GVC.ThS. TRẦN TRỌNG HỈ

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

GVC.ThS. TRẦN TRỌNG HỈ

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2012

LỜI NÓI ĐẦU

Cơ học lý thuyết là môn học dùng làm cơ sở cho các môn học khác như: Sức bền vật liệu, Nguyên lý máy - chi tiết máy, Công nghệ chế tạo máy, Thủy lực... Vì vậy, nắm vững môn cơ học lý thuyết là vấn đề cơ bản của học sinh, sinh viên ngành kỹ thuật công nghệ, xây dựng. Cuốn sách này nhằm phục vụ cho chương trình đào tạo Đại học với thời gian 150 tín chỉ.

Nội dung chính của giáo trình gồm bốn phần chính, trong mỗi phần được chia ra làm nhiều chương:

***Phần I:** TĨNH HỌC*

Chương 1: Các khái niệm cơ bản - Hệ tiên đề tĩnh học.

Chương 2: Khảo sát hệ lực.

Chương 3: Trọng tâm của vật rắn.

Thí dụ.

Bài tập.

***Phần II:** ĐỘNG HỌC*

Chương 1: Động học điểm.

Chương 2: Chuyển động cơ bản của vật rắn.

Chương 3: Chuyển động song phẳng của vật rắn

Chương 4: Tổng hợp chuyển động.

Thí dụ.

Bài tập.

***Phần III:** ĐỘNG LỰC HỌC*

Chương 1: Các khái niệm động lực học.

Chương 2: Đặc trưng hình học khối lượng.

Chương 3: Các định lý tổng quát động lực học.

Thí dụ.

Bài tập.

Phần IV: CÁC NGUYÊN LÝ

Chương 1: Nguyên lý D'Alambert

Chương 2: Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Chương 3: Động lực học vật rắn

Thí dụ

Bài tập.

Mặc dù đã rất cố gắng, và là lần xuất bản đầu tiên, nên chắc chắn nội dung không tránh khỏi thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự chỉ dẫn, góp ý của độc giả, nhất là các thầy cô đang trực tiếp giảng dạy môn học Cơ học lý thuyết tại các trường đại học, cao đẳng khối công nghệ, xây dựng,... để những lần tái bản tới, nội dung được hoàn thiện hơn.

Chúng tôi trân trọng cảm ơn sự ủng hộ, góp ý của độc giả!

DĐ: 01286252877

Email: trantronghi1805@yahoo.com.vn

TÁC GIẢ

Trần Trọng Hỉ

PHẦN I
TĨNH HỌC

Chương 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Khái niệm cơ bản là khái niệm không có định nghĩa.

I. Lực

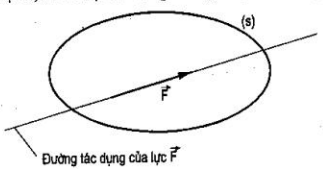
Lực là đại lượng đặc trưng cho tác dụng tương hỗ cơ học giữa hai vật thể với nhau.

Các yếu tố đặc trưng cho lực:

1. Điểm đặt: Vị trí thể hiện sự tác dụng tương hỗ.

2. Phương chiều: Hướng của tác dụng tương hỗ.

3. Cường độ (trị số): Giá trị tác dụng tương hỗ, có đơn vị đo là Niutơn (N).

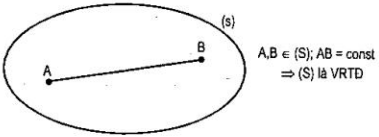


Hình 1-1

Lực là đại lượng có hướng và biểu diễn bằng vectơ: Véctơ lực. *Lực* $\vec{F}$.

II. Vật rắn tuyệt đối

Là tập hợp các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ là không đổi.



Hình 1-2

III. Trạng thái cân bằng

Vật rắn ở trạng thái cân bằng trong một hệ quy chiếu khi nó đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều trong hệ quy chiếu đó.

Trên đây là ba khái niệm cơ bản của cơ học, được dùng để định nghĩa một số khái niệm khác sau đây:

1. Hệ lực: Là tập hợp các lực tác dụng lên một chất điểm, một vật hay một hệ vật khảo sát.

Ký hiệu: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n)$ hay $\varphi(\vec{F}_k)$ với k = 1,...., n.

2. Hai hệ lực tương đương: Khi hai hệ lực có cùng tác dụng cơ học thì hai hệ lực đó tương đương nhau.

Ký hiệu: $\varphi(\vec{F}_k) \sim \Psi(\vec{\Phi}_i)$, dấu ~ là ký hiệu tương đương.

Chú ý: Hai hệ lực tương đương thì thay thế cho nhau. Trong quá trình khảo sát hệ lực, người ta biến đổi tương đương một hệ lực phức tạp về một hệ lực đơn giản hơn gọi là dạng tối giản.

3. Hợp lực: Hệ lực tương đương với một lực thì lực đó gọi là hợp lực của hệ lực đã cho:

Ký hiệu: $\varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{R}$, $\vec{R}$ là hợp lực của $\varphi(\vec{F}_k)$.

4. Hệ lực cân bằng: Hệ lực không làm thay đổi trạng thái của vật khi được nó tác dụng.

Ký hiệu: $\varphi(\vec{F}_k) \sim 0$.

* *Phân loại hệ lực:*

- Hệ lực không gian: Đường tác dụng các lực nằm trong không gian.
- Hệ lực đồng quy: Đường tác dụng các lực đi qua một điểm.
- Hệ lực song song: Đường tác dụng các lực song song một phương.
- Hệ lực phẳng: Đường tác dụng của các lực nằm trong cùng một mặt phẳng.

**Phân loại lực:*

- Lực tập trung: Lực tác dụng lên một điểm của vật thể.
- Lực phân bố: Lực tác dụng liên tục lên một kích thước của vật thể.

Trong bài toán cơ lý thuyết ta thay lực phân bố bằng lực tập trung (tương đương).

- Nội lực: Lực tác dụng giữa các phần tử trong vật khảo sát.
- Ngoại lực: Lực tác dụng từ môi trường bên ngoài lên vật khảo sát.

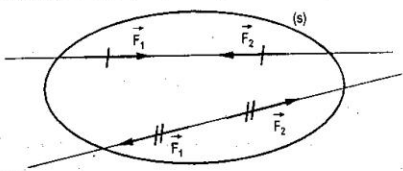
§2. HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC (tiên đề tương đương định luật)

I. Tiên đề 1

Điều kiện cần và đủ để hệ gồm hai lực cân bằng là chúng có cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều nhau.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0 \Leftrightarrow \vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ được gọi là cặp lực cân bằng.



Hình 1-3

II. Tiên đề 2 (thêm - bớt cặp lực cân bằng)

Tác dụng của hệ lực không đổi khi thêm vào hay bớt ra một cặp lực cân bằng.

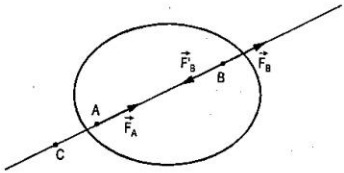
$$\left(\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2\right) \sim 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n\right) \sim \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n, \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2\right).$$

Tiên đề này đưa ra phép biến đổi tương đương một hệ lực, đó là chủ động đưa thêm vào hay lấy bớt ra những cặp lực cân bằng của một hệ lực.

Hệ quả: *Tác dụng của một lực không đổi khi trượt lực trên đường tác dụng của lực.*

Thật vậy: Cho lực $\vec{F}_A$ đặt tại A, trên đường tác dụng của $\vec{F}_A$ tại điểm B ta đặt vào một cặp lực cân bằng $(\vec{F}_B, \vec{F}'_B)$ sao cho $\vec{F}_A = \vec{F}_B$.



Hình 1-4

Theo tiên đề 2: $\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B)$

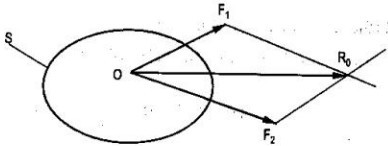
Theo tiên đề 1: $(\vec{F}_B, \vec{F}'_B) \sim 0 \Rightarrow (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B) \sim \vec{F}_B$

Vậy thì: $\vec{F}_A \sim \vec{F}_B$ hay $\vec{F}_B$ là $\vec{F}_A$ được trượt từ A đến B trên đường tác dụng của nó.

Ghi chú: Kích thước của vật rắn tuyệt đối không có giới hạn vì đường tác dụng của lực là đường thẳng không giới hạn.

III. Tiên đề 3 (Quy tắc hình bình hành)

Hai lực có cùng điểm đặt thì có hợp lực, hợp lực có cùng điểm đặt với chúng và được biểu diễn bằng vectơ lực là đường chéo của hình bình hành có hai cạnh bên là hai vectơ lực đã cho.



Hình 1-5

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}_0 \text{ với } \vec{R}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Từ đó ta nhận được các kết quả sau đây:

- Nếu hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ đồng quy tại O, ta trượt các lực về đặt tại O:

$$\Rightarrow \varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{R}_0 \text{ với } \vec{R}_0 = \Sigma\vec{F}_k$$

- Một lực phân thành hai thành phần theo hai phương cho trước có cùng điểm đặt với nó:

$$\vec{R}_0 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2); \text{ với } \vec{F}_1, \vec{F}_2 \text{ theo phương } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2.$$

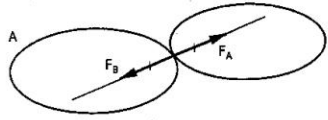
(Từ góc và ngọn của $\vec{R}_0$, vẽ các đường song song với Δ_1 và Δ_2 ta được hình bình hành mà đường chéo là $\vec{R}_0$).

Suy ra: Một lực có thể phân thành n lực theo n phương cho trước.

Tiên đề này cho hai phép biến đổi tương đương hệ lực là hợp lực và phân lực.

IV. Tiên đề 4 (tác dụng và phản tác dụng)

Lực tác dụng và lực phản tác dụng của hai vật thể thì cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều nhau.



Hình 1-6

Hai lực này không tạo thành cặp lực cân bằng vì tác dụng lên hai vật khác nhau.

V. Tiên đề 5 (tiên đề hóa rắn: xem vật thực là vật rắn tuyệt đối)

Vật bị biến dạng cân bằng khi hóa rắn vẫn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực đã cho.

Tiên đề này dùng để khảo sát vật thể thực bằng kết quả của khảo sát vật rắn tuyệt đối.

VI. Tiên đề 6 (giải phóng liên kết)

1. Vật tự do và vật chịu liên kết

+ Vật tự do:

- Trong mặt phẳng: Vật thực hiện được 3 chuyển động (2 tịnh tiến theo hai phương, 1 quay quanh 1 điểm: Bậc tự do n = 3).

- Trong không gian: Vật thực hiện được 6 chuyển động (3 tịnh tiến theo ba phương, 3 quay quanh 3 trục: Bậc tự do n = 6).

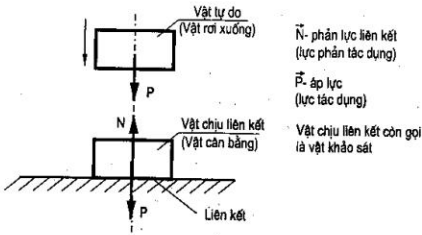
+ Vật chịu liên kết: Vật có một hoặc nhiều chuyển động bị cản trở (trong mặt phẳng bậc tự do < 3, trong không gian bậc tự do < 6).

Vật chịu liên kết còn được gọi là vật khảo sát.

Cho hình vẽ:

+ Vật tự do: Vật rơi xuống (chuyển động).

+ Vật chịu liên kết với mặt đất: Vật không rơi xuống được (chuyển động bị cản trở).



Hình 1-7

2. Liên kết và phản lực liên kết

- Liên kết: Điều kiện cản trở chuyển động của vật chịu liên kết.

- Phản lực liên kết: Lực tác dụng của vật gây liên kết làm cản trở chuyển động của vật chịu liên kết.

Phản lực liên kết có các yếu tố sau:

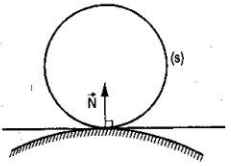
- Điểm đặt đặt tại nơi liên kết (vị trí tiếp xúc giữa hai vật liên kết với nhau).
- Có cùng phương ngược chiều với chuyển động bị cản trở.
- Có cường độ phụ thuộc vào hệ lực tác dụng lên vật khảo sát.

3. Tiên đề giải phóng liên kết

Vật chịu liên kết có thể xem là vật tự do nếu thay các liên kết với vật bằng các phản lực liên kết tương ứng.

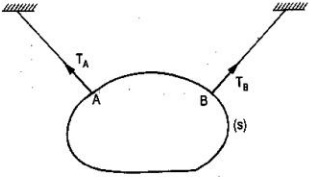
4. Liên kết và các phản lực liên kết tương ứng

a) Liên kết tựa: Phản lực liên kết (PLLK) có phương vuông góc tiếp tuyến mặt tựa, có chiều hướng vào vật khảo sát (hình 1-8).



Hình 1-8

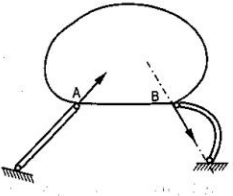
b) Liên kết dây mềm: PLLK có phương dọc theo dây và hướng vào dây (hình 1-9).



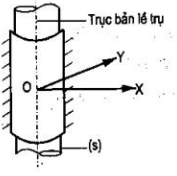
Hình 1-9

c) Liên kết thanh cứng: PLLK có phương dọc theo đường thẳng đi qua 2 đầu thanh (hình 1-10).

d) Liên kết bản lề trụ: PLLK có phương thuộc mặt phẳng vuông góc trục bản lề. Phân làm hai thành phần vuông góc nhau (hình 1-11).

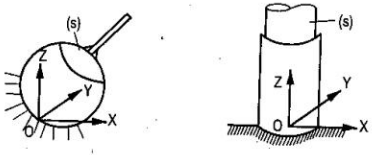


Hình 1-10



Hình 1-11

e) Liên kết bản lề cầu, bản lề cối: PLLK có phương nằm trong không gian, phân làm ba thành phần vuông góc nhau (hình 1-12).



Hình 1-12

§3. MÔ MEN CỦA LỰC

I. Mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O

Định nghĩa:

- Vectơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

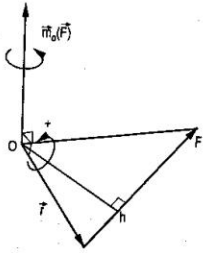
$\vec{m}_0(\vec{F}) \perp \vec{r}, \vec{F}$; $(\vec{r}, \vec{F}, \vec{m}(\vec{F}))$ tạo thành một tam diện thuận

- Mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O:

$$\overline{m}_0(\vec{F}) = \pm h.F$$

h - khoảng cách từ đường tác dụng của $\vec{F}$ đến điểm O.

(+) khi $\vec{F}$ quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 1-13

Hệ đơn vị : Nm. (1Nm = $1kg\frac{m^2}{s^2}$).

II. Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ

Định nghĩa:

Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ:

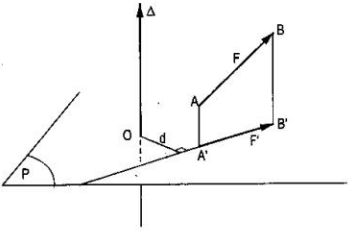
$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = \pm\ d.F'$$

trong đó:

F' - trị số của hình chiếu của $\vec{F}$ trên mặt phẳng P vuông góc với Δ;

d - khoảng cách từ đường thẳng mang $\vec{F}'$ đến trục Δ;

(+) khi đứng theo chiều của trục Δ nhìn thấy $\vec{F}'$ quay quanh Δ ngược chiều kim đồng hồ.



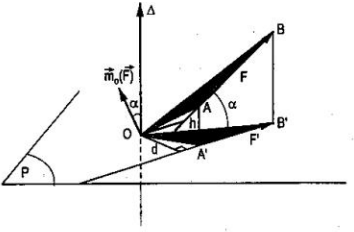
Hình 1-14a

III. Liên hệ giữa mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ và đối với điểm O

Định lý:

Mô men của lực ($\vec{F}$) đối với trục Δ bằng hình chiếu lên trục Δ vectơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục Δ.

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_o(\vec{F})\Big|_\Delta \quad (O \in \Delta)$$



Hình 1-14b

Thật vậy: Trên hình vẽ 1-14b tam giác OA'B' là hình của chiếu tam giác OAB trên mặt phẳng P.

Theo định nghĩa: $\left|\vec{m}_\Delta(\vec{F})\right|$ = d.F' = 2dt tam giác OA'B'.

= 2dt tam giác OAB. cos(α)

= h.F. cos(α)

$= \vec{m}_0(\vec{F})\Big|_\Delta$

Đối với hệ tọa độ Đề các vuông góc ta có:

$$\vec{m}_x(\vec{F}) = \vec{m}_0(\vec{F})\Big|_x$$

$$\vec{m}_y(\vec{F}) = \vec{m}_0(\vec{F})\Big|_y$$

$$\vec{m}_z(\vec{F}) = \vec{m}_0(\vec{F})\Big|_z$$

Mở rộng: $\vec{m}_0(\varphi(\vec{F}_k)) = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \ldots\ldots + \vec{m}_0(\vec{F}_n)$

Suy ra: $\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_0(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$

Nếu $\varphi(\vec{F}_k)$ là hệ lực phẳng thì: $\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \pm h_k.F_k$

Tương tự: $\vec{m}_z[\varphi(\vec{F}_k)] = \sum_{k=1}^{n} \pm d_k.F'_k$

Chú ý:

- Nếu đường tác dụng lực $\vec{F}$ đi qua O thì mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O bằng không.

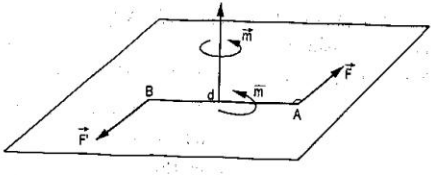
- Nếu đường tác dụng lực $\vec{F}$ cắt trục Δ hoặc song song trục Δ thì mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng không.

§4. NGẪU LỰC

I. Định nghĩa

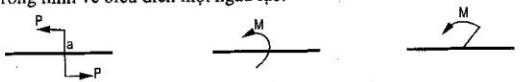
Hệ gồm hai lực song song ngược chiều có trị số bằng nhau thì tạo thành một ngẫu lực.

Ký hiệu: ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ hoặc nl $\vec{m}$.



Hình 1-15

Trong hình vẽ biểu diễn một ngẫu lực:



** Các yếu tố đặc trưng của một ngẫu lực ($\vec{F}, \vec{F}'$):*

- Mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực: Mặt phẳng chứa các lực.

- Chiều của ngẫu lực: Chiều quay của các lực khi nhìn vào mặt phẳng tác dụng; ngẫu lực có chiều dương (+) khi các lực quay ngược chiều kim đồng hồ và ngược lại.

- Trị số mô men của ngẫu lực:

$$m = F.d = F'.d$$

trong đó: d- khoảng cách giữa hai lực còn gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực.

Ngẫu lực còn có thể biểu diễn bằng vectơ mô men của ngẫu lực:

$$\vec{m} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Hệ đơn vị của ngẫu lực: Nm. ($1Nm = 1kg\frac{m^2}{s^2}$)

II. Tính chất của ngẫu lực

Định lý 1

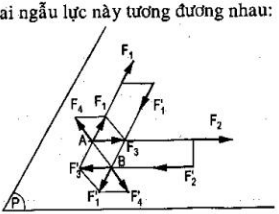
Tác dụng của ngẫu lực không đổi khi di chuyển ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng, hoặc thay đổi trị số của lực và cánh tay đòn nhưng vẫn giữ nguyên chiều và trị số mô men của ngẫu lực.

Chứng minh:

Cho hai ngẫu lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_1'$) và ($\vec{F}_2, \vec{F}_2'$) cùng nằm trong mặt phẳng P.

Với: $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$, trong đó: $m_1 = F_1 d_1$; $m_2 = F_2 d_2$

Ta chứng minh hai ngẫu lực này tương đương nhau:



Hình 1-16

Kéo dài đường tác dụng của lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cắt nhau tại A; $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2$ cắt nhau tại B.

Trượt $\vec{F}_1$ và $\vec{F}'_1$ đến đặt tại A và B.

Phân $\vec{F}_1$ thành $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ theo phương $\vec{F}_2$ và AB.

