \leqslant \omega \leqslant \omega_{ci}, \\ 0, & \text{ở } \omega_{ci} \leqslant \omega. \end{cases} \qquad (20\text{-}36)$$

Để tiện lập bảng ta giảm bớt thông số bằng cách nêu những *hình thang chuẩn* $Q_o(\omega)$ có chiều cao và tần số cuối bằng 1, nên chỉ còn một thông số χ:

$$A = 1,\ \omega_c = 1,\ 0 \leqslant \chi = \frac{\omega_g}{\omega_c} \leqslant 1, \qquad (20\text{-}37)$$

tức:

$$Q_o(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ở } 0 \leqslant \omega \leqslant \chi, \\ \dfrac{1-\omega}{1-\chi} & \text{ở } \chi \leqslant \omega \leqslant 1, \\ 0 & \text{ở } 1 \leqslant \omega. \end{cases} \qquad (20\text{-}37b)$$

Ta ký hiệu *gốc chuẩn* ứng với hình thang chuẩn đó là $h\chi(\tau)$. Thay (20-37b) vào (20-34) và ký hiệu thời gian chuẩn bằng τ ta có:

$$h_\chi(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\chi \frac{\sin\tau\omega}{\omega}\,d\omega + \frac{2}{\pi}\int_\chi^1 \frac{1-\omega}{1-\chi}\,\frac{\sin\tau\omega}{\omega}\,d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\chi \frac{\sin\tau\omega}{\omega}d\omega + \frac{2}{\pi(1-\chi)}\int_\chi^1 \frac{\sin\tau\omega}{\omega}d\omega - \frac{2}{\pi(1-\chi)}\int_\chi^1 \sin\tau\omega d\omega. \qquad (20\text{-}38)$$

Hai tích phân đầu cho một hàm đặc biệt của thời gian τ, gọi là hàm *sin tích phân*, ký hiệu $\mathrm{Si}(\omega_k t)$:

$$\mathrm{Si}(\omega_k t) = \int_0^{\omega_k} \frac{\sin t\omega}{\omega}\, d\omega = \int_0^{\omega_k t} \frac{\sin t\omega}{t\omega}\, dt\omega. \qquad (20\text{-}39)$$

Thay ký hiệu (20-39) vào (20-38) ta có:

$$h_\chi(\tau) = \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{Si}(\chi\tau) - \frac{1}{1-\chi}\mathrm{Si}(\tau) - \frac{1}{1-\chi}\mathrm{Si}(\chi\tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1-\chi}\frac{\cos\tau - \cos\chi\tau}{\tau}\right] = \qquad (20\text{-}40)$$
$$= \frac{2}{\pi(1-\chi)}\left[\mathrm{Si}(\tau) - \chi\mathrm{Si}(\chi\tau) - \frac{\cos\tau - \cos\chi\tau}{\tau}\right].$$

Đó là một hàm của τ với thông số χ. Nó có một dạng chuẩn nhất định. Người ta đã tính và lập sẵn bảng tra hàm (20-40) theo χ và τ (xem Pl4).

b) *Quan hệ giữa* $h_\chi(\tau)$ và $x(t)$.

Từ đáp ứng chuẩn $h_\chi(\tau)$ có thể suy ra được đáp ứng $x_{(t)}$ đối với những hình thang có biên độ A và tần số cuối $\omega_{cl} = 1$ tùy ý (20-36). Muốn thế ta dựa vào một *tính chất (định lý)* sau

Nếu ứng với một hình thang $Q(\omega)$, *gốc bằng* $x(\tau)$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega}\sin\tau\omega\, d\omega = x(\tau) \qquad (20\text{-}41)$$

thì đối với một hình thang có cùng hệ số χ *nhưng tần số cuối gấp* n *lần, tức một hình thang* $Q(n\omega)$, *gốc sẽ bằng* $x(\tau/n)$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{Q(n\omega)}{\omega}\sin\tau\omega\, d\omega = x\left(\frac{\tau}{n}\right). \qquad (20\text{-}42)$$

Định lý này có nghĩa là nếu với một hình thang χ và $\omega_c = 1$, đã tra ra được đáp ứng chuẩn $h_\chi(\tau)$, thì đáp ứng đối với một hình thang A, χ nhưng tần số $\omega_c \neq 1$ ở thời điểm $t = \tau/\omega_c$ sẽ bằng A lần đáp ứng chuẩn đó ở thời điểm τ, tức :

$$x_\chi(\tau/\omega_c) = A\, h_\chi(\tau). \qquad (20\text{-}43)$$

Ví dụ 20-6. Giả sử với một hình thang chuẩn $\chi = 0{,}7$ ở $\tau = 10$ đã có đáp ứng chuẩn (tần số và biên độ đơn vị) $h_{0,7}(10) = 1{,}020$. Với một hình thang có biên độ $A = 5$, tần số cuối $\omega_c = 1000$ và $\chi = 0{,}7$ thì đáp ứng ở $t = \tau\,\omega_c = 10 : 1000 = 0{,}01$ s bằng $5 \cdot 1{,}020 = 5{,}1$:

$$x(0{,}01) = 5{,}1.$$

Ta chứng minh định lý. Thật vậy, nhân tử và mẫu trong các biểu thức (20-42) với n ta viết lại (20-42) dưới dạng :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q(n\omega)}{n\omega}\sin\left(\frac{\tau}{n}\,n\,\omega\right) dn\,\omega,$$

hoặc sau khi đặt $n\omega = \Omega$, ta có :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q(\Omega)}{\Omega}\sin\frac{\tau}{n}\Omega\, d\,\Omega.$$

So sánh (20-44) với (20-41) ta thấy chúng có dạng giống nhau, chỉ khác là trong (20-41) thông số τ được thay bằng $t = \tau/n$.

5. Trình tự tính gần đúng.

Tóm lại có trình tự tính sau :

a) Dựa vào các đường cong đặc tính tần truyền đạt $K_1(\omega)$, $K_2(\omega)$ và phổ tần kích thích $F(j\omega)$, dẫn ra đường cong hoặc bảng số phổ tần ảo $Q(\omega) = -\omega X_2(\omega)$.

b) Nếu phổ tần $Q(\omega)$ không có cực trên trục ω, ta phân tích nó thành những hình thang A_i, χ_i, ω_{ci}.

c) Tra bảng và theo (20-13) lập đường cong $x_i(t)$ ứng với mỗi hình thang.

d) Cộng các $x_i(t)$ lại để được gốc gần đúng $x(t)$.

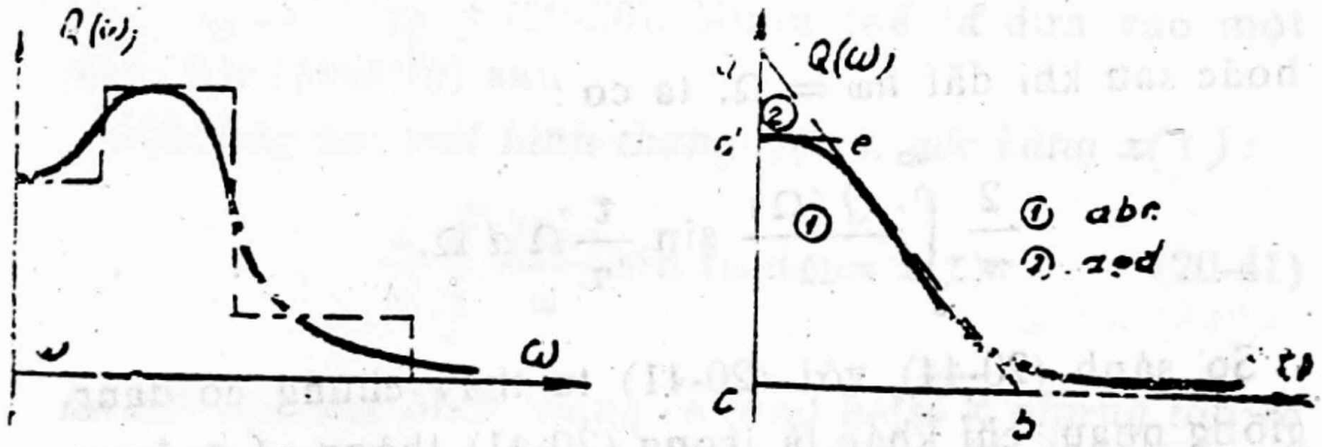
Đây là một ưu điểm của biến đổi Furiê so với biến đổi Lapiaxơ.

Phương pháp này đặc biệt tiện khi nguồn có dạng $1(t)$ hoặc $\delta(t)$. Lúc đó ta dùng thẳng các phổ tần theo (20-31a, 32a).

Trường hợp nguồn chu kỳ, phổ tần $Q(\omega)$ sẽ có cực trên trục tần số. Muốn dùng phương pháp này phải thêm một số gia công nữa.

6. Chú ý :

a. Trường hợp phổ tần $Q(\omega)$ phân được thành những hình chữ nhật (tức là những hình thang với $\chi = 1$) hoặc thành những tam giác vuông (tức hình thang với



H. 20-10

$\chi = 0$), ta sẽ chỉ dùng riêng 2 cột số liệu với $\chi = 1$ và $\chi = 0$ của bảng hàm $h_\chi(\tau)$. Đó là những phương pháp hình chữ nhật hoặc hình tam giác (h. 20-10).

b. Cần nhấn mạnh phương pháp này không phải chỉ tính quá trình quá độ theo các đường cong đặc tính tần thực nghiệm, mà còn tính cho mạch có phương trình cấp quá cao nữa (cấp 4 trở lên).

Khi ấy việc giải phương trình đặc tính bậc cao $\Delta(p) = 0$ theo biến đổi Laplaxơ để tìm các số mũ tắt sẽ rất khó. Nhưng nếu chuyển qua ảnh Furiê $X(j\omega)$, cho ω những trị khác nhau, ta tính và vẽ ra đường cong phổ ảo $-\omega X_2(\omega)$ một cách dễ dàng. Sau đó dùng phương pháp nêu ở đây tìm ra đáp ứng gần đúng. Đây cũng là một ưu điểm của biến đổi Furiê so với biến đổi Laplaxơ.

Ví dụ 20-7. Làm thí nghiệm đã đo được đặc tính truyền đạt thực $K_1(\omega)$ của một mạng 2 cửa (mạch *r-C* như trong ví dụ 20-5) nêu trong bảng ở dưới. Hãy tính điện áp truyền đạt qua cửa ra, khi đóng một nguồn áp một chiều $U = 100$ V (bước nhảy) ở cửa vào.

ω (1/s)	0	5	10	15	20	30	40	60	80	100	200
$K_1(\omega)$	1	0,94	0,8	0,64	0.5	0,308	0,2	0,1	0,058	0,0384	0,01

Giải.

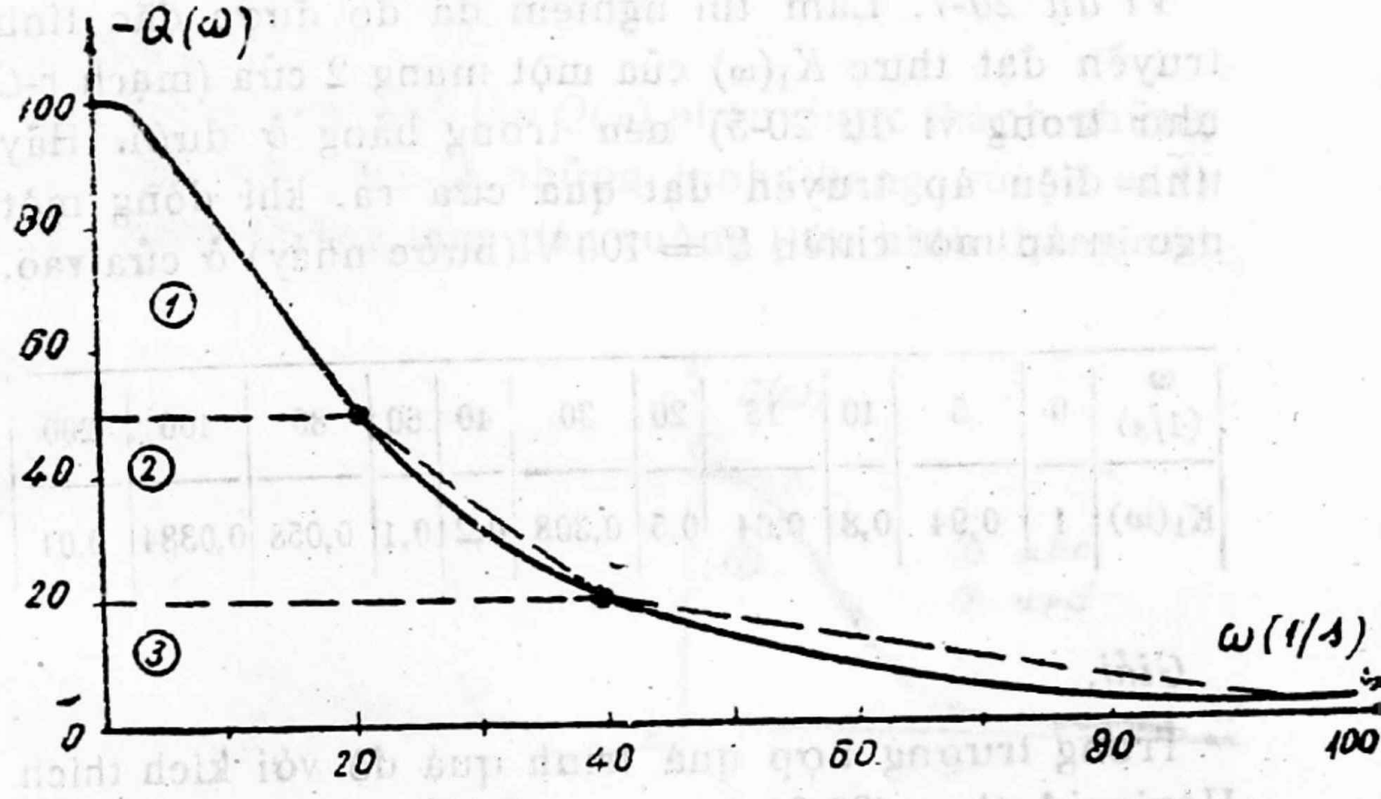
Trong trường hợp quá trình quá độ với kích thích Hêvixaid theo (20-31a) ta có phổ tần :

$$Q(\omega) = K_1(\omega)\, U = 100\, K_1(\omega).$$

Từ số liệu đầu để tính ra $Q(\omega)$. Kết quả vẽ trên h. 20-11. Ta chia gần đúng hàm $Q(\omega)$ làm 3 hình thang thứ tự có các thông số A_1, λ_1, ω_{s1} là (xem h. 20-11).

Thông số / Hình thang	A_i	$\omega_{gi}/\omega_{ci} = \chi_i$	ω_{ci}
1	50	2 : 20 = 0,1	20
2	30	20 : 40 = 0,5	40
3	20	40 : 100 = 0,4	100

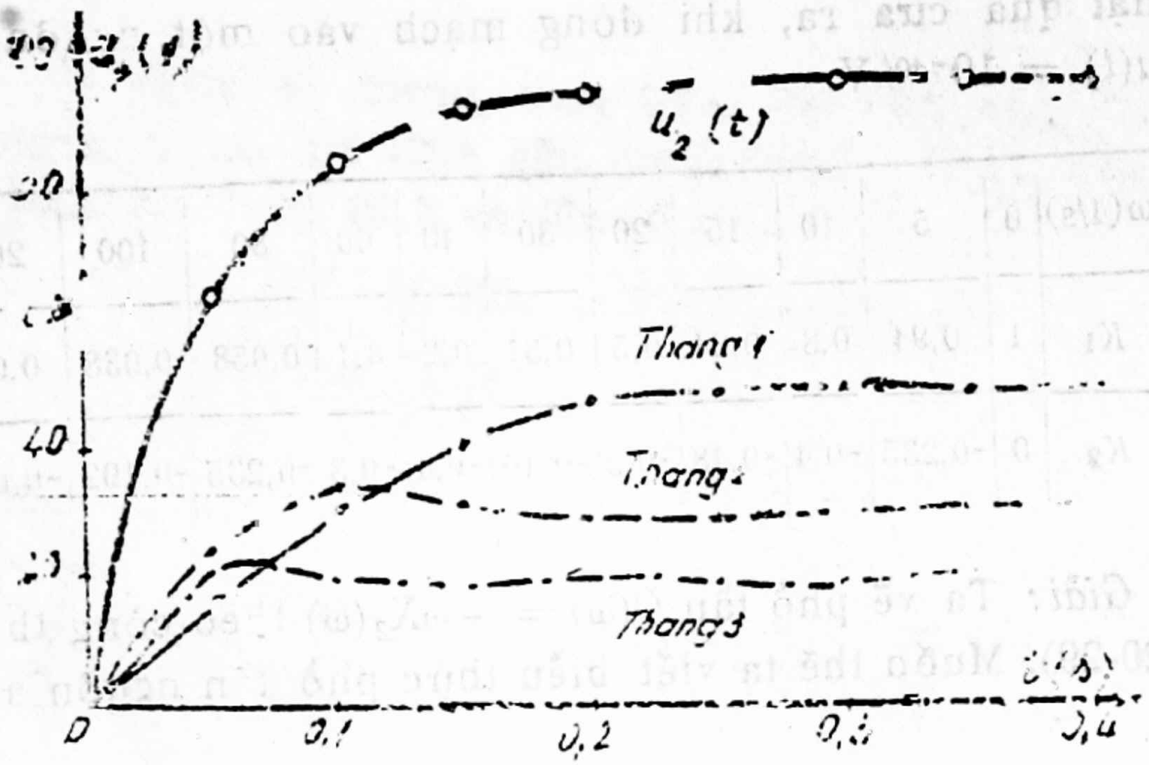
Tra bảng hàm $h_\chi(\tau)$, ta tìm ra các đáp ứng chuẩn. Từ đó tính ra đáp ứng với mỗi hình thang $x_i(t)$ theo thời gian $t = \tau/\omega_{ci}$.



H. 20-11

Kết quả tính lập vào bảng ở dưới và vẽ trên h. 20-12.

Từ hình vẽ ta thấy điện áp truyền đạt có dạng giống hàm $U(1 - e^{-at})$ phù hợp với lý thuyết.



H. 20-12

Thang 1 (50 ; 0,1 ; 20)				Thang 2 (30 ; 0,5 ; 40)				Thang 3 (20 ; 0,4 ; 100)				$x(t)$
τ	$h(\tau)$	$t(s)$	$x_1(t)$	τ	$h(\tau)$	$t(s)$	$x_2(t)$	τ	$h(\tau)$	$t(s)$	$x_3(t)$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,340	0,05	17	2	0,831	0,05	24,9	5	1,112	0.05	22,2	64,1
2	0,628	0,10	31,4	4	1,141	0,10	34,2	10	0,994	0,10	19,9	85,5
3	0,823	0,15	41,4	6	1,051	0,15	31,6	15	0,991	0,15	19,8	92.8
4	0,937	0.20	46,8	8	0,966	0,20	29	20	1,004	0,20	20,1	95,9
5	0,977	0,25	48,3	10	0,982	0,25	29,5	25	0,999	0,25	19,98	98.3
6	0,981	0,30	49	12	0,997	0,30	29,9	30	0,999	0,30	19,98	98,9
7	0,978	0,35	48,9	14	0,999	0,35	30	35	1,002	0,35	20,04	99
8	0,983	0,40	49,1	16	1,010	0,40	30,3	40	0,999	0,40	19,98	99,4

Ví dụ 20-8. Làm thí nghiệm đo được đặc tính tần truyền đạt áp của một mạng 2 cửa như bảng dưới. Hãy dùng phương pháp hình thang tính điện áp truyền

đạt qua cửa ra, khi đóng mạch vào một nguồn áp $u(t) = 10^{-10t}$ V.

ω(1/s)	0	5	10	15	20	30	40	60	80	100	200
K_1	1	0,94	0,8	0,64	0,5	0,31	0,2	0,1	0,058	0,038	0,01
K_2	0	-0,235	-0,4	-0,48	-0,5	-0,46	-0,4	-0,3	-0,235	-0,192	-0,099

Giải: Ta vẽ phổ tần $Q(\omega) = -\omega X_2(\omega)$ theo công thức (20-29). Muốn thế ta viết biểu thức phổ tần nguồn áp:

$$F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega) = \frac{10}{j\omega + 10} =$$

$$= \frac{100}{\omega^2 + 100} - j\frac{10\omega}{\omega^2 + 100} \qquad (a)$$

Theo (20-29) có:

$$Q(\omega) = -(K_1F_2 + K_2F_1)\omega. \qquad (b)$$

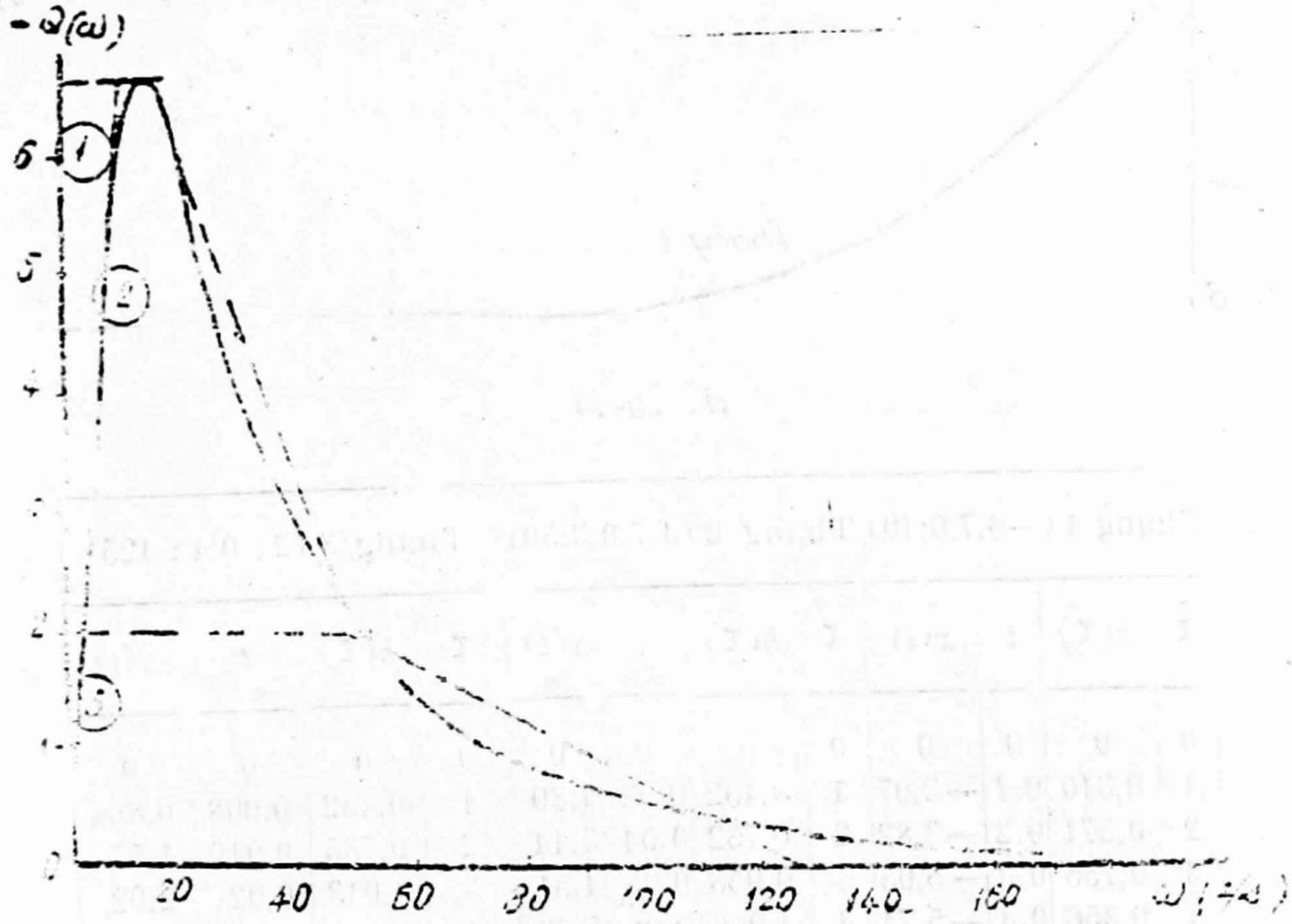
Thay (a) vào (b) và tính dần trị số F_1, F_2, Q ứng với mỗi tần số. Kết quả lập bảng như ở dưới đây:

ω(1/s)	0	5	10	15	20	30	40	60	80	100	200
F_1	1	0,8	0,5	0,308	0,2	0,1	0,059	0,027	0,0153	0,0099	0,0025
F_2	0	-0,4	-0,5	-0,462	-0,4	-0,3	-0,266	-0,162	-0,123	-0,099	-0,05
Q	0	2,82	6	6,66	6	4,17	3,07	1,46	0,86	0,57	0,15

H. 20-13 vẽ đường cong $Q(\omega)$ của đáp ứng. Đường cong đó có thể chia gần đúng thành 3 hình thang với biên độ A, hệ số χ và tần số cuối ω_c lần lượt là :

1) (—6,7 ; 0; 10), 2) (4,7 ; 0,3 ; 50),

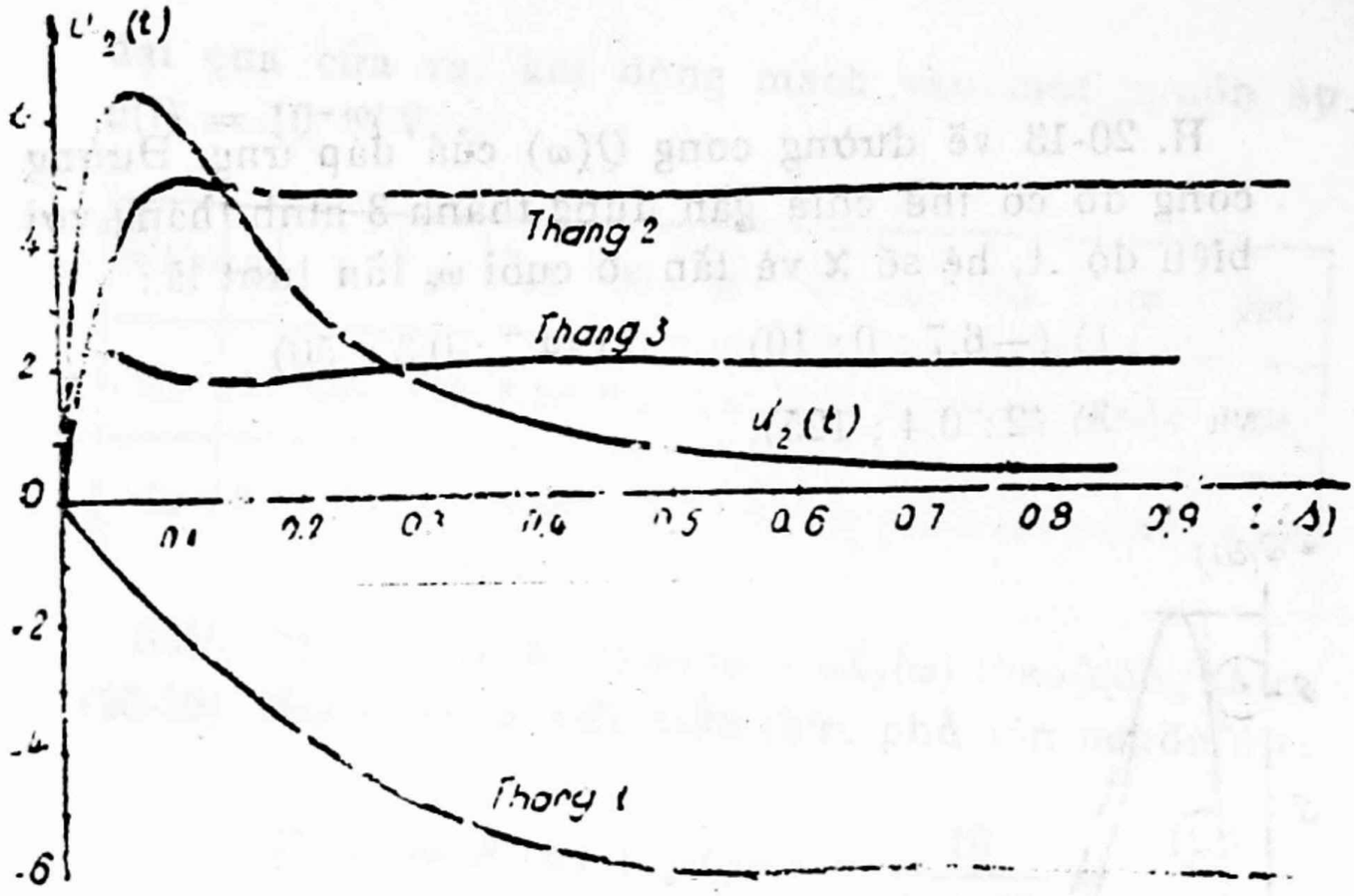
và 3) (2; 0,4 ; 125).



H. 20-13

Tra bảng số tìm ra các đáp ứng chuẩn $h_\chi(\tau)$ và sau đó các đáp ứng đối với mỗi hình thang. Kết quả ghi ở bảng dưới đây.

Hình 20-14 vẽ các đường cong ứng với mỗi hình thang và điện áp truyền đạt qua lối ra $u_2(t)$.



H. 20-14

Thang 1 (−6,7;0;10)				Thang 2 (1,7;0,3;50)				Thang 3 (2; 0,4; 125)			
τ	$h(\tau)$	t	$x(t)$	τ	$h(\tau)$	t	$x(t)$	τ	$h(\tau)$	t	$x(t)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,310	0,1	−2,07	1	0,402	0,02	1,89	1	0,432	0,008	0,864
2	0,571	0,2	−3,82	2	0,732	0,04	3,44	2	0,785	0,016	1,57
3	0,755	0,3	−5,05	3	0,958	0,06	4,51	3	1,013	0,02	2,02
4	0,856	0,4	−5,74	4	1,066	0,08	5,00	4	1,110	0,032	2,22
5	0,895	0,5	−6	5	1,087	0,1	5,12	5	1,112	0,04	2,22
6	0,903	0,6	−6,05	6	1,065	0,12	5	6	1,068	0,048	2,14
7	0,904	0,7	−6,05	7	1,037	0,14	4,88	7	1,025	0,056	2,04
8	0,911	0,8	−6,1	10	1,018	0,2	4,78	12,5	0,986	0,10	1,97
9	0,925	0,9	−6,18	20	0,994	0,4	4,67	25	0,999	0,20	2
10	0,939	1	−6,28	50	1,001	1	4,7	50	1,001	0,4	2,00

CÂU HỎI ÔN TẬP

1) Biến đổi Furiê là gì ? So sánh các công thức biến đổi thuận và ngược theo Furiê và theo Laplaxơ, xem giống nhau và khác nhau những gì ?

2) So sánh công thức biến đổi Furiê của hàm $1(t)\,f(t)$ với chuỗi Furiê của một hàm chu kỳ. Rút ra ý nghĩa vật lý của biến đổi Furiê. So sánh phổ tần của hàm chu kỳ (có cực) và hàm không chu kỳ (không cực).

3) So sánh biểu thức các luật Kirhof, giản đồ toán tử đối với ảnh Furiê và đối với ảnh Laplaxơ. Rút ra đường lối tính quá trình quá độ bằng biến đổi Furiê.

4) So sánh các biểu thức tổng trở phức Z đối với dòng hình sin, đặc tính tần $Z(j\omega)$ và tổng trở toán tử $Z(p)$ của một nhánh cơ bản r-L-C. Suy ra các biểu thức về tổng trở đầu vào, tổng trở, tổng dẫn tương hỗ, các hàm truyền đạt v.v... theo biến đổi Furiê.

5) Cách xác định bằng thực nghiệm đặc tính tần tổng trở $Z(j\omega)$ của một mạng một cửa và hàm truyền đạt $K(j\omega)$ của một mạng hai cửa.

6) Nêu nội dung phương pháp hình thang tính quá trình quá độ theo các đặc tính tần đo bằng thực nghiệm và cách tính cho các mạch cấp quá cao. Tại sao dùng biến đổi Laplaxơ không tiện dẫn ra phương pháp này (vì $Z(p)$ là hàm biến phức, xác định trên mặt phẳng phức p còn $Z(j\omega)$ là hàm biến ảo $j\omega$, xác định trên trục tần số).

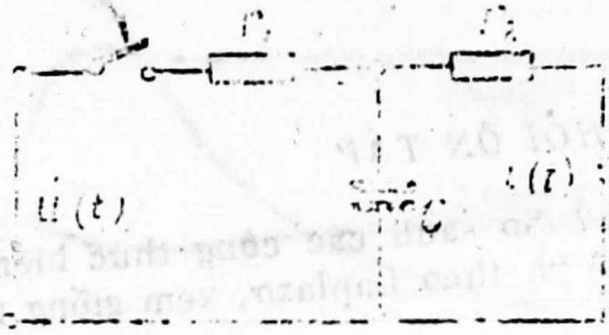
BÀI TẬP

20-1) Dùng biến đổi Furiê tính dòng quá độ $i(t)$ và điện áp quá độ trên tụ $u_C(t)$, khi đóng một mạch nối tiếp r-C vào một điện áp : a) bước nhảy $u(t) = U \cdot 1(t)$; b) hàm mũ $u(t) = 1(t)\, U\, e^{-at}$.

Đáp : a) $\dfrac{U}{r} \exp\left(-\dfrac{t}{rC}\right)$ A ; $U\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{rC}\right)\right]$.

b) $\dfrac{U}{r}\dfrac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$, với $b = \dfrac{1}{rC}$.

20-2. Tính dòng quá độ $i(t)$ trong mạch h. 20-15 khi đóng mạch vào một điện áp bước nhảy $1(t)U$. Cho $r_1 = 5\ \Omega$; $r_2 = 20\ \Omega$; $C = 1\ \mu F$; $U = 10$ V.



H. 20-15

Đáp: $0{,}4(1 - e^{-0{,}25.10^6 t})$ A.

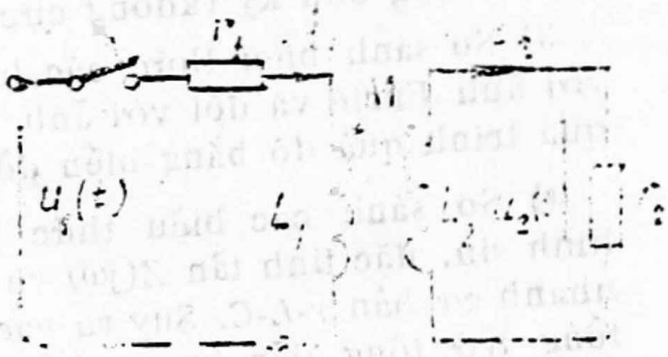
20-3. Một biến áp lõi không khí có sơ đồ như h. 20-16 được đóng mạch vào một nguồn áp không đổi U.

a) Hãy tính đặc tính tần truyền đạt áp

$$K(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega).$$

b) Vẽ đặc tính tần thực $K_1(\omega)$, đã biết $r_1 = 5\ \Omega$; $L_1 = 0{,}1$ H; $r_2 = 10\ \Omega$; $L_2 = 0{,}05$ H; $M = 0{,}08$ H.

c) Hãy dùng phương pháp hình thang tính hàm $u_2(t)$ khi đóng mạch vào một nguồn một chiều $U = 2$ V.



H. 20-16

Đáp: $Q = K_1(\omega) = 0{,}5\,\omega / [(50 + 0{,}0014\,\omega^2)^2 + 1{,}56\,\omega^2]$.

ω	0	40	80	150	200	300	500	1000	2000	3000
K_1	0	0,153	0,237	0,27	0,272	0,263	0,228	0,1365	0,05	0,01

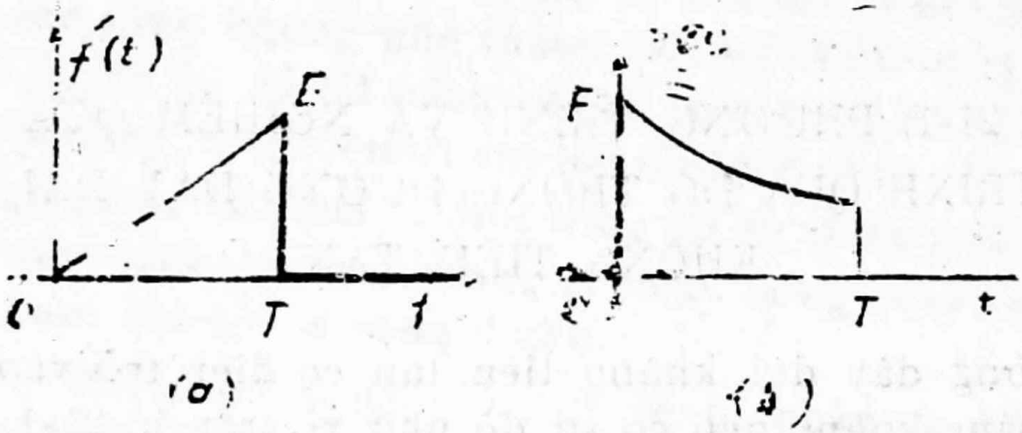
$u_2(t_{ms}) = 0{,}33(1)$; $0{,}52(2)$; $0{,}56(5)$; $0{,}46(10)$; $0{,}3(20)$; $0{,}09(50)$; $0{,}01(100)$.

20-4. Vẫn máy biến áp như bài tập 3, đóng mạch vào một điện áp hàm mũ $u(t) = 1(t)\ U\ e^{-at} = 1(t) \cdot 10\ e^{-10t}$ V. Hãy vẽ đặc tính $Q(\omega)$ và dùng phương pháp hình thang tính điện áp truyền đạt sang cửa ra.

Đáp: $u_2(t_{ms}) = 0(0)$; $1{,}9(1)$; $2{,}6(2)$; $2{,}7(5)$; $2{,}1(10)$; $1{,}14(20)$; $0{,}15(40)$; $0(50)$; $-0{,}08(100)$; $-0{,}14(200)$; $-0{,}02(400)$.

20-5. Tìm phổ tần các hàm: a) xung răng cưa h. 20-17a), b) xung hàm mũ tắt dần $E\,e^{-at}\,[1(t)-1(t-\tau)]$ như h. 20-17b.

Đáp: a) $-E\left(\dfrac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega}+\dfrac{1-e^{-j\omega\tau}}{\tau\omega^2}\right)$; b) $\dfrac{E}{j\omega+a}(1-e^{-j\omega\tau})$.



H. 20-17

CHƯƠNG XXI

QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG ĐƯỜNG DÂY DÀI KHÔNG TIÊU TÁN

Mục đích:

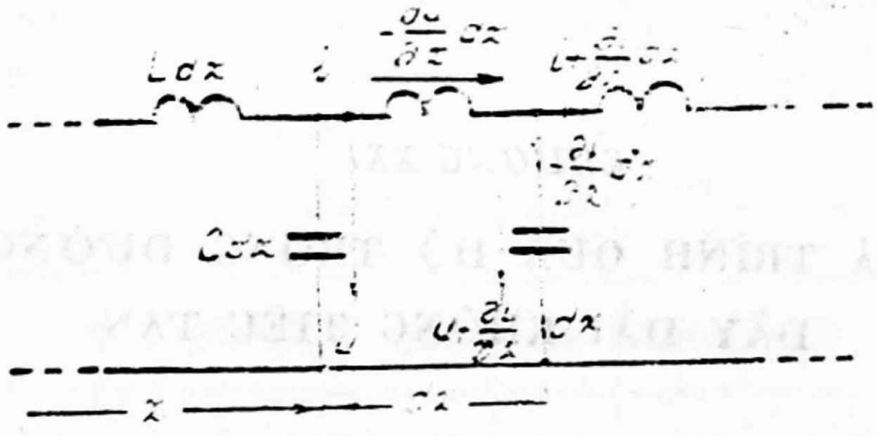
Làm rõ sự truyền sóng, phản xạ, khúc xạ của sóng trên đường dây không tiêu tán và biết cách tính sóng phản xạ và khúc xạ trong quá trình quá độ.

Cũng như trong mạch có thông số tập trung, trong mạch có thông số rải khi thông số đột biến (đóng cắt nguồn hay tải, ngắn mạch, đứt dây...) sẽ phát sinh quá trình quá độ. Ngoài ra quá trình quá độ còn phát sinh khi truyền các xung tín hiệu theo các đường dây thông tin hoặc khi có những xung sét đánh thẳng vào hoặc cảm ứng vào đường dây.

Chương này xét quá trình quá độ trong đường dây dài không tiêu tán. Trong đường dây này ở quá trình quá độ sẽ có những sóng điện từ (cụ thể là sóng áp và dòng) lan truyền theo đường dây và phản xạ qua lại.

§ 21-1. PHƯƠNG TRÌNH VÀ NGHIỆM QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG ĐƯỜNG DÂY DÀI KHÔNG TIÊU TÁN.

Đường dây dài không tiêu tán có điện trở và điện dẫn bằng không nên có sơ đồ như vẽ trên h. 21-1.



H.

Phương trình mô tả quá trình quá độ trong đường dây dài (tr. 4) theo các luật Kirhof sẽ có dạng:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}1)$$

Trong đó L, C là điện cảm và điện dung trên đơn vị dài đường dây.

Đầu tiên ta dựa trên lập luận vật lý để dẫn ra nghiệm của hệ phương trình (21-1).

Giả thiết đường dây ở thời điểm $t = 0$ được đóng vào một nguồn điện áp $u(t)$. Trong không gian dọc theo đường dây sẽ thành lập một trường điện từ. Sóng điện từ chuyển động từ đầu đến cuối dây. Trong trường hợp đường dây không có tổn hao, như đã biết vận tốc sóng không phụ thuộc tần số, (xem công thức (16-23)) và hệ số tắt bằng không, nên toàn bộ phổ tần số của sóng sẽ truyền đi với tốc độ như nhau và không bị suy giảm, kết quả là một sóng áp và dòng truyền từ đầu đến cuối dây mà không bị méo. Sóng chạy từ đầu đến cuối lên gọi là sóng thuận.

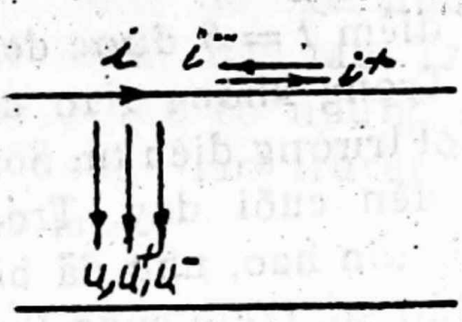
Đến cuối dây sóng điện từ sẽ bị phản xạ trở lại. Sóng phản xạ chạy ngược từ cuối đến đầu dây gọi là sóng ngược. Ở đầu dây sóng ngược lại bị phản xạ lần nữa cho thêm một sóng chạy từ đầu đến cuối dây là sóng thuận thứ hai.

Quá trình cứ tiếp diễn như vậy nên trên đường dây ở tọa độ x và thời điểm t nào đó sẽ có một tập hợp sóng thuận và một tập hợp sóng ngược. Như nêu ở m. 16-3, sóng thuận có biểu thức $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ và sóng ngược $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ nên có thể viết :

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= u^+\left(t - \frac{x}{v}\right) + u^-\left(t + \frac{x}{v}\right) \\ i(x, t) &= i^+\left(t - \frac{x}{v}\right) - i^-\left(t + \frac{x}{v}\right) \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}2)$$

Ở đây chiều dương các điện áp thuận và ngược đều chọn giống với chiều dương của điện áp tổng u vì cùng từ dây trên xuống dây dưới (h. 21-2).

Chiều dương của dòng điện thuận chọn trùng với chiều của dòng điện tổng hướng từ đầu đến cuối dây, chiều dương của dòng điện ngược chọn hướng từ cuối dây đến đầu dây, do đó dòng điện trong đường dây bằng hiệu số của dòng điện thuận và dòng điện ngược.



H. 21-2

Bây giờ tá sẽ dùng công cụ toán học để tìm nghiệm của hệ phương trình (21-1). Đó là một hệ phương trình đạo hàm riêng nên áp và dòng là hàm của hai biến không gian x, và thời gian t, có thể coi một cách hình thức là một hàm phân bố theo x, và biến thiên theo t. Vì vậy dùng toán tử Laplaxơ có thể chuyển từ các hàm gốc $u(x, t)$, $i(x, t)$ sang các hàm ảnh $U(x, p)$, $I(x, p)$ là hàm của riêng của biến không gian x (với p coi là thông số) và hệ phương trình đạo hàm riêng đối với $u(x, t)$, $i(x, t)$ sẽ trở thành hệ phương trình vi phân thường đối với $U(x, p)$ và $I(x, p)$.

Thật vậy, nếu :

$$\left.\begin{aligned} & u(x, t) \leftrightarrow U(x, p), \\ \text{thì} \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \leftrightarrow \frac{d}{dx} U(x, p); \\ \text{và} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} \leftrightarrow p\,U(x, p) - u(x, 0). \end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}3)$$

Ta cũng biến đổi tương tự như vậy cho dòng $i(x, t)$. Hệ phương trình (21-1) sẽ chuyển thành :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dU(x, p)}{dx} &= pLI(x, p) - Li(x, 0); \\ -\frac{dI(x, p)}{dx} &= pCU(x, p) - Cu(x, 0). \end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}4)$$

Giả thiết ở thời điểm ban đầu điện áp và dòng điện trên đường dây đều bằng không $u(x, 0) = 0$ và $i(x, 0) = 0$, ta có một hệ đơn giản :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}U(x, p)}{\mathrm{d}x} &= pLI(x, p); \\ -\frac{\mathrm{d}I(x, p)}{\mathrm{d}x} &= pCU(x, p). \end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}5)$$

Đạo hàm phương trình (21-5) một lần nữa theo x :

$$-\frac{d^2U}{dx^2}U(x,p) = pL\frac{d}{dx}I(x, p).$$

và xét đến (21-5b) ta được :

$$\frac{d^2U(x, p)}{dx^2} = p^2LCU(x, p).$$

Tương tự như vậy ta được phương trình đối với dòng điện :

$$\frac{d^2I(x, p)}{dx^2} = p^2LCI(x, p).$$

Đặt :

$$\gamma = p\sqrt{LC} \qquad (21\text{-}6)$$

cuối cùng ta có :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}U(x, p) - \gamma^2U(x, p) &= 0; \\ \frac{d^2}{dx^2}I(x, p) - \gamma^2I(x, p) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}7)$$

Các phương trình (21-7) viết cho ảnh của dòng và áp quá độ trên đường dây hoàn toàn giống các phương trình (16-10) viết cho ảnh phức dòng, áp trên đường dây trong chế độ xác lập điều hòa.

Nghiệm của phương trình (21-7) là :

$$U(x, p) = A_1(x, p)\,e^{-\gamma x} + A_2(x, p)\,e^{\gamma x} =$$

$$= A_1(x, p)\,e^{-p\sqrt{LC}\,x} + A_2(x, p)\,e^{p\sqrt{LC}\,x}, \qquad (21\text{-}8)$$

trong đó $\pm\gamma = \pm p\sqrt{LC}$, A_1 và A_2 là các hằng số tích phân được xác định theo các biên kiện.

Theo (21-5):

$$I(x,p) = -\frac{1}{pL}\frac{dU(x,p)}{dx} =$$

$$= -\frac{1}{pL}\left[-\gamma A_1(x,p)e^{-\gamma x} + \gamma A_2(x,p)e^{\gamma x}\right] =$$

$$= \frac{A_1(x,p)}{\sqrt{L/C}}e^{-p\sqrt{LC}x} - \frac{A_2(x,p)}{\sqrt{L/C}}e^{p\sqrt{LC}x}. \quad (21\text{-}9)$$

Dùng biến đổi ngược từ ảnh ra gốc với:

$$\left.\begin{aligned} &U(x,p) \leftrightarrow u(x,t);\ I(x,p) \leftrightarrow i(x,t);\\ &\text{và}\\ &A_1(x,p) \leftrightarrow f_1(x,t);\ A_2(x,p) \leftrightarrow f_2(x,t). \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}10)$$

và theo định lý chậm trễ:

$$\left.\begin{aligned} A_1(x,p)\,e^{-p\sqrt{LC}x} &\leftrightarrow f_1(t-\sqrt{LC}x);\\ A_2(x,p)\,e^{p\sqrt{LC}x} &\leftrightarrow f_2(t+\sqrt{LC}x). \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}11)$$

ta được:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= f_1(t-\sqrt{LC}x) + f_2(t+\sqrt{LC}x);\\ i(x,t) &= \frac{f_1(t-\sqrt{LC}x)}{\sqrt{L/C}} - \frac{f_2(t+\sqrt{LC}x)}{\sqrt{L/C}}. \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}12)$$

Đặt $$\sqrt{LC} = 1/v \text{ và } \sqrt{L/C} = z_c. \quad (21\text{-}13)$$

ta được:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= f_1\left(t-\frac{x}{v}\right) + f_2\left(t+\frac{x}{v}\right) =\\ &= u^+\left(t-\frac{x}{v}\right) + u^-\left(t+\frac{x}{v}\right);\\ i(x,t) &= \frac{u^+\left(t-\frac{x}{v}\right)}{z_c} - \frac{u^-\left(t+\frac{x}{v}\right)}{z_c} =\\ &= i^+\left(t-\frac{x}{v}\right) - i^-\left(t+\frac{x}{v}\right). \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}14)$$

Như vậy ta được biểu thức toán học của áp và dòng phù hợp với bản chất vật lý đã nêu ở trên.

Từ chứng minh nêu trên ta cũng được các thông số đặc trưng quá trình truyền sóng trên đường dây không tổn hao là *tốc độ truyền sóng* v *và tổng trở sóng* z_c :

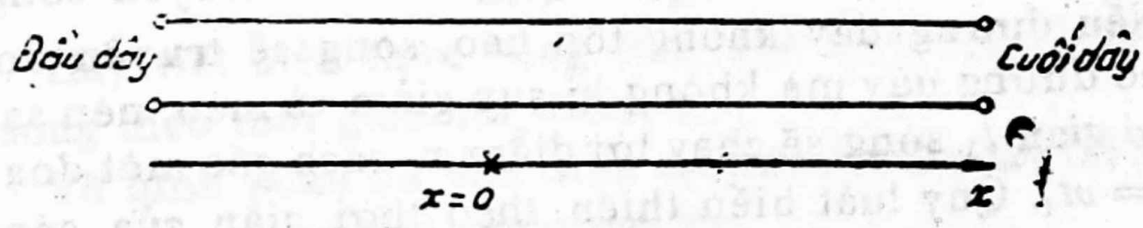
$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$
$$z_c = \frac{u^+}{i^+} = \frac{u^-}{i^-} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (21\text{-}13)$$

Vì L và C phụ thuộc hình dáng kích thước đường dây, vật liệu làm dây dẫn và môi trường xung quanh đường dây nên tốc độ sóng v và tổng trở sóng z_c cũng phụ thuộc vào những yếu tố đó.

§ 21-2. BIỂU THỨC SÓNG CHẠY VÀ DẠNG PHÂN BỐ SÓNG TRÊN ĐƯỜNG DÂY.

Trong quá trình quá độ thường cần phải xét phân bố sóng trên đường dây ở một thời điểm nào đó, nếu đã biết quy luật biến thiên sóng theo thời gian tại một điểm xác định trên đường dây.

Chọn một điểm tùy ý nào đó trên đường dây làm gốc tọa độ không gian $x = 0$ và chọn một chiều tùy ý làm



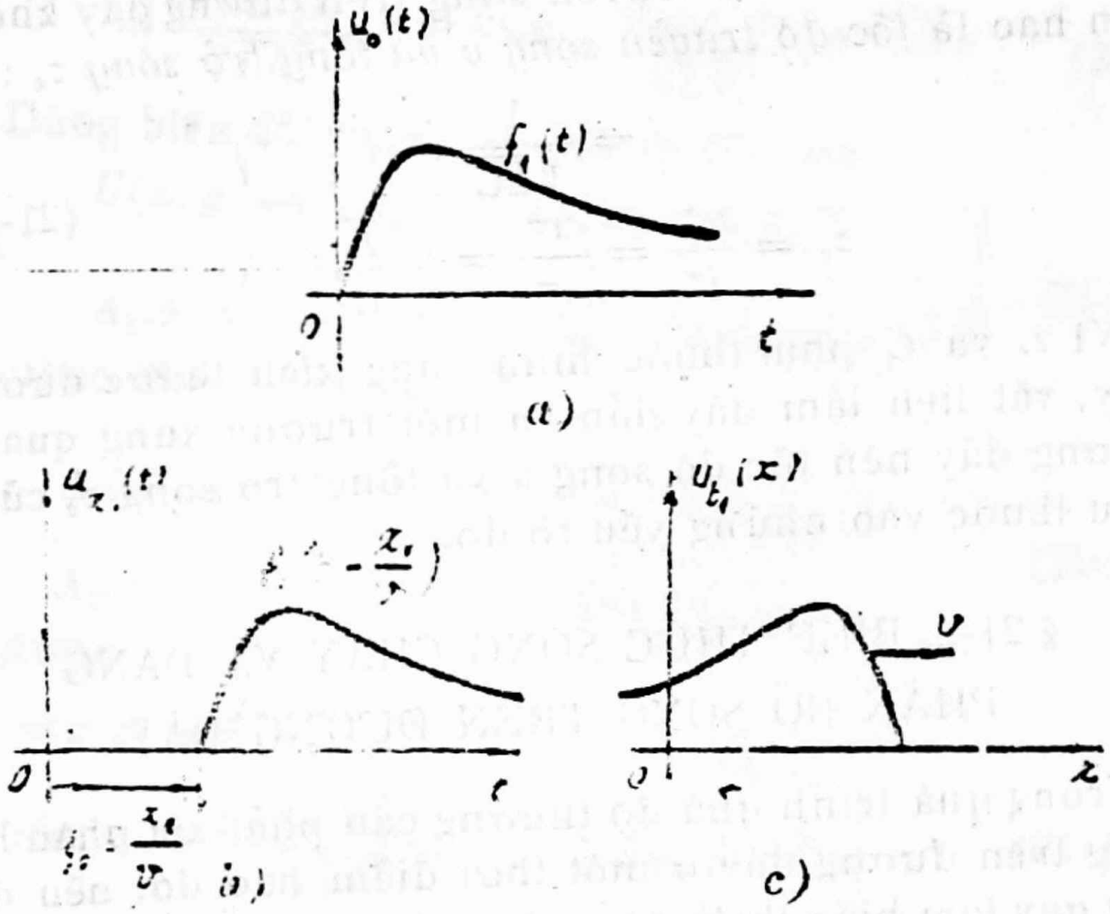
H. 21-3

chiều tăng của tọa độ x ví dụ hướng về phía cuối (hay phía đầu đường dây). Gốc thời gian $t = 0$ chọn là thời điểm khi sóng bắt đầu xuất hiện tại điểm gốc $x = 0$ (h. 21-3).

Giả thiết một sóng điện áp bắt đầu xuất hiện tại $x = 0$ và biến thiên ở đó theo một quy luật thời gian

$$u(0, t) = f_1(t).$$

Đồ thị $f_1(t)$ được vẽ trên h. 21-4.



H. 21-4 (a, b, c).

Giả sử sóng này truyền từ đầu đến cuối đường dây (sóng thuận) và chọn tọa độ x cũng hướng từ đầu đến cuối đường dây tức là hướng theo chiều truyền sóng.

Nếu đường dây không tổn hao, sóng sẽ truyền dọc theo đường dây mà không bị suy giảm và méo, nên sau thời gian t_1 sóng sẽ chạy tới điểm x_1 cách gốc một đoạn $x_1 = vt_1$. Quy luật biến thiên theo thời gian của sóng tại x_1 lặp lại hoàn toàn giống quy luật biến thiên của sóng tại gốc chỉ khác là chậm sau một thời gian $t_1 = x_1/v$.

Vậy:

$$u_{x_1} = f_1\left(t - \frac{x_1}{v}\right). \qquad (21\text{-}15)$$

Nếu trong biểu thức (21-15) thay x_1 bằng x là tọa độ chạy, ta sẽ được biểu thức của sóng chạy:

$$u_x(t) = u(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right). \qquad (21\text{-}16)$$

Vậy biểu thức của một sóng chạy thuận theo chiều x với tốc độ v sẽ được bằng cách lấy biểu thức của sóng theo thời gian tại điểm gốc $u(x = 0, t)$ và thay t bằng $t - \frac{x}{v}$.

Bây giờ ta vẽ dạng phân bố sóng trên đường dây tại một thời điểm.

Nếu trong biểu thức (21-16) thay $t = t_1$ ta sẽ được:

$$u(x, t_1) = u_{t_1}(x) = f_1\left(t_1 - \frac{x}{v}\right). \qquad (21\text{-}17)$$

Nó là một hàm của tọa độ x và chính là quy luật phân bố sóng trên đường dây tại thời điểm $t = t_1$. Sự phân bố sóng theo x (21-17) vẽ trên h. 21-4c. Nó giống như ảnh soi gương qua một trục song song với trục tung độ đi qua điểm t_1 của đường cong $u_{x_1}(t)$.

Ví dụ 21-1:

Ở thời điểm $t = 0$ ta đóng vào đầu một đường dây dài vô hạn, không tổn hao một nguồn áp:

$$u(t) = U_0 e^{-\alpha t}$$

Hãy viết biểu thức sóng chạy của điện áp, vẽ đồ thị sóng theo thời gian tại điểm x_1.

Vẽ hình phân bố của điện áp trên đường dây tại thời điểm $t = t_1$ sau khi đóng nguồn.

Giải. Chọn gốc tọa độ $x = 0$ là đầu đường dây, và trục tọa độ x hướng từ đầu đến cuối đường dây. Gốc thời gian là thời điểm sóng bắt đầu xuất hiện ở đầu đường dây tức là thời điểm đóng mạch.

Quy luật biến thiên theo thời gian của điện áp ở đầu đường dây là :

$$u(0,\ t) = u_0(t) = U_0\ e^{-at}.$$

Quy luật biến thiên theo thời gian của điện áp tại điểm x_1 có dạng :

$$u_{x1}(t) = u\left(t - \frac{x_1}{v}\right) = U_0\ e^{-a\left(t-\frac{x_1}{v}\right)}.$$

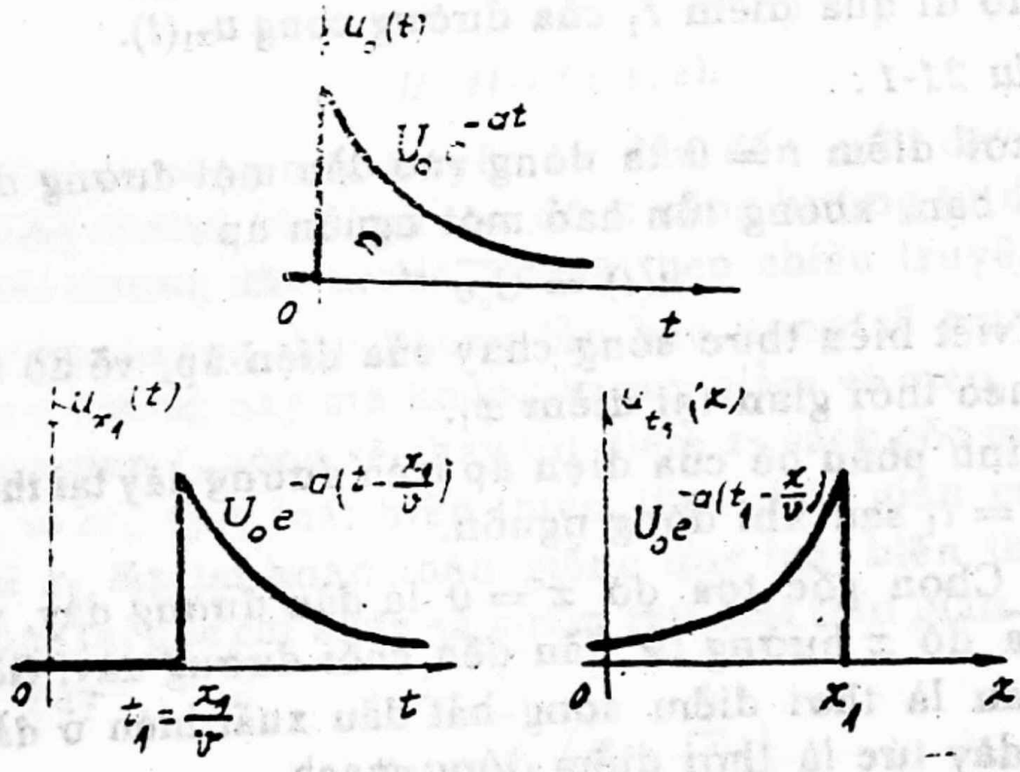
Biểu thức sóng chạy :

$$u(x_1, t) = u\left(t - \frac{x}{v}\right) = U_0\ e^{-a\left(t-\frac{x}{v}\right)}.$$

Quy luật phân bố của sóng trên đường dây tại thời điểm t_1 :

$$u_{t_1}(x) = u(x,\ t_1) = u\left(t_1 - \frac{x}{v}\right) = U_0\ e^{-a\left(t_1-\frac{x}{v}\right)}$$

Các đồ thị $u_0(t)$, $u_{x_1}(t)$ và $u_{t_1}(x)$ được vẽ trên h. 21-5.



H. 21-5

Trong trường hợp có một sóng ngược chạy từ cuối đến đầu đường dây, nếu chọn tọa độ x' cũng hướng từ cuối đến đầu đường dây tức theo chiều truyền song ta cũng được những kết luận như trên.

Nếu tại gốc tọa độ ($x' = 0$) có một sóng ngược biến thiên theo thời gian theo luật :

$$u(x' = 0,\ t) = u_o(t) = f_2(t), \qquad (21\text{-}18)$$

thì biểu thức sóng ngược sẽ là :

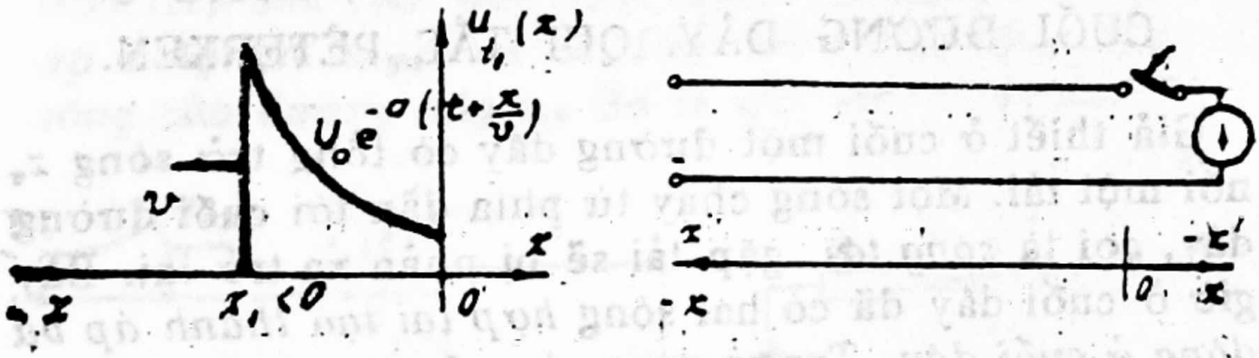
$$u(x',\ t) = f_2\left(\ -\frac{x'}{v}\right). \qquad (21\text{-}19)$$

Nếu chọn trục x vẫn hướng từ đầu đến cuối đường dây thì biểu thức sóng ngược sẽ được bằng cách thay x' trong biểu thức này bằng $-x$, ta được :

$$u(x,\ t) = f_2\left(\ t + \frac{x}{v}\right). \qquad (21\text{-}20)$$

Ví dụ 21-2.

Một nguồn điện áp $u = U_o\ e^{-\alpha t}$ được đóng vào cuối đường dây nói trên. Viết biểu thức của sóng chạy và vẽ hình phân bố của sóng trên đường dây tại thời điểm t_1.



H. 21-6

a) Nếu chọn tọa độ x' hướng từ cuối đến đầu đường dây.

b) Nếu chọn tọa độ x hướng từ đầu đến cuối đường dây.

Giải. a) Bây giờ sóng bắt đầu phát sinh ở cuối đường dây và chạy từ cuối đến đầu đường dây với tốc độ v.

Nếu chọn gốc tọa độ ($x' = 0$) là cuối đường dây, và chiều tăng của x' từ cuối đến đầu đường dây, còn gốc thời gian chọn là thời điểm đóng nguồn vào cuối đường dây thì biểu thức sóng ngược là :

$$u(x', t) = U_0 e^{-a\left(t - \frac{x'}{v}\right)}.$$

Nếu chiều tăng của tọa độ x vẫn hướng từ đầu đến cuối đường dây thì biểu thức sóng ngược có dạng :

$$u(x, t) = u\left(t + \frac{x}{v}\right) = U_0 e^{-a\left(t + \frac{x}{v}\right)}.$$

Dạng phân bố của sóng trên đường dây tại thời điểm t_1 :

$$u_{t_1}(x) = u(x, t_1) = u\left(t_1 + \frac{x}{v}\right) = U_0 e^{-a\left(t_1 + \frac{x}{v}\right)}.$$

Đồ thị $u_{t_1}(x)$ bây giờ có dạng giống như đồ thị $u_{x_1}(t)$ ở h. 21-5.

§21-3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ÁP, DÒNG Ở CUỐI ĐƯỜNG DÂY. QUI TẮC PÊTERXEN.

Giả thiết ở cuối một đường dây có tổng trở sóng z_0 nối một tải. Một sóng chạy từ phía đầu tới cuối đường dây, gọi là *sóng tới*, gặp tải sẽ bị phản xạ trở lại. Bây giờ ở cuối dây đã có hai sóng *hợp lại tạo thành áp và dòng ở cuối dây*. Trong mục này sẽ nêu một phương pháp đơn giản tính các lượng phản xạ, khúc xạ, gọi là *phương pháp Pêterxen*.

Chọn gốc tọa độ là cuối đường dây và gốc thời gian là thời điểm sóng vừa tới cuối đường dây. Ký hiệu cuối đường dây là điểm 2, điện áp và dòng điện ở cuối đường dây là u_2 và i_2.