Phân $\vec{F}'_1$ thành $(\vec{F}'_3, \vec{F}'_4)$ theo phương $\vec{F}'_2$ và AB.

$$\Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}'_1,) \sim (\vec{F}_3, \vec{F}'_3, \vec{F}_4, \vec{F}'_4)$$

Dễ dàng thấy rằng: $(\vec{F}_4, \vec{F}'_4) \sim 0$ và $(\vec{F}_3, \vec{F}'_3)$ là một ngẫu lực có cánh tay đòn là d_3.

$$\Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) \sim (\vec{F}_3, \vec{F}'_3) \Rightarrow m_1 = m_3 \Rightarrow m_2 = m_3$$

$$\Rightarrow F_2.d_2 = F_3.d_3$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \vec{F}_3$$

Mà: $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ cùng đường tác dụng nên $\vec{F}_2 \sim \vec{F}_3$, tương tự $\vec{F}'_2 \sim \vec{F}'_3$

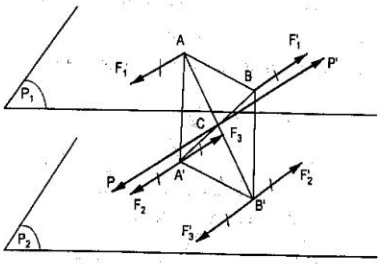
Suy ra: $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) \sim (\vec{F}_3, \vec{F}'_3,) \Rightarrow (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$

Ta đã chứng minh xong.

Định lý 2

Tác dụng của một ngẫu lực không thay đổi khi ta dời ngẫu lực đến các mặt phẳng song song với mặt phẳng tác dụng.

Chứng minh:



Hình 1-17

Cho ngẫu lực $(\vec{F}_1,\vec{F}_1')\in$ mp P_1, trong mp P_2 // mp P_1 tại A', B', là hình chiếu của A, B ta đặt hai cặp lực cân bằng $(\vec{F}_2,\vec{F}_3) \sim 0$; $(\vec{F}_2',\vec{F}_3') \sim 0$ sao cho $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$ và $\vec{F}_2' = \vec{F}_1'$

Lúc đó: $(\vec{F}_1,\vec{F}_1') \sim (\vec{F}_1,\vec{F}_1',\vec{F}_2,\vec{F}_2',\vec{F}_3,\vec{F}_3')$

Mà: $(\vec{F}_1,\vec{F}_3') \sim \vec{P}$

Với: $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3'$ đặt tại C

Và $(\vec{F}_1',\vec{F}_3) \sim \vec{P}'$ với $\vec{P}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_3')$ và đặt tại C

$\Rightarrow \vec{P} = -\vec{P}'$ hai lực này có cùng đường tác dụng nên $(\vec{P},\vec{P}') \sim 0$

Vậy: $(\vec{F}_1,\vec{F}_1') \sim (\vec{F}_1,\vec{F}_3',\vec{F}_2,\vec{F}_2',\vec{F}_1',\vec{F}_3) \sim (\vec{P},\vec{P}',\vec{F}_2,\vec{F}_2') \sim (\vec{F}_2,\vec{F}_2')$

Với $(\vec{F}_2,\vec{F}_2')$ là một ngẫu lực có cánh tay đòn là A'B'= AB.

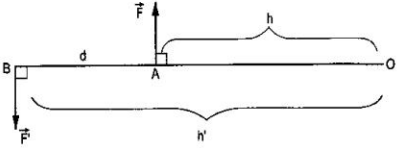
có $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, $\vec{F}_1' = \vec{F}_2'$ và A'B'= AB.

Ta chứng minh xong.

Từ hai tính chất trên ta thấy: *Một ngẫu lực nhận một đoạn thẳng bất kỳ trong các mặt phẳng song song với mặt phẳng tác dụng làm cánh tay đòn.*

III. Mô men các lực của ngẫu lực đối với một điểm

Cho ngẫu lực $(\vec{F},\vec{F}')$ và điểm O:



Hình 1-18

$$\vec{m}_O(\vec{F},\vec{F}') = \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}')$$

$$= -h.F + h'.F$$

$$= (-h + h')F$$

$$= d.F$$

$$\vec{m}_O(\vec{F},\vec{F}') = \vec{m}$$

Mô men các lực của ngẫu lực đối với một điểm bất kỳ không phụ thuộc điểm lấy mô men và bằng mô men của ngẫu lực đó.

IV. Hợp hệ ngẫu lực $\varphi(\vec{m}_k)$

1. Hợp hai ngẫu lực

Cho hai ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$; $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$ có vectơ mô men là $\vec{m}_1, \vec{m}_2$.

Đưa hai ngẫu lực trên về, nhận đoạn AB nằm trên giao tuyến hai mặt phẳng tác dụng làm cánh tay đòn.

Hình 1-19

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có điểm đặt tại A $\Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{F}$ với $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

$\vec{F}'_1, \vec{F}'_2$ có điểm đặt tại B $\Rightarrow (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2) \sim \vec{F}'$ với $\vec{F}' = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

$$\Rightarrow ((\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2)) \sim \text{nl}\,(\vec{F}, \vec{F}').$$

Gọi $\vec{m}$ là vectơ mô men của ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ ta có:

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{BA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_2$$

Mà: $\vec{m}_1 = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_1$; $\vec{m}_2 = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_2$

Vậy: $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$

2. Hợp hệ ngẫu lực

Mở rộng cho hợp của hệ ngẫu lực $\varphi(\vec{m}_k)$ thì ta được:

$$\varphi(\vec{m}_k) \sim \text{ngẫu lực tổng hợp } \vec{M}$$

Với: $$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k$$

§5. ĐỊNH LÝ DỜI LỰC (dời song song một lực đến một điểm bất kỳ)

I. Định lý

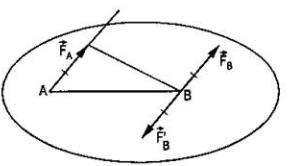
Để tác dụng của một lực không đổi khi dời song song đến một điểm bất kỳ ta phải thêm vào một ngẫu lực phụ. Ngẫu lực này có vectơ mô men bằng vectơ mô men của lực đối với điểm dời đến.

$$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_B, \text{ngẫu lực } \vec{M})$$

$$\vec{F}_A = \vec{F}_B;\ \vec{M} = \vec{m}_B(\vec{F}_A) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A$$

II. Chứng minh

Cho $\vec{F}_A$ đặt tại A, tại điểm B ta đặt vào một cặp lực cân bằng $(\vec{F}_B, \vec{F}'_B)$; với $\vec{F}_B = \vec{F}_A$.



Hình 1-20

Theo tiên đề 2 ta có: $\vec{F}_A \sim \left(\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B\right)$

Theo định nghĩa: $\left(\vec{F}_A, \vec{F}'_B\right)$ tạo thành ngẫu lực.

Vậy: $\vec{F}_A \sim \left(\vec{F}_B, \text{nl}\left(\vec{F}_A, \vec{F}'_B\right)\right)$

Gọi M là vectơ mô men của nl $(\vec{F}_A, \vec{F}_B)$ ta có:

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A = \vec{m}_B\left(\vec{F}_A\right)$$

Ta đã chứng minh xong.

Điều này cũng cho ta trường hợp ngược lại (còn gọi là định lý đảo của định lý dời lực). *Nếu có một lực và một ngẫu lực đồng phẳng thì chúng tương đương với một lực bằng với lực đã cho và đặt ở điểm khác.*

Định lý dời lực là một công cụ hữu hiệu để biến đổi tương đương một hệ lực bất kỳ về dạng chuẩn (dạng tối giản) mà ta sẽ thực hiện ở phần sau.

Chương 2

KHẢO SÁT HỆ LỰC

Cho hệ gồm n lực: $\varphi(\vec{F}_k)$ với k =1....n

§1. VECTƠ CHÍNH - VECTƠ MÔ MEN CHÍNH CỦA $\varphi(\vec{F}_k)$

I. Vectơ chính của hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$

Ký hiệu: $\vec{R}'$

Định nghĩa:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Vectơ chính của hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ chỉ có ý nghĩa hình học. Đó là vectơ tổng của các vectơ lực của hệ lực, nó không có ý nghĩa là vai trò vật lý của một lực.

II. Vectơ mô men chính của $\varphi(\vec{F}_k)$ đối với tâm O

Ký hiệu: $\vec{M}_O$

Định nghĩa: $\vec{M}_o = \vec{m}_o\left(\vec{F}_1\right) + \vec{m}_o\left(\vec{F}_2\right) + ... + \vec{m}_o\left(\vec{F}_n\right)$

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$$

$\vec{r}_k = \overrightarrow{OA_k}$ (A_k điểm đặt $\vec{F}_k$).

Vectơ $\vec{M}_O$ là một vectơ tổng các vectơ mô men của các lực đối với tâm O.

Nếu là một hệ lực phẳng thì ta có mô men chính của hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ đối với tâm O:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \pm h_k . F_k$$

§2. THU GỌN HỆ LỰC BẤT KỲ $\varphi(\vec{F}_k)$ VỀ MỘT ĐIỂM (TÂM THU GỌN)

I. Định lý

Thu gọn hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ về tâm O ta được một lực và một ngẫu lực: Lực đặt tại tâm thu gọn O, được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực. Ngẫu lực có vectơ mô men bằng vectơ mô men chính của hệ lực đối với tâm O.

$$\varphi(\vec{F}_k) \sim (\vec{R}_O, \vec{\mathfrak{M}})$$

Với: $\vec{R}_O = \vec{R}'$; $\vec{\mathfrak{M}} = \vec{M}_O$

II. Chứng minh

Áp dụng định lý dời lực, dời các lực về tâm O.

Với $\vec{F}_k$ ta được: $\vec{F}_k \sim (\vec{F}'_k, nl\vec{m}_k)$

$\vec{F}'_k$ đặt tại O; với $\vec{F}'_k = \vec{F}_k$ và $nl\,\vec{m}_k = \vec{m}_O(\vec{F}_k)$

Với hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$

Ta được: $\varphi(\vec{F}_k) \sim \left(\varphi(\vec{F}'_k); \varphi(\vec{m}_k)\right)$

trong đó: $\varphi(\vec{F}'_k)$ - hệ lực đồng quy tại O, có $\vec{F}'_k = \vec{F}_k$;

$\varphi(\vec{m}_k)$ - hệ ngẫu lực phụ với $\vec{m}_k = \vec{m}_O(\vec{F}_k)$.

1. $\varphi(\vec{F}'_k)$ là hệ lực đồng quy tại O. Hợp $\varphi(\vec{F}'_k)$

   Áp dụng tiên đề 3, ta có: $\varphi(\vec{F}'_k) \sim \vec{R}_O$

   với $\vec{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{R}'$

   Vậy: $\vec{R}_O = \vec{R}'$

2. $\varphi(\vec{m}_k)$ là hệ ngẫu lực. Hợp hệ ngẫu lực $\varphi(\vec{m}_k)$

   $\varphi(\vec{m}_k) \sim$ ngẫu lực tổng hợp $\vec{\mathfrak{M}}$

   Với: $\vec{\mathfrak{M}} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n$

   $$= \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_k) = \vec{M}_O$$

   Vậy: $\vec{\mathfrak{M}} = \vec{M}_O$

3. Kết quả: $\varphi(\vec{F}_k) \sim (\varphi(\vec{F}'_k), \varphi(\vec{m}_k)) \sim (\vec{R}_O, \vec{\mathfrak{M}})$

Với: $\vec{R}_O = \vec{R}'$ và $\vec{\mathfrak{M}} = \vec{M}_O$

Định lý đã chứng minh xong.

Từ kết quả thu gọn hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ về một tâm, ta thấy được rằng: *Vectơ chính và vectơ mô men chính của hệ lực đối với một điểm là hai đại lượng đặc trưng cho một hệ lực. Căn cứ vào hai đại lượng này ta có kết luận về các dạng tối giản của một hệ lực bất kỳ* $\varphi(\vec{F}_k)$.

§3. CÁC DẠNG TỐI GIẢN CỦA HỆ LỰC BẤT KỲ $\varphi(\vec{F}_k)$

Căn cứ vào $\vec{R}'$ và $\vec{M}_O$ của hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$; hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ tương đương với một trong các dạng tối giản sau đây:

I. Hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ cân bằng

Nếu $\vec{R}' = 0$ và $\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{F}_k) \sim 0$

Thật vậy: $\vec{R}' = 0 \Rightarrow \vec{R}_O \sim 0$

$\vec{M}_O = 0 \Rightarrow$ nl $\vec{\mathfrak{M}} \sim 0$

Suy ra $\varphi(\vec{F}_k) \sim (\vec{R}_O, \vec{\mathfrak{M}}) \sim 0$

II. Hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ tương đương một ngẫu lực

$$\vec{R}' = 0 \text{ và } \vec{M}_O \neq 0 \Rightarrow \varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{\mathfrak{M}} \text{ với } \vec{\mathfrak{M}} = \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

III. Hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ tương đương với một hợp lực

Nếu $\vec{R}' \neq 0$ và $\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{R}_O$ với $\vec{R}_O = \vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$

Nếu $\vec{R}' \neq 0$ và $\vec{M}_O \neq 0$

$\vec{R}'$ vuông góc $\vec{M}_O$: $\varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{R}_I$ với I không trùng với O

$$\vec{R}_I = \vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.$$

Trong trường hợp này thì $\vec{R}_O$ và các lực của ngẫu lực $\vec{\mathfrak{M}}$ nằm trong cùng mặt phẳng theo định lý đảo của định lý dời lực. Chúng tương đương với một lực đặt tại điểm I khác O; đường tác dụng của $\vec{R}_I$ cách O một đoạn được xác định bằng: $OI = \left|\dfrac{\vec{M}_O}{\vec{R}}\right|$.

Quay $\vec{R}'$ quanh $\vec{M}_O$ góc $\pi/2$ theo chiều kim đồng hồ thì ta được hướng của OI.

IV. Hệ lực $\varphi\left(\vec{F}_k\right)$ tương đương hai lực chéo nhau

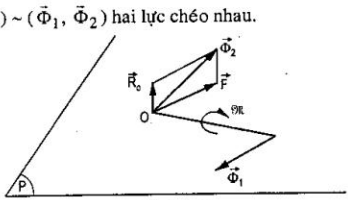
$\vec{R}' \neq 0$ và $\vec{M}_O \neq 0$; $\vec{R}'$ không vuông góc $\vec{M}_O \Rightarrow \varphi\left(\vec{F}_k\right) \sim \left(\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2\right)$ là hai lực chéo nhau.

Hai lực chéo nhau chính là dạng chuẩn của hệ lực bất kỳ $\varphi\left(\vec{F}_k\right)$.

Trong trường hợp này $\vec{R}_O$ và các lực của ngẫu lực $\vec{\mathfrak{M}}$ không nằm trong cùng một mặt phẳng nên không theo định lý đảo của định lý dời lực được. P là mp tác dụng của ngẫu lực $\vec{\mathfrak{M}} \Rightarrow$ mp P chứa $\vec{F}_1, \vec{\Phi}_1$ là hai lực của ngẫu lực $\vec{\mathfrak{M}}$; $\vec{R}_O$ không nằm trong mp P.

Ta có $(\vec{R}_O, \vec{F}_1) \sim \vec{\Phi}_2$: $\vec{\Phi}_2$ không nằm trong mp P $\Rightarrow$ đường tác dụng của $\vec{\Phi}_2$ không cắt $\vec{\Phi}_1$.

$(\vec{R}_O, \vec{F}, \vec{\Phi}_1) \sim (\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2)$ hai lực chéo nhau.



Hình 1-21

Về $\vec{R}'$ và $\vec{M}_0$ của hệ lực $\varphi\left(\vec{F}_k\right)$.

- Vectơ chính $\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ của hệ lực $\varphi\left(\vec{F}_k\right)$ là một đại lượng bất biến không ảnh hưởng đến tâm thu gọn của hệ lực.

- Vectơ mô men chính $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k)$ của hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ đối với tâm thu gọn là đại lượng ảnh hưởng bởi tâm thu gọn của hệ lực. Quy luật thay đổi của vectơ mô men chính:

$\vec{M}_I = \vec{M}_O + \vec{m}_I(\vec{R}_O)$; $\vec{m}_I(\vec{R}_O) = \vec{IO} \times \vec{R}_O$ là ngẫu lực phụ khi dời $\vec{R}_O$ đến điểm I được thêm vào.

§4. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC BẤT KỲ $\varphi(\vec{F}_k)$

I. Định lý

Điều kiện cần và đủ để hệ lực bất kỳ cân bằng là vectơ chính và vectơ mô men chính đối với một điểm (tâm) của hệ lực bằng không.

$$\varphi(\vec{F}_k) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases}$$

Chứng minh: Dựa vào kết quả thu hệ lực bất kỳ về tâm O ta dễ dàng chứng minh định lý trên.

II. Điều kiện cân bằng giải tích

1. Định lý

Điều kiện cần và đủ để một hệ lực bất kỳ cân bằng là tổng hình chiếu các lực lên các trục tọa độ và tổng mô men các lực đối với các trục tọa độ bằng không:

$$\varphi(\vec{F}_k) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0\ (1);\ \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0\ (2);\ \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0\ (3); \\ \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_x(\vec{F}_k) = 0\ (4);\ \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_y(\vec{F}_k) = 0\ (5);\ \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_z(\vec{F}_k) = 0\ (6). \end{cases}$$

Sáu phương trình cân bằng trên là hệ phương trình cân bằng của một hệ lực bất kỳ (còn được gọi là hệ lực tổng quát).

2. Chứng minh

Hình chiếu của $(\vec{F}_k)$ trên các trục tọa độ là X_k, Y_k, Z_k.

Hình chiếu của $\vec{R}'$ trên các trục tọa độ là $\vec{R}'_x, \vec{R}'_y, \vec{R}'_z$.

Hình chiếu của $\vec{M}_O$ trên các trục tọa độ là $\vec{M}_{Ox}$, $\vec{M}_{Oy}$, $\vec{M}_{Oz}$.

Trong hình học giải tích ta có:

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \begin{cases} \vec{R}'_x = \sum_{k=1}^{n} X_k \\ \vec{R}'_y = \sum_{k=1}^{n} Y_k \\ \vec{R}'_z = \sum_{k=1}^{n} Z_k \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_x\left(\vec{F}_k\right)\Big|_x = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_x\left(\vec{F}_k\right) \\ \vec{M}_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_y\left(\vec{F}_k\right)\Big|_y = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_y\left(\vec{F}_k\right) \\ \vec{M}_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_z\left(\vec{F}_k\right)\Big|_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_z\left(\vec{F}_k\right) \end{cases}$$

Suy ra:

$$\vec{R}' = 0 \begin{cases} \vec{R}_{Ox} = 0 \\ \vec{R}_{Oy} = 0 \\ \vec{R}_{Oz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = 0 \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = 0 \\ \vec{M}_{Oy} = 0 \\ \vec{M}_{Oz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_x\left(\vec{F}_k\right) = 0 & (4) \\ \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_y\left(\vec{F}_k\right) = 0 & (5) \\ \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_z\left(\vec{F}_k\right) = 0 & (6) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3), (4), (5), (6) là hệ phương trình cân bằng tĩnh học có chứa lực tác dụng. Đó là các phương trình tuyến tính.

III. Hệ phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt

1. Hệ lực không gian đồng quy tại O

Chọn gốc tọa độ tại điểm đồng quy, đường tác dụng các lực đi qua các trục tọa độ nên tổng mô men các lực đối với ba trục ($\sum \bar{m}_x$, $\sum \bar{m}_y$, $\sum \bar{m}_z$) đương nhiên bằng không, do đó điều kiện để hệ lực cân bằng:

$$\varphi\left(\vec{F}_k\right) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0 & (3) \end{cases}$$

2. Hệ lực không gian song song (//Oz)

Các lực song song Oz nên các phương trình (ΣX_k, ΣY_k, $\Sigma \bar{m}_z$) đương nhiên bằng không, do đó điều kiện để hệ lực cân bằng:

$$\varphi\left(\vec{F}_k\right) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0 & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_x\left(\vec{F}_k\right) = 0 & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_y\left(\vec{F}_k\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

3. Hệ lực phẳng bất kỳ (nằm trong mp Oxy)

Các lực nằm trong mp Oxy nên các phương trình (ΣX_k, $\Sigma \bar{m}_x$, $\Sigma \bar{m}_y$) đương nhiên bằng không và $\sum \bar{m}_z = \sum m_O\left(\vec{F}_k\right)$; do đó điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\varphi\left(\vec{F}_k\right) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O\left(\vec{F}_k\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

4. Hệ lực phẳng đồng quy

Chọn gốc tọa độ Oxy tại điểm đồng quy, phương trình $\Sigma \vec{m}_O(\vec{F}_k)$ đương nhiên bằng không; do đó điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\varphi(\vec{F}_k) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 & (2) \end{cases}$$

5. Hệ lực phẳng song song (//Oy)

Các lực song song Oy nên phương trình ΣX_k đương nhiên bằng không do đó điều kiện cân bằng của hệ lực :

$$\varphi(\vec{F}_k) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_k) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ghi chú: Khi khảo sát hệ lực, sự phân loại hệ lực rất là cần thiết vì khi phân loại đúng giúp chúng ta lập được số phương trình cân bằng cần đủ cho hệ lực tránh được các trường hợp thiết lập thừa hoặc thiếu.

IV. Bài toán tĩnh học

Bài toán tĩnh học là bài toán khảo sát điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên một điểm, một vật hay một hệ vật. Từ sự khảo sát đó giải quyết các yêu cầu của bài toán.

Yêu cầu của bài toán tĩnh học bao gồm hai vấn đề chính:

+ Xác định phản lực liên kết tác dụng lên vật khảo sát.

+ Xác định điều kiện cân bằng của vật khảo sát: Tìm trị số của lực cho; xác định vị trí cân bằng của vật.

1. Bài toán tĩnh học có thể phân thành hai loại

Khảo sát điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên một điểm hay một vật rắn.

Khảo sát điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên một vật.

2. Các bước giải một bài toán tĩnh học

Bước 1: Chọn vật khảo sát

Căn cứ yêu cầu của bài toán mà ta xác định vật khảo sát (điểm, vật rắn, hệ vật).

Bước 2: Đặt lực tác dụng lên vật khảo sát

Các lực cho và các phản lực liên kết thay cho các liên kết tương ứng với vật: $\Rightarrow \varphi\left(\vec{F}_k\right) \sim 0$.

Bước 3: Lập hệ phương trình cân bằng của hệ lực mà ta đã xác định được ở bước 2.

Bước 4: Giải hệ phương trình cân bằng tìm đáp số của bài toán.

3. Bài toán cân bằng của hệ vật

Loại bài toán này để giải ta phải dùng phương pháp tách vật. Xét cân bằng của từng vật thuộc hệ bằng cách tách vật đó ra khỏi các liên kết với các vật khác (giải phóng liên kết). Nếu hệ có n vật, mỗi một vật tương ứng có một hệ phương trình cân bằng thì cả hệ vật ta có n hệ phương trình cân bằng (hoặc hóa rắn cả hệ được 1 phương trình, và chỉ cần khảo sát n-1 vật để được n-1 phương trình nữa).

Chú ý: Hệ phương trình cân bằng tĩnh học bao giờ cũng có số phương trình lớn hơn hoặc bằng ẩn số có trong các phương trình (giải được).

Nếu ẩn số lớn hơn số phương trình cân bằng thì bài toán cân bằng đó là bài toán *Siêu Tĩnh*, để giải bài toán loại này ta phải cần thêm các phương trình biến dạng trong sức bền vật liệu.

V. Định lý ba lực cân bằng

1. Định lý

Ba lực không song song cân bằng thì đồng phẳng và đồng quy tại 1 điểm.

$$\begin{cases}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\right) \sim 0 \\ \text{Không song song}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Đồng phẳng} \\ \text{Đồng quy}\end{cases}$$

2. Chứng minh

Trên đường tác dụng của $\vec{F}_1$ chọn một điểm O.

Vì $\quad (\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3) \sim 0 \Rightarrow \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O\,(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3) = 0$

$$\Rightarrow \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \vec{m}_O(\vec{F}_3) = 0$$

O∈ đường tác dụng của $\vec{F}_1$ nên $\vec{m}_O(\vec{F}_1)$ bằng không, vậy:

$$\vec{m}_O(\vec{F}_2) + \vec{m}_O(\vec{F}_3) = 0 \Rightarrow \vec{m}_O(\vec{F}_2) = -\,\vec{m}_O(\vec{F}_3)$$

Phương của $\vec{m}_O(\vec{F}_2)$ và $\vec{m}_O(\vec{F}_3)$ trùng nhau và vuông góc với mặt phẳng chứa O và $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có nghĩa là $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng nằm trong một mặt phẳng.

$\vec{F}_2$ và $\vec{F}_3$ không song song. Vậy $(\vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim \vec{F} \Rightarrow (\vec{F}, \vec{F}_1) \sim 0$: $\vec{F}_1$ cùng đường tác dụng với $\vec{F}$ mà $\vec{F}$ đồng phẳng và đồng quy với $\vec{F}_2, \vec{F}_3$. Vậy $\vec{F}_1$ cũng đồng phẳng và đồng quy với $\vec{F}_2, \vec{F}_3$.

§5. BÀI TOÁN CÂN BẰNG CÓ MA SÁT

Trong thực tế bề mặt của các vật thể không hoàn toàn nhẵn và trơn như rắn tuyệt đối. Khi hai bề mặt của vật thể tiếp xúc nhau do trạng thái gồ ghề và bị lún khi ép vào nhau sẽ làm cho các chuyển động tương đối (trượt, lăn, xoay) của vật đối với nhau bị cản trở, hiện tượng đó được gọi là ma sát.

Khi vật có chuyển động hay xu hướng chuyển động (trượt, lăn, xoay) trên bề mặt của vật thể khác thì ta có ma sát trượt, ma sát lăn, ma sát xoay.

Lực làm cản trở chuyển động hay xu hướng chuyển động khi có ma sát được gọi là lực ma sát: ma sát trượt thì có lực ma sát trượt (ký hiệu $\vec{F}_{ms}$); ma sát lăn thì có ngẫu lực ma sát lăn (ký hiệu $\vec{M}_L$); ma sát xoay thì có ngẫu lực ma sát xoay (ký hiệu $\vec{M}_x$). Ta khảo sát hai dạng ma sát là trượt và lăn.

I. Ma sát trượt

1. Định nghĩa

Ma sát trượt là hiện tượng cản khi một vật trượt hay có xu hướng trượt trên bề mặt của một vật khác.

Khi vật có xu hướng trượt thì có ma sát trượt tĩnh. Khi vật trượt, thì có ma sát trượt động. Trong giáo trình này chỉ khảo sát ma sát trượt tĩnh.

2. Các định luật về ma sát trượt

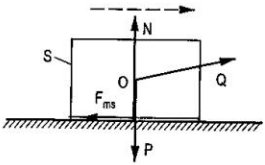
Do tính chất xuất hiện để làm cản trở chuyển động hay xu hướng chuyển động trượt của vật nên lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ hướng theo tiếp tuyến với mặt tựa và ngược chiều với chuyển động. Có điểm đặt tại vị trí tiếp xúc giữa hai vật thể.

Lực ma sát trượt là một lực có trị số giới hạn.

Nghĩa là: $0 \le F_{ms} \le F_{max}$

Hai định luật trên là định luật Culông về ma sát trượt và được chứng tỏ bằng thí nghiệm:

Cho kéo một vật nặng P bằng tải trọng Q thay đổi.



Hình 1-22a

Khi lực $\vec{Q}$ khá nhỏ thì vật A cân bằng, khi đó vì có lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ xuất hiện để cân bằng với lực kéo $\vec{Q}$.

Nhưng cho Q tăng đến một giá trị Q_1 thì vật bắt đầu trượt.

Có nghĩa là F_{ms} chỉ tăng đến giá trị đó.

Vậy: $$0 \le F_{ms} \le F_{max}$$

Bằng thực nghiệm người ta chứng tỏ rằng giá trị cực đại này phụ thuộc vào phản lực pháp tuyến của mặt tựa và bản chất của bề mặt tiếp xúc của hai vật thể.

Tức là: $$F_{max} = f.N$$

trong đó: f - hệ số ma sát trượt phụ thuộc bản chất bề mặt tiếp xúc, như:

- Tính chất của bề mặt: cứng, mềm.
- Trạng thái của bề mặt: trơn, nhám, khô, ướt.

f không phụ thuộc vào diện tích tiếp xúc, và là hư số (không có thứ nguyên).

Vậy khi $0 \le F_{ms} \le f.N$ vật cân bằng, $F_{ms} = f.N$ vật bắt đầu trượt.

* Bài toán cân bằng khi có ma sát trượt:

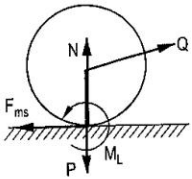
Lực ma sát là một lực thật sự có tác dụng lên vật. Vậy muốn vật cân bằng thì toàn thể các lực tác dụng lên vật (lực cho, phản lực liên kết và lực ma sát) phải thỏa mãn điều kiện cân bằng. Ngoài ra lực ma sát còn phải thỏa mãn giới hạn của nó:

$$F_{ms} \le f.N$$

II. Ma sát lăn

1. Định nghĩa

Ma sát lăn là hiện tượng cản khi một vật lăn hay có xu hướng lăn trên bề mặt của một vật khác.



Hình 1-22b

2. Các định luật ma sát lăn

Tương tự như thí nghiệm đối với ma sát trượt người ta rút ra được kết luận:

- Khi có ma sát lăn, tại liên kết xuất hiện một ngẫu lực cản, gọi là ngẫu lực ma sát lăn $\overline{M}_L$ nằm trong mặt phẳng chuyển động của vật.

- Trị số mô men của ngẫu lực ma sát lăn có một giá trị giới hạn, phụ thuộc phản lực pháp tuyến mặt tựa và bản chất của hai bề mặt tiếp xúc, nghĩa là:

$$0 \le M_L \le M_{max} = \mu.N.$$

trong đó:

μ - hệ số ma sát lăn có thứ nguyên của độ dài, nó phụ thuộc vào tính chất của bề mặt tiếp xúc;

$M_L \le \mu.N$ - vật cân bằng;

$M_L = \mu.N$ - vật bắt đầu lăn.

* Bài toán cân bằng khi có ma sát lăn

Khi vật có hiện tượng lăn thì ngoài xu hướng lăn còn có xu hướng trượt. Do đó kèm theo điều kiện:

$$M_L \le \mu.N$$

$$F_{ms} \le F.N$$

Chương 3
TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

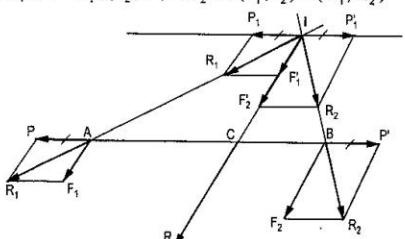
§1. TÂM CỦA HỆ LỰC SONG SONG CÙNG CHIỀU

I. Tâm của hai lực song song cùng chiều

1. Hợp hai lực song song cùng chiều $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$

Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đặt tại A và B trên đường thẳng AB, đặt cặp lực cân bằng $(\vec{P}, \vec{P}') \sim 0 \Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}, \vec{P}')$

Ta có: $(\vec{F}_1, \vec{P}) \sim \vec{R}_1; (\vec{F}_2, \vec{P}') \sim \vec{R}_2 \Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{R}_1, \vec{R}_2)$



Hình 1-23

Trượt $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ về đặt tại I (đường tác dụng của $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ cắt nhau tại I).

Tại I, phân $\vec{R}_1$ và $\vec{R}_2$ thành hai thành phần theo hai phương song song với $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và song song với AB.

$\vec{R}_1 \sim (\vec{F}_1', \vec{P}_1)$, về mặt hình học $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$ và $\vec{P}_1 = \vec{P}$.

$\vec{R}_2 \sim (\vec{F}_2', \vec{P}_1')$, về mặt hình học $\vec{F}_2' = \vec{F}_2$ và $\vec{P}_1' = \vec{P}'$.

$$\Rightarrow (\vec{R}_1, \vec{R}_2) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2', \vec{P}_1', \vec{P}_1) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2') \text{ vì } (\vec{P}_1, \vec{P}_1') \sim 0.$$

Vậy $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2') \sim \vec{R}$ vì $\vec{F}_1', \vec{F}_2'$ cùng điểm đặt tại I.

hay: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}$

với: $\vec{R} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

và: $\vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_2 \Rightarrow R = F_1 + F_2$

Đường tác dụng của $\vec{R}$ cắt AB tại C, bằng phép tính đồng dạng ta dễ dàng xác định được $\frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$ hay $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\vec{F}_2}{\vec{F}_1}$.

Điểm C chia trong đoạn AB phụ thuộc vào trị số của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ mà không phụ thuộc vào phương của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ nên C là điểm đặt của hợp lực $\vec{R}$, đồng thời là tâm của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ song song và cùng chiều.

2. Tâm của hai lực song song cùng chiều

Gọi: $\vec{r}_c$ là tọa độ của điểm C

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ là tọa độ của A và B

Ta có:
$$\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_c}{\vec{r}_2 - \vec{r}_c} = -\frac{F_2}{F_1} \Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_c)F_1 = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_c).F_2$$

$$\vec{r}_c = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}$$

Trong tọa độ: $\vec{r}_c$ (X_c, Y_c, Z_c), $\vec{r}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{r}_2(X_2, Y_2, Z_2)$

Ta có: $X_c = \frac{F_1X_1 + F_2X_2}{F_1 + F_2}$, $Y_c = \frac{F_1Y_1 + F_2Y_2}{F_1 + F_2}$, $Z_c = \frac{F_1Z_1 + F_2Z_2}{F_1 + F_2}$;

Vậy: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}$ với $R = F_1 + F_2$

$\vec{R}$ đặt tại C với $\vec{r}_c = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}$

II. Tâm của hệ lực song song cùng chiều $\varphi(\vec{F}_k)$

1. Hợp của hệ lực song song cùng chiều $\varphi(\vec{F}_k)$

Định lí: *Hệ lực song song cùng chiều tương đương một hợp lực song song cùng chiều với hệ, có trị số bằng tổng trị số các lực thuộc hệ và đặt tại điểm C được gọi là tâm của hệ lực.*

$$\varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{R} \quad \text{với} \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Định lí chứng minh dễ dàng từ kết quả hợp của hai lực song song cùng chiều.

2. Tâm của hệ lực song song cùng chiều (↑↑) $\varphi(\vec{F}_k)$

Cũng từ kết quả xác định tâm của hai lực ↑↑ ta có công thức xác định tâm C của hệ lực ↑↑ $\varphi(\vec{F}_k)$ như sau:

- Dạng vectơ

$$\vec{r}_C = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + ... + F_n\vec{r}_n}{F_1 + F_2 + ... + F_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k\vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$$

- Dạng tọa độ Đề các:

$$X_C = \frac{\sum F_k X_k}{\sum F_k}, \quad Y_C = \frac{\sum F_k Y_k}{\sum F_k}, \quad Z_C = \frac{\sum F_k Z_k}{\sum F_k};$$

§2. TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

I. Định nghĩa

Trọng tâm của vật rắn là điểm đặt trọng lực của vật rắn. Nếu gọi $\vec{P}$ là trọng lực của vật, C là điểm đặt của $\vec{P}$ thì C là trọng tâm của vật.

II. Công thức xác định trọng tâm

Vật rắn có n chất điểm, mỗi chất điểm thứ k có trọng lực $\vec{P}_k$, thì ta có hệ lực tác dụng lên chất điểm là: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3 ..... \vec{P}_n)$ là hệ lực song song cùng chiều.

Từ kết quả thu được của hệ lực song song cùng chiều, ta có:

$$\varphi(\vec{P}_k) \sim \vec{P}; \qquad \vec{P} = \sum \vec{P}_k$$

Trọng tâm C của vật được xác định:

+ Dạng vectơ: $\vec{r}_C = \dfrac{\sum P_k\vec{r}_k}{P}$

+ Dạng tọa độ Đề các: $X_C = \dfrac{\sum P_k x_k}{P}$; $Y_C = \dfrac{\sum P_k y_k}{P}$; $Z_C = \dfrac{\sum P_k z_k}{P}$;

- Vật rắn là tấm phẳng đồng chất có n phần tử:

$$X_C = \frac{\sum S_k x_k}{S}; \quad Y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S}; \quad Z_C = \frac{\sum S_k z_k}{S};$$

S - diện tích tấm phẳng;

S_k - diện tích phần tử thứ k.

- Vật rắn là thanh đồng chất có n phần tử:

$$X_C = \frac{\sum L_k x_k}{L}; \quad Y_C = \frac{\sum L_k y_k}{L}; \quad Z_C = \frac{\sum L_k z_k}{L};$$

L - chiều dài thanh;

L_k - chiều dài phần tử thứ k.

III. Trọng tâm vật rắn có hình dạng đối xứng

Nếu vật rắn có hình dạng đối xứng qua một mặt phẳng, một đường thẳng hay một điểm thì trọng tâm của vật rắn nằm trên mặt phẳng, đường thẳng, điểm đối xứng đó.

Nếu vật rắn có hình dạng phức tạp nhưng gồm các phần có hình dạng đối xứng thì ta xem các phần đó là các phần tử của vật rắn mà ta cần xác định trọng tâm.

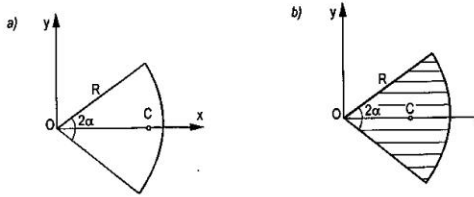
Nếu vật rắn có hình dạng đối xứng nhưng trở thành phức tạp do bị khoét mất đi những phần có hình dạng đối xứng thì ta xem các phần bị khoét là những phần tử có *trọng lượng âm*. Công thức xác định trọng tâm có dạng:

$$X_C = \frac{S'X'_C - \sum S_k X_k}{S' - \sum S_k}$$

trong đó: X_C - tọa độ vật phải tìm;

S', X'_C - diện tích và tọa độ của vật chưa bị khoét;

S_k, X_k - diện tích và tọa độ phần tử k bị khoét.



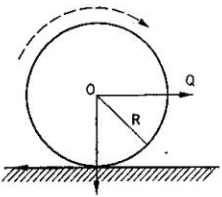
$$X_c = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha} \qquad X_c = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

Hình 1-24.

a) Tọa độ trọng tâm cung tròn; b) Tọa độ trọng tâm hình rẻ quạt

THÍ DỤ

Thí dụ I.1: Bánh xe O bán kính R, trọng lượng P có xu hướng lăn trên mặt phẳng nằm ngang, hệ số ma sát lăn giữa bánh xe O và mặt phẳng nằm ngang là μ. Hãy xác định giá trị của Q bánh xe vẫn còn cân bằng?.



Bài giải:

Bánh xe cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{Q}, \vec{F}_{ms}, \vec{M}_l) \sim 0$$

$$\Rightarrow \Sigma Y = N - P = 0 \qquad (1)$$

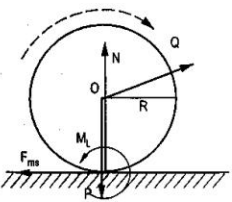
$$\Sigma \vec{m}_l = \vec{M}_L - Q.R = 0 \qquad (2)$$

$$M_L \le \mu N$$

$$(1) \rightarrow N = P;$$

$$(2) \rightarrow \mu.N - Q.R \ge 0$$

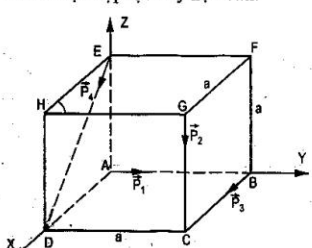
$$\Rightarrow Q \le \frac{\mu.N}{R}$$



Thí dụ I.2: Hệ gồm các lực $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ tác dụng lên hình lập phương có cạnh là a như hình vẽ. $P_1 = 10$ kN; $P_2 = 4$ kN; $P_3 = 4$ kN; $P_4 = 11$ kN; a = 0,3m.

+ Thu gọn hệ lực trên về A.

+ Hệ lực này thu về được hợp lực hay hệ xoắn.