Bắt đầu từ thời điểm $t = 0$ điện áp cuối đường dây sẽ bằng tổng của điện áp sóng tới và điện áp sóng phản xạ:

$$u_2 = u_{2\,tới} + u_{2\,phản}. \qquad (21\text{-}21)$$

Còn dòng điện ở cuối đường dây bằng hiệu của dòng điện sóng tới và dòng điện sóng phản xạ:

$$i_2 = i_{2\,tới} - i_{2\,phản}. \qquad (21\text{-}22)$$

Sóng tới (cũng như sóng phản xạ) của dòng và áp liên hệ với nhau theo hệ thức:

$$i_{tới} = \frac{u_{tới}}{z_c} \text{ và } i_{phản} = \frac{u_{phản}}{z_c}.$$

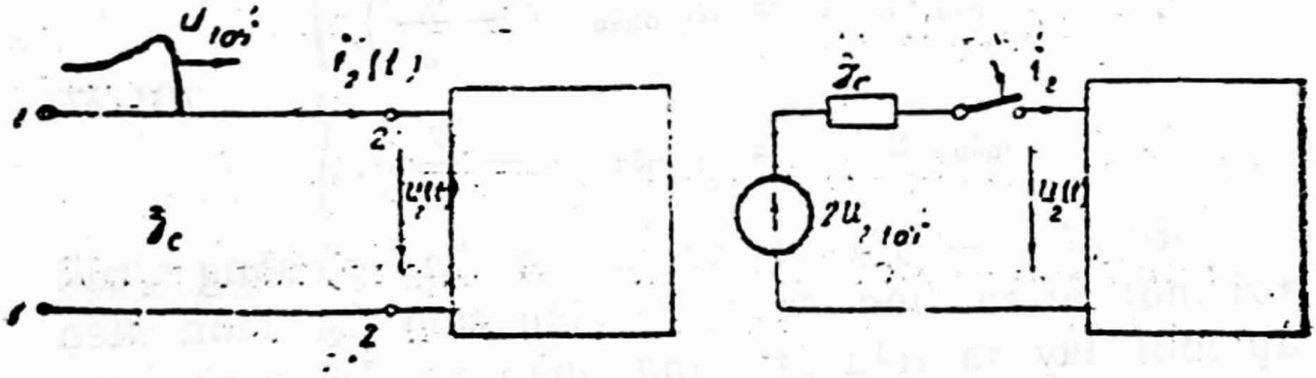
Nên có thể viết:

$$i_2 z_c = u_{2\,tới} - u_{2phản}. \qquad (21\text{-}23)$$

Cộng (21-21) với (21-23) ta được phương trình

hay
$$\left.\begin{aligned} u_2 + i_2 z_c &= 2u_{2\,tới}, \\ 2u_{2\,tới} - i_2 z_c &= u_2. \end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}24)$$

Phương trình này chứng tỏ rằng áp và dòng ở cuối đường dây u_2 và i_2 được tính giống như là khi đóng trực tiếp vào cuối dây một nguồn áp bằng hai lần điện áp sóng tới $2u_{2tới}$ và có điện trở trong bằng tổng trở sóng của đường dây z_c. Đó là quy tắc Pêterxen.



H. 21-7

Sơ đồ điện tương đương thỏa mãn phương trình (21-24) được vẽ trên h. 21-7. Đó là sơ đồ *Pêterxen.*

Quy tắc Pêterxen có ý nghĩa quan trọng ở chỗ là nó cho ta *đưa việc tính quá trình quá độ trong mạch có thông số rải về việc tính quá trình quá độ trong mạch có thông số tập trung.*

Để tính điện áp u_2 và dòng điện i_2 trong sơ đồ Pêterxen có thể dùng các phương pháp kinh điển hay toán tử đã biết.

§ 21-4. TÌM CÁC SÓNG PHẢN XẠ TỪ CUỐI ĐƯỜNG DÂY

Sau khi tính được u_2 và i_2 sẽ tính được sóng phản xạ theo các phương trình:

$$\left.\begin{aligned} u_{2\,\text{phản}} &= u_2 - u_{2\,\text{tới}}, \\ i_{2\,\text{phản}} &= i_{2\,\text{tới}} - i_2 = \frac{u_{2\,\text{phản}}}{z_2}. \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}25)$$

Sóng phản xạ của áp và dòng ở cuối đường dây tính được như vậy, nói chung là hàm của thời gian:

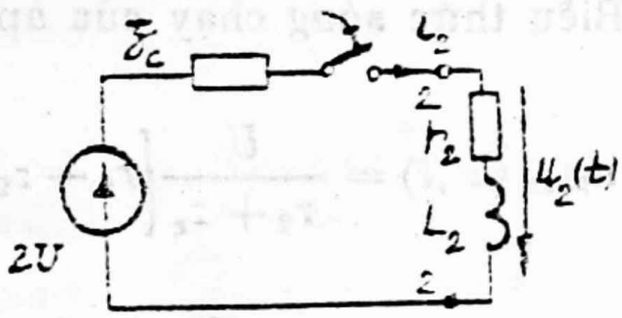
$$\left.\begin{aligned} u_{2\,\text{phản}} &= u_{\text{phản}}(0, t), \\ i_{2\,\text{phản}} &= i_{\text{phản}}(0, t). \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}26)$$

Sóng phản xạ này chạy từ cuối đến đầu đường dây nên nếu chọn trục tọa độ x' hướng từ cuối đến đầu đường dây thì biểu thức sóng phản xạ sẽ có dạng:

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{phản}}(x', t) &= u_{2\,\text{phản}}\left(t - \frac{x'}{v}\right); \\ i_{\text{phản}}(x', t) &= i_{2\,\text{phản}}\left(t - \frac{x'}{v}\right). \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}27)$$

Ví dụ 21-3. — Một đường dây có tổng trở sóng z_2 nối với một tải có điện trở r_2 và điện cảm L_2. Tính điện áp cuối dây và điện áp sóng phản xạ. Vẽ hình phân bố sóng phản xạ và sóng tổng trên đường dây khi có một điện áp chữ nhật U chạy tới cuối đường dây.

Giải. Sơ đồ Pêterxen đối với trường hợp này được vẽ trên h. 21-8. Ta tính u_2 và i_2 trong sơ đồ bằng phương pháp tích phân kinh điển.



H. 21-7

Ta có dòng điện :

$$i_2 = i_{2xl} + i_{2td} = \frac{2U}{z_c + r_2} + A\,e^{-\frac{t}{\tau}};$$

trong đó :

$$\tau = \frac{L}{z_c + r_2}.$$

Với điều kiện đầu $i_2(0) = i_{L_2}(0) = i_{L_2}(-0) = 0$ ta được :

$$A = -\frac{2U}{z_c + r_c}.$$

Vậy

$$i_2 = \frac{2U}{z_c + r_2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Điện áp ở cuối đường dây :

$$u_2 = 2U_{c0} - i_2 z_c = \frac{2U}{z_c + r_2}(r_2 + z_c\,e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Bây giờ ta tính điện áp và dòng điện phản xạ :

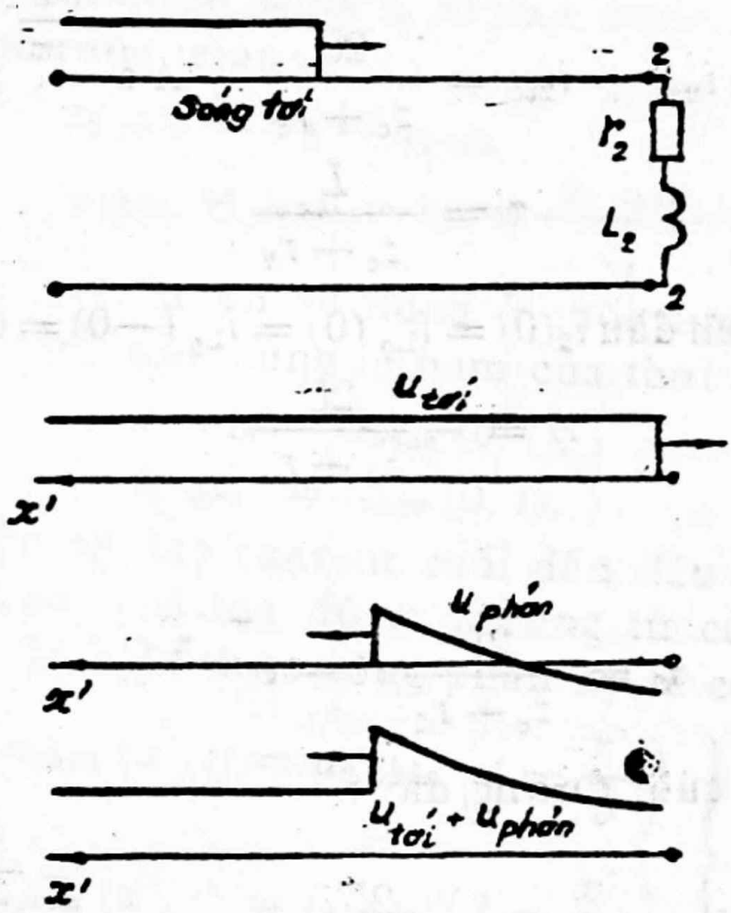
$$u_{2phản} = u_2 - U = \frac{U}{r_2 + z_c}(r_2 - z_c + 2z_c\,e^{-\frac{t}{\tau}});$$

$$i_{2phản} = \frac{u_{2phản}}{z_c} = \frac{U}{z_c(r_2 + z_c)}(r_2 - z_c + 2z_c\,e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Biểu thức sóng chạy của áp và dòng phản xạ :

$$u_{\text{phản}}(x',t) = \frac{U}{r_2 + z_c}\left[r_2 - z_2 + 2z_c\, e^{-\left(t - \frac{x'}{v}\right)}\right];$$

$$i_{\text{phản}}(x',t) = \frac{U}{z_c(r_2 + z_c)}\left[r_2 - z_c + 2z_c\, e^{-\left(t - \frac{x'}{v}\right)}\right].$$

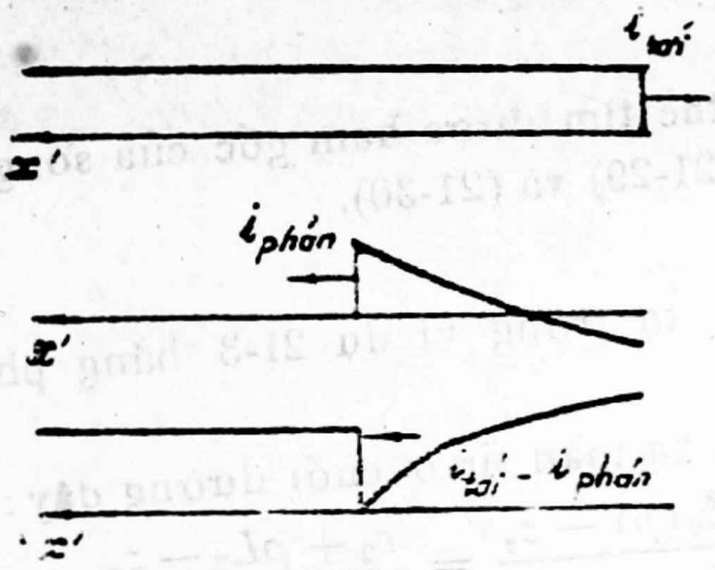


H. 21-8a

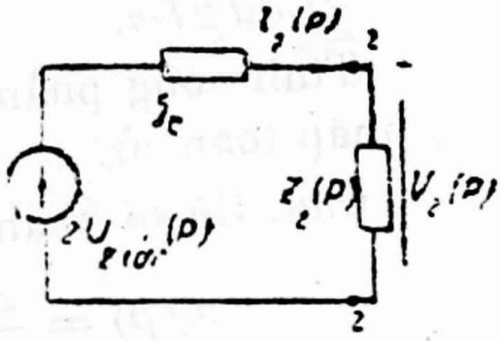
H. 21-9 vẽ sự phân bố áp và dòng trên đường dây khi sóng phản xạ chưa chạy tới đầu dây.

Ta cũng có thể tính sóng phản xạ bằng phương pháp toán tử. Sơ đồ Pêterxen dưới dạng toán tử, vẽ trong h. 21-10.

Từ sơ đồ này ta được biểu thức các ảnh $I_2(p)$ và $U_2(p)$:



H. 21-9b



H. 21-10

$$\left.\begin{aligned} I_2(p) &= \frac{2U_{2\text{tới}}(p)}{z_c + Z_2(p)}; \\ U_2(p) = Z_2(p)\ I_2(p) &= 2U_{2\text{tới}}(p)\ \frac{Z_2(p)}{z_c + Z_2(p)}. \end{aligned}\right\} \quad (21\text{-}28)$$

Dùng (21-28b) ta dễ tìm được ảnh của điện áp phản xạ :

$$U_{2\text{phản}}(p) = U_2(p) - U_{2\text{tới}}(p) =$$

$$= 2U_{2\text{tới}}(p)\ \frac{Z_2(p)}{z_c + Z_2(p)} - U_{2\text{tới}}(p) = \frac{Z_2(p) - z_c}{Z_2(p) + z_c}\ U_{2\text{tới}}(p). \quad (21\text{-}29a)$$

Đặt $n_2(p) = \dfrac{Z_2(p) - z_c}{Z_2(p) + z_c}$

là hệ số phản xạ toán tử ở cuối đường dây ta có :

$$U_{2\text{phản}}(p) = n_2(p)\ U_{2\text{tới}}(p). \quad (21\text{-}29b)$$

Tương tự, dùng (21-28a) ta dễ tìm được ảnh dòng điện phản xạ :

$$I_{2\text{phản}}(p) = I_{2\text{tới}}(p) - I_2(p) = I_{2\text{tới}}(p) -$$

$$- \frac{2z_c}{z_c + Z_2(p)}\ \frac{U_{2\text{tới}}(p)}{z_c} = \frac{Z_2(p) - z_c}{Z_2(p) + z_c}\ I_{2\text{tới}}(p). \quad (21\text{-}30a)$$

Tức $I_{2\text{phản}}(p) = n_2(p)\ I_{2\text{tới}}(p)$. (21-30b)

Cuối cùng có thể tìm được hàm gốc của sóng phản xạ theo các ảnh (21-29) và (21-30).

Ví dụ 21-4.

Tính sóng phản xạ trong ví dụ 21-3 bằng phương pháp toán tử.

Giải. Hệ số phản xạ toán tử ở cuối đường dây:

$$n_2(p) = \frac{Z_2(p) - z_c}{Z_2(p) + z_c} = \frac{r_2 + pL_2 - z_c}{r_2 + pL_2 + z_c}$$

Ảnh của điện áp và dòng điện phản xạ ở cuối đường dây:

$$U_{2\,\text{phản}}(p) = n_2(p)\,U_{\text{tới}}(p) = \frac{r_2 + pL_2 - z_c}{r_2 + pL_2 + z_c} \cdot \frac{U}{p},$$

$$I_{2\,\text{phản}}(p) = n_2(p)\,I_{\text{tới}}(p) = n_2(p)\,\frac{U_{\text{tới}}(p)}{z_c} =$$

$$= \frac{r_2 + pL_2 - z_c}{r_2 + pL_2 + z_c} \cdot \frac{U}{z_c p}.$$

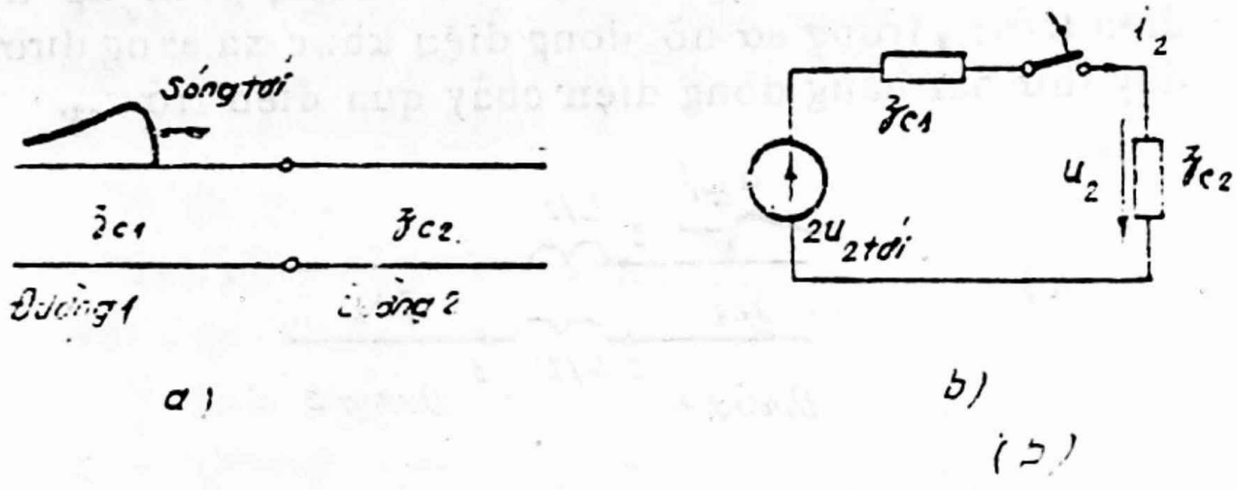
Theo các ảnh $U_{2\,\text{phản}}(p)$ và $I_{2\,\text{phản}}(p)$ ta tìm được các gốc $u_{2\,\text{phản}}(t)$ và $i_{2\,\text{phản}}(t)$ có dạng đúng như các kết quả đã được tính trong ví dụ trên.

§ 21-5. PHƯƠNG PHÁP TÍNH SÓNG KHÚC XẠ Ở CHỖ TIẾP GIÁP HAI ĐƯỜNG DÂY.

Giả thiết một đường dây có tổng trở sóng z_{c1} được nối tiếp với một đường dây khác có tổng trở sóng z_{c2} (h. 21-11).

Một sóng chạy trên đường dây thứ nhất đến chỗ nối hai đường dây (điểm 2) do yêu cầu của điều kiện bờ, sẽ sinh ra một sóng phản xạ trở lại đường dây thứ nhất và một sóng chạy sang đường dây thứ hai. Sóng chạy

từ đường dây thứ nhất sang đường dây thứ hai gọi là *sóng khúc xạ*. Giả thiết đường dây thứ hai dài và trong quãng thời gian mà sóng khúc xạ chưa kịp tới cuối



H. 21-11

dây 2 để cho thêm một sóng phản xạ chạy ngược trở lại. trên đường dây thứ hai mới chỉ có một sóng khúc xạ nên điện áp và dòng điện sóng khúc xạ ở đường dây thứ hai. *cụ thể là ở ngay đầu đường dây 2* liên hệ nhau bởi hệ thức :

$$\frac{u_{khúc}}{i_{khúc}} = z_{c2}. \qquad (21\text{-}31)$$

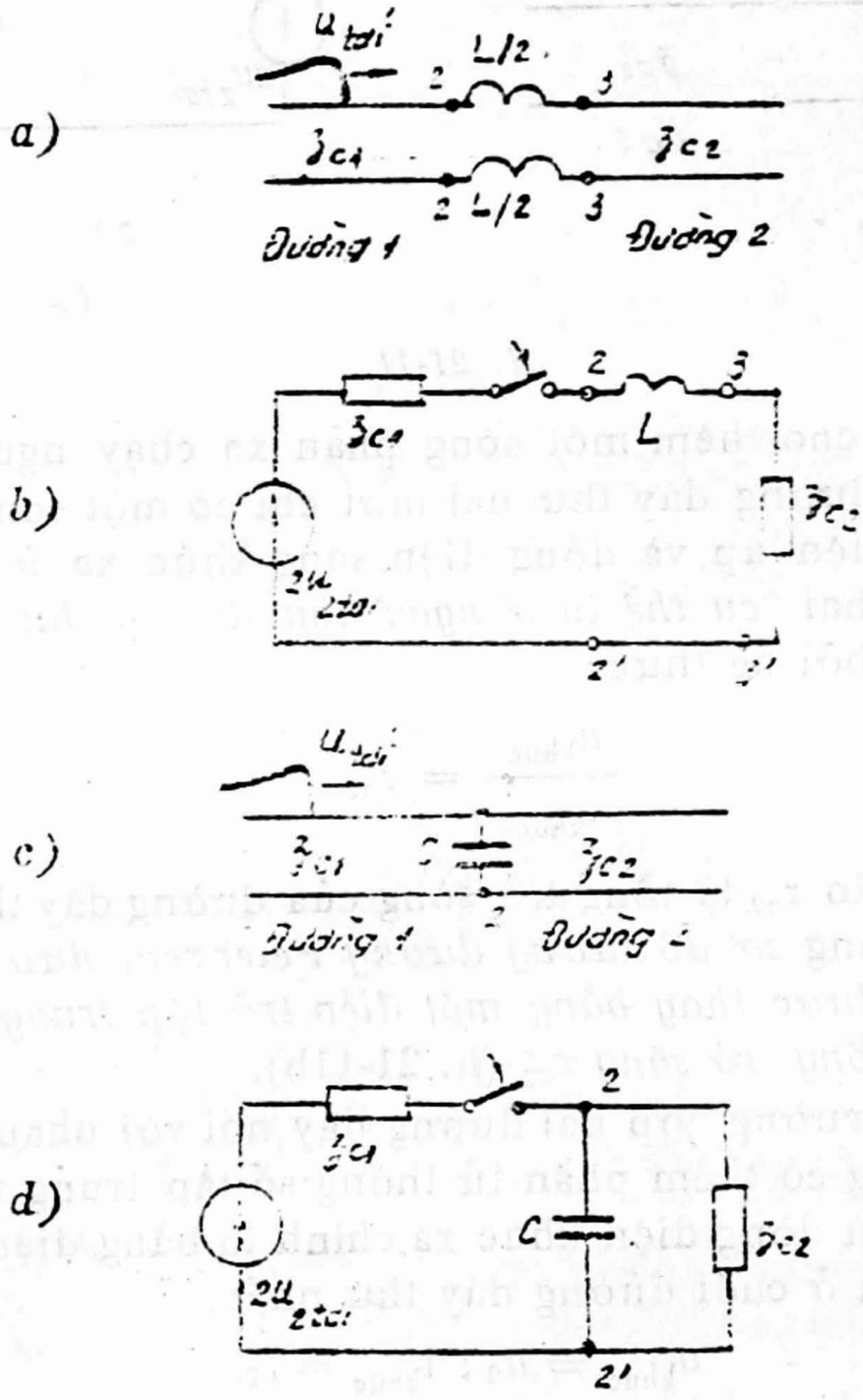
Trong đó z_{c2} là tổng trở sóng của đường dây thứ hai. Do đó trong *sơ đồ tương đương Pêterxen, đường dây thứ hai được thay bằng một điện trở tập trung có giá trị bằng tổng trở sóng* z_{c2} (h. 21-11b).

Trong trường hợp hai đường dây nối với nhau ở chỗ nối không có thêm phần tử thông số tập trung nào thì điện áp và dòng điện khúc xạ chính là bằng điện áp và dòng điện ở cuối đường dây thứ nhất :

$$u_{khúc} = u_2 \; ; \; i_{khúc} = i_2.$$

Trong trường hợp này ta có sơ đồ Pêterxen vẽ trên h. 21-11b. Nếu ở chỗ nối hai đường dây còn có thêm

các phần tử có thông số tập trung thì trong sơ đồ tương đương phải nối chúng vao. Tất nhiên lúc này điện áp khúc xạ sang đường dây thứ hai bằng điện áp trên điện trở z_{c2} trong sơ đồ, dòng điện khúc xạ sang đường dây thứ hai bằng dòng điện chảy qua điện trở z_{c2}.



H. 21-12

Ví dụ, khi ở chỗ chắp hai đường dây có nối tiếp một điện cảm tập trung L (h. 21-12a), hay nối song song

một điện dung C (h. 21-12c) có sơ đồ tương đương Pêterxen như vẽ trên h. 21-12b và 21-12d.

Khi nối một điện cảm hay điện dung tập trung như vậy, đầu sóng khúc xạ sẽ có dạng bớt dốc hơn đầu sóng tới. Điều này được ứng dụng trong việc bảo vệ các máy phát điện hay biến áp chống tác hại của sét truyền từ đường dây vào.

Ví dụ 21-5.

Một máy phát có tổng trở sóng $z_{c2} = 1200\Omega$ được nối với một đường dây có tổng trở sóng $z_{c1} = 300\Omega$.

Ở đầu máy phát có nối song song một tụ điện $C = 10^{-10}$ F. Tính điện áp khúc xạ vào máy phát khi có một sóng chữ nhật $U_o = 500$ kV chạy từ đường dây tới. Vẽ hình phân bố sóng khúc xạ.

Giải : Sơ đồ Pêterxen có dạng như trên h. 21-12d. Từ sơ đồ đó tính được điện áp khúc xạ u_2 :

$$u_2 = u_{2x1} + u_{21d} = u_{x1} + A\,e^{\frac{t}{\tau}}$$

trong đó :

$$\tau = \frac{z_{c1}\, z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} C = \frac{300 \cdot 1200}{300+1200} \cdot 10^{-10} = 24.10^{-9} \text{ s.}$$

$$u_{2x1} = \frac{2U_o\, z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} = 1000. \frac{1200}{300+1200} = 800 \text{ kV}$$

Theo điều kiện ban đầu $u_2(+0) = u_C(+0) = u_C(-0) = 0$

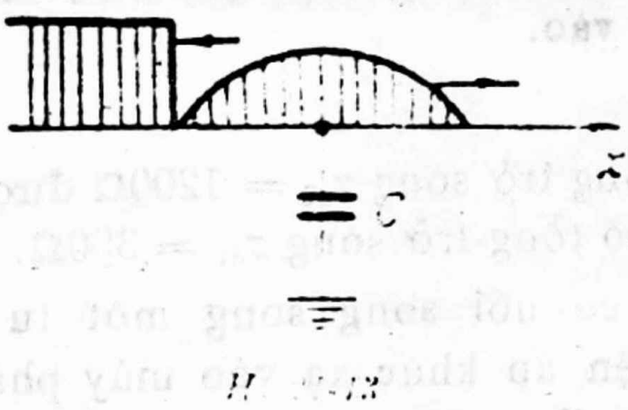
nên : $0 = 800 + A$, hoặc $A = -800$.

Vậy $u_2 = 800\,(1 - e^{-41 \cdot 10^6 t})$ kV.

Nếu chọn gốc tọa độ $x = 0$ là đầu đường dây thứ 2 và chiều tăng của x hướng về cuối đường dây thứ

hai thì phương trình của sóng khúc xạ viết:

$$u_2(x,t) = 800\,[1 - e^{-41 \cdot 10^6\left(t - \frac{x}{v}\right)}].$$



Sự phân bố của sóng điện áp vẽ trên h. 21-13.

Ta nhận thấy trong trường hợp này sóng điện áp khúc xạ có đầu sóng tăng thoải thoải theo hàm số mũ trong khi sóng tới có đầu sóng dốc đứng.

§ 21-5. PHẢN XẠ NHIỀU LẦN TRÊN ĐƯỜNG DÂY.

Để có khái niệm về sự phản xạ nhiều lần của sóng trên đường dây ta xét trường hợp đóng một nguồn điện áp không đổi U vào một đường dây không tải (h. 21-14).

Chọn gốc thời gian là thời điểm đóng nguồn. Nếu chiều dài đường dây là l thì trong khoảng thời gian $0 \leqslant t < \frac{l}{v}$ mới chỉ có một sóng điện áp U và một sóng dòng điện $I = \frac{U}{z_c}$ chạy từ đầu đến cuối đường dây. Đó là *sóng thuận thứ nhất* (h. 21-14a).

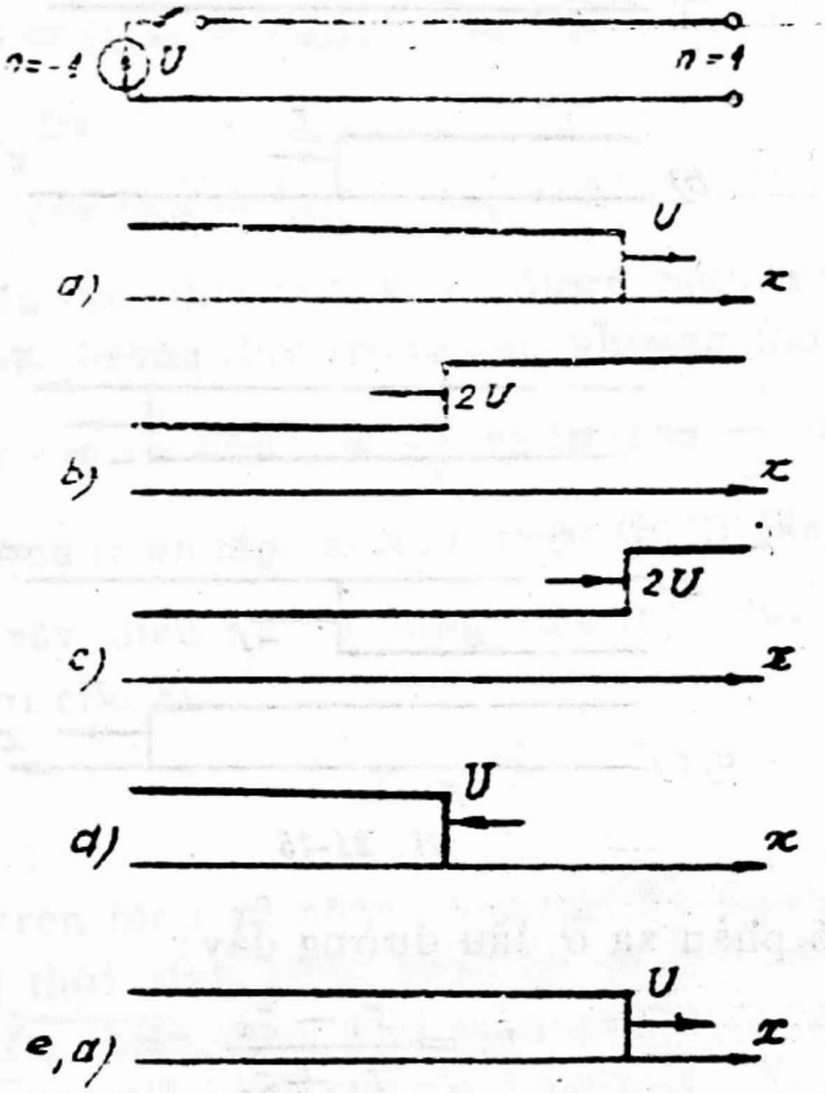
Đến thời điểm $t = \frac{l}{v}$ sóng vừa chạy tới cuối đường dây lập tức bị phản xạ lại. Sóng phản xạ này chạy từ cuối đến đầu đường dây là *sóng ngược thứ nhất*.

Hệ số phản xạ ở cuối đường dây không tải ($r_2 = \infty$) bằng:

$$n_2 = \frac{r_2 - z_c}{r_2 + z_c} = 1,$$

do đó:

$$\left.\begin{aligned} U_{ng1} &= n_2 U_{th1} = U; \\ I_{ng1} &= n_2 I_{th1} = I. \end{aligned}\right\}$$



H. 21-14

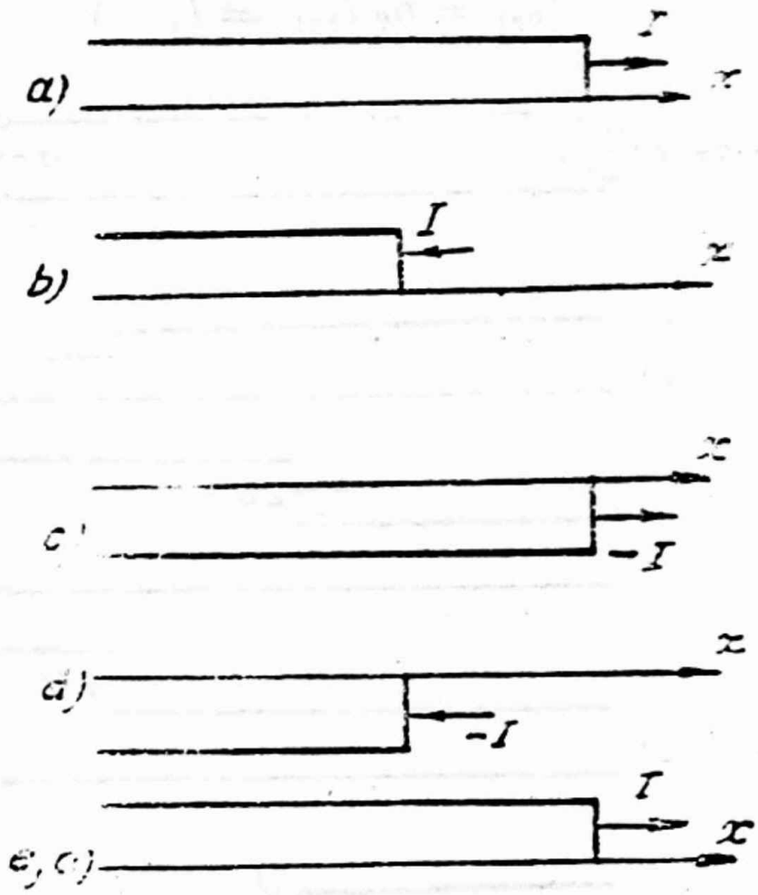
Sóng ngược này xếp chồng với sóng thuận làm cho điện áp trên đường dây ở những điểm sóng ngược đã tới (h. 21-14b) sẽ bằng:

$$u = U_{th1} + U_{ng1} = U + U = 2U.$$

Còn dòng điện bằng:

$$i = I_{th1} - I_{ng1} = I - I = 0 \text{ (xem h. 21-15b).}$$

Khi sóng ngược thứ nhất này chạy tới đầu đường dây nó sẽ bị phản xạ sinh ra một sóng khác chạy từ đầu đến cuối dây, đó là *sóng thuận thứ hai.*



H. 21-15

Hệ số phản xạ ở đầu đường dây:

$$n_1 = \frac{r_1 - z_c}{r_1 + z_c}.$$

Trong đó r_1 là điện trở trong của máy phat. Với nguồn điện áp $r_1 = 0$ nên $n_1 = -1$.