Bài giải:

Thu gọn hệ lực trên về A

$$R_x = \Sigma X = P_3 + P_4 \cos 45° = 4 + 11\frac{\sqrt{2}}{2} = 11,76 \text{ kN}$$

$$R_y = \Sigma Y = P_1 = 10 \text{ kN}$$

$$R_z = \Sigma Z = -P_2 - P_4 \sin 45° = -4 - 11\frac{\sqrt{2}}{2} = -11,76 \text{ kN}$$

$$R_A = \sqrt{(11,76)^2 + 10^2 + (11,76)^2} = 19,4 \text{ kN}$$

$$M_x = \Sigma \bar{m}_X = -a P_2 = -1,2 \text{ kNm}$$

$$M_y = \Sigma \bar{m}_Y = aP_2 + aP_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,3\left(P_2 + P_4\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 0,3\left(4 + 11\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3,52 \text{ kNm}$$

$$M_z = \Sigma \bar{m}_Z = -aP_3 = -0,3.4 = -1,2 \text{ kNm}$$

Hệ lực này thu về được:

$$\vec{R}'_O.\vec{M}_O = R_xM_x + R_yM_y + R_zM_z$$

$$= 11,76(-1,2) + 10 \times 3,52 + (-11,76)(-1,2)$$

$$= 35,2$$

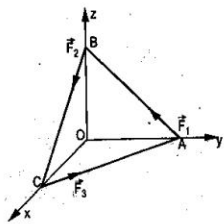
$\vec{R}'_O.\vec{M}_O \neq 0 \Rightarrow$ hệ lực thu được hệ xoắn.

Thí dụ I.3

Hệ 3 lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ đặt tại 3 điểm A, B, C và có chiều như hình vẽ. Biết OA = OB = OC = a.

+ Tìm điều kiện để hệ lực thu về một ngẫu lực.

+ Tìm điều kiện để hệ lực thu về một lực.



Bài giải:

$$\sum X = (F_2 - F_3)\cos 45° = (F_2 - F_3)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum Y = (F_3 - F_1)\cos 45° = (F_3 - F_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum Z = (F_1 - F_2)\cos 45° = (F_1 - F_2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_O = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(F_2 - F_3)\vec{i} + (F_3 - F_1)\vec{j} + (F_1 - F_2)\vec{k}\right]$$

$$\sum m_x(\vec{F}) = F_1 a\cos 45° = F_1 a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum m_y(\vec{F}) = F_2 a\cos 45° = F_2 a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum m_x(\vec{F}) = F_3 a\cos 45° = F_3 a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}\right]$$

Ta có: $\vec{R}_O\vec{M}_O = 0;\ \vec{M}_O \neq 0$

+ Điều kiện để hệ lực thu về một ngẫu lực chỉ cần đưa thêm điều kiện:

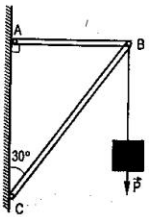
$$\vec{R}_O = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = F_3$$

+ Điều kiện để hệ lực thu về một lực chỉ cần đưa thêm điều kiện:

$$\vec{R}_O \neq 0 \Rightarrow F_1 \neq F_2 \neq F_3.$$

Thí dụ I.4

Hai thanh AB và BC bỏ qua trọng lượng của thanh. Tại A, B, C là các liên kết bản lề, treo vào B một vật nặng có trọng lượng là P. Hãy tìm phản lực của thanh AB và BC tác dụng lên bản lề B (trong SBVL gọi là ứng lực của thanh AB và thanh BC).



Bài giải:

Xét cân bằng của bản lề B (nút B).

Các lực tác dụng:

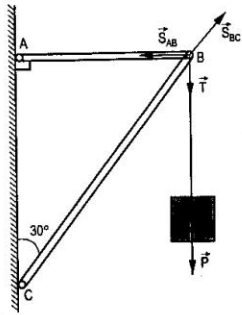
+ Lực kéo của dây treo vật nặng: $\vec{T}$.

$\vec{T}$ có trị số T = P.

+ Phản lực của thanh AB: $\vec{S}_{AB}$.

+ Phản lực của thanh BC: $\vec{S}_{BC}$.

Ta có: $(\vec{T}, \vec{S}_{AB}, \vec{S}_{BC}) \sim 0$. Đây là hệ lực phẳng đồng quy cân bằng.



Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = S_{BC}\cos 60° - S_{AB} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = S_{BC}\cos 30° - T = 0 \qquad (2)$$

$$T = P$$

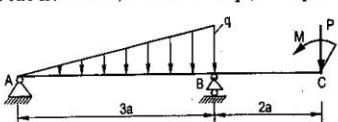
Giải hệ phương trình trên:

$$\text{Từ pt (2)} \Rightarrow S_{BC} = \frac{T}{\cos 30°} = \frac{P}{\sqrt{3}/2} = \frac{2P}{3}\sqrt{3}$$

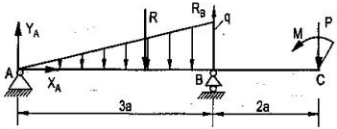
$$\text{Từ pt (1)} \Rightarrow S_{AB} = S_{BC}\cos 60° = \frac{2P}{3}\sqrt{3}.\frac{1}{2} = \frac{P\sqrt{3}}{3}$$

Đáp số: $S_{AB} = \frac{P\sqrt{3}}{3}$; $S_{BC} = \frac{2P\sqrt{3}}{3}$

Thí dụ I.5: Cho kết cấu có liên kết và chịu lực như hình vẽ. Xác định các phản lực tại các liên kết A, B. Cho: P = 2qa, M = qa^2.



Bài giải:



Hệ lực tác dụng gồm: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{R}, \vec{P}, \vec{M}) \sim 0$

$$R = \frac{1}{2}q.AB = \frac{1}{2}q.3a = \frac{3}{2}qa$$

$$\Sigma X = X_A = 0$$

$$\Sigma Y = Y_A - R + R_B - P = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma \vec{m}_A = M - P.5a + R_B.3a - R.2a = 0 \qquad (2)$$

Từ pt (2) $\Rightarrow R_B = \dfrac{5pa + 2pa - M}{3a} = 4qa$

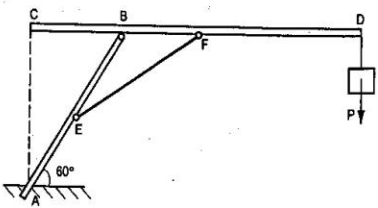
Từ pt (1) $\Rightarrow Y_A = R + P - R_B = \dfrac{3}{2}qa + 2qa - 4qa = -\dfrac{1}{2}qa$

Kết quả: $X_A = 0$; $Y_A = -\dfrac{qa}{2}$; $R_B = 4qa$

Chú ý: Trong bài toán này có phương trình $\Sigma X = X_A = 0$, điều này có ý nghĩa là hệ n lực nếu n-1 lực là song song thì lực còn lại cũng song song với các lực đó.

Thí dụ I.6

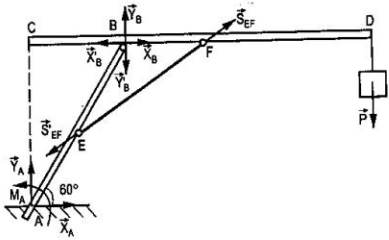
Cột AB được cố định vào nền ở đầu A và nghiêng 60° với nền. Dầm CD liên kết với cột bởi bản lề B và được đỡ nằm ngang



nhờ thanh EF (2 đầu là bản lề). Đầu D treo vật nặng P. Bỏ qua trọng lượng của cột, dầm, thanh. Cho: AE = EB = BC = BF = $\frac{1}{2}$FD = a.

Tìm phản lực tại A và các lực tương hỗ tại B, E và F.

Bài giải:



- Xét cân bằng của thanh DC. Hệ lực tác dụng gồm $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{S}_{EF}, \vec{P}) \approx 0$

$$\Sigma X = X_B + S_{EF}\cos 30° = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = Y_B + S_{EF}\sin 30° - P = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma \vec{m}_F = Y_B.a + P.2a = 0 \quad (3)$$

Từ (3) $\rightarrow Y_B = -2P$

Từ (2) $\rightarrow S_{EF} = 6P$

Từ (1) $\rightarrow X_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}.6P = -3P\sqrt{3}$

- Hóa rắn cả hệ. Hệ lực tác dụng gồm: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A, \vec{P}) \sim 0$

$$\Sigma X = X_A = 0$$

$$\Sigma Y = Y_A - P = 0$$

$$\Rightarrow Y_A = P$$

$$\Sigma \vec{m}_A = M_A - 4aP = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 4aP$$

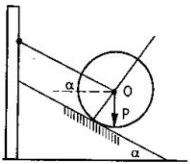
Kết quả: $X_B = -3\sqrt{3}P$; Y_B = -2P; S_{EF} = 6P; M_A = 4aP; X_A = 0; Y_A = P

*Ngoài ra ta có thể xét cân bằng thanh AB,với hệ lực cân bằng:

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A, \vec{X}'_B, \vec{Y}'_B, \vec{S}'_{EF}) \sim 0$$

trong đó : $X'_B = X_B, Y'_B = Y_B, S'_{EF} = S_{EF}$ vì đó là lực tác dụng và lực phản tác dụng, ta cũng tìm được X_A, Y_A, M_A.

Thí dụ I.7: Một quả cầu có trọng lượng là P, đặt tựa trên mặt phẳng nằm nghiêng với phương ngang góc α được giữ cân bằng nhờ sợi dây buộc vào tường. Tìm sức căng $\vec{T}$ của dây và phản lực $\vec{N}$ của mặt nghiêng tác dụng lên quả cầu. Cho P và α.



Bài giải:

Khảo sát cân bằng của quả cầu O.

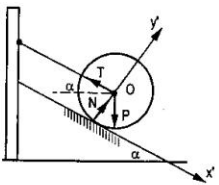
Các lực tác dụng:

+ Trọng lượng quả cầu: $\vec{P}$.

+ Sức căng của dây OA: $\vec{T}$.

+ Phản lực tựa của mặt nghiêng: $\vec{N}$.

Ta có: $(\vec{P}, \vec{T}, \vec{N}) \sim 0$; hệ lực đồng quy tại O.



Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = N\sin\alpha - T\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = T\sin\alpha + N\cos\alpha - P = 0 \qquad (2)$$

Ta có thể lập hệ phương trình cân bằng, bằng hình chiếu các lực trên các trục Ox', Oy':

$$\Sigma X' = -T + P\sin\alpha = 0 \qquad (1')$$

$$\Sigma Y' = N - P\cos\alpha = 0 \qquad (2')$$

Giải hệ phương trình cân bằng sau:

Từ pt (1') ⇒ $T = P\sin\alpha$

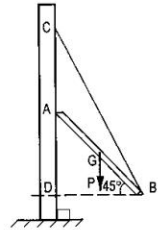
Từ pt (2') ⇒ $N = P\cos\alpha$

Đáp số: $T = P\sin\alpha$; $N = P\cos\alpha$.

Nhận xét: Rõ ràng trong bài toán này hệ phương trình sau cho ta giải tìm ẩn số một cách dễ dàng hơn đối với hệ phương trình cân bằng trên. Do đó phương trình cân bằng bằng hình chiếu có thể tùy ý. Chọn trục để chiếu sao cho trong phương trình cân bằng có ẩn số ít nhất.

Thí dụ I.8

Thanh đồng chất AB có chiều dài là l, trọng lượng P, đầu A tựa vào tường thẳng đứng, thanh được giữ cân bằng ở vị trí hợp với phương nằm ngang góc 45° nhờ buộc vào sợi dây BC. Xác định điểm C buộc dây vào tường để thanh AB cân bằng.



Bài giải:

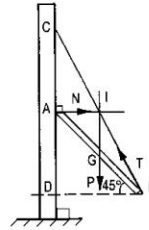
Từ hình vẽ ta nhận thấy:

G là trung điểm của AB

⇒ I là trung điểm của BC

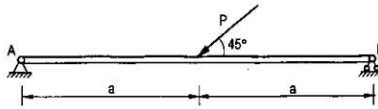
⇒ A là trung điểm của DC.

Vậy AC = AD = $l\cos 45°$



Thí dụ I.9:

Dầm AB đặt nằm ngang, chịu tác dụng của lực P nghiêng góc 45° so với phương nằm ngang tại giữa dầm. Hãy xác định phản lực ở các gối tựa A và B tác dụng lên dầm?



Bài giải:

Khảo sát cân bằng của dầm AB.

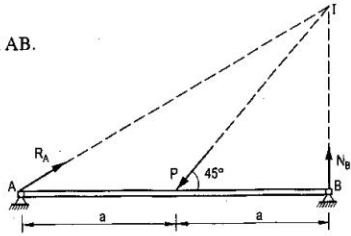
Các lực tác dụng:

+ Lực cho: $\vec{P}$

+ PLLK ở B: $\vec{N}_B$

+ PLLK ở gối A: $\vec{R}_A$

Ta có: $(\vec{P}, \vec{N}_B, \vec{R}_A) \sim 0$



Theo định lý ba lực phẳng cân bằng thì hệ lực này đồng quy. Vậy đường tác dụng của $\vec{R}_A$ đi qua I, và hợp với phương nằm ngang góc α.

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = R_A\cos\alpha - P\cos45° = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = R_A\sin\alpha - P\cos45° + N_B = 0 \quad (2)$$

trong đó: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

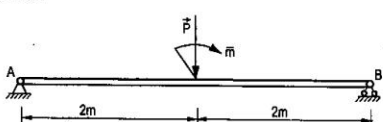
Từ (1) $\Rightarrow R_A = \frac{P\cos45°}{\cos\alpha} = \frac{P\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{P}{4}\sqrt{10}$

Từ (2) $\Rightarrow N_B = P\cos45° - R_A\sin\alpha = P.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{4}.\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

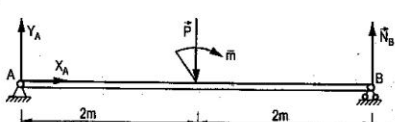
$$= \frac{P\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{4}.\frac{\sqrt{5}.\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{P}{4}\sqrt{2}$$

Đáp số: $R_A = \frac{P}{4}.\sqrt{10}$; $R_B = \frac{P}{4}.\sqrt{2}$

Thí dụ I.10: Dầm AB đặt nằm ngang trên hai gối tựa A, B và tác dụng lên dầm một lực P = 15kN, một ngẫu lực m = 20kNm. Hãy xác định phản lực tại các gối đỡ.



Bài giải:



Khảo sát cân bằng của dầm AB.

Các lực tác dụng:

+ Lực cho: $\vec{P}, \vec{m}$.

+ Phản lực ở gối đỡ B: $\vec{N}_B$.

+ Phản lực ở gối đỡ A: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$.

Ta có: $(\vec{P}, nl\,\vec{m}, \vec{N}_B, \vec{X}_A, \vec{Y}_A) \sim 0$

Đây là hệ lực phẳng.

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = X_A = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = Y_A - P + N_B = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma \overline{m}_A = -m - P.2 + N_B.4 = 0 \quad (3)$$

Giải hệ phương trình cân bằng trên:

Từ pt (1) $\Rightarrow X_A = 0$

Từ pt (3) $\Rightarrow N_B = \dfrac{m + 2P}{4} = \dfrac{20 + 2.15}{4} = \dfrac{25}{5}\text{kN} = 12{,}5\text{kN}.$

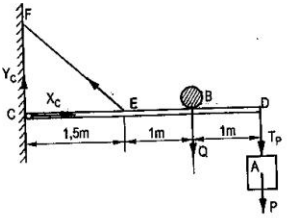
Từ pt (2) $\Rightarrow Y_A = P - N_B = 15 - 12{,}5 = 2{,}5$ kN.

Đáp số: $X_A = 0$; $Y_A = 2{,}5$kN; $N_B = 12{,}5$kN.

Chú ý: Trong bài toán này có phương trình $\Sigma X = X_A = 0$, điều này có ý nghĩa là hệ n lực nếu n-1 lực là song song thì lực còn lại cũng song song với các lực đó.

Thí dụ I.11

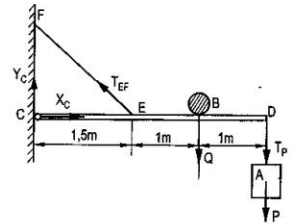
Dầm CD đặt nằm ngang, đầu C liên kết bản lề với tường thẳng đứng, được giữ cân bằng nhờ dây EF. Dầm chịu tác dụng các tải trọng của vật A và B như hình vẽ.



Hãy xác định phản lực ở bản lề C, sức căng của dây EF.

Cho Q = 10kN; P = 20kN.

Bài giải:



Khảo sát cân bằng của dầm CD.

Các lực tác dụng:

+ Áp lực của vật B: $\vec{Q}$

+ Lực kéo của vật A: $\vec{T}_P$, $T_p = P = 20kN$

+ Sức căng của dây EF: $\vec{T}_{EF}$

+ Phản lực ở bản lề C: $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$

Ta có: $(\vec{Q}, \vec{T}_P, \vec{T}_{EF}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \sim 0$: hệ lực phẳng.

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = X_C - T_{EF}\cos 45° = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = Y_C - Q - T_P + T_{EF}\cos 45° = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma \overline{m}_C = -2,5.Q - 3,5.T_P + 1,5\cos 45°.T_{EF} = 0 \quad (3)$$

Giải hệ phương trình trên:

+ Từ pt (3) $\Rightarrow T_{EF} = \dfrac{2,5Q + 3,5T_P}{1,5.\cos 45°} = \dfrac{2,5.10 + 3,5.20}{1,5.\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{95\sqrt{2}}{1,5}kN$

$$= \frac{950\sqrt{2}}{15}kN$$

+ Từ pt (1) $\Rightarrow X_C = T_{EF}\cos 45° = \dfrac{95\sqrt{2}}{1,5}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{95}{1,5}kN$

$$= \frac{950}{15}kN$$

+ Từ pt (2) $\Rightarrow Y_C = Q + T_p - T_{EF}\cos 45°$

$$= 10 + 20 - \frac{95\sqrt{2}}{1,5}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{50}{1,5}\text{kN}$$

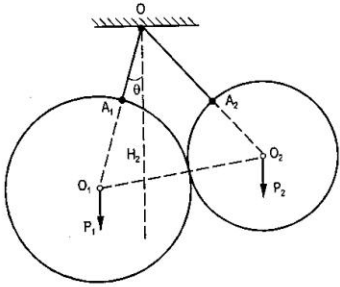
$$= -\frac{500}{15}\text{kN}$$

$Y_C < 0 \Rightarrow \bar{Y}_C$ có chiều ngược với hình vẽ.

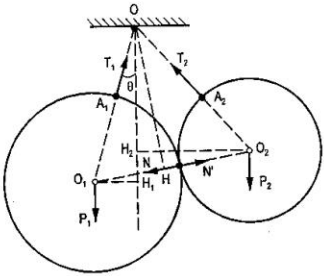
Đáp số: $X_C = \frac{950}{15}$kN ; $Y_C = -\frac{500}{15}$kN ; $T_{EF} = \frac{950\sqrt{2}}{15}$kN

Thí dụ I.12: Hai quả cầu đồng chất, tâm O_1 và O_2, bán kính R_1, R_2 ($R_1 > R_2$), trọng lượng P_1, P_2 ($P_1 > P_2$) tựa vào nhau ở B và cùng được treo vào điểm O nhờ hai dây OA_1 và OA_2. Biết $OA_1 + R_1 = OA_2 + R_2 = R_1 + R_2$ (do đó OO_1O_2 là tam giác đều).

Tìm góc nghiêng θ của OA_1 với đường thẳng đứng khi hệ cân bằng.



Bài giải:



Xét quả cầu O_1 hệ lực cân bằng tác dụng: $(\vec{P}_1, \vec{T}_1, \vec{N}) \sim 0$

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_0) = P_1.O_1H_1 - N.OH = 0$$

$$\Rightarrow P_1(R_1 + R_2)\sin\theta - N(R_1 + R_2)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{2P_1\sqrt{3}}{3}\sin\theta$$

Xét quả cầu O_2 chịu ba lực cân bằng tác dụng: $(\vec{P}_2, \vec{T}_2, \vec{N}') \sim 0$

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_0) = P_2.O_2H_2 - N'.OH = 0$$

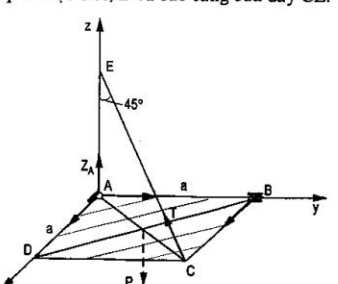
$$\Rightarrow P_2.(R_1 + R_2)\sin(60° - \theta) - N'.(R_1 + R_2)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N' = \frac{2P_2\sqrt{3}}{3}\sin(60° - \theta)$$

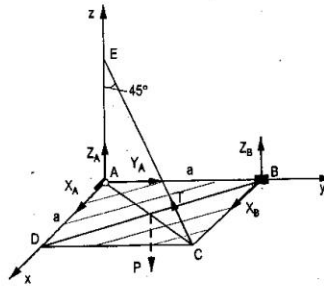
$$N = N' \Rightarrow P_1\sin\theta = P_2\sin(60° - \theta) \Rightarrow tg\theta = \frac{P_2\sqrt{3}}{2P_1 + P_2}$$

Thí dụ I.13: Tấm phẳng đồng chất hình vuông có trọng lượng P, được đặt nằm ngang và giữ cân bằng nhờ liên kết bản lề ở A, B và treo vào dây CE, dây CE họp với phương thẳng đứng góc 45°.

Hãy xác định phản lực ở A, B và sức căng của dây CE.



Bài giải:



Khảo sát cân bằng của tấm phẳng ABCD.

Hệ lực tác dụng: $(\vec{P},\vec{T},\vec{Z}_B,\vec{X}_B,\vec{Z}_A,\vec{X}_A,\vec{Y}_A) \sim 0.$

Đây là hệ lực không gian.

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = X_A + X_B - T\cos^2 45° = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = -T\cos^2 45° + Y_A = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma Z = Z_A + Z_B - P + T\cos 45° = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma m_x = -P.a/2 + T\cos 45°.a + Z_B.a = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma m_y = P.a/2 + T\cos 45°.a = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma m_z = -X_B.a = 0 \quad (6)$$

Giải hệ phương trình cân bằng:

Từ pt (6) $\Rightarrow X_B = 0$

Từ pt (5) $\Rightarrow T = \dfrac{P}{2\cos 45°} = \dfrac{P\sqrt{2}}{2}$

Từ pt (1) $\Rightarrow X_A = T\cos^2 45° = \dfrac{P\sqrt{2}}{2}.\dfrac{2}{4} = \dfrac{P\sqrt{2}}{4}$

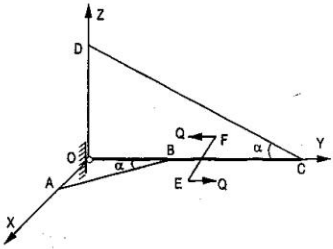
Từ pt (2) $\Rightarrow Y_A = T\cos^2 45° = \frac{P\sqrt{2}}{4}$

Từ pt (4) $\Rightarrow Z_B = \frac{P}{2} - T\cos 45° = \frac{P}{2} - \frac{P\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Từ pt (3) $\Rightarrow Z_A = P - T\cos 45° = P - \frac{P\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{2}$

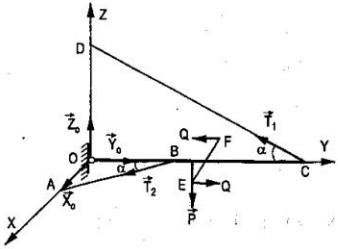
Đáp số: $X_A = \frac{P\sqrt{2}}{4}; Y_A = \frac{P\sqrt{2}}{4}; Z_A = \frac{P}{2}; X_B = 0; Z_B = 0; T = \frac{P\sqrt{2}}{2}$

Thí dụ I.14: Thanh ngang OC có trọng lượng P = 1000N, dài 2m chịu tác dụng của ngẫu lực ($\bar{Q}$, -$\bar{Q}$) nằm trong mặt phẳng nằm ngang. Trị số Q = 100N, cánh tay đòn EF = 20cm. Thanh được giữ nằm ngang nhờ bản lề cầu tại O với hai dây AB và CD. Biết: OB = 0,5 m, $\alpha = 30°$.



Hãy xác định phản lực tại O và sức căng của các dây khi thanh cân bằng?.

Bài giải:



Thanh OC cân bằng, ta có:

$$(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{m}, \vec{P}) \sim 0$$

$$m = EF.Q = 20.100 = 2000Ncm = 20Nm$$

$$\Sigma X = T_2 \sin 30° + X_o = 0$$

$$\Sigma Y = -T_1 \cos 30° - T_2 \cos 30° + Y_o = 0$$

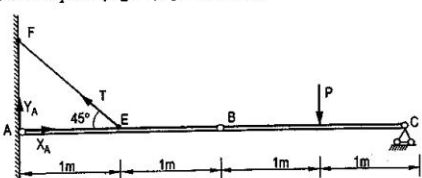
$$\Sigma Z = -P + T_1 \sin 30° + Z_o = 0$$

$$\Sigma m_x = T_1 \sin 30°.\ OC - P.\frac{OC}{2} = 0$$

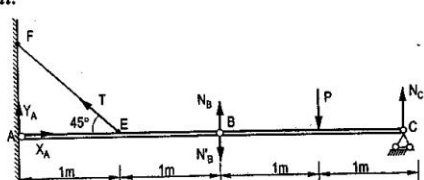
$$\Sigma m_z = m - T_2 \sin 30°.OB = 0$$

Kết quả: $T_2 = 80N$; $T_1 = P = 1000$ N; $X_o = -40N$; $Y_0 = 540\sqrt{3}$; $Z_o = 500N$.

Thí dụ I.15: Thanh AB và BC liên kết với nhau bằng bản lề. B, A là bản lề, C là gối tựa con lăn, thanh AB được giữ cân bằng nhờ dây EF, lực P = 2 tấn tác dụng lên thanh BC. Hãy xác định phản lực tại A, C và sức căng dây EF. Bỏ qua trọng lượng các thanh.



Bài giải:



Đây là bài toán cân bằng của hệ vật gồm: thanh AB, thanh BC, tách từng thanh ra để khảo sát.

a) Khảo sát cân bằng của thanh CB

(Thanh CB khảo sát trước vì hệ phương trình cân bằng có số phương trình và số ẩn số bằng nhau).

Hệ lực tác dụng: $(\vec{P}, \vec{N}_C, \vec{N}_B) \sim 0$: hệ lực phẳng song song.

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma Y = N_B - P + N_C = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \overline{m}_B = -1.P + 2.N_C = 0 \quad (2)$$

Giải hệ phương trình cân bằng:

Từ pt (2) $\Rightarrow N_C = P/2 = 1$ tấn.

Từ pt (1) $\Rightarrow N_B = P - N_C = 1$ tấn.

b) Khảo sát cân bằng của thanh AB

Hệ lực tác dụng: $(\vec{N}'_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A) \sim 0$: hệ lực phẳng.

(*Lưu ý*: $\vec{N}_B$ và $\vec{N}'_B$ là lực tác dụng và phản lực tác dụng của hai thanh AB và CD). $N'_B = N_B = 1$ tấn.

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = X_A - T\cos 45° = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma Y = Y_A + T\sin 45° - N'_B = 0 \quad (4)$$

$$\sum \overline{m}_A = T\cos 45°.1 - N'_B.2 = 0 \quad (5)$$

Giải hệ phương trình cân bằng

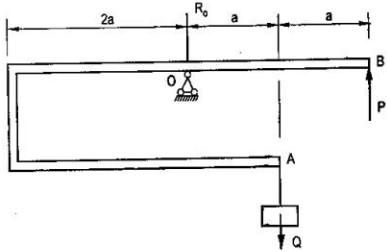
Từ pt (5) $\Rightarrow T = \dfrac{2N'_B}{\cos 45°} = \dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$ tấn

Từ pt (4) $\Rightarrow Y_A = N'_B - T\sin 45° = 1 - 2\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -1$ tấn

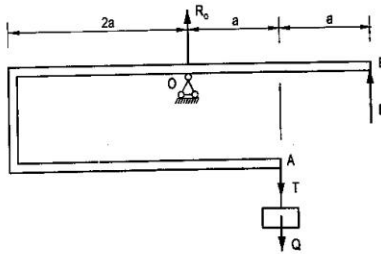
Từ pt (3) $\Rightarrow X_A = T\cos 45° = 2\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2$ tấn

Đáp số: $X_A = 2$ tấn; $Y_A = -1$ tấn; $N_C = 1$ tấn; $T = 2\sqrt{2}$ tấn.

Thí dụ I.16: Khung AB quay quanh O, đầu B treo vật nặng Q. Hỏi lực P tác dụng vào đầu A bằng bao nhiêu để khung AB cân bằng.



Bài giải:



Khảo sát cân bằng của khung AB.

Hệ lực tác dụng: $(\vec{T},\vec{P},\vec{R}_0) \sim 0$

(Vì khung AB quay quanh O nên để tìm điều kiện cân bằng ta chỉ cần lập phương trình cân bằng tổng mô men các lực đối với điểm O là đủ).

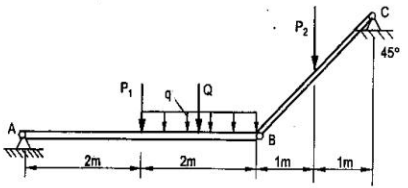
Ta có: $\sum \overline{m}_0 = 2a.P - a.Q = 0$

$$\Rightarrow P = \frac{Q}{2}.$$

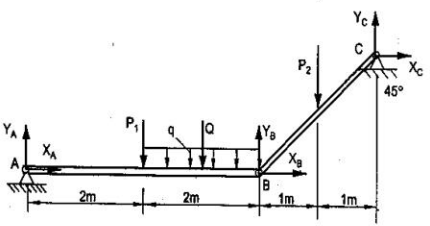
Đáp số: $P = \dfrac{Q}{2}$

Thí dụ I.17: Thanh AB và BC liên kết nhau bằng bản lề B, hệ được giữ cân bằng nhờ các liên kết như hình vẽ. Cho biết P_1 = 10kN; P_2 = 20kN, q = 20kN/m.

Hãy xác định phản lực ở bản lề A và C.



Bài giải:



Dùng phương pháp tách vật:

a) Khảo sát cân bằng của thanh AB

Hệ lực tác dụng: Lực cho $\vec{P}_1, \vec{Q}$ (lực tập trung tương đương của lực phân bố $\vec{q}$: Q = q.l = 40kN).

Phản lực liên kết: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$

Ta có: $(\vec{P}_1, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B) \sim 0$

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = X_A + X_B = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = Y_A + Y_B - P_1 - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum \overline{m}_A = -Q.3 + 4\,Y_B - 2P_1 = 0 \quad (3)$$

(Hệ phương trình cân bằng này có 3 phương trình cân bằng nhưng có 4 ẩn: X_A, Y_A, X_B, Y_B. Để giải được cần lập thêm các phương trình cân bằng đó là các phương trình cân bằng khi ta xét tiếp các vật còn lại).

b) Khảo sát cân bằng thanh BC

Hệ lực tác dụng:

+ Lực cho: $\vec{P}_2$

+ Phản lực liên kết: $\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C$.

Hệ PTCB:

$$\Sigma X = -X'_B - X_C = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma Y = -Y'_B - P_2 + Y_C = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma \overline{m}_B = -P_2.1.\cos45° + Y_C.2.\cos45° - X_C.2.\cos45° = 0 \quad (6)$$

$$X'_B = X_B;\ Y'_B = Y_B$$

(Bây giờ ta đã có hệ 6 PTCB trong đó có 6 ẩn: X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C)

Giải hệ PTCB trên:

Từ pt (3) $\Rightarrow Y_B = \dfrac{2P_1 + 3Q}{4} = \dfrac{20+120}{4} = 35kN$

Từ pt (2) $\Rightarrow Y_A = -Y_B + P_1 + Q = -35 + 10 + 40 = 15kN$

Từ pt (5) $\Rightarrow Y_C = P_2 + Y'_B = 20 + 35 = 55kN$

Từ pt (6) $\Rightarrow X_C = 2Y_C - P_2 = 110 - 20 = 90kN$

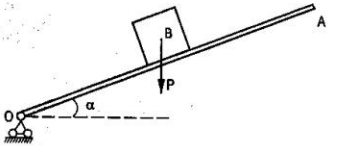
Từ pt (4) $\Rightarrow X'_B = X_B = -X_C = -90kN$ ($\vec{X}'_B$ và $\vec{X}_B$ ngược chiều hình vẽ)

Từ pt (1) $\Rightarrow X_A = -X_B = -(-90) = 90kN$

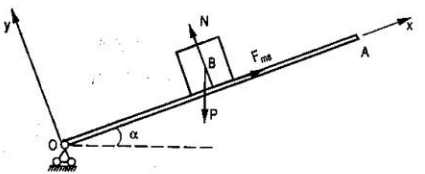
Đáp số: $X_A = 90kN$; $Y_A = 15kN$; $X_C = 90KN$; $Y_C = 55kN$.

Thí dụ I.18: Trên mặt của thanh OA nghiêng với phương nằm ngang góc α đặt một vật nặng B tăng dần góc α bằng cách cho thanh OA quay

quanh O cho đến khi vật bắt đầu trượt. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt của thanh OA là f, xác định góc α lúc đó.



Bài giải:



Khảo sát vật nặng B:

+ Hệ lực tác dụng: $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms})$

+ Vật chưa trượt: $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \sim 0$.

Hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = F_{ms} - P\sin\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = N - P\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

$$F_{ms} = f.N \text{ (Vì khảo sát lúc vật bắt đầu trượt)} \quad (3)$$

Giải hệ pt trên:

Từ pt (2) $\Rightarrow N = P\cos\alpha$

Từ pt (1) và (3) $\Rightarrow fN - P\sin\alpha = 0$

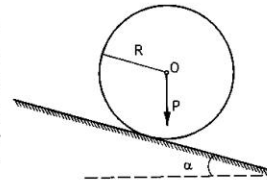
Hay: $f.P\cos\alpha - P\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow tg\alpha = f \Rightarrow \alpha = arctg\, f.$

Đáp số: $\alpha = arctgf$.

Lưu ý: bằng cách này người ta làm thí nghiệm để xác định hệ số ma sát trượt f.

Thí dụ I.19: Xác định góc nghiêng α để khối trụ trọng lượng P có bán kính R đặt trên mặt phẳng nghiêng cân bằng. Hệ số ma sát trượt, lăn giữa khối trụ và mặt nghiêng là f và μ.



Bài giải:

Khảo sát khối trụ O cân bằng:

+ Hệ lực tác dụng: $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{M}_L) \sim 0$

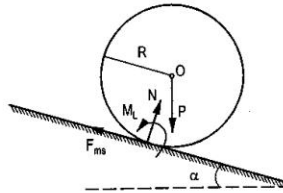
+ Hệ PTCB:

$$\Sigma X = P\sin\alpha - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = -P\cos\alpha + N = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma m_A = -PR\sin\alpha + M_L = 0 \quad (3)$$

$$F_{ms} \le f.N; \; M_L \le \mu N$$



Từ pt (2) $\Rightarrow N = P\cos\alpha$

Từ pt (1) $\Rightarrow P\sin\alpha - fP\cos\alpha \le 0 \Rightarrow tg\alpha \le f$

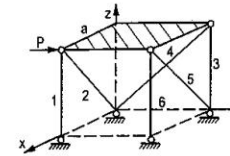
Từ pt (3) $\Rightarrow PR\sin\alpha - \mu P\cos\alpha \le 0 \Rightarrow tg\alpha \le \frac{\mu}{R}$

Thường thì $\frac{\mu}{R}$ rất bé so với f nên điều kiện để cân bằng: $tg\alpha \le \frac{\mu}{R}$

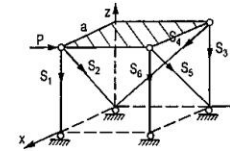
Nếu tăng dần α thì vật sẽ lăn (khi $tg\alpha \le f$). Khi $tg\alpha > f$ thì vật sẽ vừa lăn, vừa trượt.

Thí dụ I.20

Một tấm phẳng không trọng lượng, chịu lực P và được đỡ ở vị trí nằm ngang nhờ 6 thanh, không trọng lượng như hình vẽ. Toàn hình có dạng khối lập phương cạnh a.



Tìm ứng lực các thanh.



Bài giải:

Tấm phẳng cân bằng:

$$(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6, \vec{P}) \sim 0$$

Lập hệ phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = -S_2 \cos 45° - S_5 \cos 45° = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = P - S_4 \cos 45° = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma Z = -S_1 - S_3 - S_6 - S_2 \cos 45° - S_5 \cos 45° - S_4 \cos 45° = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma \overline{m}_x = -P.a - S_3.a - S_5 \cos 45°.a - S_6.a = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma \overline{m}_y = S_1.a + S_6.a = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma \overline{m}_z = P.a + S_5 \cos 45°.a = 0 \quad (6)$$

Giải hệ phương trình

Pt (2) $\rightarrow S_4 = P\sqrt{2}$

Pt (6) $\rightarrow S_5 = -P\sqrt{2}$

Pt (5) $\rightarrow S_1 = -S_6$

Pt (3) $\rightarrow S_3 = -P$

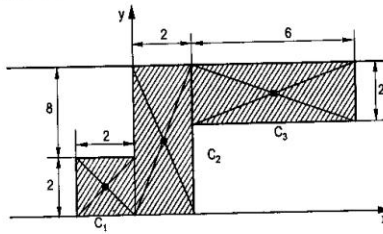
Pt (4) $\rightarrow S_6 = P$

$\Rightarrow S_1 = -P$

Pt (1) $\rightarrow S_2 = P\sqrt{2}$

Kết quả: $S_1 = -P$; $S_2 = P\sqrt{2}$; $S_3 = -P$;
$S_4 = P\sqrt{2}$; $S_5 = -P\sqrt{2}$; $S_6 = P$.

Thí dụ I.21: Hãy xác định toạ độ trọng tâm của một tấm đồng chất vẽ trên hình. Tất cả kích thước đã cho tính bằng cm.



Bài giải:

Dựng các trục tọa độ và chia tấm phẳng thành 3 hình chữ nhật, gọi C là trọng tâm của tấm phẳng, ta có:

$$x_1 = -1 \text{ cm}; x_2 = 1 \text{ cm}; x_3 = 5 \text{ cm}.$$

$$y_1 = 1 \text{ cm}; y_2 = 5 \text{ cm}; y_3 = 9 \text{ cm}.$$

$$S_1 = 4 \text{ cm}^2; S_2 = 20\text{cm}^2; S_3 = 12\text{cm}^2.$$

Diện tích của tấm phẳng:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 36\text{cm}^2.$$

Thay các công thức bằng số đã tính được vào các công thức ta được:

$$X_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{S} = \frac{-4+20+60}{36} = 2\frac{1}{9}\text{cm}$$

$$Y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3}{S} = \frac{4+100+108}{36} = 5\frac{8}{9}\text{cm}$$

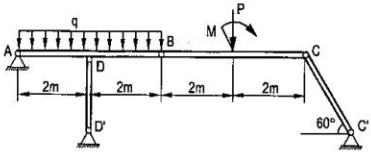
Kết quả: $C(2\frac{1}{9} \text{ cm}; 5\frac{8}{9} \text{ cm})$

BÀI TẬP

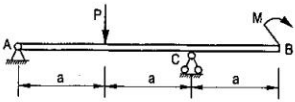
Bài I-1: Thanh AB liên kết với thanh BC bằng bản lề. B, A là bản lề. CC', DD' là các thanh cứng. Cho q = 0,5 kN/m, P = 2 kN và M = 2 kNm.

a) Xác định phản lực liên kết tại B, C tác dụng lên thanh BC?

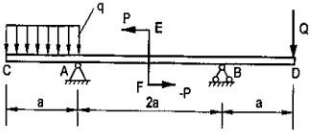
b) Xác định phản lực liên kết tại A, B, D tác dụng lên thanh AB?



Bài I-2: Kết cấu có liên kết và chịu lực như hình vẽ. Cho P = 2qa, M = qa^2. Xác định các phản lực tại các liên kết A, C?

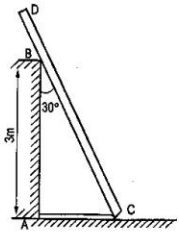


Bài I-3: Dầm CD nằm ngang, A là gối cố định, B là gối tựa con lăn. Xác định phản lực liên kết tại A và B. Cho P = 0,25 kN, Q = 2 kN, q = 2 kN/m, a = 0,8m. EF = a.

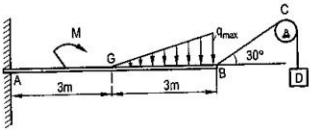


Bài I-4: Một dầm đồng chất trọng lượng P = 600N dài 4m tựa một đầu trên sàn trơn và tựa lên bờ thẳng tại B. Dầm hợp với phương thẳng đứng góc $\alpha = 30°$ và được giữ cân bằng ở vị trí đó nhờ dây AC. Bỏ qua ma sát.

Xác định sức căng T và phản lực tại B và C.