Vậy sóng thuận thứ hai của điện áp và dòng điện bằng:

$$U_{th2} = n_1 U_{ng1} = -U;$$
$$I_{th2} = n_1 I_{ng1} = -I.$$

Trong khoảng thời gian $\frac{l}{v} < t < \frac{2l}{v}$ sóng thuận thứ hai này truyền từ đầu đến cuối dây, xếp chồng lên các sóng điện áp và dòng điện trên đường dây đã có trước đó, kết quả là ở những điểm sóng chạy qua có điện áp bằng (xem h. 21-14c. và 21-15c) :

$$u = (U_{tb1} + U_{ng1}) + U_{tb2} = 2U - U = U;$$

và dòng điện :

$$i = (I_{tb1} - I_{ng1}) + I_{tb2} = 0 - I = -I.$$

Cứ tiếp tục như vậy ta vẽ được hình phân bố của sóng trên đường dây trong các khoảng thời gian tiếp theo từ $t = \frac{2l}{v}$ đến $t = \frac{3l}{v}$ và từ $t = \frac{3l}{v}$ đến $t = \frac{4l}{v}$

Sau đó quá trình lặp lại như trước (h. 21-14e và 21-15e).

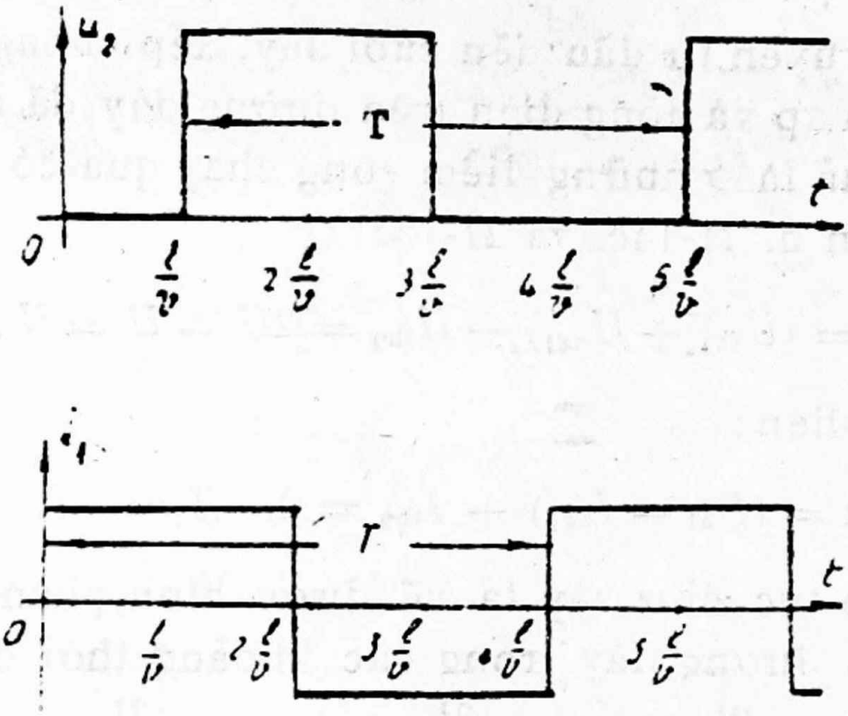
Như vậy điện áp và dòng điện trên đường dây dao động với chu kỳ

$$T = \frac{4l}{v}.$$

Dựa trên hình vẽ phân bố sóng trên đường dây ở các khoảng thời gian khác nhau ta có thể biết được quy luật biến thiên theo thời gian của điện áp hay dòng điện ở một điểm bất kỳ trên đường dây. Ví dụ: điện áp ở cuối đường dây u_2 và dòng điện ở đầu đường dây i_1 biến thiên theo quy luật vẽ trên đồ thị h. 21-16.

Sở dĩ trong trường hợp này dòng điện và điện áp dao động chu kỳ không tắt là do coi đường dây không có tiêu tán. Trên thực tế vì đường dây có tổn hao nên sự dao động của điện áp và dòng điện phải tắt dần, cuối

cùng điện áp và dòng điện trên đường dây sẽ tiến tới những trị xác lập nào đó.



H. 21-16

CÂU HỎI ÔN TẬP

1) Giải thích ý nghĩa vật lý của nghiệm phương trình quá trình quá độ trong đường dây dài không tiêu tán.

Tại sao nói $f\left(t-\frac{x}{v}\right)$ là sóng thuận và $f\left(t+\frac{x}{v}\right)$ là sóng ngược?

2) Tổng trở sóng là gì? Tổng trở sóng và tốc độ sóng của đường dây không tiêu tán bằng bao nhiêu. Tại sao sóng chạy trên đường dây không tiêu tán không bị méo?

3) Đóng một nguồn áp $u = U_0(1 - e^{-\alpha t})$ vào đầu một đường dây không tổn hao tại $t = 0$. Hãy viết phương trình của sóng chạy và vẽ hình phân bố của sóng trên đường dây. Giả thiết đường dây dài vô hạn.

4) Hỏi như câu 3 nếu nguồn điện áp đóng vào cuối đường dây.

5) Trên cơ sở nào lập được sơ đồ Pêterxen? Giá trị và ứng dụng của phương pháp Pêterxen?

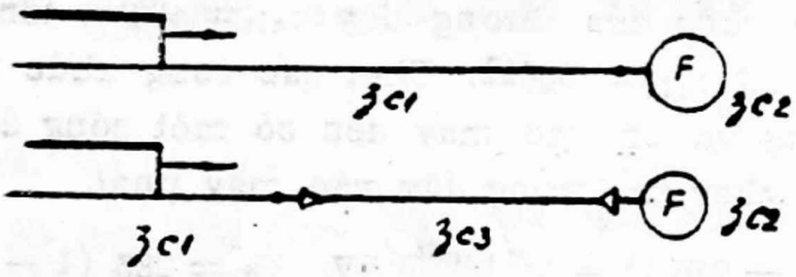
6) Nói các phương pháp tính sóng phản xạ. Hệ số phản xạ toán tử phụ thuộc vào những gì? Khi nào không có sóng phản xạ?

7) Sóng khúc xạ tính như thế nào?

BÀI TẬP

21-1. Một đường dây trên không có tổng trở sóng $z_{c1} = 300\Omega$ nối với một máy phát có tổng trở sóng $z_{c2} = 1200\Omega$. Tính sóng khúc xạ vào máy phát khi có một điện áp chữ nhật $U = 1000$kV chạy từ đường dây tới.

Nếu giữa đường dây trên không và máy phát nói trên có nối tiếp một đoạn dây cáp có tổng trở sóng $z_{c3} = 60\Omega$ hãy tính sóng khúc xạ từ đường dây trên không vào dây cáp và sóng khúc xạ từ đường dây cáp vào máy phát. So sánh trị số sóng khúc xạ vào máy phát trong hai trường hợp (h. 21-17).



H. 21-17

Đáp: Điện áp khúc xạ vào máy phát 1.600 kV và 635 kV.

21-2. Cho một đường dây có tổng trở sóng $z_{c1} = 400\,\Omega$ ở cuối đường dây này có nối song song ba đường dây khác, mỗi đường có tổng trở sóng $z_{c1} = 300\,\Omega$. Tính dòng điện và điện áp khúc xạ và phản xạ khi có một sóng điện áp chữ nhật $U = 100$ kV chạy từ đường dây thứ nhất tới (h. 21-18).

Đáp: $u_{khúc} = 40$ kV, $i_{khúc} = 133$ A;

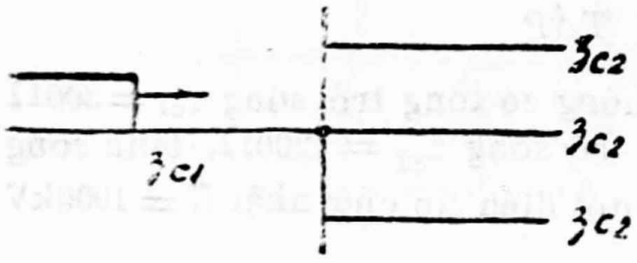
$u_{phản} = -60$kV, $i_{phản} = 150$ A.

21-3. Một đường dây trên không dài $l > 30$ km có tổng trở sóng $z_c = 400\Omega$ nối với một tải có điện trở $r_2 = 100\Omega$ và điện cảm $L_2 = 0{,}5$H, được đóng vào một nguồn điện áp không đổi $U = 35$ kV. Hỏi sau khi sóng phản xạ đã chạy được 30km thì:

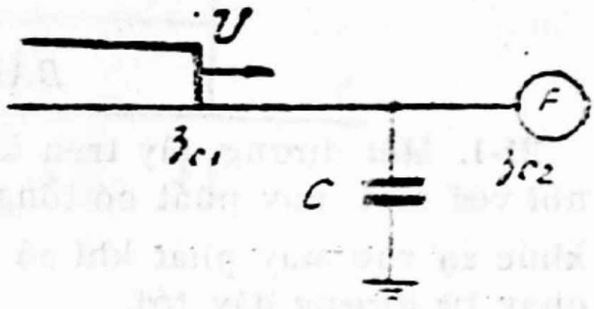
a) Dòng điện và điện áp ở cuối đường dây bằng bao nhiêu ?

b) Dòng điện và điện áp phản xạ ở cuối đường dây bằng bao nhiêu ?

Đáp : $u_2 = 64{,}7\frac{1}{3}$kV, $i_2 = 13{,}3$ A, $u_{2phản} = 29{,}7$KV, $i_{2phản} = 74{,}5$A.



H. 21-18



H. 21-19

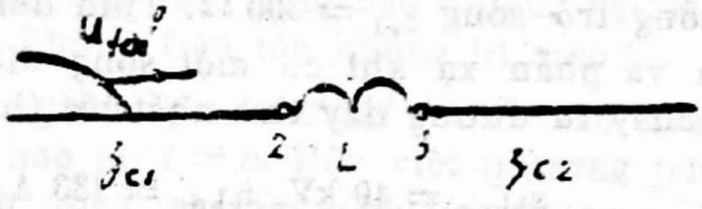
21-4. Để làm cho đầu sóng đi từ đường dây vào máy phát bớt dốc người ta nối một tụ điện bảo vệ $C = 0{,}5$ μF như h. 21-19.

Tổng trở sóng của đường dây $z_{c1} = 400\Omega$, tổng trở sóng của máy phát $z_{c2} = 1000\Omega$. Tính các sóng khúc xạ và phản xạ của dòng và áp vào máy nếu có một sóng áp chữ nhật $U = 200$ kV chạy từ đường dây vào máy phát.

Đáp: $u_2 = 286\,(1 - e^{-7 \cdot 10^{3}t})$ kV, $i_2 = 286\,(1 - e^{-7 \cdot 10^{3}t})$ A.

$u_{2phản} = 85{,}3\,(1 - 3{,}34 \cdot e^{-7 \cdot 10^{3}t})$ kV, $i_{2phản} = 214\,(1 - 3{,}34\, e^{-7 \cdot 10^{3}t})$ A.

21-5. Một đường dây có tổng trở sóng $z_{c1} = 500\Omega$ nối tiếp với một đường dây khác có tổng trở sóng $z_{c2} = 300\Omega$ giữa hai



H. 21-10

đường dây nối tiếp thêm một điện cảm tập trung $L = 3$mH như h. 21-20. Tính điện áp khúc xạ và phản xạ khi có một

sóng áp $u(t) = 500\ (1 - e^{-25 \cdot 10^3 t})$ kV truyền từ đường dây thứ nhất tới.

Đáp : $u_{khúc} = 375 - 444\ e^{-25 \cdot 10^3 t} + 69\ e^{-160 \cdot 10^3 t}$

$u_{2phản} = -125 + 240\ e^{-75 \cdot 10^3 t} - 115\ e^{-160 \cdot 10^3 t}$,

6) Khảo sát quá trình phản xạ nhiều lần của sóng khi đóng một đường dây không tổn hao, ngắn mạch ở cuối vào một nguồn điện áp không đổi U.

Vẽ đồ thị biến thiên theo thời gian của dòng điện ở đầu đường dây.

CHƯƠNG XXII

QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG MẠCH PHI TUYẾN

Mục đích.

— Làm rõ nhu cầu thực tiễn phổ biến giải bài toán quá trình quá độ trong mạch phi tuyến.

— Làm rõ đối với bài toán quá độ phi tuyến không có những phương pháp chung để trực tiếp tích phân tìm nghiệm, và trình bày một số phương pháp thông dụng để giải các bài toán phi tuyến nói chung và đặc biệt những bài toán phi tuyến ít.

§ 22-1. KHÁI NIỆM VỀ BÀI TOÁN QUÁ ĐỘ MẠCH PHI TUYẾN.

Quá trình quá độ trong mạch phi tuyến được miêu tả bằng những phương trình vi phân phi tuyến viết theo các luật Kirhof. Bài toán quá trình quá độ qui về việc giải những hệ vi phân phi tuyến đó.

Ví dụ quá trình điện từ trong một cuộn dây phi tuyến có tiêu tán đặt dưới một nguồn kích thích $e(t)$ miêu tả bởi phương trình:

$$e(t) = u_r + u_\psi = ri + \frac{d\psi}{dt}. \qquad (22\text{-}1)$$

Khi quan hệ giữa hai biến trạng thái ψ và i là một hàm phi tuyến $\psi(i)$, ta có phương trình phi tuyến:

$$e(t) = ri + \frac{\partial\psi}{\partial i}\frac{di}{dt} = ri + L_d(i)\frac{di}{dt}. \qquad (22\text{-}1a)$$

Ta thấy tính phi tuyến của phương trình phản ánh tính phi tuyến của quan hệ giữa các biến trạng thái của các phần tử mạch, ở đây là quan hệ $\psi(i)$. Điều này lại là hệ quả tính phi tuyến của quan hệ giữa các biến trạng thái của vật liệu chế phần tử đó. Ví dụ quan hệ phi tuyến $\psi(i)$ là do quan hệ phi tuyến $B(H)$ của lõi sắt quyết định (vì ψ tỉ lệ với B, i tỉ lệ với H). Hoặc quan hệ $q(u)$ của một tụ điện phi tuyến là do quan hệ phi tuyến $D(E)$ của điện môi quyết định.

Nhà vật lý thường quan tâm đến quan hệ giữa các biến trạng thái của vật liệu, nhưng người kỹ sư còn quan tâm thêm quan hệ phi tuyến giữa các biến trạng thái của phần tử mạch, và việc ứng dụng chúng trong kỹ thuật.

Có quan niệm cho rằng lý thuyết mạch phi tuyến ít phản ánh thực tiễn kỹ thuật nước ta. Điều đó không đúng. Trong kỹ thuật điện thường dùng rất nhiều loại phần tử phi tuyến: lõi sắt trong máy điện, trong rơle, cuộn cản, tụ xenhet trong máy ghi âm, quay đĩa, đèn điện tử, bán dẫn trong hầu hết thiết bị dân dụng, quân dụng.

Khi xét quá trình mở máy các máy điện, xét những bộ khuếch đại, quá trình tạo sóng, tạo xung, quá trình thành lập điện áp trên máy phát điện, xét hiện tượng tia lửa trên vành góp, quá trình dao động máy điện quay, quá trình các van thu lôi, hiện tượng quầng sáng trên đường dây cao áp v.v... nếu không biết phân tích quá trình quá độ các mạch phi tuyến sẽ không hiểu rõ diễn biến các quá trình đó, và có thể bỏ rơi nhiều hiện tượng quan trọng.

Những ví dụ trên nói rõ *tính phổ biến và thực tiễn của bài toán mạch phi tuyến* ở chế độ quá độ và xác lập.

Khác với mạch tuyến tính, mạch phi tuyến không có những tính chất đơn giản như quan hệ tuyến tính giữa các biến trong mạch, tính xếp chồng đáp ứng v.v... Do đó việc giải bài toán phi tuyến khó khăn hơn nhiều và hầu như không có những phương pháp chung trực tiếp tích phân các phương trình phi tuyến để tìm nghiệm.

Trong tính toán phải tìm những *phương pháp gần đúng và mô hình*, trong đó phải biết chọn những phương pháp thích hợp với bài toán cụ thể.

Các hiện tượng trong mạch phi tuyến cũng phức tạp và nhiều vẻ hơn, có những triển vọng ứng dụng rất rộng rãi trong kỹ thuật.

Chương này sẽ trình bày một số phương pháp thông dụng tính gần đúng bài toán phi tuyến như phương pháp sai phân, phương pháp mặt phẳng pha, phương pháp mô hình. Ngoài ra cũng nêu một số phương pháp tính gần đúng những mạch ít phi tuyến như phương pháp tuyến tính hóa, phương pháp nhiễu loạn. Cũng nêu phương pháp biên độ biến thiên chậm để xét quá trình tự dao động.

§ 22-2. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI VỚI LƯỢNG ÍT PHI-TUYẾN.

Để dẫn ra phương pháp ta hãy xét quá trình quá độ đóng mạch một cuộn dây phi tuyến vào một nguồn áp $e(t)$. Ta có phương trình:

$$e = u_r + u_\psi = ri + \frac{d\psi}{dt}. \qquad (22\text{-}1)$$

trong đó $i = i(\psi)$, $\psi = \psi(i)$ giả thiết là những quan hệ hàm phi tuyến.

Giả sử mạch ít tiêu tán, tức số hạng ri bé hơn số hạng $d\psi/dt$. Ta có thể viết lại phương trình đó dưới dạng:

$$e = \frac{d\psi}{dt} + \textit{lượng nhỏ}. \qquad (22\text{-}2)$$

Dễ thấy trong trường hợp này coi quan hệ $i(\psi)$ trong lượng nhỏ là tuyến tính hay phi tuyến cũng ít ảnh hưởng đến nghiệm $\psi(t)$.

Ngược lại nếu tiêu tán quá mạnh như ở cuộn dây áp trong voltmet, $d\psi/dt$ sẽ nhỏ so với ri, ta có:

$$e = ri + \textit{lượng nhỏ}. \qquad (22\text{-}3)$$

Lúc này coi quan hệ $\psi(i)$ trong lượng nhỏ $d\psi/dt$ là tuyến tính hay phi tuyến cũng ít ảnh hưởng đến nghiệm $i(t)$.

Vì vậy một cách hợp lý, trong (22-2) nên chọn quan hệ $i(\psi)$ tuyến tính qua một hệ số $L = const$:

$$i = \frac{\psi}{L},$$

để có một phương trình tuyến tính gần đúng đối với ψ:

$$e = \frac{d\psi}{dt} + ri = \frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi. \qquad (22\text{-}4)$$

Chú ý rằng nếu coi ψ là một hàm phi tuyến của i, ta phải giải một phương trình phi tuyến đối với i. Điều ấy không có lợi.

Còn trường hợp (22-3) nên coi ψ tỉ lệ tuyến tính với i:

$$\psi = Li,$$

để có một phương trình tuyến tính gần đúng đối với i:

$$e = \frac{d\psi}{dt} + ri = L\frac{di}{dt} + ri. \qquad (22\text{-}5)$$

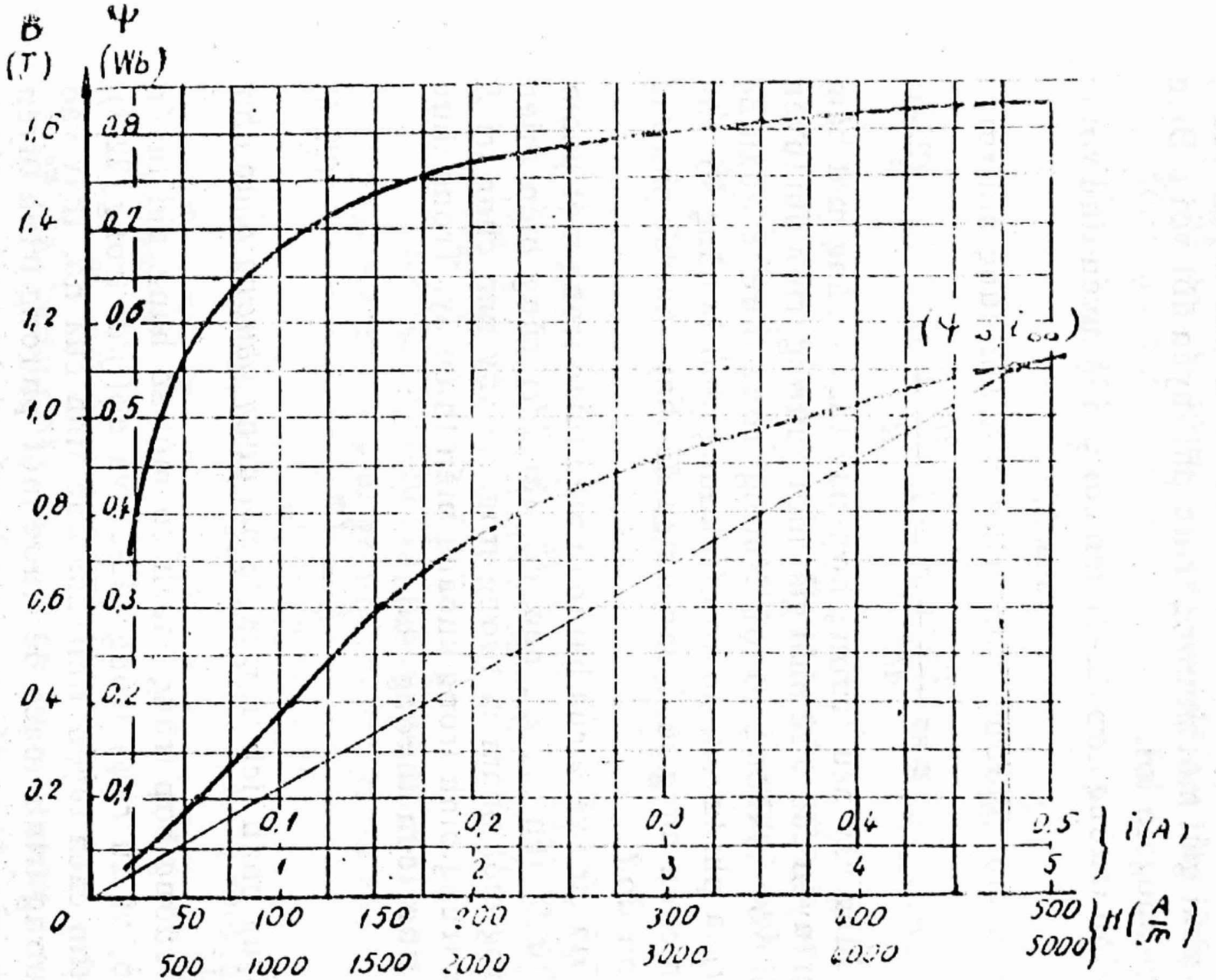
Cũng vậy nếu trường hợp này thay i bằng một hàm phi tuyến của ψ sẽ phải giải một phương trình phi tuyến đối với i, không có lợi. Nhưng trong thực tế quan hệ $\psi(i)$ là phi tuyến, do đó $L(i)$ không phải là hằng số, vậy cần chọn hằng số L bao nhiêu để thay vào các phương trình đó?

Giả sử i và ψ của bài toán biến thiên trong một phạm vi từ 0 đến i_m, ψ_m nào đó, thì $L(i)$ cũng biến thiên trong một phạm vi tương ứng. Vì vậy nên chọn trị L lấy trung bình trong khoảng biến thiên ấy. Trong thực tế tính toán thường chọn:

$$L = \frac{\psi_m}{i_m} \qquad (22\text{-}6)$$

Qua phân tích trên ta có *nội dung phương pháp* như sau:

Trường hợp trong mạch có một số hạng phi tuyến nhỏ, ví dụ $ri(\psi)$ trong (22-2) và $d\psi(i)/dt$ trong (22-3), ta tìm cách tuyến tính hóa đặc tính của nó, thay vào phương trình mạch để được một phương trình tuyến tính gần đúng đối với một ẩn số, ví dụ ψ trong (22-4) và i trong (22-5).



Đặc tính B(H) của lõi thép và cuộn dây tới thép trong các vỉ dụ

II. 22-1

Sau đó ta giải phương trình tìm nghiệm thỏa mãn sơ kiện, trong bài toán trên là ψ_o, bài toán dưới là i_o. Từ nghiệm gần đúng này $\psi(t)$ hoặc $i(t)$, căn cứ theo đặc tính thật (phi tuyến) ta tìm ra lượng phi tuyến $ri(t)$ hoặc $\psi(t)$. Theo phương pháp này cần phân tích tìm ra được số hạng phi tuyến nhỏ, nên phương pháp này chủ yếu chỉ dùng cho các phương trình cấp 1, ví dụ phương trình (22-1). Ở những phương trình cấp cao, xác định rõ số hạng nhỏ thường khó hơn.

Trong thực tế, ta thường dùng tinh thần phương pháp này, ngay cả khi không nhất thiết có một số hạng nhỏ. Lúc đó ví dụ muốn tìm $i(t)$ với tất cả tính chất phi tuyến của nó, ta đặt và giải phương trình tuyến tính đối với ψ, sau đó từ $\psi(t)$ tìm ra $i(t)$. Ngược lại muốn tìm $\psi(t)$ gần đúng ta lập phương trình tuyến tính đối với $i(t)$ (22-5). Dưới đây ta xem mấy ví dụ.

Ví dụ 22-1 — Hãy tính dòng điện quá độ khi đóng một cuộn dây lõi sắt vào một điện áp một chiều. Biết điện áp $U = 24$ V, điện trở cuộn dây $r = 50\Omega$ và đặc tính $\psi(i)$ của cuộn dây như trong h. 22-1.

Giải : Ta sẽ tuyến tính hóa phương trình đối với ẩn ψ như (22-4). Muốn thế cần tìm trị số điện cảm tuyến tính hóa L theo (22-6).

Ở chế độ xác lập dòng điện bằng $i_m = U/r = 24/50 = 0{,}48$ A; từ h. 22-1 tìm được từ thông tương ứng bằng $\psi_m = 0{,}56$Wb. Ta lấy điện cảm tuyến tính hóa : $L = \psi_m/i_m = 0{,}56/0{,}48 = 1{,}16$H. Vậy có phương trình đối với ψ :

$$e = \frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi \text{ hoặc } \frac{d\psi}{dt} + 43\psi = 24.$$

Với sơ kiện $\psi_o = 0$ và trị số xác lập ở $t = \infty$, $\psi_\infty = \psi_m = 0{,}56Wb$, dễ tìm được :

$$\psi = 0{,}56\ (1 - e^{-43t}).$$

Để dễ vẽ được $\psi(t)$ và từ đó tìm nghiệm $i(t)$ ta cho t những trị khác nhau rồi tính ψ, và tra ra i theo h. 22-1a.

Kết quả lập bảng sau :

t (s)	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,1
ψ (Wb)	0,109	0,2	0,323	0,405	0,46	0,485	0,517	0,55
i (A)	0,077	0,105	0,165	0,235	0,3	0,355	0,39	0,46

H. 22-2 vẽ đường cong $\psi(t)$ và $i(t)$. Ta thấy do tính phi tuyến của phương trình nên dạng *$i(t)$ không giống nghiệm của một phương trình cấp 1 tuyến tính. Ở phần đầu đường cong $i(t)$, dòng i tăng chậm hơn và ở phần tiếp sau đó lại tăng nhanh hơn.* Đó là vì khi i còn nhỏ đặc tính $\psi(i)$ dốc hơn, tức điện cảm động lớn hơn, nên hằng số thời gian lớn và quá trình chậm hơn. Ở đoạn sau khi i lớn lên, điện cảm động nhỏ đi, quá trình nhanh hơn.

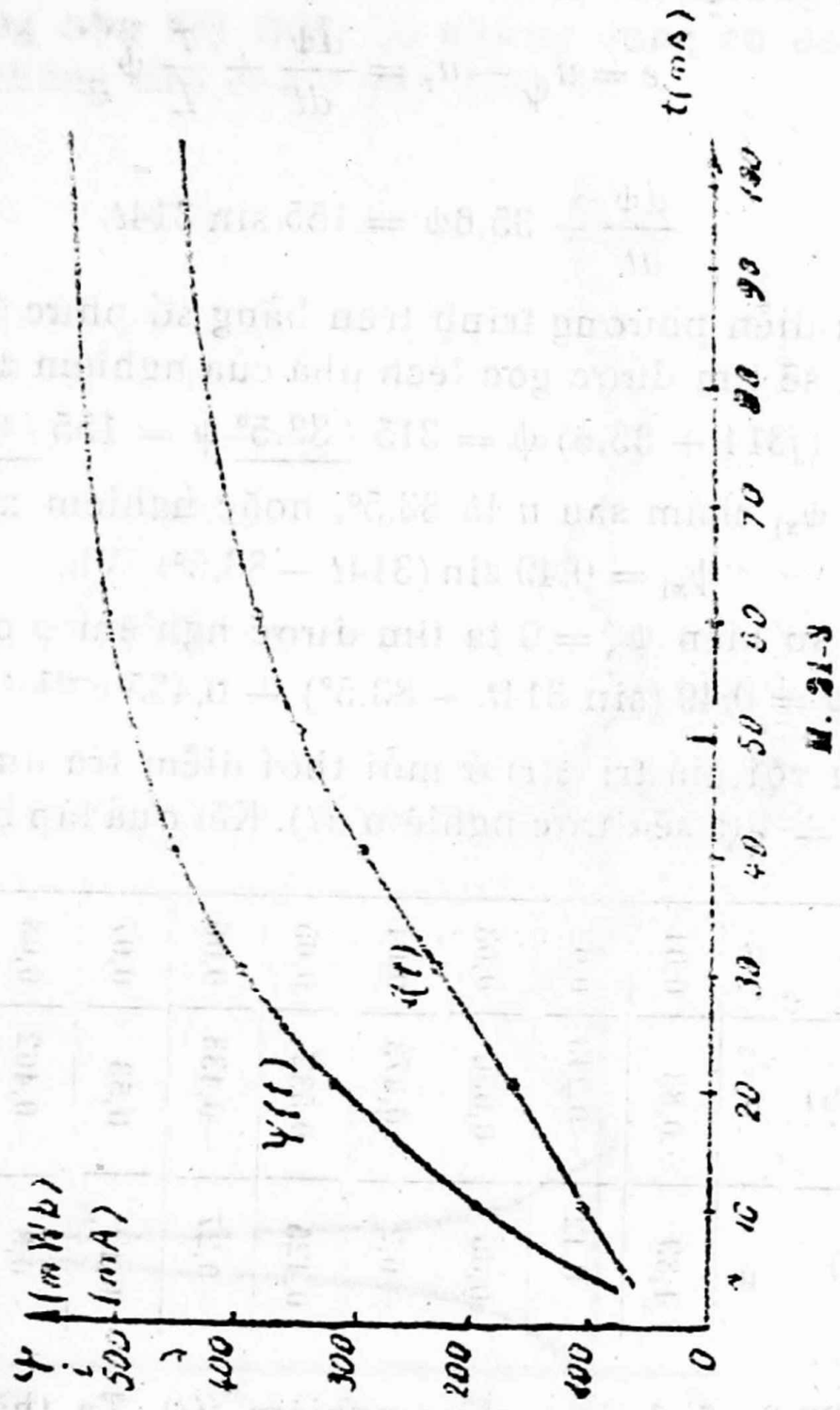
Ví dụ 22-2 : Tính dòng điện quá độ khi đóng cuộn dây trên vào 1 điện áp xoay chiều $u = \sqrt{2}\ 110 \sin 314t = 155 \sin 314t$ V.

Giải : Phương pháp giải cũng như trên. Đầu tiên cần tìm giá trị điện cảm tuyến tính hóa, muốn thế ta hãy tìm các giá trị xác lập của I_m và ψ_m bằng cách thử đò dần.

Cho $I_m = 0,1$A, tra đường cong được $\psi_m = 0,52$ Wb. Điện áp cực đại trên điện cảm, điện trở và trên toàn cuộn dây sẽ bằng :

$$U_{\psi m} = \psi_m \omega = 314 \,.\, 0,52 = 163 \text{ V} ;$$
$$U_{rm} = rI_m = 50 \,.\, 0,4 = 20 \text{ V}$$

$U_{tổng} = \sqrt{163^2 + 20^2} = 164$ V lớn hơn điện áp đặt vào 155 V.