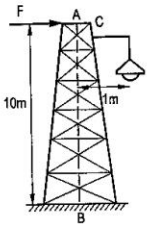


Bài I-5: Dầm AB dài 6m trọng lượng Q=10kN ngàm vào tường tại A còn đầu kia buộc sợi dây vắt qua ròng rọc và buộc vật nặng P = 6kN. Góc giữa nhánh dây BC với phương ngang là α = 30°. Trên nửa dầm bên phải tác dụng hệ lực phân bổ hình tam giác q_{max} = 2kN/m. Còn trên nửa dầm bên trái tác dụng ngẫu lực có mô men M = 20kNm.

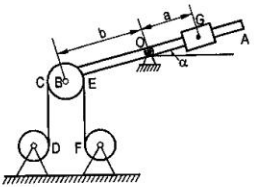


Xác định phản lực tại ngàm A.

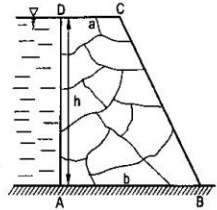
Bài I-6: Cột điện ABC được chôn vào nền ngang tại B. Tại điểm C của cột có gắn đèn trọng lượng Q = 1kN. Trọng lượng cột điện là P = 4kN. Cột điện chịu tác dụng áp lực của gió là F = 1kN đặt tại đỉnh A. Xác định phản lực liên kết tại B.



Bài I-7: Một đòn AOB có thể quay quanh trục O cố định. Đòn được gánh ròng rọc tại đầu B của nó và được giữ cân bằng nhờ đối trọng P đặt trên đòn cách trục quay O khoảng OG = a. Phương của đòn lập với phương ngang một góc α. Xác định sức căng của hai nhánh dây CD, EF.

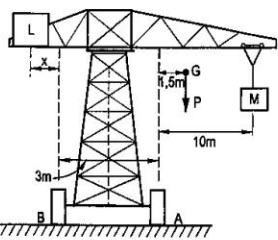


Bài I-8: Một đập nước có mặt cắt ngang là hình thang vuông với đáy nhỏ a và đáy lớn là b. Trọng lượng riêng vật liệu làm đập là γ. Trọng lượng riêng của nước là γ_n. Xác định điều kiện cân bằng của đập. Khi nước sắp tràn qua đập. Cho độ cao của đập là h.



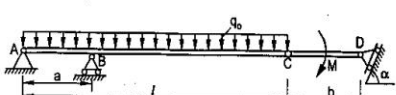
Đáp số: $\gamma\,(2b^2 + 2ab - a^2) \geq \gamma_n h^2$

Bài I-9: Cho sơ đồ phẳng của cần cẩu đặt trên hai đường ray A và B. Trọng lượng cần cẩu là P = 500kN đặt tại trọng tâm G. Tải trọng cần nâng là vật nặng M có trọng lượng p = 250kN và trọng lượng đối trọng L là Q. Kích thước cho trên hình vẽ. Hãy xác định trọng lượng Q của đối trọng L tối thiểu và khoảng cách lớn nhất x_{max} để đặt đối trọng L khi cần cẩu cân bằng.



Đáp số: $Q_{min} = 1000/3$ kN; $x_{max} = 6{,}75$ m.

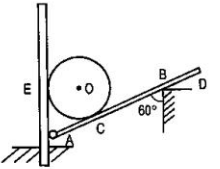
Bài I-10: Xác định phản lực liên kết tại A, B, C, D một dầm có kích thước và chịu lực như hình vẽ và bỏ qua trọng lượng tấm. Cho l = 6m, a = b = 2m, $\alpha = 60°$, $q_0 = 0{,}5$ kN/m, M = 2kN.



Đáp số: $X_A = 1{,}73$ kN; $Y_A = 0{,}5$ kN; $N_B = 1{,}5$ kN;

$X_C = X_A$; $Y_C = 1$ kN; $N_D = 2$ kN.

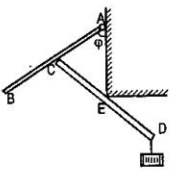
Bài I-11: Thanh AD trọng lượng không đáng kể gắn vào tường bằng bản lề A và tựa lên bờ tường tại B. Một hình trụ trọng lượng P bán kính R tựa lên thanh tại C và lên tường tại E. Cho AB = 3R, $\alpha = 60°$. Xác định phản lực tại A, B, C và E.



Đáp số: $X_A = \frac{P}{3}(1-\sqrt{3})$; $Y_A = \frac{P}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$;

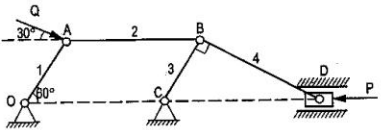
$N_B = \frac{2P}{3}$; $N_C = \frac{2P}{\sqrt{3}}$; $N_E = \frac{P}{\sqrt{3}}$.

Bài I-12: Thanh đồng chất AB dài 2L trọng lượng P có thể quay quanh bản lề A và tựa lên mút C của thanh CD. Thanh này có cùng chiều dài 2L và có thể quay quanh trục nằm ngang đi qua điểm chính giữa E của nó. Các điểm A và E nằm trên đường thẳng đứng và AE = L. Tại điểm D treo tải trọng Q = 2P. Bỏ qua ma sát. Xác định góc φ khi cân bằng.



Đáp số: φ = arcos1/8 = 82°50.

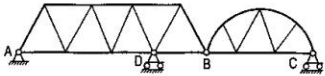
Bài I-13: Cho một khung dàn như hình vẽ. Tại nút A chịu tác dụng của Q lập với phương ngang một góc $\alpha = 30°$.



Tại con trượt D của cơ cấu chịu tác dụng lực P nằm ngang. Xác định liên hệ giữa P và Q, phản lực các thanh 1, 2, 3, 4 khi hệ cân bằng.

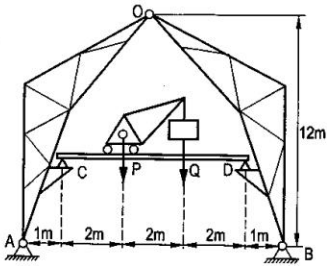
Đáp số: $S_1 = \frac{Q\sqrt{3}}{3}$; $S_2 = \frac{2Q\sqrt{3}}{3}$; $S_3 = -\frac{Q\sqrt{3}}{3}$; $S_4 = Q$; $P = \frac{Q\sqrt{3}}{2}$.

Bài I-14: Một cầu gồm hai nhịp AB và BC liên kết với nhau bằng bản lề tại B. Nhịp AB dài 12m trọng lượng P = 600kN, nhịp BC dài 4m, trọng lượng Q = 200kN. Nhịp AB chịu liên kết gối cố định A và liên kết con lăn tại D. Nhịp BC chịu liên kết con lăn tại C, AD = 8m. Xác định phản lực liên kết tại A, D và C và lực tác dụng tương tác bên lề B.



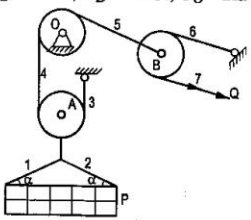
Đáp số: $X_A = 0$; $N_C = 100$ kN; $X_B = 0$; $Y_A = 100$ kN; $N_D = 600$ kN; $Y_B = 100$ kN.

Bài I-15: Cho một sơ đồ xưởng gồm hai nửa vòm AO và BO nối với nhau bằng bản lề O. Một dàn CD đặt trên hai gối tựa mũi nhọn tại C và D. Trên dàn CD đặt cần trục trọng lượng P = 60 kN. Trọng lượng vật nâng của cần trục là Q = 15 kN. Kích thước cho trên hình vẽ. Xác định phản lực liên kết tại A, B, C, D.



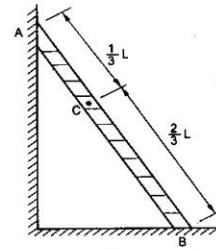
Đáp số: $X_A \approx 3$kN; $X_B \approx 3$kN; $N_C = 30$kN; $X_O \approx 3$kN; $Y_A \approx 43$kN; $Y_B \approx 32$kN; $N_D = 45$kN; $Y_O \approx 2$kN.

Bài I-16: Sơ đồ ròng rọc để nâng tải trọng P gồm hệ thống ròng rọc động A, B và ròng rọc cố định O. Cơ cấu chịu tác dụng lực kéo Q tại nhánh dây của ròng rọc động B. Xác định sức căng các nhánh dây 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 khi cơ cấu cân bằng. Các nhánh dây: nhánh 3 song song nhánh 4; nhánh 6, 7 song song nhánh 5.

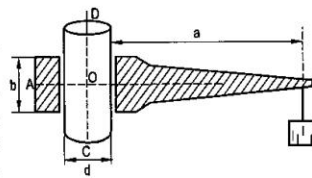


Đáp số: $T_1 = T_2 = \dfrac{P}{2\sin\alpha}$; $T_3 = T_4 = \dfrac{P}{2}$; $T_5 = \dfrac{P}{2}$; $T_6 = T_7 = Q = \dfrac{P}{4}$.

Bài I-17: Thang AB tựa vào tường nhám thẳng đứng và sàn ngang nhám, hệ số ma sát giữa thang và tường là f_1, giữa thang và sàn ngang là f_2. Trọng lượng của thang và người đứng trên nó là P đặt tại C . Xác định góc α lớn nhất lập bởi thang với tường tại vị trí cân bằng và thành phần phản lực tại A và B ứng với giá trị góc đó. $CA = \frac{1}{3}AB$.

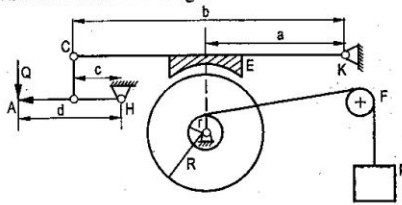


Bài I-18: Một cột tròn thẳng đứng CD xỏ qua lỗ hổng tại đầu A của thanh nằm ngang AB, độ dày lổ xỏ là b = 2cm tải trọng P treo vào thanh cách trục cột một khoảng cách a. Cho hệ số ma sát thanh với cột là f = 0,1. Xác định khoảng cách a để thanh ở vị trí cân bằng?



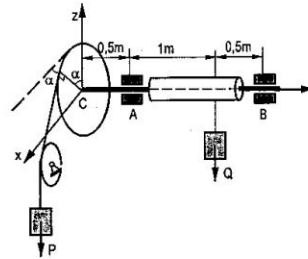
Đáp số: a ≥ 10cm

Bài I-19: Cho sơ đồ cơ cấu phanh tay, tác dụng lực Q vuông góc với cần phanh AH. Tải trọng P treo trên dây vắt qua ròng rọc cố định F và cuốn vào tầng trong của trống tang tới bán kính r, tầng ngoài trống tang tới có bán kính là R tiếp xúc với má phanh. Cho hệ số ma sát giữa má phanh E với trống tang tới là f. Kích thước cho trên hình vẽ. Xác định liên hệ giữa Q và P khi cơ cấu cân bằng.



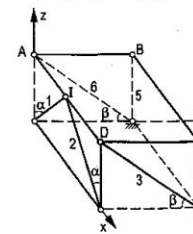
Đáp số: $Q \geq \frac{P}{f}.\frac{r}{R}.\frac{a}{b}.\frac{c}{d}$.

Bài I-20: Người ta quấn sợi dây có treo tải trọng Q vào tay quay của trục tời AB. Bán kính bánh xe C lớn gấp 6 lần bán kính tay quay. Một sợi dây khác quấn trên bánh xe được kéo căng bởi tải trọng P = 6kN và nghiêng với phương ngang góc $\alpha = 30°$. Xác định giá trị tải trọng Q và phản lực tại các ổ trục A, B tác dụng lên trục tời khi trục cân bằng bỏ qua trọng lượng trục và ma sát giữa các trục và dây.



Đáp số: $X_A = -4\sqrt{3}$ kN; $Z_B = 23$ kN; $X_B = \sqrt{3}$ kN; Q = 36 kN.

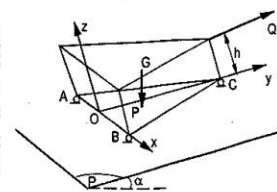
Bài I-21: Một tấm chữ nhật ABCD được giữ cân bằng nằm ngang nhờ các thanh 1, 2, 3, 4, 5, 6 như hình vẽ. Xác định ứng lực các thanh trên. Cho trọng lượng tấm là P, bỏ qua trọng lượng các thanh và IA = IB.



Đáp số: $S_1 = S_2 = P/4\cos\alpha$,

$S_3 = S_6 = 0$, $S_5 = S_4 = P/4$.

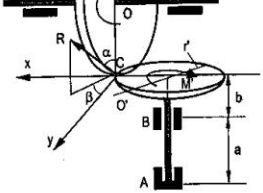
Bài I-22: Dùng tời để kéo xe ABC lên theo mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt phẳng ngang. Trọng lượng xe là P còn lực Q là lực kéo xe song song mặt phẳng nghiêng. Tìm mối liên hệ giữa P và



Q phản lực tựa tại ba bánh xe khi cân bằng. Cho chiều cao của xe là h = 1m, ABC là tam giác cân: CA = CB. Trọng tâm G của xe cách đáy một đoạn 0,5m, cách thành sau 0,5m và cách mũi C là 1m.

Đáp số: Q = Psinα.

Bài I-23: Hai bánh xe nón O,O' ăn khớp răng với nhau. Bánh xe O có trục quay nằm ngang bán kính r, chịu tác dụng ngẫu có mô men M. Bánh xe nón O' có trục thẳng đứng, bán kính r', chịu tác dụng ngẫu có mô men M'. Biết lực ăn khớp bánh răng của bánh O tác dụng lên bánh O' là R nghiêng một góc α với bán kính CO và mặt phẳng ROC nghiêng góc β với mặt phẳng chứa bánh xe O. Cho AO' = a, BO' = b. Tìm liên hệ giữa M và M' khi hệ cân bằng và xác định phản lực tại ổ đỡ A và B.



Đáp số: $\frac{M'}{r'} = \frac{M}{r}$;

$$X_A = \frac{R}{a-b}(r'\cos\alpha - b\sin\alpha\sin\beta);$$

$$Y_A = -\frac{Rb\sin\alpha\cos\beta}{a-b};\ Z_A = R\cos\alpha,\ X_B = \frac{R}{a-b}(r'\cos\alpha - a\sin\alpha\sin\beta);$$

$$Y_B = \frac{Ra\sin\alpha\cos\beta}{a-b};\ R = \frac{M'}{r'\sin\alpha\cos\beta} = \frac{M}{r\sin\alpha\cos\beta}.$$

PHẦN II
ĐỘNG HỌC

Chương 1
ĐỘNG HỌC ĐIỂM

Chuyển động của một chất điểm hay của một vật thể được xác định khi hiểu rõ quy luật chuyển động của chất điểm hay của một vật thể đó.

§1. CÁC KHÁI NIỆM ĐỘNG HỌC

I. Tọa độ - Phương trình chuyển động - Phương trình quỹ đạo

Tọa độ: Là các thông số xác định vị trí của điểm, còn được gọi là các thông số định vị.

Phương trình chuyển động: Là các tọa độ viết dưới dạng phương trình tham số t.

Phương trình quỹ đạo: Khử t trong phương trình chuyển động thì ta được phương trình quỹ đạo.

II. Vận tốc

Là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên tọa độ theo thời gian.

III. Gia tốc

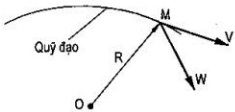
Là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên vận tốc theo thời gian.

Tọa độ, vận tốc, gia tốc là các đặc trưng động học của chất điểm, xác định chuyển động của chất điểm là xác định các đại lượng này.

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHUYỂN ĐỘNG

I. Phương pháp vectơ

Vị trí của M được xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM}$ gọi là bán kính vectơ của điểm M và được ký hiệu là $\vec{R}$, trong đó điểm O là cố định.



Hình 2-1

1. Tọa độ - Phương trình chuyển động

$$\vec{R} = \vec{R}(t)$$

2. Vận tốc: Ký hiệu vận tốc của chất điểm là $\vec{V}$, ta có:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}$$

Khi $\Delta t \to 0$ thì phương của $\vec{V}$ trùng với tiếp tuyến với quỹ đạo tại M.

Đơn vị của vận tốc là m/s.

3. Gia tốc: Ký hiệu gia tốc của điểm là $\vec{W}$, ta có:

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{R}}$$

Khi $\Delta t \to 0$ thì $\vec{W}$ hướng về bề lõm của quỹ đạo.

Đơn vị gia tốc là m/s^2.

4. Dấu hiệu đón nhận chuyển động

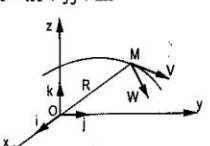
Nếu: $\vec{V}, \vec{W} > 0$ thì chuyển động là nhanh dần.

$\vec{V}, \vec{W} < 0$ thì chuyển động là chậm dần.

II. Phương pháp tọa độ Đềcác

Trong tọa độ Đềcác: Tọa độ của điểm M là: x, y, z.

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Hình 2-2

1. Tọa độ - Phương trình chuyển động

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Khi khử t trong hệ phương trình trên, ta được phương trình quỹ đạo:

$$f_1 = f_1(x, y)$$

$$f_2 = f_2(x, y)$$

Giao tuyến của hai mặt trụ cho bởi f_1 và f_2 là quỹ đạo của M.

2. Vận tốc

Với: $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Suy ra: $$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (a)$$

$$\left(\text{còn } \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0\right)$$

Ngoài ra hình chiếu của $\vec{V}$ trên các trục là: V_x, V_y, V_z, thì:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \qquad (b)$$

Đồng nhất (a) và (b):

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Kết luận: Hình chiếu của vectơ vận tốc trên các trục tọa độ bằng đạo hàm bậc nhất tọa độ tương ứng theo thời gian.

Trị số của $\vec{V}$:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

3. Gia tốc

Với: $$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{W} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Hay: $$\vec{W} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\left(\text{còn } \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0\right)$$

Ngoài ra gọi W_x, W_y, W_z là hình chiếu của $\vec{W}$ trên các trục:

$$\vec{W} = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}$$

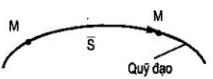
Suy ra: $W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$; $W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$; $W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$

Trị số của gia tốc:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

III. Phương pháp tự nhiên

Phương pháp tọa độ tự nhiên là dùng quỹ đạo của điểm làm hệ quy chiếu để khảo sát chuyển động của điểm.



Hình 2-3

M_O là điểm cố định nằm trên quỹ đạo, cung $\overline{S} = \pm M_OM$ cho ta biết được tọa độ của điểm M. S được gọi là đoạn đường mà M đi được.

1. Hệ trục tự nhiên

Hệ trục tọa độ tự nhiên là một hệ trục tọa độ vuông góc, có gốc của hệ gắn với động điểm M và ba trục:

a) Trục tiếp tuyến

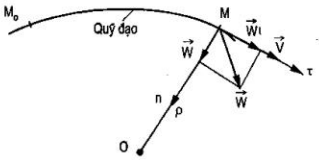
Trục này trùng với tiếp tuyến quỹ đạo tại M, có vectơ chỉ phương là $\vec{\tau}$ hướng theo chiều chuyển động.

b) Trục pháp tuyến chính

Trục này vuông góc với trục tiếp tuyến và nằm trong mặt phẳng mật tiếp tại M (mặt phẳng chứa đoạn cong vô cùng nhỏ lân cận điểm M), trục có vectơ chỉ phương là $\vec{n}$ hướng vào bề lõm của quỹ đạo.

c) Trục trùng pháp tuyến

Trục này vuông góc với hai trục trên, có vectơ chỉ phương là $\vec{b}$, sao cho: $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$.



Hình 2-4

2. Hai đại lượng đặc trưng cho đường cong

a) Độ cong: Là đại lượng vô hướng, dương: $K = \frac{d\varphi}{dS}$.

b) Bán kính cong: Là đại lượng vô hướng, dương: $\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi}$ (bán kính cong là bán kính của một đoạn cong vô cùng bé lân cận của điểm M, đoạn cong này được xem như là một cung phẳng và tròn).

Độ cong càng nhỏ thì bán kính cong càng lớn.