Vì vậy, cần chọn lại giá trị I_m. Cuối cùng ta được

$I_m = 0{,}35$ A ; $\psi_m = 0{,}49$ Wb ; $rI_m = 17{,}5$ V ;

$U_{\psi m} = 154$ V. Vậy chọn :

$= \psi_m / I_m = 0{,}49/0.35 = 1{,}4$ H

Thay vào phương trình, ta có:

$$e = u_\psi + u_r = \frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi$$

hay:

$$\frac{d\psi}{dt} + 35{,}6\psi = 155 \sin 314t.$$

Biểu diễn phương trình trên bằng số phức (vì ψ hình sin) ta sẽ tìm được góc lệch pha của nghiệm ψ xác lập:

$$(j314 + 35{,}6)\,\psi = 315 \angle 83.5°\ \psi = 155 \angle 0°.$$

Vậy ψ_{xl} chậm sau u là 83,5°, hoặc nghiệm xác lập:

$$\psi_{xl} = 0{,}49 \sin (314t - 83{,}5°)\ \text{Wb}.$$

Với sơ kiện $\psi_0 = 0$ ta tìm được nghiệm ψ quá độ:

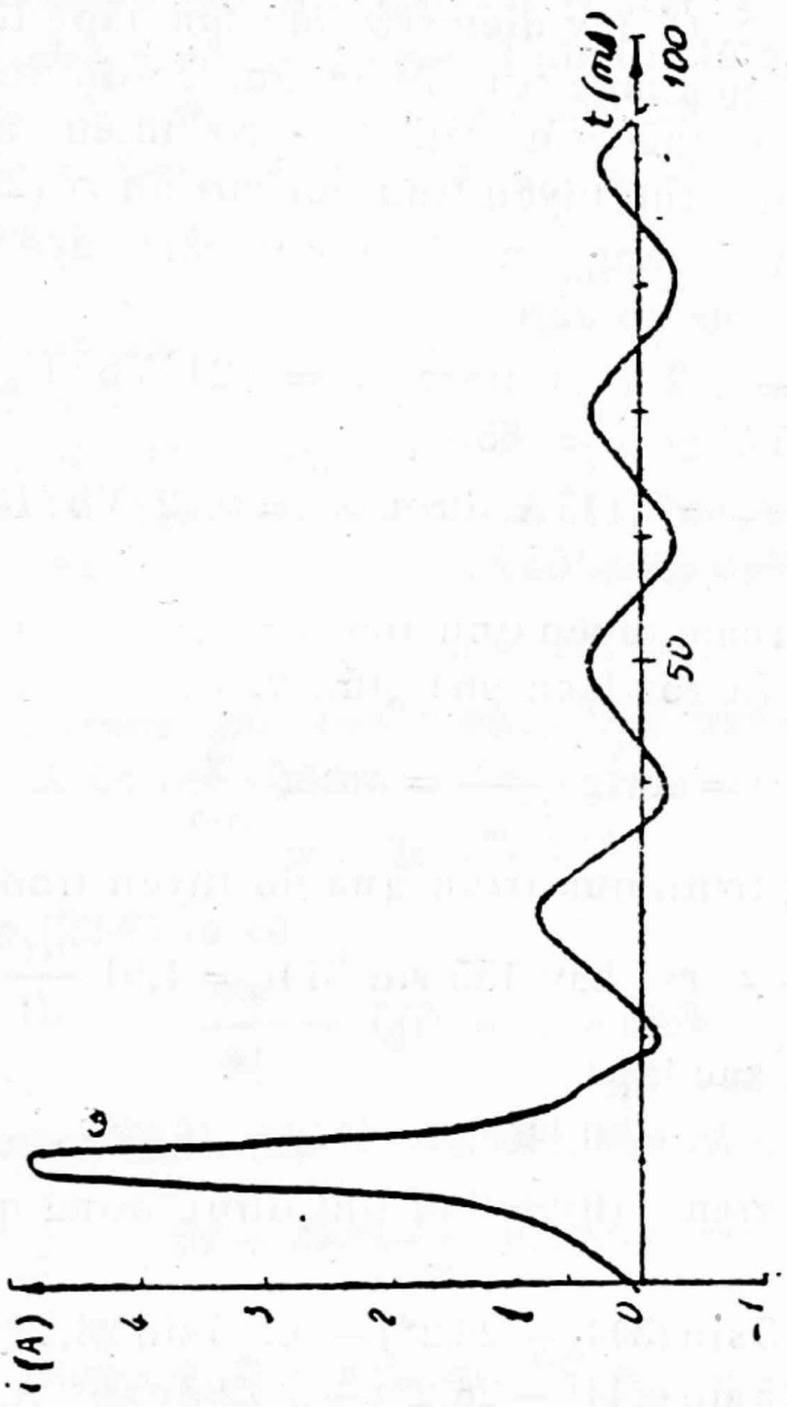
$$\psi = 0{,}49\,(\sin 314t - 83{,}5°) + 0{,}485\, e^{-35,6t}\ \text{Wb}.$$

Ứng với giá trị ψ(t) ở mỗi thời điểm tra đường cong ψ(i) h. 22-1 ta sẽ được nghiệm i(t). Kết quả lập bảng sau:

t(s)	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
ψ(Wb)	0	0,83	−0,243	0,656	−0,373	0,532	−0,433	0,53	−0,462	0,52	−0,476
i(A)	0	4,89	0,12	0,85	−0,2	0,425	−0,27	0,42	−0,3	0,4	−0,325

H. 22-3 vẽ đường cong nghiệm i(t). Ta thấy *khi mới đóng mạch được vài chu kỳ, vì từ thông lớn gần gấp đôi trị số cực đại và do mạch từ bão hòa nên dòng điện lớn gấp nhiều lần dòng điện xác lập.* Cũng thấy *ở những chu kỳ đầu dòng điện có một thành phần một chiều khá rõ rệt* (nửa dương lớn hơn nửa âm). Đó là những hiện tượng thường quan sát thấy khi đóng mạch những cuộn

dây, hoặc biến áp không tải v.... vào một nguồn điện áp xoay chiều. Vì vậy khi vận hành những thiết bị này, cũng như khi thiết kế những dụng cụ đo lường, bảo vệ chúng cần chú ý đến điều đó.



H. 22-3

Ví dụ 22-3: Tính dòng điện quá độ khi đóng mạch cuộn dây lõi thép trên vào một điện áp xoay chiều, giả sử có nối thêm vào cuộn dây một điện trở lớn 1200 Ω. Điện áp $u = \sqrt{2} \cdot 110 \sin 314t = 155 \sin 314t$ V.

Giải: Qua ví dụ trên có thể ước lượng được tổng trở (điện kháng) cuộn dây. Ở tần số 314 rad/s, với điện áp trên cuộn dây 154 V, dòng bằng 0,35 A, vậy điện kháng quãng 440 Ω. Ở đây điện trở tiêu tán bằng 1200 Ω, vậy lớn hơn điện kháng tới gần ba lần. Do đó điện áp trên cuộn dây sẽ nhỏ hơn trên điện trở nhiều và ta có thể lập phương trình tuyến tính đối với ẩn i (22-5).

Đầu tiên ta cũng tìm trị số điện cảm tuyến tính hóa bằng cách thử dò dần:

Cho $I_m = 0,12$ A, ta được $\psi_m = 0,24$ Wb; $U_{rm} = 144$ V; $U_{Lm} = 75,5$ V; $U_m = 163$ V.

Lại cho $I_m = 0,115$ A, được $\psi_m = 0,22$ Wb; $U_{rm} = 138$ V; $U_{Lm} = 68$ V; $U_m = 155$ V.

Vậy điện cảm tuyến tính hóa $L = \psi_m : I_m = 0,22 : 0,115 = 1,91$ H. Và góc lệch pha giữa u_r và i bằng:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_{Lm}}{U_{rm}} = \operatorname{arctg} \frac{68}{138} = 26,2°$$

Phương trình quá trình quá độ tuyến tính hóa:

$$e = L \frac{di}{dt} + ri \quad \text{hay} \quad 155 \sin 314t = 1,91 \frac{di}{dt} + 1200i.$$

Nghiệm xác lập:

$$i_{xl} = 0,115 \sin (314t - 26,2°) \text{ A}.$$

Với sơ kiện: $i(0) = 0$ ta tìm được dòng quá độ gần đúng:

$$i = 0,115 \sin (314t - 26,2°) + 0,115 \sin 26,2° e^{-(1200/1,91)t}$$
$$= 0,115 \sin (314t - 26,2°) + 0,0505 e^{-628t} \text{ A}.$$

§ 22-3. PHƯƠNG PHÁP NHIỄU LOẠN.

Phương pháp nhiễu loạn là một phương pháp gần đúng chung cho phần lớn các bài toán mạch phi tuyến nhất là khi mức độ phi tuyến ít.

Có thể viết phương trình của một mạch ít phi tuyến dưới dạng:

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots. t) = \mu\varphi(x, \dot{x}, \ldots). \qquad (22\text{-}7)$$

Biểu thức trong dấu ngoặc ở vế trái là dạng viết gọn lại của những số hạng tuyến tính, tức là những số hạng bậc nhất đối với ẩn và các đạo hàm, kể cả nguồn ngoài. Vế phải là dạng viết tắt của những số hạng phi tuyến, tức những số hạng có bậc cao 2, 3 v.v... đối với ẩn và các đạo hàm. Trong trường hợp mạch ít phi tuyến số hạng đó đủ nhỏ so với những số hạng khác. Số μ là một hệ số nào đó.

Ví dụ đối với mạch có cuộn dây lõi thép trong mục trên khi có đặc tính $\psi(i)$ phi tuyến và trong một phạm vi biến thiên i và ψ có thể chọn dạng gần đúng:

$$\psi = ai - bi^3, \qquad (22\text{-}8a)$$

Ví dụ trong bài toán trên, trong quãng $i = 0$ đến $i = 0{,}5$ A có thể chọn:

$$\psi = 2i - 3{,}75\, i^3. \qquad (22\text{-}8b)$$

Theo (22-8) ta có:

$$\frac{\partial\psi}{\partial i} = L(i) = a - 3bi^2, \qquad (22\text{-}8c)$$

và phương trình (22-1) viết đối với i sẽ có dạng:

$$(a - 3bi^2)\frac{di}{dt} + ri = e(t),$$

hoặc: $$a\frac{di}{dt} + ri - e(t) = 3bi^2\frac{di}{dt} = \mu i^2\frac{di}{dt}. \qquad (22\text{-}9)$$

Ở đây vế trái gồm các số hạng tuyến tính (bậc nhất) và nguồn ngoài, chính là $f(i, i', t)$, còn vế phải gồm một số hạng phi tuyến (bậc 3 đối với i và i') với $3b$ đóng vai trò của μ. Giả thiết khi i, và tốc độ i' nhỏ, số hạng

$\mu = 3b = 3.3{,}75$ chưa đủ lớn để khiến vế phải so được với các số hạng bên vế trái. do đó ta coi μ là nhỏ.

Để dẫn đến phương pháp nhiễu loạn ta hãy phân tích phương trình (22-7) hoặc (22-9). Khi $\mu = 0$, ta sẽ có một phương trình tuyến tính suy biến ra từ (22-7):

$$f(x, \dot{x}, ..., t) = 0. \qquad (22\text{-}10)$$

Nó có một nghiệm thỏa mãn sơ kiện bài toán; ta gọi nghiệm đó là $x_0(t)$. Khi $\mu \neq 0$ phương trình (22-7) sẽ có một nghiệm $x(t)$ nào đó khác $x_0(t)$.

Đối với rất nhiều mạch, mức sai khác giữa $x(t)$ và $x_0(t)$ nhiều hay ít tùy thuộc một cách liên tục vào độ lớn của μ. Điều đó khiến ta suy ra một điểm mấu chốt là, nghiệm x phải có một quan hệ giải tích nào đó đối với μ, tức là:

$$x = x(t, \mu), \qquad (22\text{-}11)$$

sao cho khi $\mu = 0$, ta có $x = x_0(t)$, chính là nghiệm thỏa mãn sơ kiện của bài toán tuyến tính suy biến (22-10).

Vì vậy có thể đặt vấn đề khai triển nghiệm $x(t, \mu)$ theo thông số μ như sau:

$$x = x(t, \mu) = x_0(t) + \mu \frac{\partial x}{\partial \mu} + \mu^2 \frac{\partial^2 x}{2\partial \mu^2} + ... \qquad (22\text{-}12)$$

trong đó các đạo hàm riêng là những hàm nào đó của biến t. Ta ký hiệu chúng là $x_1(t)$, $x_2(t)$... và gọi là những *hàm hiệu chỉnh* để $x_0(t)$ gần lại với nghiệm đúng $x(t)$.

Kết quả ta có khai triển của nghiệm x:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + ... \qquad (22\text{-}13)$$

trong đó $x_0(t)$ là nghiệm suy biến đã nêu. Còn các hàm hiệu chỉnh $x_1(t)$, $x_2(t)$,... phải thỏa mãn sơ kiện 0, tức $x_k(0) = 0$, $x_k'(0) = 0$, $x_k''(0) = 0$,...

Ở đây nghiệm tuyến tính $x_0(t)$ được tính bằng các phương pháp nêu trong các chương 17, 18, 19, 20. Do

đó nếu có cách tìm được $x_1(t)$, $x_2(t)$..., lắp vào (22-12) ta sẽ giải xong bài toán.

Từ những phân tích ở trên dẫn ra *nội dung phương pháp nhiễu loạn* đối với bài toán ít phi tuyến như sau:

Đầu tiên giải phương trình tuyến tính suy biến ra từ phương trình phi tuyến, cho thỏa mãn sơ kiện bài toán, để được $x_0(t)$.

Sau đó, đặt nghiệm bài toán dưới dạng khai triển theo hệ số μ như (22-13) với các hàm hiệu chỉnh nào đó $x_1(t)$, $x_2(t)$... (số lượng nhiều ít tùy chọn).

Là nghiệm đã chọn cho (22-7), nên thế (22-13) vào (22-7) ta sẽ được một phương trình với những số hạng có hệ số là các lũy thừa của μ.

Cho cân bằng riêng rẽ những số hạng có hệ số cùng bậc đối với μ, sẽ tách ra được những phương trình cho phép ta tìm ra các hàm hiệu chỉnh $x_1(t)$, $x_2(t)$.... Các phương trình này thường là tuyến tính, và thường cho ta giải ra x_1, x_2 *lần lượt ra riêng rẽ*. Đó cũng chính là ưu điểm của phương pháp này.

Số lượng các hàm hiệu chỉnh càng nhiều độ chính xác sẽ càng cao, nhưng khối lượng tính toán cũng càng lớn.

Cuối cùng sở dĩ ta gọi đây là phương pháp nhiễu loạn là xuất phát từ quan niệm cho rằng μ và do đó số hạng phi tuyến đã làm nhiễu loạn, biến động nghiệm của phương trình tuyến tính (22-10), thể hiện qua các hàm hiệu chỉnh.

Để minh họa phương pháp ta xét ví dụ dưới.

Ví dụ 22-4: Hãy tìm dòng quá độ trong cuộn dây lõi thép đóng vào một nguồn áp một chiều trong ví dụ 22-1 bằng phương pháp nhiễu loạn. Dùng đặc tính $\psi = ai - bi^3$.

Giải: Thay $\psi(i) = ai - bi^3$ vào phương trình (22-1) ta đã có phương trình (22-9):

$$ai'' + ri - E = \mu i^2 i', \qquad (a)$$

Với đường cong $\psi(i)$ của bài toán ta có $a = 2$, $\mu = 11{,}25$, $r = 50\Omega$, $E = 24V$.

Phương trình tuyến tính suy biến có dạng:

$$ai'_0 + ri_0 - E = 0 \text{ hoặc } 2i'_0 + 50i_0 - 24 = 0. \qquad (b)$$

Với sơ kiện $i(0) = 0$ ta tìm được nghiệm suy biến của (b):

$$i_0 = 0{,}48\,(1 - e^{-25t}) = I_0(1 - e^{-\alpha t}). \qquad (c)$$

Đặt nghiệm gần đúng bậc nhất (với một hàm hiệu chỉnh):

$$i = i_0 + \mu i_1, \qquad (d)$$

vào (a) và sau khi gộp những số hạng cùng bậc đối với μ ta có:

$$2(i'_0 + \mu i'_1) + 50(i_0 + \mu i_1) - E = \mu(i_0 + \mu i_1)^2 (i'_0 + \mu i'_1)$$

hoặc: $(2i'_0 + 50i_0 - E) + \mu(2i'_1 + 50i_1 - i_0^2 i'_0) -$

$$- \mu^2 (2i_0 i_1 i'_0 + i_0^2 i'_1) - \mu^3 (\ldots) - \ldots = 0. \qquad (e)$$

trong đó mỗi đa thức trong dấu ngoặc phải bằng số không.

Đa thức thứ nhất cho phương trình (b) và nghiệm i_0 theo (c).

Đa thức thứ hai cho phương trình để tìm i_1:

$$2i'_1 + 50i_1 - i_0^2 i'_0 = 0, \qquad (f)$$

trong đó i_0 và i'_0 đã tìm được từ (b) ứng với đa thức thứ nhất.

Thay thế (c) vào (f), với:

$$i_0^2 = I_0^2 (1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}),\ i'_0 = \alpha I_0 e^{-\alpha t},$$

$$i_0^2 i'_0 = \alpha I_0^3 (e^{-\alpha t} - 2e^{-2\alpha t} + e^{-3\alpha t}),$$

ta được một phương trình tuyến tính đối với $i_1(t)$:

$$2i'_1 + 50\, i_1 = \alpha I_0^3 (e^{-\alpha t} - 2e^{-2\alpha t} + e^{-3\alpha t}). \qquad (g)$$

Dùng phương pháp quen biết, ví dụ phương pháp toán tử Laplaxơ, ta tìm được :

$$i_1 = \frac{I_0^3}{2}\left[\left(\alpha t - \frac{3}{2}\right) e^{-\alpha t} + 2e^{-2\alpha t} - \frac{1}{2} e^{-3\alpha t}\right] =$$

$$= 0{,}0555\, [(25t - 1{,}5)\, e^{-25t} + 2e^{-50t} - 0{,}5\, e^{-75t}].$$

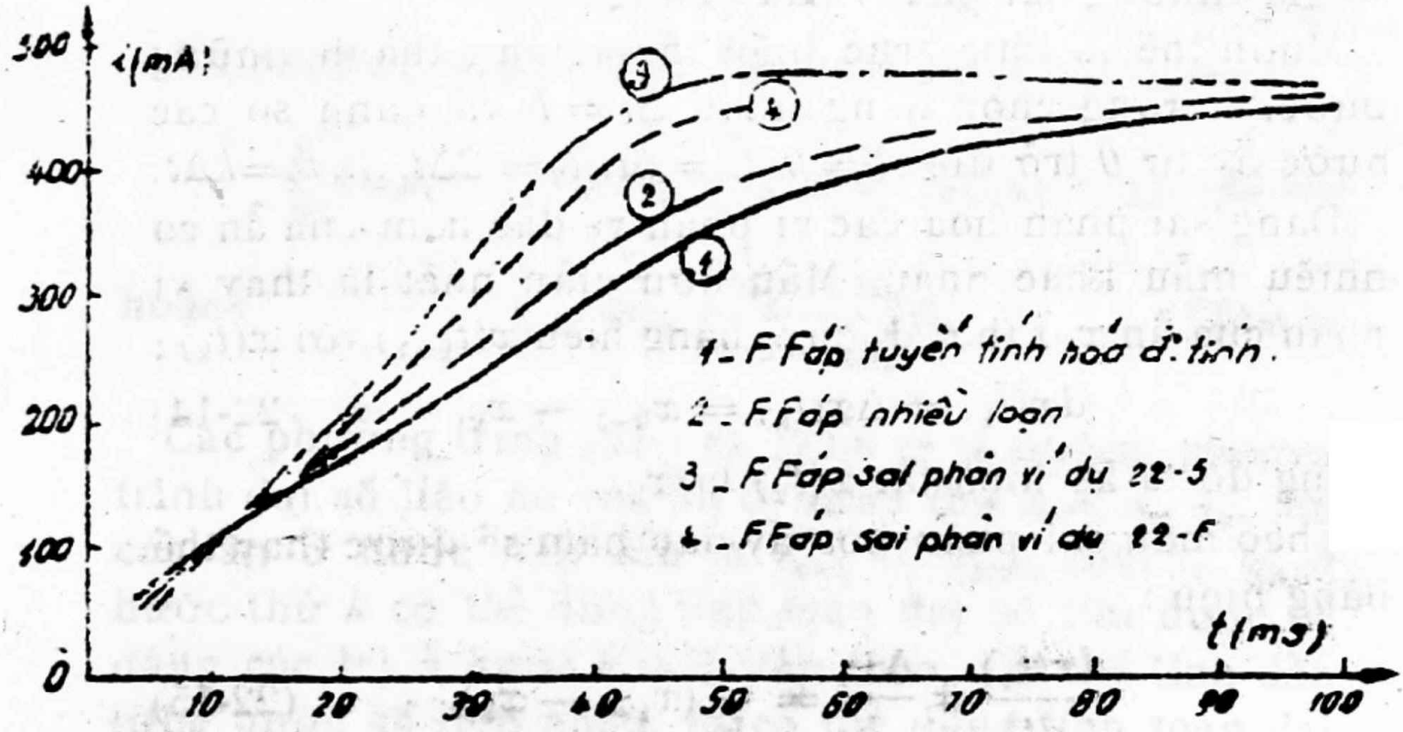
Lắp kết quả vào (d) ta được lời giải gần đúng với một hàm hiệu chỉnh :

$$i = 0{,}48\,(1 - e^{-25t}) + 0{,}625\, [(25t - 1{,}5)\, e^{-25t} + \ldots$$

$$\ldots + 2e^{-50t} - 0{,}5\, e^{-75t}] \text{ A}.$$

Sau khi tính bằng số lập bảng kết quả như sau :

t(s)	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1
i(A)	0,049	0,109	0,187	0,229	0,342	0,393	0,478



H. 22-4

Kết quả tính vẽ trên h. 22-4, đường cong 2. Muốn được kết quả đúng hơn, cần dùng 2, 3 hàm hiệu chỉnh, nhưng khối lượng tính toán cũng nhiều hơn.

§ 22-4. PHƯƠNG PHÁP CÁC BƯỚC SAI PHÂN LIÊN TIẾP.

Phương pháp các bước sai phân liên tiếp là một phương pháp gần đúng tính bằng số, có tính tổng quát và phổ biến để giải hệ vi phân (phi tuyến và tuyến tính) của mạch điện.

Nội dung phương pháp này là chuyển hệ phương trình vi phân (tuyến tính cũng như phi tuyến) thành một hệ phương trình sai phân gần đúng, sau đó dùng phương pháp đại số để tìm bằng số dần từng bước nghiệm gần đúng của hệ phương trình.

Đầu tiên cần làm rõ việc sai phân hóa gần đúng một hệ vi phân. Sai phân hóa một hệ vi phân là thay thế gần đúng những vi phân của biến thời gian t và của ẩn x (dòng, áp v.v...) trong phương trình bằng những số gia (những sai phân) của chúng.

Muốn thế ta chia trục biến thời gian t thành những bước, thường chọn bằng nhau $\Delta t = h$ và đánh số các bước ấy từ 0 trở đi : $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$, ..., $t_k = k\Delta t$.

Dạng sai phân hóa các vi phân và đạo hàm của ẩn có nhiều mẫu khác nhau. Mẫu đơn giản nhất là thay vi phân của ẩn x ở thời điểm t_k bằng hiệu $x(t_{k+1})$ với $x(t_k)$:

$$dx(t_k) \approx \Delta x(t_k) = x_{k+1} - x_k. \qquad (22\text{-}14)$$

trong đó ta ký hiệu tắt $x(t_k)$ là x_k.

Theo mẫu sai phân hóa ấy đạo hàm sẽ được thay thế bằng hiệu :

$$\frac{dx(t_k)}{dt} \approx \frac{\Delta x_k}{h} = \frac{1}{h}(x_{k+1} - x_k). \qquad (22\text{-}15)$$

Cũng theo mẫu này dạng sai phân của đạo hàm cấp 2 là :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t_k) = \frac{d\dot{x}}{dt}(t_k) \approx \frac{1}{h}[\dot{x}(t_{k+1}) - \dot{x}(t_k)] \approx$$

$$\approx \frac{1}{h^2}[(x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k)] = \frac{1}{h^2}[x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k], \quad (22\text{-}16)$$

và cấp 3 là

$$\frac{d^3x}{dt^3}(t_k) \approx \frac{1}{h^3}(x_{k+3} - 3x_{k+2} - 3x_{k+1} - x_k). \quad (22\text{-}17)$$

Thay gần đúng các đạo hàm trong hệ phương trình mạch bằng những sai phân theo (22-15, 16, 17), ta sẽ được hệ phương trình sai phân gần đúng liên hệ các trị của ẩn x ở các bước.

Ví dụ phương trình đóng mạch cuộn dây lõi sắt (22-1) được sai phân hóa thành :

$$e_k = ri_k + \frac{\psi_{k+1} - \psi_k}{h} \quad (22\text{-}1\text{ b})$$

hoặc : $$\psi_{k+1} = \psi_k + h(e_k - ri_k). \quad (22\text{-}1\text{ c})$$

Và phương trình (22-9) được sai phân hóa thành :

$$\frac{a}{h}(i_{k+1} - i_k) + ri_k - e_k = \frac{\mu}{h} i_k^2 (i_{k+1} - i_k), \quad (22\text{-}9\text{b})$$

hoặc : $$i_{k+1} = i_k + \frac{e_k - ri_k}{a - \mu i_k^2} h. \quad (22\text{-}9\text{ c})$$

Các phương trình (22-1 c), (22-9 c) là những phương trình đại số liên hệ các ẩn ở bước thứ k là i_k, ψ_k, với các ẩn ở bước tiếp sau là i_{k+1} và ψ_{k+1}. Biết i_k, ψ_k ở bước thứ k có thể dùng tính toán đại số tìm được dễ dàng các trị ở bước $k+1$ tiếp theo. Cứ thế tính dần từng bước kế tiếp nhau, ta có thể dùng tính toan đại

số tìm được ẩn i, ψ ở mọi bước kể từ bước thứ 0 (sơ kiện) trở đi.

Vậy *nội dung vắn tắt của phương pháp* này là: Đầu tiên sai phân hóa phương trình hoặc hệ phương trình vi phân. Sau đó dùng phương pháp đại số để tìm dần nghiệm bằng số ở những bước kế tiếp nhau.

Phương pháp này gần đúng ở chỗ thay các lượng vi phân của biến t bằng những bước $h = \Delta t$ và sau đó tính bằng đại số dần cho các bước. Bước h chọn càng nhỏ thì nghiệm tìm được thường càng gần đúng với nghiệm chính xác, sai số thường càng nhỏ.

Tuy vậy với một bài toán nhất định, với những mẫu sai phân các đạo hàm theo cách khác nhau, sự sai lệch của nghiệm so với nghiệm chính xác thường liên quan với bước h theo những cách khác nhau. Những nghiệm tìm được nói chung sẽ « hội tụ » vào nghiệm chính xác khi h dần đến vô cùng nhỏ. Nhưng với những mẫu sai phân khác nhau chúng « hội tụ » với những mức độ, hoặc những « tốc độ hội tụ » khác nhau. Ở đây không xét *vấn đề hội tụ của nghiệm* phương trình sai phân gần đúng.

Ngoài ra liên quan đến phương pháp này, còn có một khái niệm quan trọng gọi là *độ ổn định của nghiệm gần đúng*. Nguyên là trong khi tính dần từng bước, nghiệm tính được ở mỗi bước nhất định có một sai số nào đó, sai số này sẽ góp phần gây sai số trong các bước sau. Nếu sai số ở mỗi bước không gây nên những sai số ngày càng lớn vô hạn độ cho các bước sau ta bảo nghiệm của phương pháp sai phân này ổn định. Ngược lại nếu sai số nhất định phạm phải ở mỗi bước sẽ gây những sai số tăng dần vô hạn độ trong các bước sau, ta bảo nghiệm của phương pháp này không ổn định.

Cùng một bài toán với những mẫu sai phân khác nhau, có khi với mẫu sai phân này nghiệm ổn định, với

mẫu khác lại không ổn định. Vấn đề ổn định cũng sẽ không xét ở đây.

Phương pháp này có thể *dùng phổ biến cho mọi hệ phương trình tuyến tính cũng như phi tuyến*, cách tính toán lại đơn giản dễ dàng. Ngoài ra chính phương pháp này được đưa vào máy tính số. Do những ưu điểm ấy phương pháp này có *một giá trị thực tiễn và hiện đại* rất lớn.

Nhưng cần chú ý khi tính cho mỗi bước phải kiểm tra cho đúng; đó là vì một sai lầm về tính toán ở mỗi bước sẽ gây nên sai số trong những bước sau và cứ thế tiếp diễn mãi.

Để minh họa phương pháp ta làm ví dụ sau:

Ví dụ 22-5: Dùng phương pháp các bước sai phân liên tiếp giải bài toán đóng một cuộn dây lõi sắt vào một điện ap một chiều, đã biết $r = 50\Omega$, $U = 24V$ và đường cong $\psi(i)$ cho trên h. 22-1 (đã xét ở ví dụ 22-1).

Giải: Ta quyết định dùng trực tiếp đường cong $\psi(i)$ đã cho để giải phương trình mạch dạng (22-1) liên hệ cả ψ và i:

$$U = ri + \frac{d\psi}{dt}. \qquad (a)$$

Sai phân hóa theo mẫu (22-15) ta có phương trình sai phân:

$$U = ri_k + \frac{1}{h}(\psi_{k+1} - \psi_k), \qquad (b)$$

hoặc: $\psi_{k+1} = \psi_k + h(U - ri_k) = \psi_k + h(24 - 50i_k)$, (c)

với sơ kiện $i_0 = 0,\ \psi_0 = 0.$

Theo (c) biết ψ_k ở thời điểm $t_k = kh$, tra đường cong $\psi(i)$ ta có i_k, và thay vào (c) ta sẽ tìm được ψ_{k+1} ở thời điểm tiếp theo $t_{k+1} = (k+1)h$. Cứ thế tiếp tục, kết quả tính lập bảng như sau:

t (ms)	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25,0
ψ(mWb)	60	115	167	215	261	304	345	382	415	444
i (mA)	40	65	90	110	130	148	180	210	250	280

t (ms)	27,5	30	32,5	35	37,5	40	42,5	45	47,5	50
ψ(mWb)	468	490	507	522	532	540	545	549	552	570
i (mA)	300	340	380	400	410	440	446	450	465	480

Kết quả vẽ trong h. 22-44 đường cong 3.

Ví dụ 22-6:

Giải bài toán trên (đóng cuộn dây lõi sắt có $r = 50\Omega$ vào một điện áp một chiều $U = 24V$). Cho biết đặc tính $\psi(i) = 2i - 3{,}75\, i^3$.

Giải: Theo (22-9) đã có phương trình đóng mạch cuộn dây, khi dùng biểu thức giải tích $\psi = ai - bi^3$:

$$a\frac{di}{dt} + ri - U = 3bi^2\frac{di}{dt}.$$

Sai phân hóa phương trình này theo các bước $\Delta t = h$ như (22-9b), ta có:

$$\frac{a}{h}(i_{k+1} - i_k) + ri_k - U = \frac{3bi_k^2}{h}(i_{k+1} - i_k),$$

hoặc:
$$i_{k+1} = i_k + \frac{U - ri_k}{a - 3bi_k^2}h.$$

Thay số vào ta có:

$$i_{k+1} = i_k + \frac{24 - 50\, i_k}{2 - 11{,}25i_k^3}h.$$

Chọn bước tính $h = 2{,}5$ms, xuất phát từ $i_0 = 0$, ta tính lần lượt trị số i ở các bước. Kết quả lập bảng ở dưới và vẽ trên h. 22-4,b đường cong 4.

t(ms)	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20
i(mA)	0	30	58,2	85	111	136	160	183	206

t(ms)	22,5	25	27,5	30	32,5	35	37,5	40	42,5
i(mA)	228	251	273	295	318	341	367	392	431

Ta thấy hai kết quả sai phân đường cong 3 và 4 rất gần nhau.

§22-5. PHƯƠNG PHÁP BIÊN ĐỘ, PHA BIẾN THIÊN CHẬM.

1. Phương trình Van đer Pôl của mạch tự dao động phi tuyến.

Trong mục này sẽ trình bày một phương pháp gần đúng chuyên để giải các bài toán tự dao động phi tuyến (tự dao động nghĩa là dao động không có nguồn chu kỳ ngoài tác dụng). Đó là phương pháp biên độ pha biến thiên chậm; phương trình tự dao động phi tuyến đó là phương trình Van đer Pôl, dưới dạng chung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu f(x, \dot{x}) = 0. \qquad (22\text{-}18)$$

Phương trình Van đer Pôl rất thường gặp trong các mạch và quá trình dao động. Ví dụ bài toán ngắn mạch một cuộn dây phi tuyến và một tụ điện, hoặc phóng điện của một tụ điện phi tuyến qua một cuộn dây đều

có phương trình dạng đó. Bài toán một mạch tạo dao động bằng đèn ba cực khi xét đến đặc tính phi tuyến của đèn cũng có dạng như vậy. Phương trình dao động của một máy phát điện đồng bộ khi tải biến thiên cũng có thể có dạng như vậy.

Phương trình Van đer Pôl là một phương trình dao động phi tuyến cấp hai, ngoài những số hạng giống phương trình dao động tuyến tính cấp hai (tỉ lệ với $\ddot{x}$ và x) còn có thêm một số hạng phi tuyến nhỏ, là hàm phi tuyến của x và $\dot{x}$ theo một qui luật thích hợp, để cho nghiệm của phương trình này có tính dao động không tắt.

Có thể minh họa qui luật ấy như sau. Ta bắt đầu từ việc xét một mạch tuyến tính cấp 2, hệ số hằng:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (22\text{-}19)$$

Hệ số k của $\dot{x}$ quyết định rất nhiều tính chất nghiệm x. Khi hệ số đó nhỏ và dương, nghiệm x sẽ dao động và tắt dần. Khi hệ số đó nhỏ nhưng âm, nghiệm x sẽ dao động nhưng tăng dần. Riêng khi hệ số đó triệt tiêu, x sẽ dao động không tắt.

Vì vậy suy ra với một hệ số k không hằng, ví dụ trong phương trình Van der Pôl là một hàm $k(x)$ *thích hợp* của x, sao cho khi biên độ nghiệm x còn nhỏ, hàm số đó âm và nhỏ, dao động sẽ tăng lớn thêm, ngược lại khi biên độ x quá lớn hàm số đó dương và nhỏ, biên độ dao động sẽ giảm bớt. Dao động sẽ tiến dần đến quanh một biên độ dao động nào đó, sao cho hàm $k(x)$ cũng dao động, khi âm khi dương, nhưng trung bình làm biên độ của x không thay đổi nữa. Trong mạch như vậy có thể thành lập dần dao động, và chuyển tiếp đến một dao động xác lập $x_\infty(t)$.

Phương trình Van der Pôl thường có dạng điển hình như sau:

$$\ddot{x} + x - \mu(1 - x^2)\dot{x} = 0 \qquad (22\text{-}20)$$

Ta dễ nhận thấy khi dao động x nhỏ, hệ số của $\dot{x}$ tức $-\mu(1-x^2)$ âm, dao động x tăng lớn thêm. Ngược lại nếu x lớn hệ số đó sẽ dương, dao động nhỏ lại dần. *Mạch sẽ tự thành lập dần dao động với biên độ và pha qua độ dần đến một trạng thái xác lập.* Những phương trình nêu trong bài tập 22-8 cũng là dao động phi tuyến.

2. **Phương pháp biên độ, pha biến thiên chậm.**

Có thể giải được phương trình Van der Pôl bằng phương pháp các bước sai phân liên tiếp, hoặc phương pháp mặt phẳng pha và phương pháp mô hình (sẽ nêu trong các mục dưới). Nhưng do tính chất dao động tự kích thích dần, nên có thể giải gần đúng bằng một phương pháp riêng do Van der Pôl đầu tiên đề ra, là *phương pháp biên độ, pha biến thiên chậm.*

Cơ sở của phương pháp dựa trên nhận xét rằng nghiệm phương trình này dao động, song do tính chất tự kích phi tuyến nên dao động đó nói chung khác hình sin (khi ít phi tuyến thì càng gần hình sin). Về toán học có thể miêu tả những dao động không hình sin tự kích dần như vậy bằng những « hàm điều hòa » nhưng có biên độ và góc pha biến thiên, tức:

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]; \qquad (22\text{-}21\,a)$$

hoặc:

$$x(t) = B(t)\sin\omega_0 t + C(t)\cos\omega_0 t. \qquad (22\text{-}21\,b)$$

Về nguyên tắc, với các hàm $A(t)$, $\theta(t)$ hoặc $B(t)$, $C(t)$ thích hợp có thể miêu tả mọi dạng dao động. Trường hợp dao động điều hòa, các hàm ấy sẽ là hàm hằng. Trường hợp gần điều hòa các hàm ấy sẽ biến thiên đủ chậm.

Dạng (22-21 a) cho thấy được diễn biến của biên độ quá trình, nhưng kèm theo một sự biến thiên phiền phức của góc pha. Dạng (22-21 b) không có những phiền phức ấy, nhưng lại không nêu rõ diễn biến của biên độ.

Trong phương pháp dẫn ra dưới sẽ dùng dạng (22-21 a). Ta sẽ coi quá trình là gần điều hòa theo nghĩa (22-21 a) với $A(t)$, $\theta(t)$ biến thiên rất chậm. Như vậy ta coi tốc độ tăng $dA/dt = \dot{A}(t)$ và $d\theta/dt = \dot{\theta}(t)$ là nhỏ, do đó gia tốc và các lũy thừa của tốc độ là rất nhỏ, có thể bỏ qua.

Ta đã biết coi rằng nghiệm $x(t)$ chuyển biến dần từ nghiệm dao động điều hòa tuyến tính $x_0(t)$ trở đi, trong đó:

$$x_0(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \qquad (22\text{-}22)$$

là nghiệm của phương trình tác động suy biến, cho thỏa mãn sơ kiện (giống như ở mục 22-[illegible]) như vậy phù hợp với nghiệm tương ứng của phương trình là điều kiện ban đầu $x(0)$, $\dot{x}(0)$ tương ứng của phương trình tuyến tính của phương trình thực sự mà ta đã đặt bằng tuyến tính và ban đầu mạch gần như là tuyến tính.

Với cách đặt như vậy theo (22-21 a) nghiệm cần tìm sẽ có dạng:

$$x(t) = \left[A_0 - \int_0^t \dot{A}(t)\, dt\right] \cos\left[\omega_0 t + \theta_0 - \int_0^t \dot{\theta}(t)\, dt\right]. \qquad (22\text{-}23)$$

Nếu tìm cách biết được các tốc độ tăng $\dot{A}(t)$, $\dot{\theta}(t)$, thay vào (22-23) thì nghiệm hoàn toàn được xác định.

Ta sẽ viết cho gọn nghiệm (22-21a) dưới dạng:

$$x(t) = A\cos\psi, \qquad (22\text{-}21c)$$

trong đó:

$$A = A(t),\ \psi = \psi(t) = \omega_0 t + \theta(t).$$

Sau đó thay thế $x(t)$ và những đạo hàm $\dot{x}$, $\ddot{x}$ vào phương trình (22-18) và cho cân bằng hai vế, ta sẽ tìm được các biểu thức tính $\dot{A}$ và $\dot{\phi}$.

Thật vậy đạo hàm (22-21c) theo t ta được $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \dot{A}\cos\psi - (\omega_s - \dot{\phi})A\sin\psi. \qquad (22\text{-}24a)$$

Tính gần đúng có thể bỏ qua những số hạng nhỏ:

$$\dot{x} = -\omega_s A\sin\psi. \qquad (22\text{-}24b)$$

Đạo hàm tiếp (22-21a) theo t, ta được $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \dot{A}\cos\psi - (\omega_s - \dot{\phi})A\sin\psi - \dot{\phi}A\sin\psi - (\omega_s - \dot{\phi})\dot{A}\sin\psi - (\omega_s - \dot{\phi})^2 A\cos\psi.$$

Tính gần đúng, bỏ qua những số hạng nhỏ tỉ lệ với gia tốc $\dot{A}$, $\dot{\phi}$ và các lũy thừa của tốc độ ta có:

$$\ddot{x} = -2\omega_s\dot{A}\sin\psi - (\omega_s^2 - 2\omega_s\dot{\phi})A\cos\psi. \qquad (22\text{-}25)$$

Thay thế vào phương trình (22-18), biểu thức của x theo (22-21c), và các biểu thức gần đúng của x theo (22-24b), của $\ddot{x}$ theo (22-25) ta sẽ được một phương trình gần đúng có dạng chuẩn sau

$$-2\omega_s\dot{A}\sin\psi - 2\omega_s\dot{\phi}A\cos\psi = \mu f(A\cos\psi; -\omega_s A\sin\psi). \qquad (22\text{-}26)$$

Phương trình này sẽ cho ta tìm được $\dot{A}$ và $\dot{\phi}$. Thật vậy vế trái gồm những hàm điều hòa $\sin\psi$, $\cos\psi$; còn vế phải sau khi thay vào $f(x, \dot{x})$ biểu thức gần đúng của x theo (22-21c) và của $\dot{x}$ theo (22-24b) cũng sẽ gồm các số hạng điều hòa cơ bản $\sin\psi$, $\cos\psi$ và các điều hòa cao $\sin k\psi$, $\cos k\psi$. Vậy (22-26) sẽ viết thành:

$$-2\omega_s\dot{A}\sin\psi - 2\omega_s\dot{\phi}A\cos\psi = \mu F_{\sin}\sin\psi + \mu F_{\cos}\cos\psi + \mu.\ \textit{điều hòa cao}. \qquad (22\text{-}27)$$

Áp dụng nguyên tắc cân bằng điều hòa ta sẽ được công thức tính gần đúng $\dot{A}$ và $\dot{\theta}$:

$$\dot{A} = -\frac{\mu}{2\omega_0} F_{\sin}\,; \qquad \dot{\theta} = -\frac{\mu}{2\omega_0 A} F_{\cos}. \qquad (22\text{-}28,29)$$

Thay vào (22-23) ta sẽ tìm được nghiệm gần đúng $x(t)$ của phương trình dao động phi tuyến.

Nhận xét rằng theo (22-26), số hạng phi tuyến là một hàm của các hàm điều hòa $\cos\psi$, $\sin\psi$, nên có tính chu kỳ. Vì vậy $F_{\sin}$ và $F_{\cos}$ chính là những biên độ các điều hòa cơ bản của chuỗi Furiê của hàm chu kỳ ấy. Để tìm các biên độ có thể dùng công thức khai triển chuỗi Furiê :

$$\left.\begin{aligned} F_{\cos} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi\,;\,-\omega_0 A\sin\psi)\cos\psi\,d\psi, \\ F_{\sin} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi\,;\,-\omega_0 A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (22\text{-}30)$$

Vậy tóm lại *các bước tính gần đúng mạch dao động phi tuyến* có phương trình dạng (22-18) hoặc (22-20) bằng phương pháp biên độ pha biến thiên chậm như sau. Đặt nghiệm cần tìm dưới dạng $A(t)\cos\psi(t)$ theo (22-21c), với A_0, $\psi_0 = \omega_0 t + \theta_0$ là biên độ và pha của nghiệm phương trình tuyến tính suy biến thỏa mãn sơ kiện. Lập phương trình gần đúng dạng (22-27), cho cân bằng điều hòa (tần số cơ bản), ta sẽ tìm được $\dot{A}(t)$ và $\dot{\theta}(t)$ theo (22-28 và 29)

Ví dụ 22-7 — Một tụ C đã nạp đến điện áp U_0, cho phóng qua một cuộn dây phi tuyến. Hãy viết phương

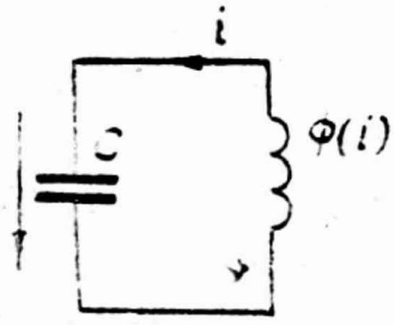
trình dao động phi tuyến cho từ thông Φ và tìm $\Phi(t)$, $u_C(t)$. Đã cho quan hệ $i(\Phi) = a\,\Phi + b\Phi^3$.

Giải.— Phương trình mạch điện h. 22-5:

$$u_\Phi + u_C = 0,$$

hoặc:

$$\frac{d\Phi}{dt} + U_o + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = 0.$$



H. 22-5

Đạo hàm hai vế theo thời gian ta được:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0,$$

hoặc:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{a}{C}\Phi + \frac{b}{C}\Phi^3 = 0.$$

Phương trình có dạng dao động phi tuyến:

$$\ddot{\Phi} + \omega_0^2\Phi + \mu\Phi^3 = 0. \qquad (a)$$

Theo phương pháp biến độ biến thiên chậm ta tìm nghiệm tuyến tính suy biến thỏa mãn sơ kiện $\Phi_o = 0$, $\dot{\Phi}_o = u_{\Phi_o} = -u_{Co} = -U_o$,

$$\Phi_{tt} = -\frac{U_o}{\omega_o}\sin\omega_o t = \frac{U_o}{\omega_o}\cos(\omega_o t + 90^\circ) = A\cos\psi.$$

Thay thế vào số hạng phi tuyến, ta có:

$$\mu\Phi^3 = \mu A^3\cos^3\psi = \mu\frac{3}{4}A^3\cos\psi + \frac{\mu A^3}{4}\cos 3\psi. \qquad (b)$$

Thay (*b*) vào phương trình (*a*) ta có:

$$-2\omega_o\dot{\theta}\,A\cos\psi - 2\omega_o\dot{A}\sin\psi =$$

$$= -\mu\frac{3}{4}A^3\cos\psi - \frac{\mu}{4}A^3\cos 3\psi.$$

Cho cân bằng điều hòa trong hai vế ta được:

$$\dot{A} = 0 \text{ và } \dot{\theta} = \mu \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0} = \mu \frac{3}{8} \frac{U_0^2}{\omega_0^3}.$$

Vậy nghiệm từ thông có dạng gần đúng:

$$\Phi = -\frac{U_0}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 + \mu \frac{3}{8} \frac{U_0^2}{\omega_0^3}\right)t.$$

Vậy từ thông này biến thiên điều hòa với biên độ không đổi (vì năng lượng hệ thống không thêm bớt) và tần số không đổi (cũng vì lý do trên). Song *tần số này phụ thuộc biên độ tức phụ thuộc mức năng lượng trong mạch. Đó là một hiện tượng khác hẳn với các dao động tuyến tính* ở đó tần số không phụ thuộc mức năng lượng.

Biết $\Phi(t)$ có thể tìm ra điện áp và dòng trên tụ điện với:

$$u_C = -u_L = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad i = C\frac{du_C}{dt} = -C\frac{d^2\Phi}{dt^2}.$$

Ví dụ 22-8.— Hãy thành lập phương trình quá độ trong mạch dao động L-C có điện trở phi tuyến với đặc tính $u_r = A + Bi + Ci^3$.

Giải.— Phương trình của mạch rất đơn giản như sau:

$$u_L + u_r + u_C = 0, \qquad (a)$$

hoặc:

$$L\frac{di}{dt} + u_r(i) + \frac{1}{C}\int idt = 0. \qquad (b)$$

Đạo hàm theo thời gian ta có:

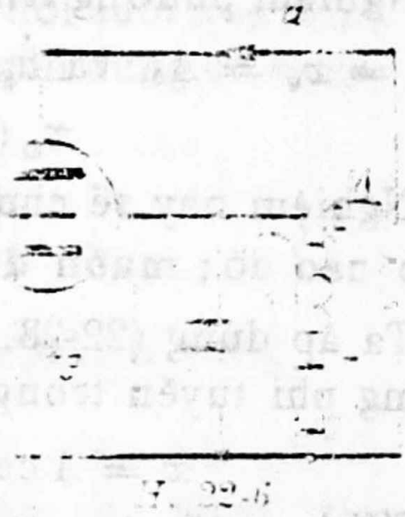
$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\partial u_r}{\partial i}\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \qquad (c)$$

Ở đây $\partial u_r/\partial i = B + 3Ci^2$. Thay vào (c) ta có:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{B}{L} + \frac{3C}{L}i^2\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0. \qquad (d)$$

Với hệ số B, C thích hợp, ví dụ $B < 0$, phương trình (d) sẽ có dạng phương trình Van der Pôl và trong mạch có thể có tự dao động. Đó là trường hợp mạch có những phần tử loại hồ quang, điốt tunnel, hoặc đèn 4 cực.

Ví dụ 22-9. Thành lập và giải phương trình mạch tạo dao động LC bằng đèn ba cực (h. 22-6).



H. 22-6

Giải. Ta hãy thành lập phương trình Kirchoff 2 cho mạch dao động L-C:

$$L\frac{di}{dt} - r\,i - u_g - \frac{du_g}{dt} = 0, \qquad (a)$$

trong đó i là dòng trong mạch L-C; i_a là dòng anốt; u_g là điện áp trên tụ điện cũng chính là trên lưới đèn.

Chú ý rằng $i = Cu'_g$, và giả sử quan hệ phi tuyến giữa dòng i_a và điện áp u_g có dạng hàm thường:

$$i_a = i_a(u_g) = au_g - bu_g^3,$$

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{\partial i_a}{\partial u_g}\frac{du_g}{dt} = (a - 3bu_g^2)\frac{du_g}{dt} \qquad (b)$$

Thay vào (a), ta có:

$$LC\frac{d^2u_g}{dt^2} + rC\frac{du_g}{dt} - u_g - M(a + 3bu_g^2)\frac{du_g}{dt} = 0.$$

hoặc:

$$\ddot{u}_g + \frac{1}{LC}u_g - \left(Ma - \frac{r}{L} + 3Mbu_g^2\right)\frac{\dot{u}_g}{LC} = 0.$$

Cuối cùng ta đi đến dạng:

$$\ddot{u}_g + \omega_0^2 u_g - \mu(1 - ku_g^2)\dot{u}_g = 0. \qquad (c)$$

chính là dạng phương trình Van der Pôl (22-20) đã nêu ở trên.

Ta dùng phương pháp biên độ pha biến thiên chậm giải phương trình:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu(1 - kx^2)\dot{x} = 0. \qquad (d)$$

Nghiệm phương trình tuyến tính suy biến với sơ kiện $u_{s0} = x_0 = A_0$, và $\dot{u}_{s0} = \dot{x}_0 = 0$ có dạng:

$$x_0(t) = A_0 \cos \omega_0 t. \qquad (e)$$

Nghiệm này sẽ chuyển tiếp dần đến một nghiệm xác lập nào đó; muốn được nó ta cần tìm $A(t)$ và $\theta(t)$.

Ta áp dụng (22-28, 29) để tìm $\dot{A}$ và $\dot{\theta}$. Ta thay vào số hạng phi tuyến trong (d) các biểu thức:

$$x = A\cos\psi, \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin\psi,$$

được:

$$(1 - kx^2)\dot{x} = -\left(1 - kA^2 \frac{1+\cos 2\psi}{2}\right)\omega_0 A \sin\psi.$$

Sau một số biến đổi ta được:

$$(1 - kx^2)\dot{x} = -\left(1 - k\frac{A^2}{4}\right)\omega_0 A \sin\psi + k\frac{A^3}{4}\omega_0 \sin 3\psi.$$

Vậy các hệ số khai triển Furiê đối với các điều hòa cơ bản là:

$$F_{\sin} = -\left(1 - k\frac{A^2}{4}\right)\omega_0 A; \quad F_{\cos} = 0.$$

Thay vào (22-29) ta có:

$$\dot{\theta} = 0; \quad \dot{A} = \frac{-\mu}{2\omega_0} F_{\sin} = \mu \frac{A}{2}\left(1 - k\frac{A^2}{4}\right). \qquad (f)$$

Vậy nghiệm sẽ biến thiên theo một qui luật phức tạp. Ta phân tích định tính như sau. Trong quá trình thành lập dao động khi biên độ có cỡ bé, tức:

$1 - k\frac{A^2}{4} > 0$ hay $A < \frac{2}{\sqrt{k}}$, có $\dot{A} > 0$, *dao động lớn dần,*

Nếu biên độ quá lớn tức:

$1 - k\frac{A^2}{4} < 0$ hay $A > \frac{2}{\sqrt{k}}$, có $\dot{A} < 0$, *dao động giảm dần*.

Vì vậy dao động sẽ xác lập với biên độ $A_{xl} = \frac{2}{\sqrt{k}}$, lúc đó $\dot{A} = 0$. Còn tần số không biến đổi suốt quá trình thành lập dao động. Nghiệm xác lập gần đúng có dạng:

$$x_{xl}(t) = \frac{2}{\sqrt{k}} \cos \omega_0 t.$$

§22-6. PHƯƠNG PHÁP MẶT PHẲNG PHA

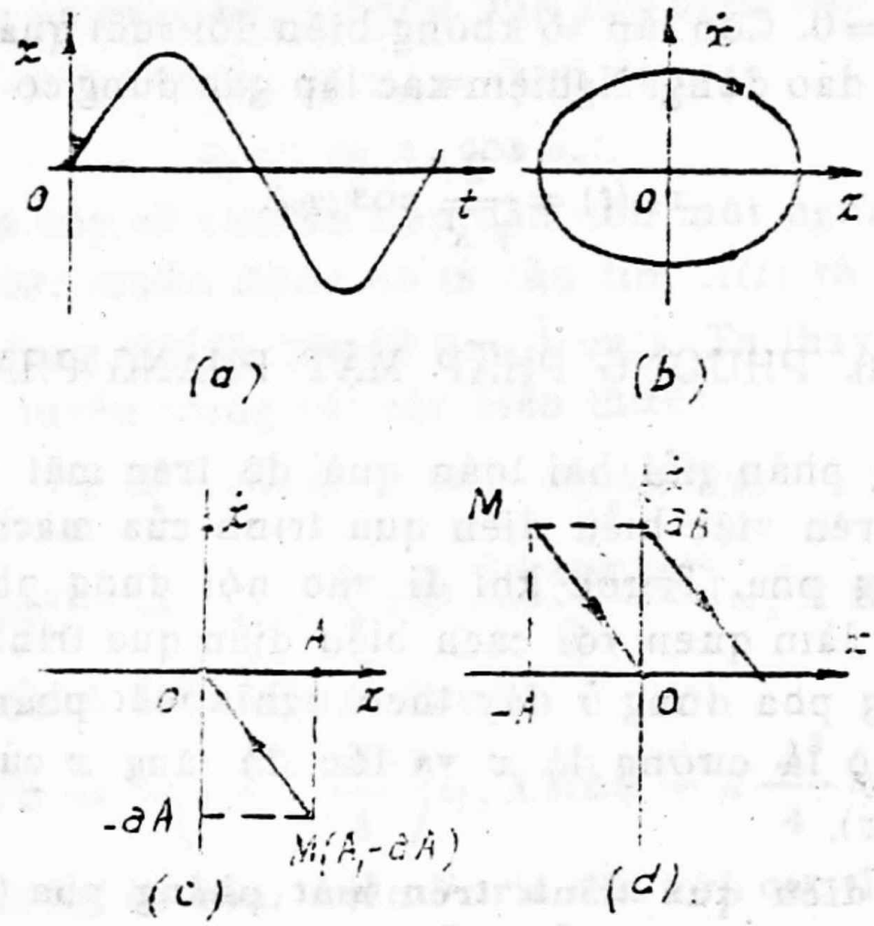
Phương pháp giải bài toán quá độ trên mặt phẳng pha dựa trên việc biểu diễn quá trình của mạch trên mặt phẳng pha. Trước khi đi vào nội dung phương pháp, cần làm quen với cách biểu diễn quá trình trên mặt phẳng pha dùng ở đây theo nghĩa mặt phẳng với các tọa độ là cường độ x và tốc độ tăng $\dot{x}$ của quá trình $(x, \dot{x})$.

1. Biểu diễn quá trình trên mặt phẳng pha $(x, \dot{x})$. Cho đến nay ta quen biểu diễn quá trình dòng, áp v.v... là những hàm x của biến thời gian t trên mặt phẳng pha (x, t). Trên mặt phẳng pha ấy những cặp số (x, t), ví dụ $x = X_m \sin \omega t$ vẽ thành những đường cong $x(t)$, cho biết *cường độ x của quá trình ở mỗi thời điểm t* (h. 22-7*a*).

Đường cong ấy không cho biết dưới dạng tường minh tốc độ tăng của quá trình $\dot{x} = dx/dt$, cũng là một biến trạng thái của quá trình, mà chỉ cho biết qua đồ dốc đường cong.

Một cách tự nhiên nếu lấy cường độ x và tốc độ tăng $\dot{x}$ làm cặp biến trạng thái $(x, \dot{x})$ của quá trình ở mọi

thời điểm, ta sẽ hoàn toàn biểu diễn được quá trình ấy bằng những điểm trạng thái $(x, \dot{x})$ trên *mặt phẳng pha* $(x, \dot{x})$. Vậy những điểm trạng thái của quá trình làm thành những *quĩ đạo pha*.



H. 22-7

Ví dụ với một quá trình biến thiên điều hòa:

$$x = X_m \sin \omega t,$$

ta có:

$$\dot{x} = \omega X_m \cos \omega t.$$

Do đó có:

$$(\omega x)^2 + \dot{x}^2 = (\omega X_m)^2,$$

hoặc:

$$\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\omega X_m)^2} = 1.$$

Ta được phương trình liên hệ các lượng x và $\dot{x}$ của hàm điều hòa. Theo phương trình này, trên mặt phẳng pha quá trình điều hòa $x(t)$ sẽ được miêu tả bằng quĩ

đạo pha là một đường ellip với hai nửa trục bằng cường độ cực đại X_m và tốc độ cực đại ωX_m (h. 22-7*b*).

Ta dẫn ra quĩ đạo pha một số hàm thường gặp:

a) *Hàm mũ tắt.* Hàm $x = Ae^{-at}$ có đạo hàm $\dot{x} = -aAe^{-at}$. Do đó quan hệ $x(\dot{x})$ là:

$$\dot{x} = -ax.$$

Với A là một hằng số dương, trên mặt phẳng pha $(x, \dot{x})$ hàm mũ sẽ được mô tả bằng quĩ đạo pha là một đoạn thẳng nối gốc tọa độ và điểm M có hoành độ $x = A$, tung độ $\dot{x} = -aA$ (h. 22-7*c*).

b) *Hàm mũ âm.* Cho hàm $x = -Ae^{-at}$ ta cũng dẫn ra quan hệ trên mặt phẳng pha, $\dot{x} = -ax$, là một đoạn thẳng nối gốc tọa độ với điểm $M(-A; aA)$ (h. 22-7*d*).

c) *Hàm* $x = A(1-e^{-at})$. Để dễ phân tích ta đặt:

$$x = A - x_1, \; x_1 = x - A,$$

trong đó: $$x_1 = -Ae^{-at}$$

Do đó theo trường hợp (*b*), ta có:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 = -ax_1$$

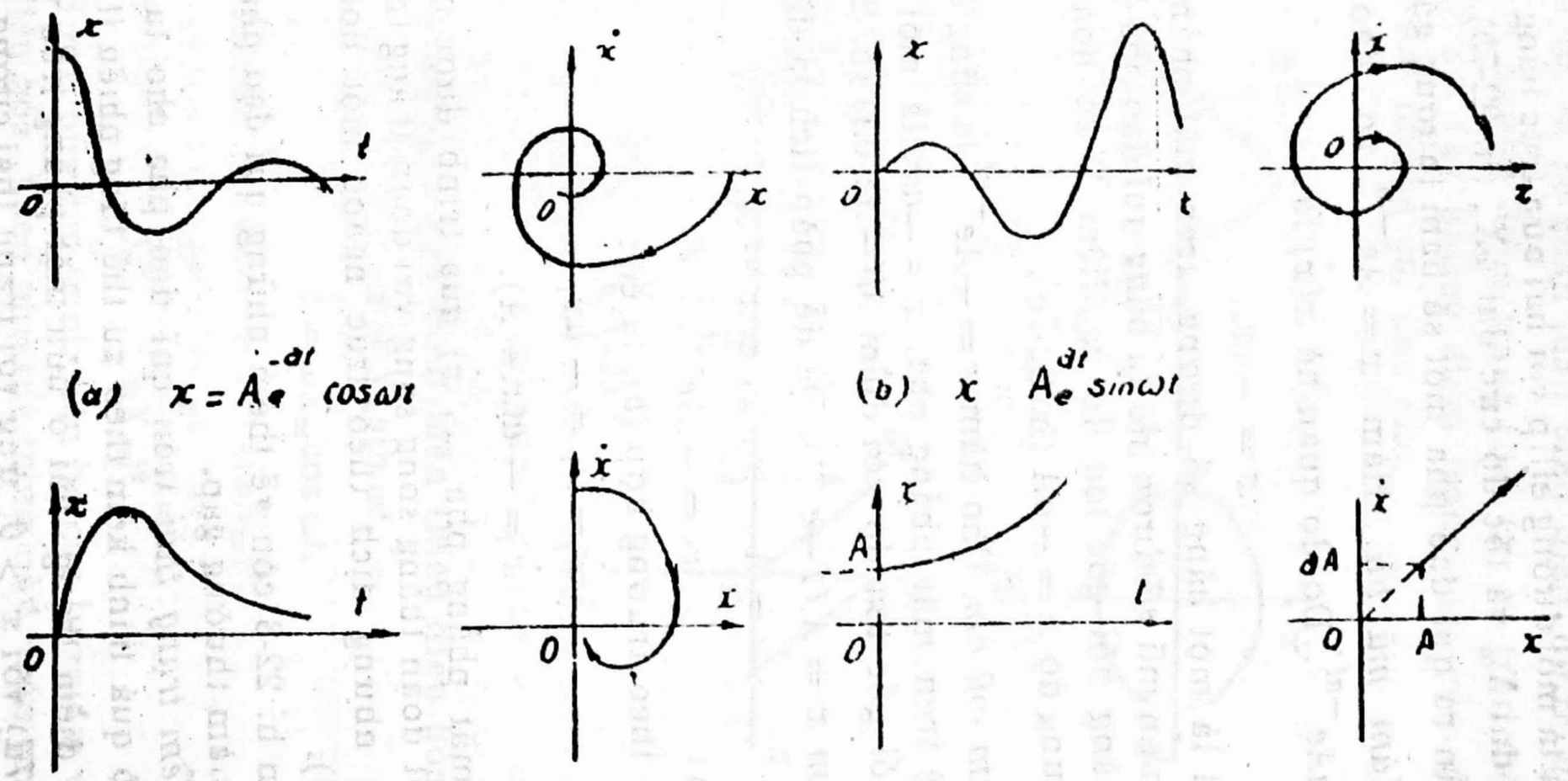
hoặc: $$\dot{x} = -a(x - A).$$

Trên mặt phẳng pha $(x, \dot{x})$ quá trình được mô tả bằng một đoạn thẳng song song với đoạn thẳng trường hợp (*b*), nhưng dịch theo trục ngang một đoạn A (h. 22-7*d*).

d) Trên h. 22-8 còn vẽ thêm những quĩ đạo pha của một vài hàm thường gặp.

Mỗi *điểm trạng thái* trên quĩ đạo pha cho ta biết cường độ quá trình kèm theo xu thế tăng nhiều ít.

Những điểm trạng thái ở nửa mặt phẳng trên ví dụ *M* (h. 22-7*d*) với $\dot{x} > 0$, ứng với trạng thái cường độ x đang tăng dần. Vì vậy ở nửa mặt phẳng trên các điểm


x
t
0
ẋ
x
0
x
0
t
x
ẋ
0
x
(a) $x = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$
(b) $x \quad Ae^{\alpha t}\sin\omega t$
x
t
0
ẋ
x
0
x
A
t
0
ẋ
αA
0
A
x
(c) $x = A(e^{-\alpha t} - e^{-bt})$
$b > a$
(d) $x = Ae^{\alpha t}$ $\dot{x} = \alpha Ae^{\alpha t}$
$\dot{x} = \alpha x$ $> A$

Н. 22-8 a,b,c,d

trạng thái đều di chuyển dọc quĩ đạo pha sang phía phải. Những điểm trạng thái ở nửa mặt phẳng dưới, ví dụ M (h. 22-7c) có tốc độ $\dot{x} < 0$ ứng với cường độ x đang giảm. Vì vậy chúng đều di chuyển sang phía trái. Với tính chất ấy quĩ đạo pha cho ta biết rõ xu thế biến thiên của quá trình là tăng dần, giảm dần, hay dao động v.v...

Khi quĩ đạo pha khép kín, điểm trạng thái sẽ di chuyển khép kín hết vòng này đến vòng khác, lặp đi lặp lại. Điều đó nói rõ *quá trình là chu kỳ*.

Ngoài ra quĩ đạo pha còn nói rõ *cả gia tốc của quá trình* $x(t)$ nữa. Thật vậy, ta có:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} = \dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}. \qquad (22\text{-}31)$$

Vậy gia tốc ứng với mỗi điểm trạng thái M có $(x, \dot{x})$ bằng tích của tung độ $\dot{x}$ với độ dốc quĩ đạo pha $d\dot{x}/dx$. Ta thấy các điểm trạng thái trong góc phần tư thứ nhất và thứ tư h. 22-7b ứng với gia tốc âm vì $\dot{x}$ và $d\dot{x}/dx$ trái dấu nhau; còn trong góc phần tư thứ hai và ba gia tốc dương vì $\dot{x}$ và $d\dot{x}/dx$ cùng dấu. Quĩ đạo pha h. 22-7d có gia tốc âm, quá trình giảm với tốc độ chậm dần.

Một loại điểm quan trọng trên quĩ đạo pha là *điểm cân bằng* ứng với trạng thái cân bằng của quá trình có $\dot{x} = 0$ và $\ddot{x} = 0$ tức tốc độ và gia tốc triệt tiêu. Do đó ở trạng thái ấy quá trình có thể không biến thiên cường độ nữa.

Chú ý rằng theo (22-31) điểm cân bằng phải nằm trên trục ngang ($\dot{x} = 0$) đồng thời ở đó độ dốc của quĩ đạo pha $d\dot{x}/dx$ phải giới nội để có $\ddot{x} = 0$. Ví dụ những điểm quĩ đạo pha cắt trục ngang trên h. 22-7 c,d đều là

điểm cân bằng nghĩa là có các trạng thái cân bằng với $x = 0$, $\dot{x} = 0$ và $x = A$, $\dot{x} = 0$.

Hàm điều hòa không có trạng thái cân bằng, vì vậy những giao điểm với trục hoành của quĩ đạo pha h. 22-7*b* không phải là điểm cân bằng. Thật vậy tuy ở đó $\dot{x} = 0$ nhưng $d\dot{x}/dx = \infty$ nên $\ddot{x} \neq 0$. Từ đây suy ra *mỗi chung ứng với một trạng thái cân bằng quĩ đạo pha (x, ẋ) cắt trục ngang dưới một góc không vuông, ứng với một trạng thái cân tiếp diễn quĩ đạo pha phải cắt trục ngang dưới một góc vuông* (xem các đường cong trong h. 22-8).