3. Tọa độ - Phương trình chuyển động

$$\overline{S} = \overline{S}(t)$$

4. Vận tốc

$$\overline{V} = \frac{d\overline{s}}{dt} = \dot{\overline{S}}$$

Dạng vectơ: $\vec{V} = |\overline{V}|\vec{\tau} = |\dot{\overline{S}}|.\vec{\tau}$

5. Gia tốc

Theo định nghĩa: $\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\dot{\overline{S}}|.\vec{\tau}\right) = \frac{d|\dot{\overline{S}}|}{dt}\vec{\tau} + |\dot{\overline{S}}|.\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

$$\frac{d|\dot{\overline{S}}|}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = |\ddot{\overline{S}}|$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}.\left|\frac{d\varphi}{d\overline{S}}\right|\left|\frac{d\overline{S}}{dt}\right| = \vec{n}.\frac{1}{\rho}.|\overline{V}|$$

Suy ra: $$\vec{W} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}.\vec{n}$$

Hay: $$\vec{W} = \vec{W}^{\tau} + \vec{W}^{n};\ W = \sqrt{W^{\tau^2} + W^{n^2}}$$

trong đó:

$\vec{W}^{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}.\vec{\tau}$ được gọi là gia tốc tiếp (tuyến), nằm theo tiếp tuyến của quỹ đạo là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên về độ lớn của vận tốc.

Có trị số: $$W^{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}$$

$\vec{W}^{n} = \frac{V^2}{\rho}.\vec{n}$ được gọi là gia tốc pháp (tuyến), nó vuông góc với tiếp tuyến của quỹ đạo và hướng vào bề lõm của quỹ đạo, là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên về phương của vận tốc.

Gia tốc pháp có trị số: $W^{n} = \frac{V^2}{\rho}$.

Khi chất điểm chuyển động thẳng ($\rho \to \infty$) khi đó $\vec{W}^{n} = 0$

IV. Các chuyển động thường gặp

1. Chuyển động thẳng đều

$$\vec{W} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \overline{const}$$

Đoạn đường đi được:

$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{v}t$$

2. Chuyển động thẳng biến đổi đều

$$W^{n} = 0;\quad W^{\tau} = const$$

Vận tốc của điểm:

$$V = V_O + W^{\tau}t \text{ (nhanh dần)}$$

$$V = V_0 - W^{\tau}t \text{ (chậm dần)}$$

Đoạn đường đi được:

$$S = S_0 + V_0.t \pm \frac{1}{2} W^{\tau} t^2$$

3. Chuyển động tròn đều

$$W^{\tau} = 0; \quad W^n = \text{const}$$

Đoạn đường đi được.

$$S = S_0 + V.t$$

4. Chuyển động tròn biến đổi đều

$$W^{\tau} = \text{const}; \quad W^n = \text{const}$$

$$V = V_0 \pm W^{\tau}.t$$

$$S = S_0 + V_0 t \pm \frac{1}{2} W^{\tau} t^2$$

Ghi chú: Ta có thể kết hợp các phương pháp với nhau để khảo sát chuyển động của chất điểm.

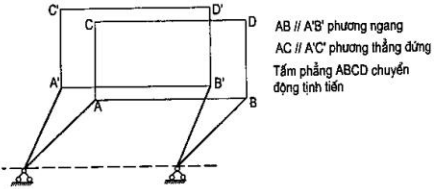
Chương 2

CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

A. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN

§1. ĐỊNH NGHĨA

Vật rắn chuyển động tịnh tiến khi mọi đoạn thẳng thuộc vật trong quá trình chuyển động luôn luôn song song với một phương.



Hình 2-5

Tấm phẳng ABCD trong quá trình chuyển động có các đoạn thẳng luôn luôn song song với phương cho trước nên tấm phẳng chuyển động định tiến.

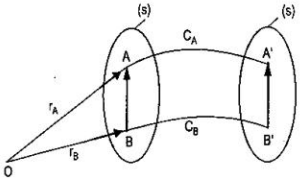
§2. TÍNH CHẤT CỦA CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

I. Định lý

Vật rắn chuyển động tịnh tiến khi mọi điểm thuộc vật vẽ nên những quỹ đạo đồng nhất (đặt trùng khít lên nhau), tại mỗi thời điểm các điểm có vận tốc bằng nhau và gia tốc bằng nhau.

II. Chứng minh

Gọi S có chuyển động tịnh tuyến từ vị trí I sang vị trí II.



Hình 2-6

Khi chuyển động, điểm A vẽ nên quỹ đạo là C_A, điểm B vẽ nên quỹ đạo là C_B.

S chuyển động tịnh tiến nên B'A'// BA.

S là vật rắn tuyệt đối nên B'A' = BA.

Suy ra: $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{const}$

Vậy khi trượt quỹ đạo C_B theo hướng $\overrightarrow{BA}$ một đoạn bằng BA thì B sẽ trùng với A và B' trùng với A' hay C_B trùng khít với C_A.

Ngoài ra ta có:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{BA}$$

Vận tốc của điểm A:

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\overrightarrow{BA}}{dt} = \vec{V}_B + 0$$

Vận tốc của điểm A bằng vận tốc của điểm B.

Tương tự gia tốc của điểm A cũng bằng gia tốc của điểm B.

$$\vec{W}_A = \vec{W}_B$$

Định lý chứng minh xong

III. Ý nghĩa

1. Khi khảo sát chuyển động của vật rắn chuyển động tịnh tiến, ta chỉ cần khảo sát chuyển động của một điểm bất kỳ thuộc vật, kết quả khảo sát của điểm đó cũng là kết quả cho tất cả các điểm khác.

2. Vật rắn chuyển động tịnh tiến xem như chuyển động của điểm và chuyển động của điểm còn gọi là điểm chuyển động tịnh tiến.

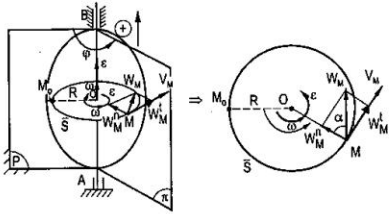
B- CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH CỦA VẬT RẮN

§1. ĐỊNH NGHĨA

Chuyển động của vật rắn được gọi là quay quanh một trục cố định khi trên vật có hai điểm luôn luôn nằm yên.

Đường thẳng đi qua hai điểm cố định đó gọi là trục quay. Mọi điểm trên trục quay thì nằm yên nên trục quay là trục cố định.

§2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT QUAY



Hình 2-7

Δ(AB) - trục quay.

P - mặt phẳng cố định.

π - mặt phẳng gắn với vật quay S.

Giao tuyến của hai mặt phẳng π và P là trục quay Δ.

I. Phương trình chuyển động của vật quay

Khi vật quay, mặt phẳng π gắn với vật cũng chuyển động quay quanh trục Δ, tạo với mặt phẳng P một góc φ, nếu biết được góc φ thì ta xác định được vị trí của mặt phẳng π và cũng là vị trí của vật. Vì vậy ta có:

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t) \qquad \text{(rad)}$$

$\overline{\varphi}$ được gọi là góc quay.

$\overline{\varphi}(t)$ được gọi là phương trình chuyển động của vật quay.

Nếu đứng theo chiều của trục quay nhìn thấy vật quay theo ngược chiều kim đồng hồ, ta nói vật quay theo chiều dương và lúc đó $\overline{\varphi} > 0$ và ngược lại.

II. Vận tốc góc của vật quay - Vectơ vận tốc góc của vật quay

1. Vận tốc góc của vật quay

Vận tốc góc là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên của góc quay theo thời gian. Ký hiệu là ω.

Ta có: $\overline{\omega} = \dfrac{d\overline{\varphi}}{dt} = \dot{\overline{\varphi}}$

$\overline{\omega} > 0$ khi vật quay theo chiều dương và ngược lại.

Đơn vị của vận tốc góc là rad/s hay S^{-1}, trong kỹ thuật là: vòng/phút.

2. Vectơ vận tốc góc của vật quay

Ký hiệu: $\vec{\omega}$.

Định nghĩa: *Vectơ vận tốc góc là vectơ nằm dọc theo trục quay có chiều sao cho đứng theo chiều của vectơ này nhìn thấy vật quay theo chiều dương; có trị số bằng trị số của vận tốc góc* ω.

$$|\vec{\omega}| = \omega$$

III. Gia tốc góc của vật quay - Vectơ gia tốc góc của vật quay

1. Gia tốc góc của vật quay

Gia tốc góc là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên của vận tốc góc theo thời gian. Ký hiệu là $\overline{\varepsilon}$.

Ta có: $\overline{\varepsilon} = \dfrac{d\overline{\omega}}{dt} = \dot{\overline{\omega}}$ hay $\overline{\varepsilon} = \dfrac{d^2\overline{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\overline{\varphi}}$

$\overline{\varepsilon} > 0$ khi vật quay nhanh dần.

$\overline{\varepsilon} < 0$ khi vật quay chậm dần.

Đơn vị của gia tốc góc là rad/s^2 hay S^{-2}

Khi $\overline{\varepsilon} = 0$ thì ω = const, lúc đó vật quay đều.

2. Vectơ gia tốc góc của vật quay

Ký hiệu: $\vec{\varepsilon}$

Định nghĩa: *Vectơ gia tốc góc là đại lượng đặc trưng cho biến thiên vectơ vận tốc góc theo thời gian.*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Vectơ $\vec{\omega}$ nằm trên trục quay nên không đổi phương, do đó $\vec{\varepsilon}$ cũng cùng phương với $\vec{\omega}$ ($\vec{\varepsilon}$ cũng nằm trên trục quay). $\vec{\varepsilon}$ có cùng chiều hay ngược chiều với vectơ $\vec{\omega}$ khi vật quay nhanh dần hay chậm dần, nghĩa là:

Khi vật quay nhanh dần thì $\vec{\varepsilon}.\vec{\omega} > 0$.

Khi vật quay chậm dần thì $\vec{\varepsilon}.\vec{\omega} < 0$.

IV. Một số dạng chuyển động quay đặc biệt

1. Vật quay đều

$$\omega = \text{const}\ ;\ \vec{\varepsilon} = 0.$$

Góc quay được xác định: $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}.t$

2. Vật quay biến đổi đều

$$\vec{\varepsilon} = \text{const}$$

Vận tốc góc của vật: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}.t$

Góc quay của vật: $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}t^2$

$\vec{\omega}_0$ - vận tốc góc ban đầu; $\vec{\varphi}_0$ - góc quay ban đầu.

§3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM THUỘC VẬT

Mọi điểm thuộc vật quay chuyển động trên các đường tròn nằm trong các mặt phẳng vuông góc với trục quay, có tâm trên trục quay, và có bán kính bằng khoảng cách từ điểm đó đến trục quay.

Vì đã biết quỹ đạo của điểm nên khảo sát chuyển động của điểm M thuộc vật quay ta áp dụng phương pháp tự nhiên.

I. Phương trình chuyển động của điểm M

$\vec{S}$ là đoạn đường đi được của điểm: $\vec{S} = \overline{M_0M}$

Ta có phương trình chuyển động của điểm M:

$$\vec{S} = r.\vec{\varphi}(t)$$

II. Vận tốc của điểm M

Ta có: $\vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt} = r\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = r.\vec{\omega}$

Vận tốc của điểm M có phương vuông góc với bán kính quay $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ hướng theo chiều chuyển động và có trị số: $V = r.\omega$

Ngoài ra vận tốc của điểm M có thể biểu diễn theo vectơ vận tốc gốc $\vec{\omega}$ bởi biểu thức sau: $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Rõ ràng, vì $|\vec{\omega} \wedge \vec{r}| = \omega.r$ và khi quay vectơ $\vec{r}$ theo chiều của $\vec{\omega}$ thì ta nhận được chiều của vận tốc điểm M.

Ta thấy rằng vận tốc của điểm vuông góc với bán kính quay, và có trị số tỉ lệ bậc nhất với bán kính quay, nghĩa là càng xa trục quay thì vận tốc các điểm càng lớn.

III. Gia tốc của điểm M

Theo phương pháp tự nhiên, gia tốc của điểm M gồm hai thành phần: gia tốc tiếp tuyến $\vec{W}^{\tau}$ và gia tốc pháp tuyến $\vec{W}^{n}$.

$$\vec{W} = \vec{W}^{\tau} + \vec{W}^{n}$$

trong đó:

$\vec{W}^{\tau}$ - có phương vuông góc với bán kính quay, có chiều theo chiều quay của gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$ và xác định như sau:

Ta có: $W^{\tau} = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}(r\vec{\omega})\right| = r.\left|\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right| = r.|\vec{\varepsilon}|$

$$W^{\tau} = r.\varepsilon$$

$\vec{W}^{n}$ - nằm dọc theo bán kính quay và hướng từ điểm M đến tâm quay O, có trị số được xác định như sau:

Ta có: $W^{n} = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r.\omega^2$

$$W^{n} = r.\omega^2$$

$\vec{W}$ - gia tốc toàn phần, có trị số được xác định như sau:

Ta có: $W = \sqrt{W^{\tau^2} + W^{n^2}} = \sqrt{(r\varepsilon)^2 + (r\omega^2)^2}$

$$W = r.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Ghi chú:

1- Ta thấy rằng vận tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp, gia tốc toàn phần có trị số tỉ lệ thuận bậc nhất với khoảng cách từ điểm đến trục quay (bán kính quay).

$$\frac{V_M}{V_N} = \frac{W_M^\tau}{W_N^\tau} = \frac{W_M^n}{W_N^n} = \frac{W_M}{W_N} = \frac{r_M}{r_N}$$

2- Góc α là góc hợp bởi gia tốc toàn phần với bán kính quay r, ta có:

$$tg\alpha = \frac{W^\tau}{W^n} = \frac{r.\varepsilon}{r.\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Góc α không phụ thuộc vào r (vị trí của điểm), và đối với mọi điểm thì bằng nhau.

Biểu diễn các thành phần gia tốc của điểm theo các vectơ vận tốc góc và vectơ gia tốc góc của vật quay.

1. Biểu diễn gia tốc tiếp $\vec{W}^\tau$

$$\vec{W}^\tau = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$$

Thật vậy: $|\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}| = \varepsilon.r\sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon.r\sin\frac{\pi}{2} = \varepsilon.r$

Khi quay vectơ $\vec{r}$ theo chiều quay của $\vec{\varepsilon}$ quanh vectơ $\vec{\varepsilon}$ một góc bằng $\frac{\pi}{2}$ thì ta nhận được phương, chiều của vectơ tích $\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$, nó trùng với phương, chiều của vectơ gia tốc $\vec{W}^\tau$.

2. Biểu diễn gia tốc pháp $\vec{W}^n$

$$\vec{W}^n = \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

Thật vậy: $|\vec{\omega} \wedge \vec{V}| = \omega.V.\sin(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega.v.\sin\frac{\pi}{2} = \omega.r.\omega = r.\omega^2$

Khi quay vectơ $\vec{V}$ theo chiều quay của $\vec{\omega}$ quanh vectơ $\vec{\omega}$ một góc bằng $\frac{\pi}{2}$ thì ta nhận được phương, chiều của vectơ tích $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, nó trùng với phương, chiều của vectơ gia tốc pháp.

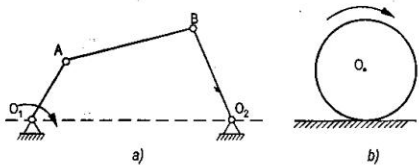
Chương 3

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

§1. KHÁI NIỆM MÔ HÌNH KHẢO SÁT

I. Định nghĩa

Chuyển động của vật rắn được gọi là chuyển động song phẳng khi mỗi điểm thuộc vật luôn luôn di chuyển trong mặt phẳng song song với một mặt phẳng cố định được gọi là mặt phẳng quy chiếu hay mặt phẳng gốc.



Hình 2-8

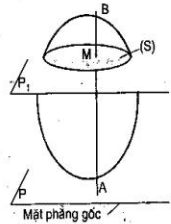
(a) Là có cơ cấu bốn khâu bản lề trong đó chuyển động của thanh truyền AB là chuyển động song phẳng.

(b) Chuyển động của đĩa tròn tâm O lăn trên đường thẳng là chuyển động song phẳng.

II. Mô hình của vật chuyển động song phẳng

Xét một đoạn thẳng AB bất kỳ thuộc vật rắn và vuông góc với mặt phẳng gốc. Vì là vật rắn nên khoảng cách AB không đổi, còn A và B luôn luôn di chuyển trên 2 mặt phẳng song song với mặt phẳng gốc, nên đoạn thẳng AB luôn luôn di chuyển vuông góc với mặt phẳng gốc (cố định) – Đoạn thẳng AB chuyển động tịnh tiến. Như vậy mọi điểm thuộc đoạn thẳng AB tại mỗi thời điểm có vận tốc bằng nhau và gia tốc bằng nhau.

Từ đó suy ra rằng: Nếu biết chuyển động của một tiết diện phẳng (tập hợp mọi điểm M thuộc mọi đoạn thẳng AB thuộc vật và vuông góc với mặt phẳng gốc) song song với mặt phẳng gốc thì biết được vận tốc và gia tốc của mọi điểm thuộc tất cả đoạn thẳng của vật vuông góc với mặt phẳng gốc, có nghĩa là biết được vận tốc và gia tốc của mọi điểm thuộc vật rắn.

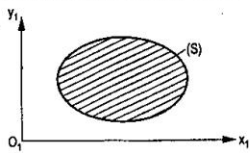


Hình 2-9

Mọi tiết diện phẳng của vật song song với mặt phẳng gốc thì chuyển động giống nhau.

Như vậy bài toán khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn trong không gian được đưa về bài toán khảo sát chuyển động của một tiết diện phẳng thuộc vật song song với mặt phẳng gốc hay mặt phẳng quy chiếu.

Tiết diện phẳng S chuyển động trong hệ quy chiếu là mặt phẳng $O_1x_1y_1$. Và ta gọi chuyển động song phẳng của tiết diện phẳng S là chuyển động của hình phẳng trong mặt phẳng P chứa nó. Mặt phẳng P được xác định bằng hệ quy chiếu $O_1x_1y_1$ cố định.



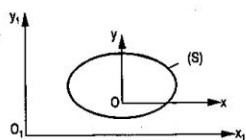
Hình 2.10

§2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA HÌNH PHẲNG

I. Phương trình chuyển động của hình phẳng

Xét chuyển động của hình phẳng S trong mặt phẳng $O_1x_1y_1$.

Tại điểm O trên hình phẳng S, ta gắn vào một hệ trục Oxy (trong quá trình chuyển động của hình phẳng, hệ trục tọa độ Oxy cũng chuyển động theo, ta gọi Oxy là hệ trục tọa độ di động hay hệ động).



Hình 2-11

Khi chuyển động, các trục của hệ động sao cho luôn luôn có $Ox // O_1x_1$, $Oy // O_1y_1$ ($O_1x_1y_1$ được gọi là hệ trục tọa độ cố định hay hệ cố định).

Do đó, ta thấy rằng hình phẳng S di chuyển quay quanh gốc O của hệ động Oxy, được gọi là cực O. Vị trí của hình phẳng S được xác định trong hệ động bằng góc quay $\overline{\varphi}$.

Như vậy rõ ràng rằng vị trí của hình phẳng hoàn toàn được xác định trong hệ cố định $O_1x_1y_1$, nếu ta biết được tọa độ của cực $O(x_0, y_0)$ và góc quay $\overline{\varphi}$ quanh cực O của nó.

x_0, y_0, $\overline{\varphi}$ được gọi là các tọa độ của hình phẳng, các thông số này là hàm của thời gian, ta có: $x_0 = x_0(t); y_0 = y_0(t); \overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t)$ các phương trình này được gọi là phương trình chuyển động của hình phẳng S hay của vật rắn chuyển động song phẳng.

II. Các thông số động học của hình phẳng

Trạng thái động học của hệ động Oxy xác định bởi các yếu tố động học là vận tốc của cực O ($\vec{V}_0$) và gia tốc của cực O ($\vec{W}_0$) (hệ động Oxy có chuyển động tịnh tiến nên đặc trưng động học của nó được xác định qua chuyển động của cực O). Còn chuyển động quay của hình phẳng quanh cực O được xác định bởi các yếu tố động học là vận tốc góc $\overline{\omega} = \dot{\overline{\varphi}}$ và gia tốc góc $\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \ddot{\overline{\varphi}}$. $\overline{\omega}$ và $\overline{\varepsilon}$ gọi là vận tốc góc và gia tốc góc của hình phẳng S.

Các đại lượng $\vec{V}_0, \vec{W}_0, \overline{\omega}, \overline{\varepsilon}$ được gọi là các thông số động học hay yếu tố động học của hình phẳng S, trong đó $\vec{V}_0$ và $\vec{W}_0$ thì phụ thuộc vào việc chọn cực O, còn $\overline{\omega}$ và $\overline{\varepsilon}$ không phụ thuộc vào việc chọn cực O mà ta sẽ chứng minh sau.