Trong thường có hai loại *trạng thái cân bằng : ổn định (hoặc bền) và không ổn định (không bền)*. Cân bằng sẽ gọi là ổn định nếu ở một lý do gì đó trạng thái hơi rời khỏi vị trí cân bằng, mạch lại trở về trạng thái đó (hoặc quanh trạng thái đó). Ngược lại nếu mọi thăng giáng nhỏ rời khỏi điểm cân bằng $x = 0$, $\dot{x} = 0$ sẽ lớn dần lên mãi mãi, ở xa rời hẳn trạng thái cân bằng đó, ta có một trạng thái cân bằng không ổn định.

Quĩ đạo pha $(x, \dot{x})$ có ưu điểm chỉ rõ trạng thái cân bằng là ổn định hay không. Đó là vì như đã nói ở trên, quĩ đạo pha cho ta rõ cả chiều hướng biến thiên của điểm trạng thái. Ví dụ trên các quĩ đạo pha h. 22-7 *c,d*; 22-8*a,c* điểm cân bằng là ổn định và trên các h. 22-8 *b,d* chúng không ổn định.

Vậy « đọc » một quĩ đạo pha $(x, \dot{x})$ có thể biết tính chất quá trình là dao động hay không, chu kỳ hay không, tiến đến trạng thái cân bằng nào, trạng thái ấy ổn định hay không v.v... Ta cũng biết độ lớn, tốc độ, gia tốc của quá trình.

2. Chuyển từ cách biểu diễn quĩ đạo pha (x, ẋ) về cách biểu diễn đường cong x(t). Quĩ đạo pha và đường

cong $x(t)$ là hai cách biểu diễn cùng một quá trình, vì vậy phải liên quan nhau. Ta có thể chuyển từ cách biểu diễn nọ sang cách biểu diễn kia.

Để tìm công thức chuyển từ quĩ đạo pha sang đường cong $x(t)$, ta xuất phát từ định nghĩa tốc độ tăng :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}. \tag{22-32}$$

Ở đây $\dot{x}$ thuộc quĩ đạo pha nên thường liên quan với x qua một hàm xác định của x :

$$\dot{x} = f(x).$$

Do đó gọi t là thời gian để chuyển từ trạng thái ban đầu x_0 đến x ta có :

$$t = \int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}. \tag{22-33}$$

trong đó các cận tích phân bên vế phải lấy từ giá trị ban đầu x_0 đến giá trị x xét.

Ví dụ 22-10. Đối với hàm mũ tắt dần ở trên đã có :

$$\dot{x} = f(x) = -ax.$$

Với sơ kiện $x_0 = A$, thay vào (22-33), ta có :

$$t = \int_A^x \frac{dx}{-ax} = -\frac{1}{a} \ln \frac{x}{A} \text{ hoặc } x = Ae^{-at}$$

Đối với những quan hệ $x(\dot{x})$ phức tạp tích phân (22-33) thường khó khăn. Lúc đó từ quĩ đạo pha có thể dùng phương pháp tích phân gần đúng để vẽ ra đường cong $x(t)$.

Trên quĩ đạo pha ta xuất phát từ một điểm $0(x, \dot{x}_0)$ ứng với sơ kiện về cường độ x_0 và tốc độ tăng $\dot{x}_0$. Nó ứng với điểm đầu $0'$ của đường cong $x(t)$, với hoành

độ $t = 0$ và tung độ x_0. Từ $0'$ vẽ một đoạn ngắn với độ dốc $\dot{x}_0$, tận cùng ở một điểm $1'$ có tung độ x_1 nào đó, ta được thêm một đoạn đường cong $x(t)$. Lại trở lại quĩ đạo pha xem với cường độ x_1 tốc độ tăng $\dot{x}_1$ bằng bao nhiêu. Biết $\dot{x}_1$ này ta lại tiếp tục chắp thêm vào đường cong $x(t)$ một đoạn nhỏ có độ dốc $\dot{x}_1$, để qua một đoạn Δt đi đến điểm $2'$ có tung độ x_2...

Cứ thế tiếp tục ta vẽ dần được toàn bộ đường $x(t)$. Tất nhiên các bước Δt chọn càng ngắn đường cong $x(t)$ sẽ càng đúng.

3. Cách giải phương trình mạch (tuyến tính và phi tuyến) trên mặt phẳng pha.

Nội dung cách giải phương trình trên mặt phẳng pha là chuyển hệ phương trình trong không gian (x, t) về một hệ phương trình trong không gian $(x, \dot{x})$, sau đó giải hệ này để tìm ra quan hệ $x(\dot{x})$, tức là quĩ đạo pha.

Phương pháp này giải được các phương trình đến cấp 2, tuyến tính hoặc phi tuyến. Khi chuyển sang không gian $(x, \dot{x})$ phương trình cấp 2 sẽ giảm cấp thành cấp *1*.

Cách chuyển như sau. Đặt đạo hàm cấp *1* của x theo t làm một biến, ví dụ kí hiệu bằng chữ y:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = y. \qquad (22\text{-}32)$$

Như vậy, theo (22-18), đạo hàm cấp 2 sẽ chuyển thành một tích:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \dot{x}\,\frac{dy}{dx} = y\,\frac{dy}{dx} \qquad (22\text{-}31)$$

Vậy trong phương trình vi phân cấp 2 các ẩu và đạo hàm đến cấp 2 sẽ chuyển thành những đạo hàm đến

cấp 1 của y. Do đó nhiều khi có thể dễ tính toán giải ra tìm quĩ đạo $y(x)$.

Tuy vậy phương pháp này có một hạn chế là chỉ giải cho các mạch không có nguồn ngoài hoặc chỉ có một nguồn ngoài không đổi. Đó là vì khi có nguồn ngoài biến thiên theo thời gian thì sau khi chuyển phương trình sang không gian $(x, \dot{x})$ ngoài hai biến y, x, lại còn biến độc lập t nữa. Do đó không trực tiếp giải tìm quan hệ $x(y)$ trên mặt phẳng pha được.

Ví dụ 22-11: Chuyển phương trình mạch r-L đóng vào điện áp không đổi U thành phương trình trên mặt phẳng pha, và tìm quĩ đạo pha:

Giải: Phương trình mạch có dạng:

$$Li' - ri = U$$

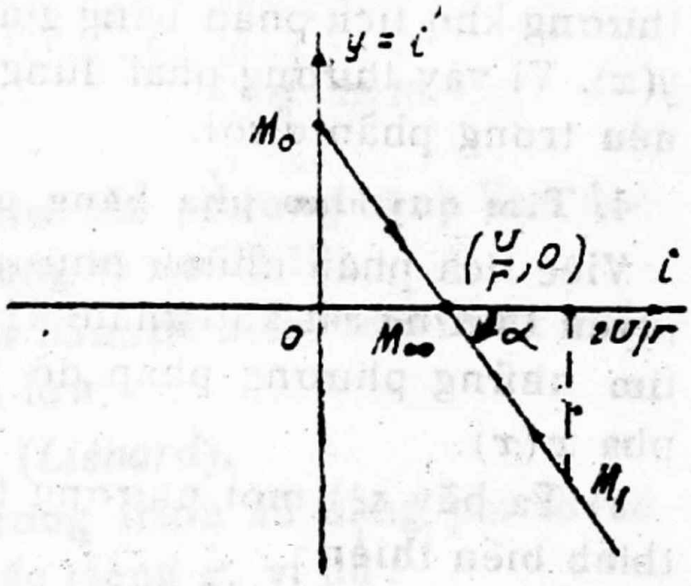
Đặt $i' = y$, ta có phương trình:

$$Ly + ri = U,$$

hoặc:

$$y = -\frac{r}{L}i - \frac{U}{L}$$

Quĩ đạo trên mặt phẳng $y(i)$ là một đoạn thẳng chạy qua điểm $M_\infty\left(\frac{U}{r}, 0\right)$ và có độ dốc $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{r}{L}$ (h. 22-9).



H. 22-9

Với sơ kiện $i_0 = 0$ quĩ đạo sẽ chuyển từ M_0 đến điểm cân bằng M_∞. Đây là một điểm cân bằng ổn định vì quĩ đạo đều hướng chuyển về nó. Với sơ kiện $i_0 = 2U/r$ quĩ đạo sẽ chuyển từ M_1 đến M_∞.

Ví dụ 22-12: Tìm phương trình quĩ đạo pha của phương trình dao động phi tuyến Van đer Pôl (22-20).

Giải: Phương trình tự dao động Van đer Pôl có dạng mẫu :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu(1 - x^2)\dot{x} = 0.$$

Là một phương trình cấp 2 thuần nhất (không nguồn) ta có thể chuyển sang nghiên cứu trên mặt phẳng pha. Với cách đặt :

$$\dot{x} = y\,; \quad \ddot{x} = y\frac{dy}{dx},$$

ta có phương trình trên mặt phẳng pha :

$$y\frac{dy}{dx} - \omega_0^2 x - \mu(1 - x^2)y = 0.$$

hoặc :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 x - \mu(1 - x^2)y}{y}.$$

Ta được một phương trình vi phân phi tuyến cấp 1, thường khó tích phân bằng giải tích để tìm quĩ đạo pha $y(x)$. Vì vậy thường phải dùng các phương pháp đồ thị nêu trong phần dưới.

4. Tìm quỹ đạo pha bằng phương pháp vẽ.

Việc tích phân những phương trình quĩ đạo pha phi tuyến thường rất khó khăn. Trong trường hợp đó có thể tìm những phương pháp đồ thị vẽ gần đúng quĩ đạo pha $x(x)$.

a) Ta hãy xét một phương trình cấp 2 không có kích thích biến thiên :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - f(x, \dot{x}) = 0.$$

Với cách đặt $\dot{x} = y$, $\ddot{x} = ydy/dx$ ta chuyển sang phương trình :

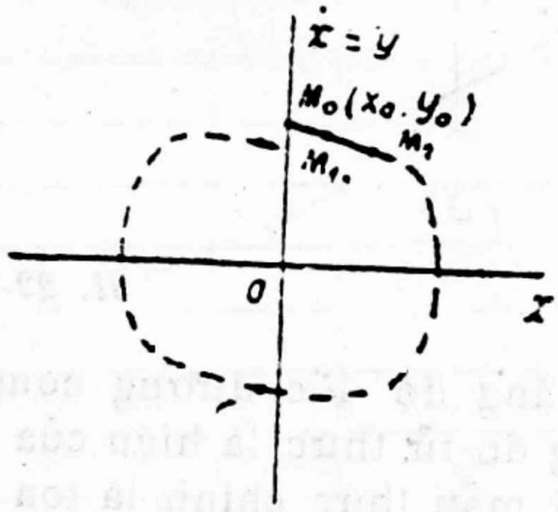
$$y\frac{dy}{dx} + \omega_0^2 x - f(x, y) = 0.$$

hoặc:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 x - f(x, y)}{y}. \qquad (22\text{-}34)$$

Phương trình này nói lên rằng độ dốc của quĩ đạo dy/dx ở mỗi điểm có tọa độ x, y là một hàm của chính các tọa độ ấy (vế phải của 22-34). Từ đó suy ra cách vẽ như sau:

Từ một điểm $M_0(x_0, y_0)$ ứng với sơ kiện bài toán, ta vẽ một đoạn ngắn với độ dốc $dy(M_0)/dx$ tính theo (22-34) với các tọa độ x_0, y_0 của M_0. Ta đến điểm M_1 có tọa độ x_1, y_1 ứng với độ dốc khác $dy\ (M_1)/dx$. Từ M_1 lại vẽ tiếp một đoạn thẳng ngắn với độ dốc mới đó đi đến một điểm M_2 v v... Cứ thế tiếp tục ta vẽ được toàn bộ quĩ đạo pha.



H. 22-10

Vẽ các đoạn đó càng ngắn lời giải sẽ càng chính xác. H. 22-10 vẽ quĩ đạo pha của phương trình Van đer Pôl (phương trình nêu trong ví dụ 22-12).

Phương pháp này rất cơ bản, dễ hiểu, tuy nhiên khối lượng tính toán cũng khá lớn.

b) *Phương pháp Liêna (Liénard).*

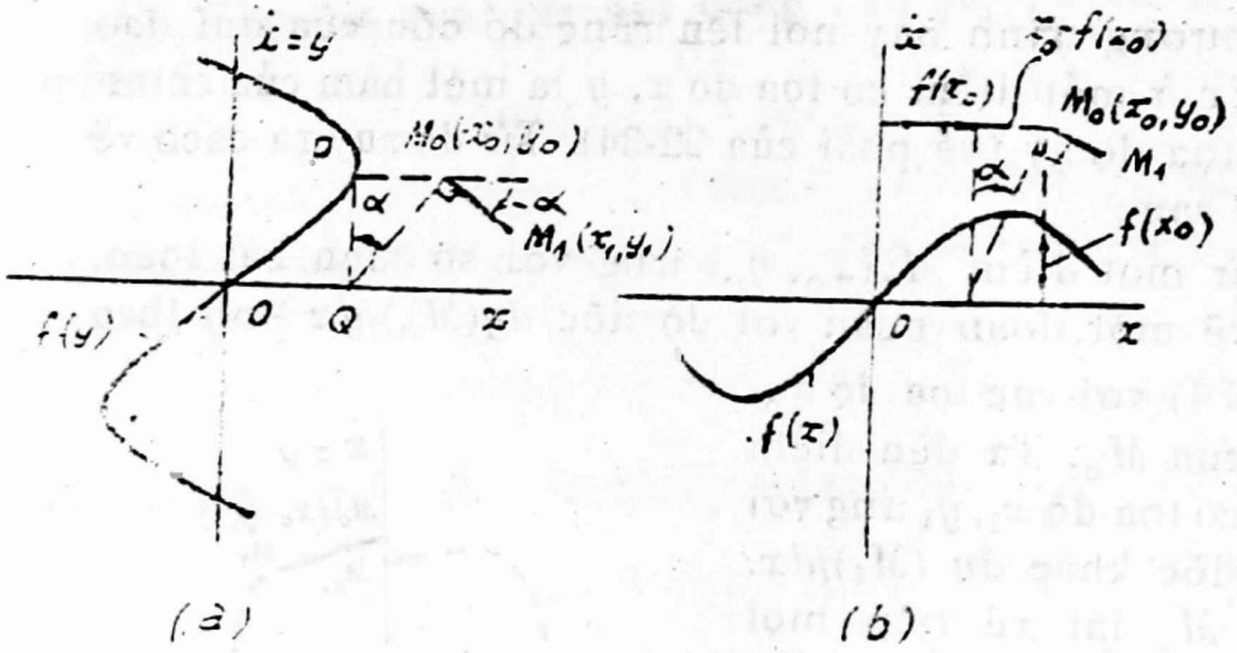
Đặc biệt khi trong phương trình số hạng phi tuyến chỉ phụ thuộc riêng x hoặc riêng $\dot{x}$, ví dụ:

$$\ddot{x} + x - f(\dot{x}) = 0, \qquad (22\text{-}35)$$

phương trình quĩ đạo pha sẽ giản đơn hơn nhiều:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - f(y)}{y}. \qquad (22\text{-}36)$$

Liénа, một kỹ sư Pháp, năm 1928 đã nêu lên một phương pháp giản tiện để vẽ quĩ đạo pha cho loại phương trình này (h. 22-11). Ông xuất phát từ nhận



H. 22-11

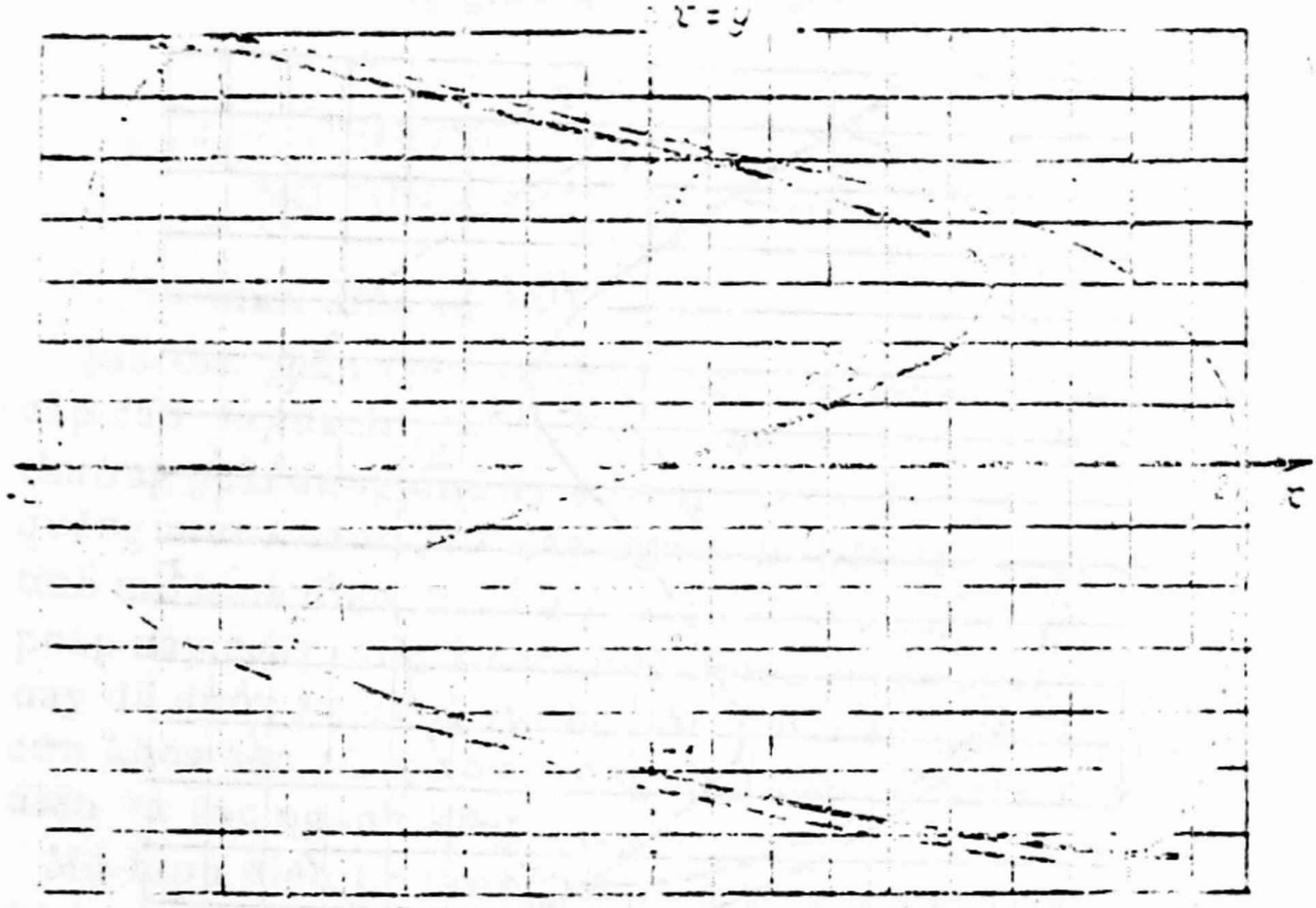
xét rằng độ dốc đường cong $y(x)$ bằng một thương, trong đó tử thức là hiệu của tọa độ x với một hàm của y, và mẫu thức chính là tọa độ y. Để tiện việc vẽ độ dốc ấy, trên mặt phẳng pha (với tỉ lệ xích trục ngang và trục dọc như nhau) ta vẽ theo trục x hàm $f(y)$. Do đó, khoảng cách ngang từ một điểm M_0 có tọa độ x_0, y_0 nào đó đến đường cong $f(y)$ sẽ là hiệu $x_0 - f(y_0)$. Trên h. 22-11*a*, đó là đoạn PM_0. Từ P dóng thẳng đứng xuống trục ngang ta được điểm Q. Đoạn $PQ = y_0$ chính là tung độ của M_0 (x_0, y_0). Vậy góc $\alpha = \widehat{PQM_0}$ chính là góc dốc cần tìm, vì :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{PM_0}}{\overline{PQ}} = \frac{x_0 - f(y_0)}{y_0}. \qquad (22\text{-}37)$$

Chỉ việc chuyển góc dốc α đó đến M_0 và theo góc dốc $-\alpha$ từ M_0 vẽ một đoạn thẳng ngắn; nó sẽ là một đoạn của quĩ đạo pha (22-36).

Muốn vậy ta đặt một êke với đỉnh vuông ở M_0 và một cạnh vuông qua O, vẽ đoạn $\overline{M_0M_1}$. Dễ thấy rằng vẽ như vậy góc nghiêng của $\overline{M_0M_1}$ chính là góc $-\alpha$.

Ở điểm M_1, lặp lại cách vẽ trên, ta lại được một đoạn khác của quĩ đạo pha. Cứ thế tiếp tục chỉ dùng êke (hoặc compa) ta có thể vẽ toàn bộ quĩ đạo pha một cách giản tiện, nhanh chóng (xem ví dụ 22-12).



H. 22-12

Ở đây chỉ nêu cách vẽ cho trường hợp số hạng phi tuyến là hàm của riêng $\dot{x}$; trường hợp số hạng đó là hàm của riêng x, tức $f(x)$ cách vẽ tuy hơi phiền, hơn một chút, nhưng cũng gần giống như vậy (h. 22-11*b*).

Ví dụ 22-13: **Hãy vẽ quĩ đạo pha của phương trình Van đer Pôl dạng:**

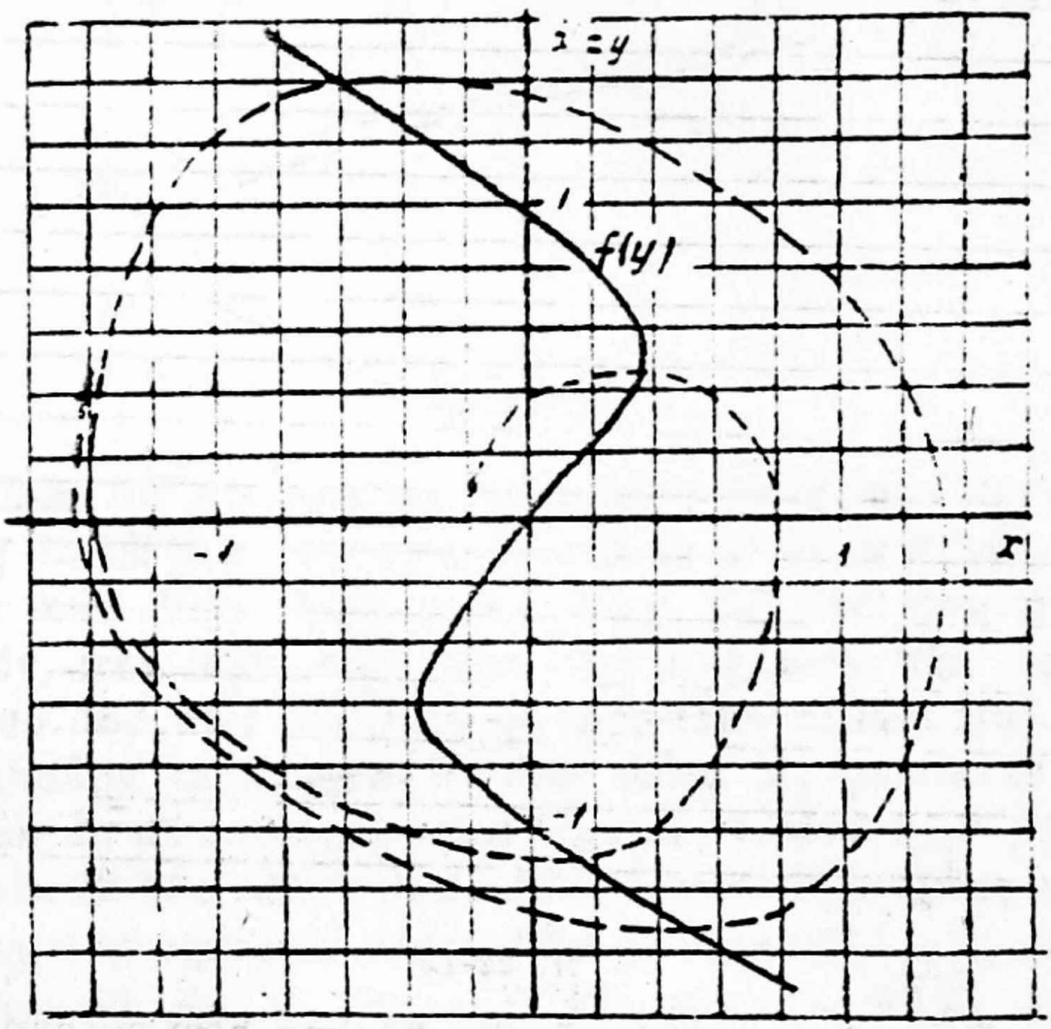
$$\ddot{x} + x - \mu(1 - x^2)\dot{x} = 0,$$

1) Với $\mu = 3$, và sơ kiện $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0.8$,

2) Với $\mu = 1$, hà sợ kiện $x_0 = -0{,}2$, $\dot{x}_0 = 0$.

Giải. Ở đây số hạng phi tuyến chỉ phụ thuộc riêng $\dot{x} = y$, ta nên dùng phương pháp đồ thị Liêna, với phương trình:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \mu(1 - y^2)\, y}{y}$$



H. 22-13

Đầu tiên ta vẽ đường cong của số hạng phi tuyến: $\mu(1 - y^2)\, y = f(y)$. Số hạng đó có những đặc điểm sau

a) ở $y = 0$ và $y = \pm 1$, $f(y) = 0$,

b) ở $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}576$, có cực trị $f(y) = \pm\frac{2\mu}{3\sqrt{3}}$.

Các cực trị ấy với μ bằng 3 và 1 thứ tự bằng 1,16 và 0,386.

H. 22-12 và 22-13 vẽ những đường cong f(y) cho hai trường hợp đó. Từ điểm ứng với sơ kiện, bắt đầu dùng êke vẽ dần từng đoạn quĩ đạo.

Trong hai trường hợp đều thấy quá trình dần đi đến một quĩ đạo khép kín. Điều đó nêu rõ cuối cùng sẽ xác lập một quá trình dao động chu kỳ.

Khi vẽ nên dùng giấy kẻ milli tiện dụng hơn.

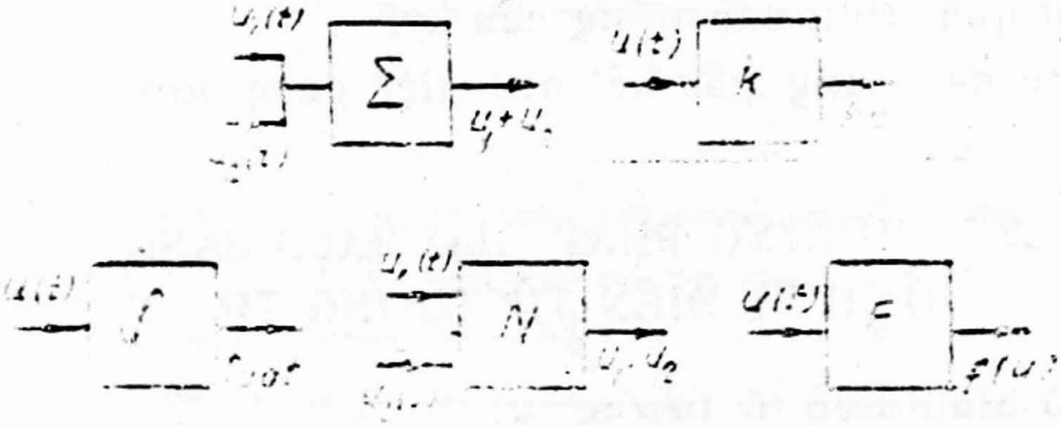
§22-7. PHƯƠNG PHÁP GIẢI MẠCH BẰNG MÔ HÌNH ĐIỆN TỬ TƯƠNG TỰ

1. Mô hình điện tử tương tự.

Qua các phần trên đã thấy việc tính mạch tuyến tính cấp cao và mạch phi tuyến ở chế độ quá độ rất khó, thường phải dùng những phương pháp gần đúng. Trong quãng mươi năm gần đây người ta bắt đầu dùng máy tính mô hình điện tử để giải các bài toán mạch. Phương pháp này ngày càng được dùng nhiều và trong dăm năm nay đã được sử dụng tương đối phổ biến trong nghiên cứu khoa học cũng như trong tính toán kỹ thuật ngành điện và các ngành khác.

Mô hình điện tử tương tự là một mô hình vạn năng (thông dụng) rất tiện giải các bài toán mạch, tức các hệ phương trình vi phân thường trong thời gian. Nó chứa những khâu cơ bản để thực hiện các phép tính cơ bản thường gặp trong phương trình vi phân là phép cộng, trừ các hàm (thường là điện áp) $u_1(t) + u_2(t)$, phép tỉ lệ, (nhân một hàm với một hằng $au(t)$), phép tích phân $\int udt$, phép tích 2 hàm $u_1(t).u_2(t)$, phép tạo hàm $f(u)$.

Các khâu đó thứ tự gọi là bộ cộng, bộ tỉ lệ, bộ tích phân, bộ nhân, bộ tạo hàm. Bản thân chúng là những mạng 2 cửa đặc biệt trên mỗi cửa chỉ có *một* tín hiệu áp, sao cho khi đặt ở cửa vào những điện áp bằng các hàm $u_1(t)$, $u_2(t)$... thì ở cửa ra sẽ là tổng, tích phân, hoặc tích của chúng, v.v... (h. 22-14).



H. 22-14

2. **Cách ghép mô hình điện tử kiểu tích phân nối chuỗi.**

Như vậy ghép các bộ thuật toán đó lại thành một mạch mô phỏng đúng phương trình cần giải, mô hình sẽ hoạt động đúng hệt như phương trình đó. Ta chỉ cần đo các lượng trong mô hình là được nghiệm của phương trình. Dưới đây sẽ trình bày một cách ghép mô hình gọi là cách ghép mạch tích phân xâu chuỗi.

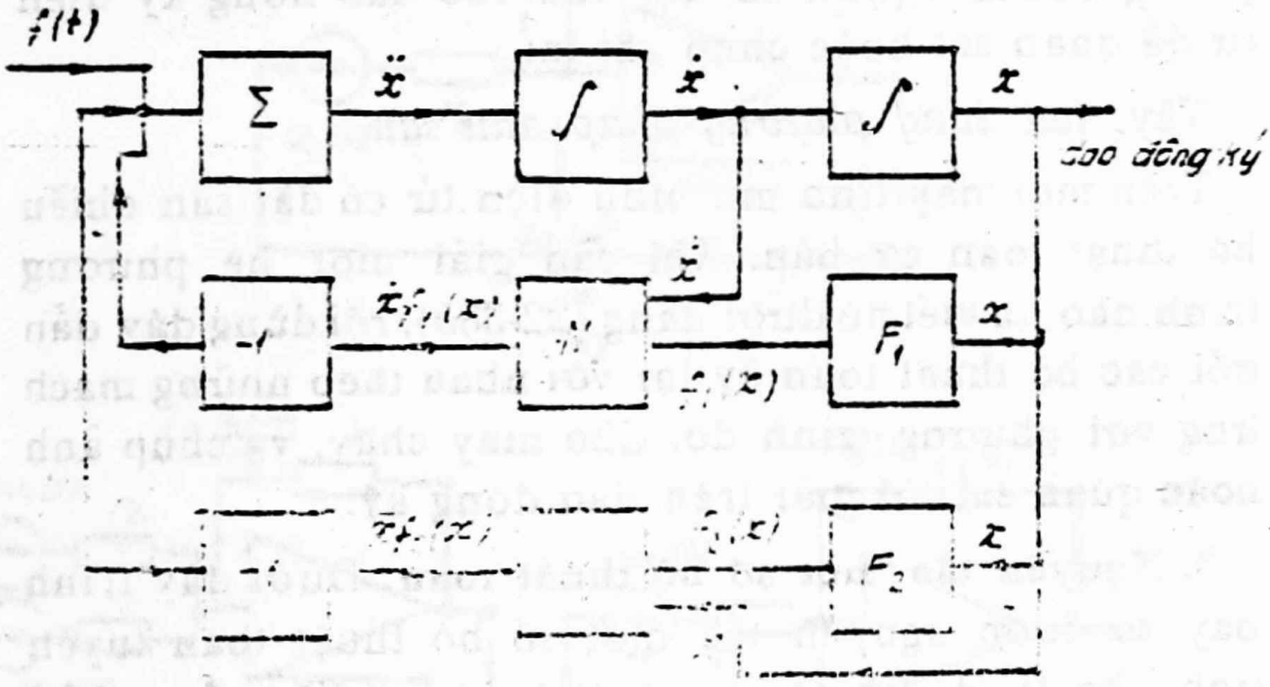
Ta sẽ minh họa nội dung phương pháp qua một phương trình vi phân. Để đơn giản ta chọn một phương trình cấp 2 :

$$\ddot{x} + f_1(x)\,\dot{x} + f_2(x)\,.\,x + f(t) = 0. \qquad \textbf{(22-38a)}$$

Muốn thành lập mạch tích phân xâu chuỗi ***ta chuyển đạo hàm cấp cao nhất sang một vế*** :

$$\ddot{x} = -\,f_1(x)\,\dot{x} - f_2(x)\,x - f(t). \qquad \textbf{(22-38b)}$$

Phương trình này có nghĩa là đạo hàm cấp cao nhất $\ddot{x}$ bằng tổng của những số hạng trong vế phải. Lắp các bộ thuật toán như trong h. 22-15, trong đó ta thực hiện phép tổng ấy bằng một bộ cộng mà cửa vào là các số hạng trong vế phải và cửa ra sẽ là $\ddot{x}$.



H. 22-15

Nhưng các số hạng ở vế phải lại là các hàm của $\dot{x}$ và x. Muốn có được các hàm này từ $\ddot{x}$ cần lắp tiếp vào sau bộ cộng đó hai bộ tích phân nối chuỗi nhau. Cửa ra bộ tích phân thứ nhất sẽ là $\dot{x}$ và cửa ra bộ tích phân thứ hai sẽ là x.

Lấy lượng x đưa vào hai bộ tạo hàm F_1 và F_2, ở cửa ra sẽ được $f_1(x)$ và $f_2(x)$. Dùng hai bộ nhân N_1 và N_2 mà cửa vào cho $f_1(x)$, $\dot{x}$ và $f_2(x)$, x ở cửa ra thứ tự ta được $f_1(x)\,\dot{x}$ và $f_2(x)\,x$. Sau khi qua các bộ tỉ lệ nhân với -1 (bộ đổi dấu) ta sẽ được hai số hạng cần đưa vào bộ cộng kể trên.

Ngoài ra ở cửa vào bộ cộng ta đưa thêm vào hàm $f(t)$.

Như vậy, nhờ chức năng của các bộ thuật toán và nhờ cách ghép mạch như trên, sự hoạt động sơ đồ này mô phỏng đúng quá trình của phương trình. Các lượng trong sơ đồ đều được mô phỏng bằng những điện áp đưa vào và lấy ra ở các bộ thuật toán. Muốn được nghiệm nào đó (x hoặc $\dot{x}$, v.v...) ta lấy các điện áp mô phỏng chúng ở trên sơ đồ, đưa vào dao động ký điện tử để quan sát hoặc chụp ghi lại.

Vậy, *nội dung phương pháp như sau :*

Trên mỗi máy tính mô hình điện tử có đặt sẵn nhiều bộ thuật toán cơ bản. Khi cần giải một hệ phương trình nào, ta viết nó dưới dạng (22-38*b*), rồi dùng dây dẫn nối các bộ thuật toán ấy lại với nhau theo những mạch ứng với phương trình đó. Cho máy chạy, và chụp ảnh hoặc quan sát lời giải trên dao động ký.

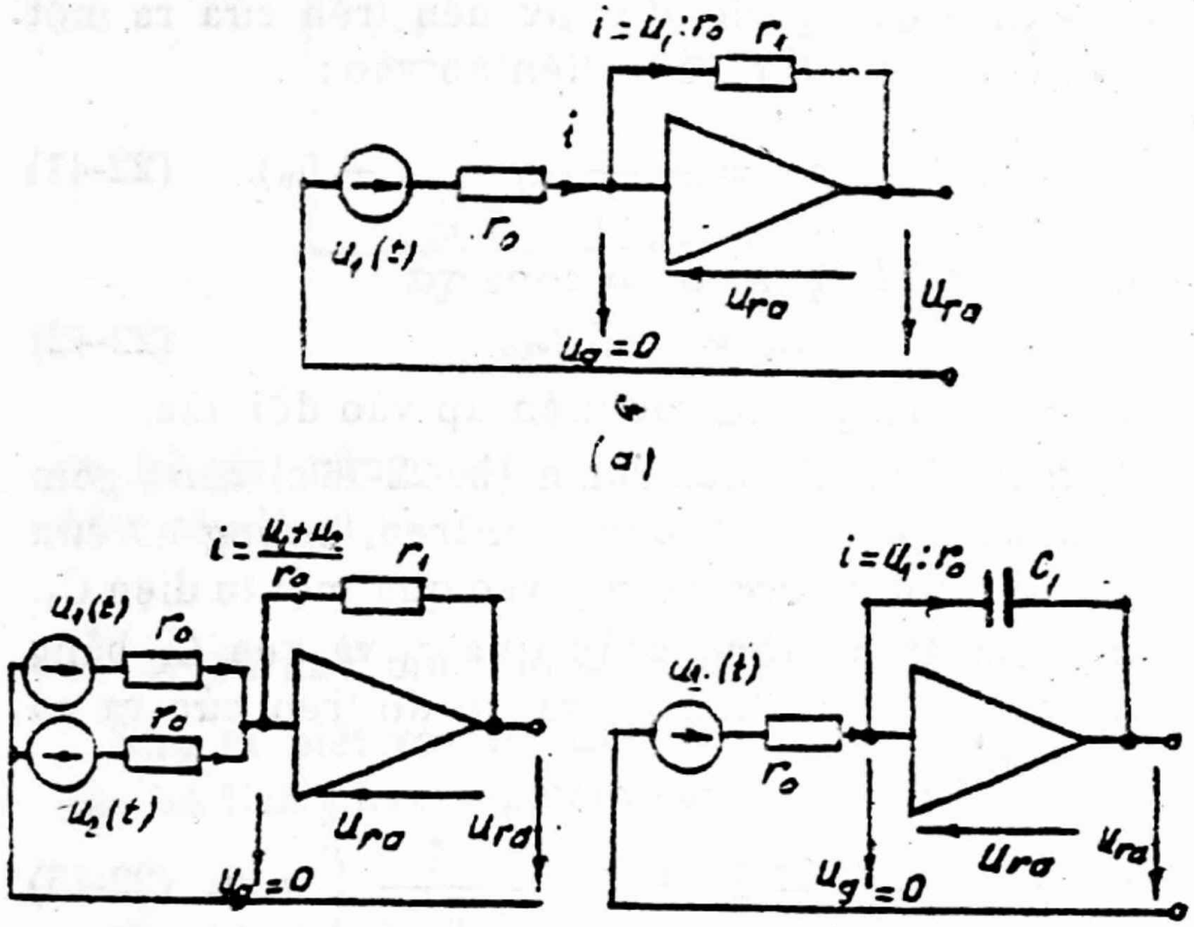
3. **Nguyên tắc một số bộ thuật toán.** Dưới đây trình bày sơ lược nguyên tắc một số bộ thuật toán tuyến tính : bộ tỉ lệ, bộ cộng, bộ tích phân. Yếu tố cơ bản của các bộ thuật toán là những bộ *khuếch đại thuật toán*, có dòng điện vào hết sức nhỏ (gần như số không) và có hệ số khuếch đại về điện áp K_u hết sức lớn (tới 10^6 hoặc hơn nữa).

a) *Bộ tỷ lệ* làm bởi một bộ khuếch đại thuật toán nói trên ký hiệu trong h. 22-16*a* bằng một hình loa có cửa ra nối ngược lại cửa vào qua một điện trở r_1, và điện áp $u_1(t)$ cần nhân tỉ lệ được đặt vào cửa vào qua một điện trở r (h. 22-16a).

Vì hệ số khuếch đại áp rất lớn, nên điện áp u_2 ở cửa vào bộ khuếch đại hết sức nhỏ, thực tế bằng số không. Do đó dòng $i_1 = u_1 r_o$. Và vì dòng vào bộ khuếch đại hết sức nhỏ nên i_1 thực tế chảy qua điện trở r_1.

Kết quả gây nên *một điện áp ở cửa ra, tỉ lệ với điện áp vào* $u_1(t)$:

$$u_{ra} = - r_1 i_1 = - \frac{r_1}{r_o} u_1(t). \qquad (22\text{-}39)$$



H. 22-16

Có một điều là các điện áp vào và ra trái dấu nhau. Thay đổi trị r_1 ta sẽ được những hệ số tỉ lệ khác nhau. Với $r_1 = r_o$ hệ số tỉ lệ bằng -1, ta có một *bộ đổi dấu*, nó cho :

$$u_{ra} = - u_{vào}. \qquad (22\text{-}40)$$

b) *Bộ cộng.*

Bộ cộng (h. 22-16b) có kết cấu hệt như bộ tỉ lệ gồm một bộ khuếch đại thuật toán có phản hồi (nối ngược) bằng điện trở r_1. Chỉ khác là cửa vào của bộ khuếch

đại nối được với nhiều điện áp cần cộng $u_1(t)$, $u_2(t)$... qua những điện trở giống nhau bằng r_o.

Giống như trên, vì $u_g = 0$, nên dòng trong mỗi nhánh có các áp u_1, ..., u_n thứ tự bằng u_1/r_o, ..., u_n/r_o. Chúng cũng chảy nhập cả vào nhánh r_1 với giá trị $i = (u_1 + ... + u_n)/r_o$, do đó cũng nên trên cửa ra một điện áp ra tỉ lệ với tổng các điện áp vào:

$$u_{ra} = -r_1 i = -\frac{r_1}{r_o}(u_1 + ... + u_n). \quad (22\text{-}41)$$

Riêng khi $r_1 = r_o$ ta có bộ cộng với:

$$u_{ra} = -\Sigma u_{vào}, \quad (22\text{-}42)$$

điện áp ra sẽ bằng tổng các điện áp vào đổi dấu.

c) *Bộ tích phân.* Bộ tích phân (h. 22-16 c) cũng gồm một bộ khuếch đại thuật toán như trên, nhưng có cửa ra phản hồi (nối ngược) về cửa vào qua một tụ điện C_1.

Giống như trên, dòng chảy qua r_1 và qua C_1 bằng u_1/r_o nó nạp trên tụ điện C_1 và do đó trên cửa ra có một điện áp:

$$u_{ra} = u_{C_1} - \int_0^t \frac{i}{C}\,dt = u_{C_1} - \frac{1}{r_o C}\int_0^t u_1 dt. \quad (22\text{-}43)$$

Ta thấy với $r_o C = 1$ và *điện áp ban đầu nạp sẵn trên tụ bằng* $-u_{ra}(0)$ *(điện áp ban đầu của bài toán)*, thì theo (22-43) điện áp ở cửa ra sẽ bằng tích phân điện áp vào có kể đến sơ kiện với dấu ngược lại.

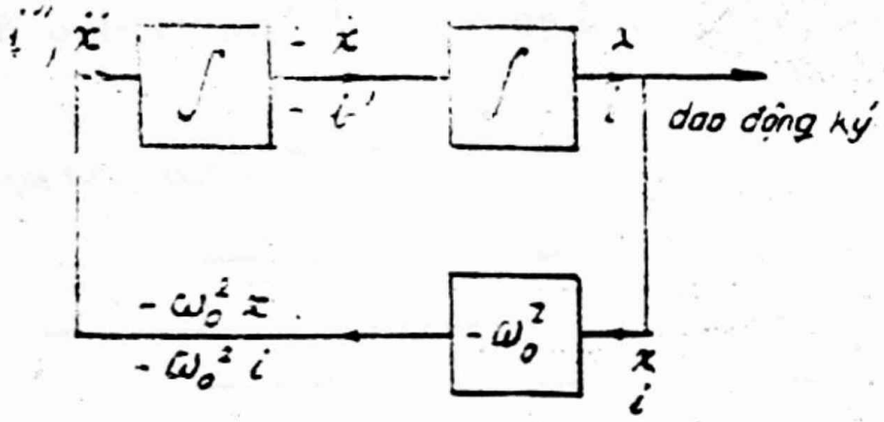
Ví dụ, nếu điện áp vào bằng đạo hàm cấp hai $\ddot{x}(t)$, và điện áp ban đầu trên tụ đặt bằng sơ kiện của đạo hàm cấp một đảo dấu, tức $-\dot{x}(0)$ thì điện áp ra sẽ bằng (xem h. 22-14 *c*):

$$-\dot{x}(t).$$

Dưới đây nêu một vài ví dụ lập sơ đồ giải bài toán mạch điện.

Ví dụ 22-13: Một mạch dao động L-C có phương trình

$$Li'' + \frac{i}{C} = 0 \text{ hoặc } i'' + \omega_0^2 i = 0,$$



H. 22-17

có thể giải bằng một sơ đồ điện tử như h. 22-17. Sở dĩ như vậy là vì ta có:

$$i'' = -\omega_0^2 i,$$

và sơ đồ này mô phỏng đúng quan hệ ấy.

Như ta biết với sơ kiện $i(0) = A$, $i'(0) = 0$ đặt trên các bộ tích phân, nghiệm của bài toán sẽ là:

$$x = A \cos \omega_0 t.$$

Vì vậy có thể dùng sơ đồ này để tạo thành những hàm dao động hình sin với biên độ và tần số cần thiết.

Ví dụ 22-14. Hãy thành lập sơ đồ giải bài toán mạch dao động phi tuyến gồm một tụ điện tuyến tính và một cuộn dây phi tuyến như trong ví dụ 22-7, biết đặc tính lõi sắt: $i = a\psi + b\psi^3$.

Giải. Ta đã biết phương trình viết cho từ thông ψ có dạng:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi + \mu\psi^3 = 0.$$

Chuyển đạo hàm cấp cao sang một vế ta được:

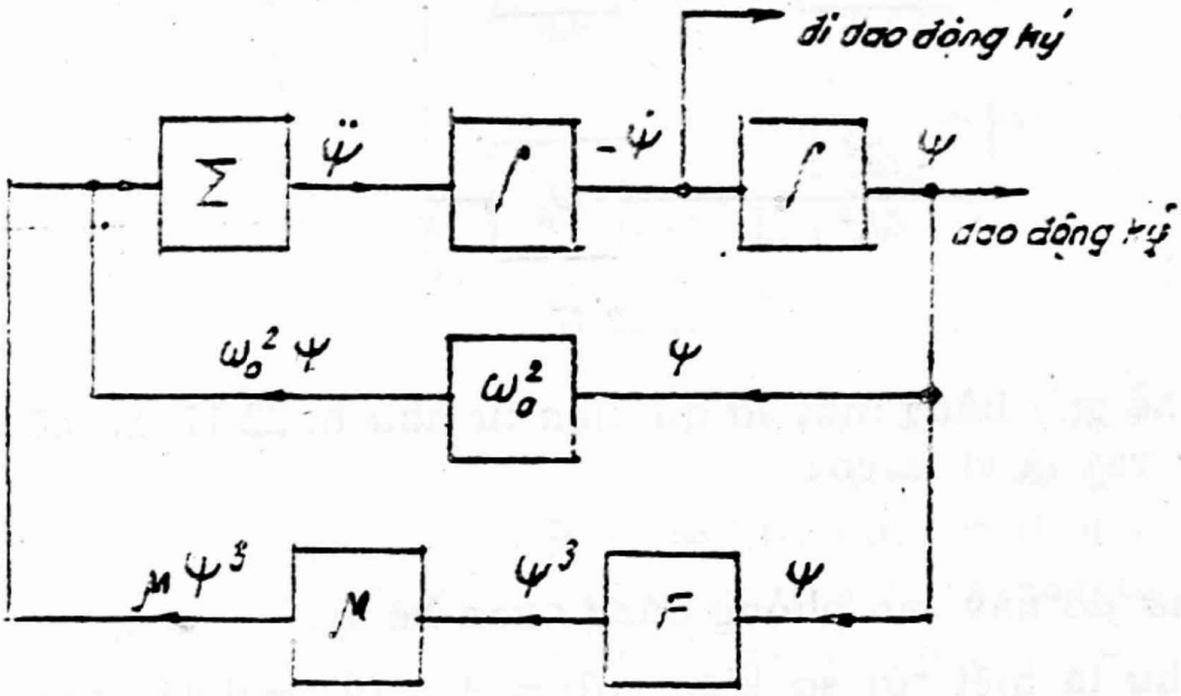
$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \psi - \mu\psi^3.$$

Phương trình này ứng với sơ đồ trong 22-18:

Từ sơ đồ này có thể lấy ra lời giải cho điện áp trên tụ điện. Thật vậy:

$$u_C = -u_\psi = -\dot{\psi}.$$

Vì vậy từ điểm có điện áp $-\dot{\psi}$ đưa ra dao động ký ta sẽ được lời giải cho u_C.



H. 22-18

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Tính phổ biến và thực tiễn của bài toán quá độ trong mạch phi tuyến? So với bài toán quá độ mạch tuyến tính bài toán quá độ mạch phi tuyến có những đặc điểm gì? Những phương pháp tính mạch phi tuyến có đặc điểm gì chung?

2. Nội dung phương pháp tuyến tính hóa phương trình đối với lượng ít phi tuyến như thế nào? Nó dùng cho loại bài toán nào? Ví dụ?

3. Nội dung phương pháp nhiễu loạn như thế nào? Nó dùng cho loại bài toán nào? Ví dụ?

4. Nội dung phương pháp các bước sai phân liên tiếp như thế nào? Phương pháp này có những đặc điểm gì? Tại sao nó có tính thông dụng thực tiễn và hiện đại? Ví dụ.

5. Nội dung phương pháp biên độ pha biến thiên chậm thế nào? Nó dùng cho loại phương trình gì? Ví dụ?

6. Nội dung phương pháp mặt phẳng pha là gì? Nó dùng cho những bài toán đến cấp mấy? Có nguồn biến thiên hay không? Quĩ đạo pha thể hiện cường độ, tốc độ và gia tốc của quá trình như thế nào? Điểm trạng thái đi chuyển trên quĩ đạo pha như thế nào? Khi quĩ đạo pha khép kín quá trình có dạng thế nào? Thế nào là điểm cân bằng của quĩ đạo pha? Từ quĩ đạo pha dẫn ra hàm $x(t)$ như thế nào?

7. Nội dung phương pháp giải mạch bằng mô hình điện tử thế nào? Một máy tính mô hình điện tử gồm những bộ thuật toán gì? Tại sao cần những bộ ấy? Nguyên tắc các bộ thuật toán tuyến tính? Cách lập mô hình theo giản đồ tích phân xâu chuỗi? Tại sao phương pháp mô hình điện tử có tính thông dụng, thực tiễn, hiện đại và có một tầm quan trọng rất lớn.

BÀI TẬP

22-1. Tính dòng điện quá độ khi đóng mạch một cuộn dây lõi sắt có điện trở $r = 40\Omega$, vào một điện áp một chiều $U = 28V$ bằng phương pháp tuyến tính hóa đường đặc tính. Cho đường đặc tính $\psi(i)$ như trong h. 22-1.

Đáp: $i_{mA}(t_{ms}) = 0(0)$; 115 (10); 200 (20); 310 (30); 425 (40); 480(50); 550(60); 700(100).

22-2. Giải bài toán trên bằng phương pháp các bước sai phân liên tiếp. Chọn bước sai phân $h = 2$ ms. Dùng đặc tính $\psi(i)$ h. 22-1.

Đáp: $i_{mA}(t_{ms}) = 0(0)$; 130(10); 310(10); 530(30); 690(40).

22-3. Cũng dùng phương pháp sai phân nhưng với đặc tính $\psi(i) = 1{,}75i - 2.8\ i^3$ với trường hợp $U = 24V$, $r = 60\Omega$.

Đáp: $i_{mA}(t_{ms}) = 0(0)$; 123(10); 227(20); 320(30); 411(40).

22-4. Vẫn giải bài toán trên với đặc tính $\psi(i)$ cho trong bài tập 22-3, nhưng dùng phương pháp nhiễu loạn với một hàm hiệu chỉnh x_1.

Đáp: $i = 0{,}48 - 1{,}28e^{-28t} + 15{,}15t\ e^{-18{,}6t} + 1{,}065e^{-57{,}2t} - 0{,}265e^{-85{,}6t}$.

22-5. Vẽ quĩ đạo pha của dòng (i, i') nêu trong bài tập 22-4.

Hướng dẫn: Từ phương trình, tìm sơ kiện i_o, i'_o; rồi vẽ dần gần đúng từng đoạn.

22-6. Giải bài toán tự dao động của mạch tạo sóng bằng đèn 3 cực nêu trong ví dụ 22-3, đã biết phương trình nêu trong ví dụ đó. Cho biết các số liệu sau: $\omega_0 = 1$, $\mu = 0{,}4$, $k = 2$ và sơ kiện $u_{g0} = 1$, $u'_{g0} = 0$.

a) Tính bằng phương pháp biên độ biến thiên chậm.

b) Tính bằng phương pháp mặt phẳng pha.

Đáp: $u_0 = 1 \cos t$; $\dot{\theta} = 0$; $\dot{A} = 0{,}2A\left(1 - \frac{A^2}{2}\right)$; $A_\infty = \sqrt{2}$.

22-7. Thành lập sơ đồ mô hình điện tử giải bài toán:

a) Đóng một mạch nối tiếp *R-L-C* vào một điện áp biến thiên $u(t)$.

b) Đóng mạch vòng dây lõi sắt bài tập 22-3 vào một điện áp biến thiên $u(t)$. Hướng dẫn: viết phương trình với đạo hàm cấp cao (cấp 3) ở một phía, rồi thành lập sơ đồ mô hình.

c) Tự dao động trong mạch tạo sóng bằng đèn ba cực trong ví dụ 22-9 với phương trình Van der Pôi dạng mẫu.

d) Giải phương trình Machiơ (Mathieu):

$$\ddot{x} + (1 - m\cos\omega_0 t)\, x = 0.$$

22-8. Dùng phương pháp biên độ biến thiên chậm giải các phương trình mạch dao động dạng sau:

a) $$\ddot{x} + x - \mu(1 - x^2)\, x = 0.$$

Đáp: $\dot{\theta} = 0$. $\dot{A} = \frac{\mu A}{2}\left(1 - \frac{3}{4}A^2\right)$. $A_\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) $$\ddot{x} + x - \mu(1 - x^2)\, \dot{x} = 0.$$

Đáp: $\dot{\theta} = 0$, $\dot{A} = \frac{\mu A}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\omega_0^2 A^2\right)$; $A_\infty = \frac{2}{\sqrt{3}\,\omega_0}$.

c) $\ddot{x} + x - \mu(1 - x^2)\,\dot{x} = 0$. *Đáp*: $\dot{A} = 0$; $\dot{\theta} = \frac{-\mu}{2\omega_0}\left(1 - \frac{3}{4}A^2\right)$.

d) $\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0$. *Đáp*: $\dot{\theta} = 0$, $\dot{A} = -\frac{3}{8}\mu\omega_0^2 A^3$, $A_\infty = 0$.

Cho sơ kiện $x_0 = A_0$, $\dot{x}_0 = 0$.

PHỤ LỤC

PL-1 – MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ HYPERBOL.

A – Đưa các hàm điều hòa lũy thừa bậc cao về các hàm điều hòa lũy thừa bậc 1 và 0.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \qquad \text{(Pl. 1-1)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \qquad \text{(Pl. 1-2)}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x). \qquad \text{(Pl. 1-3)}$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x). \qquad \text{(Pl. 1-4)}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}[3 + 4\cos 2x + \cos 4x]. \qquad \text{(Pl. 1-5)}$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}[3 - 4\cos 2x + \cos 4x]. \qquad \text{(Pl. 1-6)}$$

B – Khai triển các hàm lượng giác và hyperbol.

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \text{(Pl. 1-7)}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \text{(Pl. 1-8)}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots \qquad \text{(Pl. 1-9)}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \text{(Pl. 1-10)}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \text{(Pl. 1-11)}$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots \qquad \text{(Pl. 1-12)}$$

C – Quan hệ giữa các hàm hyperbol đối số phức với hàm hyperbol và lượng giác đối số thực.

Từ các công thức (Pl. 1-7) — (Pl. 1-12) dễ suy ra:

$$\text{ch}jx = \cos x. \qquad \text{(Pl. 1-13)}$$

$$\text{sh}jx = j\sin x. \qquad \text{(Pl. 1-14)}$$

$$\text{th}jx = j\text{tg}x. \qquad \text{(Pl. 1-15)}$$

và do đó:

$$\text{ch}(x \pm jy) = \text{ch}x\ \text{ch}jy \pm \text{sh}x\ \text{sh}\,jy = \text{ch}x\cos y \pm j\text{sh}x\sin y. \qquad \text{(Pl. 11-16)}$$

$$\text{sh}(x \pm jy) = \text{sh}x\ \text{ch}jy \pm \text{ch}\,x\ \text{sh}\,jy = \text{sh}\,x\cos y \pm j\,\text{ch}x\sin y. \qquad \text{(Pl. 1-17)}$$

PL-2 – MỘT SỐ ẢNH – GỐC THEO BIẾN ĐỔI LAPLAXƠ THƯỜNG GẶP.

Thứ tự	Ảnh $F(p)$	Gốc $1(t)\,f(t)$ (1)
1	1	$\delta(t)$ (2)
2	$\frac{1}{p}$	$1(t)$
3	$\frac{1}{p^2}$	t
4	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (n nguyên, dương)
5	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
6	$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
7	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
8	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$

Thứ tự	Ảnh $F(p)$	Gốc $1(t)\,f(t)$
9	$\dfrac{p}{(p+a)^3}$	$t\left(1-\dfrac{a}{2}t\right)e^{-at}$
10	$\dfrac{1}{(p+a)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ (n nguyên, dương)
11	$\dfrac{1}{p(p+a)}$	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$
12	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
13	$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$
14	$\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{e^{-bt}}{b}-\dfrac{e^{-at}}{a}\right)$
15	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
16	$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{ae^{-at}}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{be^{-bt}}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{ce^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$
17	$\dfrac{p^2}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{a^2e^{-at}}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{b^2e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{c^2e^{-ct}}{(b-c)(a-c)}$
18	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(a-b)^2}[e^{-at}-e^{-bt}\{1-(a-b)t\}]$
19	$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(a-b)^2}[\{a-b(a-b)t\}e^{-bt}-ae^{-at}]$
20	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
21	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$

Thứ tự	Ảnh $F(p)$	Gốc $1(t)\ f(t)$
22	$\frac{p\cos b - a\sin b}{p^2+a^2}$	$\cos(at+b)$
23	$\frac{p\sin b + a\cos b}{p^2+a^2}$	$\sin(at+b)$
24	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
25	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{sh} at$
26	$\frac{(p+a)}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
27	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$
28	$\frac{(p+a)\sin c + b\cos c}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin(bt+c)$

1. Để gọn trong bảng không in thêm thừa số $1(t)$ trước các hàm gốc.

2. Phân bố Đirac $\delta(t)$ là một «hàm» suy rộng, định nghĩa là một xung triệt tiêu ở mọi $t < 0$ và $t > 0$, có cỡ vô cùng lớn ở $t = 0$, sao cho tổng lượng của xung (thường ký hiệu bằng dấu tích phân) bằng 1. Có thể hiểu nó là đạo hàm (theo một nghĩa thích hợp) của $1(t)$ theo biến t.

MỤC LỤC

Trang

Chương 13 — *Khái niệm chung về phần tử và mạch phi tuyến*

13-1. Điện trở phi tuyến 4
13-2. Cuộn dây lõi sắt — Điện cảm phi tuyến 9
13-3. Điện dung phi tuyến . . . 12
13-4. Tính chất tạo tần của phần tử phi tuyến. 13
13-5. Mạch phi tuyến. 14
13-6. Khái niệm về phương pháp nghiên cứu mạch phi tuyến . . 15
Câu hỏi ôn tập . 17

Chương 14 — *Mạch phi tuyến có dòng một chiều*

14-1. Giải mạch phi tuyến một chiều bằng phương pháp đồ thị . . . 19
14-2. Phương pháp số . 28
14-3. Khái niệm về mạch từ . 35
14-4. Các luật Kihof cho mạch từ. 36
14-5. Ví dụ tính mạch từ. . . . 41
14-6. Tính mạch từ có nam châm vĩnh cửu . 46
Câu hỏi và bài tập . . . 48

Chương 15 — *Quá trình xác lập trong mạch phi tuyến có dòng và áp gần hình sin*

15-1. Phương pháp đồ thị đối với trị số tức thời. Dạng đường cong $i(t)$, $u(t)$ trong cuộn dây lõi thép. 53
15-2. Phương pháp cân bằng điều hòa. . . . 60
15-3. Phương pháp tuyến tính hóa qui ước (tuyến tính hóa quan hệ tức thời) 67
15-4. Hiện tượng trigơ trong mạch có cuộn dây lõi thép. 71

15-5. Ổn áp sắt từ . . . 75
15-6. Phương pháp tuyến tính hóa đoạn đặc tính làm việc của phần tử phi tuyến . . 77
15-7. Điện cảm điều khiển — Khuếch đại công suất sắt từ. 80
15-8. Sơ đồ thay thế đèn điện tử ba cực đối với thành phần biến thiên nhỏ (tần số thấp) 86
15-9. Sơ đồ thay thế ba cực ban dẫn đối với thành phần biến thiên nhỏ (tần số thấp) 91
Câu hỏi và bài tập. . 97

Chương 16 — *Mạch có thông số rải đều*

16-1. Khái niệm và phương trình trạng thái của mạch có thông số rải. . 102
16-2. Phương trình đường dây dài đều ở chế độ xác lập hình sin 107
16-3. Nghiệm phương trình đường dây dài đều dưới dạng sóng . . 110
16-4. Các thông số đặc trưng sự truyền sóng trên đường dây dài. 115
16-5. Đường dây dài không méo . 119
16-6. Khái niệm về phản xạ sóng trên đương dây dài 121
16-7. Chế độ đường dây hòa hợp với tải . . 124
16-8. Nghiệm áp và dòng dạng hàm lượng giác hyperbol. 126
16-9. Tổng trở vào của đường dây . 130
16-10. Đương dây dài đều không tiêu tán . 132
16-11. Phân bố hiệu dụng của điện áp dọc đường dây dài không tiêu tán . . 135
16-12. Tổng trở vào của đường dây không tiêu tán . 142
16-13. Mạng hai cửa tương đương của một đường dây dài đều . 147
Câu hỏi và bài tập . 152

PHẦN II — LÝ THUYẾT MẠCH Ở CHẾ ĐỘ QUÁ ĐỘ

Chương 17 — *Khái niệm cơ bản về quá trình quá độ trong mạch điện*

17-1. Định nghĩa quá trình quá độ trong mạch điện và đạt bài toán quá trình quá độ. . . . 154
17-2,3. Các điều kiện đầu và các luật đóng mở . . . 156

17-4. Xác định các điều kiện ban đầu. 161
Câu hỏi và bài tập 166

Chương 18 — *Tính quá trình quá độ trong mạch điện tuyến tính bằng phương pháp tích phân kinh điển*

18-1. Phân tích đáp ứng quá độ trong mạch tuyến tính thành đáp ứng tự do xếp chồng với đáp ứng xác lập. 170
18-2. Cách lập phương trình đặc trưng. Dạng của đáp ứng tự do 173
18-3. Các bước tính quá trình quá độ trong một mạch phức tạp 178
18-4. Quá trình quá độ trong mạch r-C 180
18-5. Quá trình quá độ trong mạch r-L 184
18-6. Quá trình quá độ trong mạch r-L-C . 186
18-7. Phương pháp tích phân Đuhamel 191
Câu hỏi và bài tập 200

Chương 19 — *Tính quá trình quá độ trong mạch tuyến tính bằng phương pháp toán tử Laplaxơ*

19-1. Khái niệm về phương pháp toán tử để tính quá trình quá độ trong mạch tuyến tính. 203
19-2. Biến đổi Laplaxơ. Các tính chất cơ bản . 205
19-3. Vấn đề tìm gốc — ảnh theo biến đổi Laplaxơ. 214
19-4. Các luật Kirhof dạng toán tử. Sơ đồ toán tử. 221
19-5. Các bước tính quá trình quá độ bằng phương pháp toán tử. . 228
Câu hỏi và bài tập 234

Chương 20 — *Xét quá trình quá độ bằng biến đổi Furiê (Fourier)*

20-1. Các phép biến đổi Furiê . . . 238
20-2. Các luật Kirhof và giản đồ toán tử. Xét quá trình quá độ bằng biến đổi Furiê 245
20-3. Xét quá trình quá độ trong mạng một cửa không nguồn bằng biến đổi Furiê . . 246
20-4. Xét quá trình quá độ mạng hai cửa không nguồn bằng biến đổi Furiê . . . 249
20-5. Phương pháp hình thang tính gần đúng quá trình quá độ theo đặc tính tần đường cong phổ tần ảo 225
Câu hỏi và bài tập. 267

Chương 21 — *Quá trình quá độ trong đường dây dài không tiêu tán*

21-1. Phương trình và nghiệm của quá trình quá độ trong đường dây dài không tiêu tán . 270
21-2. Biểu thức sóng chạy và dạng phân bố sóng trên đường dây 275
21-3. Phương pháp tính áp, dòng ở cuối đường dây. Qui tắc Pêterxen . 280
21-4. Tìm các sóng phản xạ từ cuối đường dây 282
21-5. Phương pháp tính sóng khúc xạ ở chỗ tiếp giáp hai đường dây 286
21-6. Phản xạ nhiều lần trên đường dây 290
Câu hỏi và bài tập 294

Chương 22 — *Quá trình quá độ trong mạch phi tuyến*

22-1. Khái niệm về bài toán quá độ mạch phi tuyến 297
22-2. Phương pháp tuyến tính hóa phương trình đối với lượng ít phi tuyến 300
22-3. Phương pháp nhiễu loạn . 308
22-4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp 314
22-5. Phương pháp biến độ, pha biến thiên chậm . 319
22-6. Phương pháp mặt phẳng pha . 329
22-7. Phương pháp giải mạch bằng mô hình điện tử tương tự 343
Câu hỏi và bài tập . 350
Phụ lục 353

TỦ SÁCH TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
BỘ MÔN ĐO LƯỜNG - CƠ SỞ KỸ THUẬT ĐIỆN

CƠ SỞ
LÝ THUYẾT MẠCH ĐI

TẬP II

Dùng cho học sinh tại chức
ngành điện, vô tuyến điện

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA ĐẠI HỌC TẠI CHỨC XUẤT BẢN

M TKVĐ 1256

0984838445

Thu Vien DHKTCN-TN

MTK06000926