§3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM THUỘC VẬT

$$\vec{R}_M = \vec{R}_0 + \vec{r}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

trong đó: $\vec{R}_M, \vec{R}_0$ - các vectơ định vị của điểm M và cực O;

$\vec{i}, \vec{j}$ - các vectơ chỉ phương của hệ động Oxy.

I. Phương trình chuyển động của điểm

Tọa độ của M trong hệ $O_1x_1y_1$ là x_M, y_M.

Tọa độ của M trong hệ Oxy là x, y

Ta có: $x_M = x_0 + r\cos\varphi$

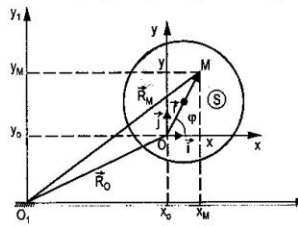
$y_M = y_0 + r\sin\varphi$

Vì x_0, y_0 và φ thay đổi liên tục theo thời gian, nên:

$$x_M(t) = x_0(t) + r\cos\varphi(t)$$

$$y_M(t) = y_0(t) + r\sin\varphi(t)$$

Các phương trình trên được gọi là phương trình chuyển động của điểm M.



Hình 2-12

II. Vận tốc của điểm thuộc vật

1. Quan hệ vận tốc của điểm với vận tốc của cực

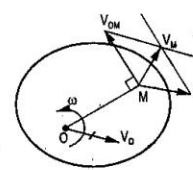
Theo định nghĩa ta có:

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{R}_M}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{V}_{OM}$$

trong đó: $\vec{V}_{OM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \quad \left(\vec{V}_{OM} \perp \overrightarrow{OM}\right)$



Hình 2-13

$\vec{V}_{OM}$ được gọi là vận tốc của điểm M quay quanh cực O với vận tốc góc là $\vec{\omega}$.

Như vậy ta có: *Vận tốc của điểm trên hình phẳng bằng tổng hình học vận tốc của điểm cực với vận tốc của điểm đó quay quanh điểm cực.*

Ta cũng có thể viết:

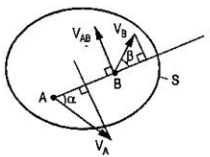
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}$$

2. Định lý hình chiếu vận tốc

Định lý:

Hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc hình phẳng lên đường thẳng đi qua hai điểm đó thì bằng nhau.

$$\vec{V}_B\big|_{AB} = \vec{V}_A\big|_{AB}$$



Hình 2-14

Chứng minh: Xét hai điểm A và B thuộc hình phẳng có vận tốc là $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$, chọn điểm A làm cực.

Ta có:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}$$

Chiếu lên phương AB:

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha + V_{AB} \cos\frac{\pi}{2}$$

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha$$

$$\vec{V}_B\big|_{AB} = \vec{V}_A\big|_{AB}$$

Qua định lý này, ta dễ dàng xác định vận tốc của một điểm khi xét được phương, vận tốc của nó, và xác định vận tốc của một điểm bất kỳ thuộc hình phẳng trong trường hợp vận tốc và đường đi của điểm đó vuông góc với nhau.

3. Tâm vận tốc tức thời - tâm quay tức thời

Định nghĩa:

Tại mỗi thời điểm khảo sát, trên vật rắn chuyển động song phẳng có một điểm có vận tốc bằng không được gọi là tâm vận tốc tức thời.

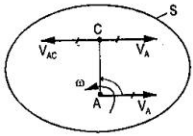
Gọi C là tâm vận tốc tức thời ($V_C = 0$), chọn C làm cực, ta có:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM}$$

Tại thời điểm đó vật có chuyển động quay quanh điểm C nên điểm C còn được gọi là *tâm quay tức thời.*

Tại thời điểm hình phẳng có vận tốc góc $\vec{\omega}$ khác 0 thì tồn tại duy nhất một tâm vận tốc tức thời.

Thực vậy, giả sử tại thời điểm khảo sát, biết vận tốc $\vec{V}_A$ của điểm A và vận tốc góc $\vec{\omega}$ của hình phẳng.



Hình 2-15

Trên đường thẳng vuông góc với $\vec{V}_A$ tại A, về phía nửa đường thẳng được chỉ bởi vectơ $\vec{V}_A$ sau khi quay $\vec{V}_A$ theo chiều của vận tốc góc $\vec{\omega}$ một góc $\frac{\pi}{2}$ ta lấy điểm C sao cho: $CA = \frac{V_A}{\omega}$

Chọn A làm cực, ta có: $\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{AC}$

$\vec{V}_{AC}$ vuông góc với AC tại C (tức cùng phương với $\vec{V}_A$); có chiều thuận với chiều quay của hình phẳng (chiều $\vec{\omega}$); $\vec{V}_{AC}$ ngược chiều $\vec{V}_A$ và có giá trị:

$$V_{CA} = \omega.CA = \omega.\frac{V_A}{\omega} = V_A$$

Vậy $\vec{V}_{CA}$ trực đối với $\vec{V}_A$, nghĩa là: $\vec{V}_{CA} = -\vec{V}_A$

Do đó: $\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{AC} = \vec{V}_A - \vec{V}_A = 0$

C là điểm duy nhất vì nếu tồn tại một điểm C_1 ($\vec{V}_{C_1} = 0$) tại thời điểm khảo sát, với C_1 khác C thì khi chọn C làm cực, ta có:

$$\vec{V}_{C_1} = \vec{V}_C + \vec{V}_{CC_1} = 0$$

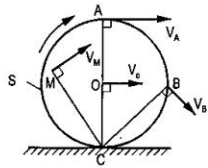
$$\vec{V}_C = 0 \Rightarrow \vec{V}_{CC_1} = 0$$

Với: $$\vec{V}_{CC_1} = \omega.CC_1 = 0$$

Mà: $\omega \neq 0$ nên $CC_1 = 0$ tức C_1 phải trùng với C.

**** Cách xác định tâm vận tốc tức thời***

Tại thời điểm khảo sát, trên mặt phẳng có chuyển động quay với vận tốc góc là $\vec{\omega}$, với điểm A (bất kỳ) có vận tốc là $\vec{V}_A$. Trong hình phẳng ta quay $\vec{V}_A$ theo chiều quay của $\vec{\omega}$ một góc bằng $\frac{\pi}{2}$, vectơ này xác định nửa đường thẳng được vẽ từ A, trên đó ta lấy một điểm C sao cho: $CA = \frac{V_A}{\omega}$



Hình 2-16

Với điểm C chính là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng

+ Sang thời điểm khác, vận tốc của điểm A thay đổi do đó tâm vận tốc tức thời của hình phẳng cũng thay đổi.

+ Tại thời điểm khảo sát hình phẳng có chuyển động tuyệt đối quay quanh tâm vận tốc tức thời.

Chọn C làm cực, ta có: $\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM}$, ($\vec{V}_C = 0$).

Tức là vận tốc của điểm M bất kỳ thuộc hình phẳng bằng vận tốc của M trong chuyển động của hình phẳng quay quanh tâm vận tốc tức thời, do đó C còn được gọi là *tâm quay tức thời*.

+ Trong trường hợp không tồn tại tâm vận tốc tức thời, có nghĩa là $\vec{\omega} = 0$ khi đó:

$$CA = \frac{V_A}{\omega} \to \infty$$

Và: $$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{V}_{OM} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overline{OM} \Rightarrow \vec{V}_M = \vec{V}_0$$

Mọi điểm thuộc hình phẳng có vận tốc bằng nhau, tại thời điểm này vật chuyển động tịnh tiến.

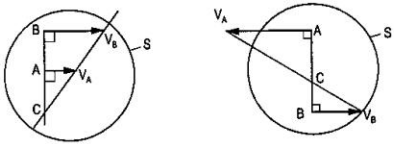
Vậy khi ở thời điểm nào đó không tồn tại tâm vận tốc tức thời hay tâm vận tốc tức thời ở vô cực, lúc đó tâm quay của hình phẳng ở vô cực và chuyển động của hình phẳng tại thời điểm này được gọi là *tức thời chuyển động tịnh tiến*.

Một số quy tắc xác định tâm vận tốc tức thời

+ Biết điểm thuộc hình phẳng có vận tốc bằng không, điểm đó là tâm vận tốc tức thời.

+ Biết vận tốc của điểm A($\vec{V}_A$), phương vận tốc của điểm B($\vec{V}_B$). Từ A và B kẻ hai đường vuông góc với phương của $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$, giao điểm hai đường này là tâm vận tốc tức thời C.

+ Biết vận tốc của hai điểm và phương, đường vuông góc với vận tốc của hai điểm kẻ từ hai điểm trùng nhau (hình 2-17a và b).



a) $\omega = \dfrac{V_A - V_B}{AB}$ b) $\omega = \dfrac{V_A + V_B}{AB}$

Hình 2-17

+ Trong trường hợp hai đường vuông góc với $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$ kẻ từ A và B song song nhau thì tâm vận tốc tức thời ở vô cực lúc đó vận tốc góc của hình phẳng bằng 0.

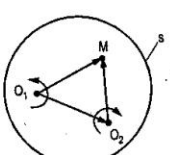
$$\Rightarrow \vec{V}_M = \vec{V}_A = \vec{V}_B$$

Vật tức thời chuyển động tịnh tiến.

4. Ảnh hưởng của việc chọn cực đối với chuyển động quay của hình phẳng

Xét chuyển động của hình phẳng S.

Chọn O_1 làm cực, ta có:



$$\vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M} \qquad (1)$$

$$\vec{V}_{O_2} = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_2} \qquad (2)$$

Chọn O_2 làm cực, ta có:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{O_2} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M} \qquad (3)$$

Thế (2) vào (3):

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_2} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M} \qquad (4)$$

So sánh (1) và (4):

$$\vec{\omega}_1 \wedge \left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O_2}\right) = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_2M}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_2M} = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M} \Rightarrow \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$$

Như vậy, chuyển động quay của hình phẳng đối với mọi điểm cực được chọn đều giống nhau, hay không phụ thuộc vào việc chọn cực.

$$\omega_{O_1} = \omega_{O_2} = \cdots = \omega_O$$

5. Đường lăn - đường căn cứ

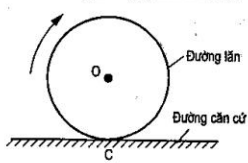
Đường lăn là quỹ đạo của điểm C (tâm vận tốc tức thời) trên hình phẳng. Đường căn cứ là quỹ đạo của điểm C nằm trong hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1$.

Đường lăn được gọi là tâm tích động, đường căn cứ được gọi là tâm tích cố định.

Tại mỗi thời điểm đều có một điểm tiếp xúc giữa đường lăn và đường căn cứ, điểm đó chính là tâm vận tốc tức thời C. Vì vậy *đường lăn thì lăn không trượt trên đường căn cứ.*

Bánh xe O lăn không trượt trên một đường thẳng cố định. Điểm tiếp xúc giữa vành bánh xe với đường thẳng là tâm vận tốc tức thời C ($\vec{V}_C = 0$).

Đường lăn hay tâm tích động là chu vi của bánh xe O, còn đường căn cứ hay tâm tích cố định là đường thẳng (hình 2-18).



Hình 2-18

III. Gia tốc của điểm thuộc vật

Theo định nghĩa ta có:

$$\vec{W}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt}$$

trong đó: $\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{V}_{OM} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Như vậy: $\vec{W}_M = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) = \frac{d\vec{V}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$= \vec{W}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) = \vec{W}_O + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} - \omega^2.\vec{r}$$

trong đó:

$\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} = \vec{W}^{\tau}_{OM}$ - gia tốc tiếp của điểm M quay quanh cực O;

$-\omega^2\vec{r} = \vec{W}^{n}_{OM}$ - gia tốc pháp của điểm M quay quanh cực O.

Như vậy: $\vec{W}_M = \vec{W}_O + \vec{W}^{\tau}_{OM} + \vec{W}^{n}_{OM}$

Gia tốc của điểm M bất kỳ trên hình phẳng bằng tổng hình học gia tốc của cực O với gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của điểm M quay quanh cực O.

**** Tâm gia tốc tức thời***

Tâm gia tốc tức thời là một điểm thuộc hình phẳng mà tại thời điểm khảo sát có gia tốc bằng không.

Cũng như tâm vận tốc tức thời, tại mỗi thời điểm chỉ tồn tại duy nhất một tâm gia tốc tức thời, nếu như vận tốc góc và gia tốc góc hình phẳng không đồng thời triệt tiêu.

Khi hình phẳng có tâm gia tốc tức thời thì sự phân bố gia tốc cụm các điểm thuộc hình phẳng giống như sự phân bổ gia tốc của các điểm khi hình phẳng quay quanh tâm gia tốc tức thời.

Tâm gia tốc tức thời của hình phẳng nói chung không trùng với tâm vận tốc tức thời vì $\vec{V}_C = 0$, nhưng V_C không là hằng số thì $W_C \neq 0$ (nếu gọi tâm gia tốc tức thời là P thì nói chung P không trùng với tâm vận tốc tức thời C).

Chương 4

TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG
TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

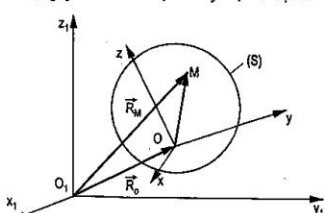
§1. CHUYỂN ĐỘNG PHỨC HỢP CỦA ĐIỂM

I. Đặt bài toán

Một đoàn tàu đang chạy, một người đang đi trên tàu, đứng dưới đường quan sát chuyển động của người đi trên tàu thì chuyển động của người trên tàu là chuyển động phức hợp, xem người như một chất điểm thì đó là chuyển động phức hợp của điểm.

Một con kiến bò trên một trái banh đang lăn trên sân cỏ, thì chuyển động của con kiến so với sân cỏ (hệ quy chiếu) là chuyển động phức hợp của điểm (con kiến).

Điểm chuyển động phức hợp (người hay con kiến) được xác định thông qua các hệ quy chiếu: Hệ quy chiếu gắn với đoàn tàu, trái banh được gọi là hệ quy chiếu di động hay hệ động; Hệ quy chiếu gắn với đường tàu, sân cỏ được gọi là hệ quy chiếu cố định hay hệ cố định.



Hình 2-19

M - động điểm

Oxyz - hệ động

$O_1x_1y_1z_1$ - hệ cố định

Điểm M chuyển động trong hệ động Oxyz và cùng hệ động chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$.

II. Định nghĩa các chuyển động

- Chuyển động của điểm M trong hệ động Oxyz được gọi là chuyển động tương đối. Có các yếu tố động học:

+ Vận tốc tương đối, ký hiệu là $\vec{V}_t$.

+ Gia tốc tương đối, ký hiệu là $\vec{W}_t$.

- Chuyển động của điểm M trong hệ cố định $O_1x_1y_1z_1$ được gọi là chuyển động tuyệt đối. Có các yếu tố động học:

+ Vận tốc tuyệt đối, ký hiệu là $\vec{V}_T$.

+ Gia tốc tuyệt đối, ký hiệu là $\vec{W}_T$.

- Chuyển động của điểm M^* trùng điểm M và thuộc hệ động, chuyển động so với hệ cố định được gọi là chuyển động kéo theo. Có các yếu tố động học:

+ Vận tốc kéo theo, ký hiệu là $\vec{V}_k$.

+ Gia tốc kéo theo, ký hiệu là $\vec{W}_k$.

§2. HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ chỉ phương của hệ động Oxyz.

Đặt: $\vec{R}_M = \overrightarrow{O_1M}$; $\vec{R}_O = \overrightarrow{O_1O}$; $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

Ta có: $\vec{R}_M = \vec{R}_O + \vec{r}$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Với x, y, z là tọa độ của M trong hệ động.

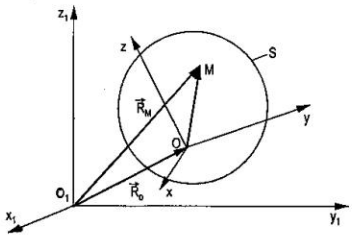
I. Định lý hợp vận tốc

1. Định lý

Vận tốc tuyệt đối của điểm chuyển động phức hợp bằng tổng hình học vận tốc tương đối và vận tốc kéo theo của nó.

$$\vec{V}_T = \vec{V}_t + \vec{V}_k$$

2. Chứng minh



Hình 2-20

Ta có: $\vec{V}_T = \vec{V}_M = \dfrac{d\vec{R}_M}{dt} = \dfrac{d\vec{R}_O}{dt} + \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\frac{d\vec{R}_O}{dt} = \vec{V}_O$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = V_{t_x}\vec{i} + V_{t_y}\vec{j} + V_{t_z}\vec{k} = \vec{V}_t$$

$$x.\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = x(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + y(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + z(\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$= \vec{\omega} \wedge (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

trong đó:

$\vec{\omega}$ - veetơ vận tốc góc của hệ động Oxyz;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - eác vectơ chỉ phương của các trục hệ động.

Như vậy: $\vec{V}_T = \vec{V}_t + \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\vec{V}_T = \vec{V}_t + \vec{V}_k$$

trong đó: $\vec{V}_k = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{V}_O + \vec{V}_{OM^*}$

với: $\vec{V}_O$ - vận tốc của gốc O của hệ động;

$\vec{V}_{OM^*} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ - vận tốc của trùng điểm M^* quay quanh gốc O của hệ động.

Lưu ý:

- Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến thì $\vec{\omega} = 0$, lúc đó: $\vec{V}_k = \vec{V}_O$.

- Nếu hệ động chuyển quay quanh một điểm cố định O hay quanh một trục cố định đi qua điểm cố định O, lúc đó:

$$\vec{V}_O = 0 \Rightarrow \vec{V}_k = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

II. Định lý hợp gia tốc

1. Định lý

Gia tốc tuyệt đối của điểm chuyển động phức hợp bằng tổng hình học gia tốc tương đối, gia tốc kéo theo và gia tốc Côriôlíc của nó.

$$\vec{W}_T = \vec{W}_t + \vec{W}_k + \vec{W}_c$$

$\vec{W}_c$ được gọi là gia tốc Coriôlic: $\vec{W}_c = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_t)$

2. Chứng minh

Ta có: $$\vec{W}_T = \vec{W}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d^2\vec{R}_M}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

mà: $$\frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} = \vec{W}_0$$

và: $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} + 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right) + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$$

$$* \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = W_{t_x}\vec{i} + W_{t_y}\vec{j} + W_{t_z}\vec{k} = \vec{W}_t$$

Còn $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i}}{dt} = (\vec{\varepsilon} \wedge \vec{i} - \omega^2\vec{i})$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}+z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}=x(\vec{\varepsilon}\wedge\vec{i}+\omega^2\vec{i})+y(\varepsilon\wedge\vec{j}-\omega^2\vec{j})+z(\vec{\varepsilon}\wedge\vec{k}-\omega^2\vec{k})$$

$$=\vec{\varepsilon}\wedge(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})-\omega^2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=\vec{\varepsilon}\wedge\vec{r}-\omega^2\vec{r}$$

với: * $\vec{W}_O+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{r}-\omega^2\vec{r}=\vec{W}_k$

$$*2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}.\frac{d\vec{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)=2\vec{\omega}\wedge(V_{t_x}\vec{i}+V_{t_y}\vec{j}+V_{t_z}\vec{k})$$

$$=2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_t=\vec{W}_C$$

Như vậy: $\vec{W}_T=\vec{W}_t+\vec{W}_k+\vec{W}_c$

Trong đó $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ là vectơ vận tốc góc và vectơ gia tốc góc của hệ động Oxyz. Còn $\vec{\varepsilon}\wedge\vec{r}-\omega^2.\vec{r}$ là các thành phần gia tốc của trùng điểm M^* trên hệ động. Chuyển động đối với hệ cố định $O_1x_1y_1z_1$ đó chính là các thành phần của gia tốc theo $\vec{W}_k$.

$$\vec{W}_k=\vec{W}_O+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{r}-\omega^2.\vec{r}=\vec{W}_O+\vec{W}^{\tau}_{OM^*}+\vec{W}^{n}_{OM^*}$$

Riêng thành phần $2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_t$ có thứ nguyên của gia tốc, và là đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên của vận tốc tương đối trong chuyển động kéo theo của hệ động được gọi là gia tốc Côriôlíc $\vec{W}_c$:

$$\vec{W}_c=2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_t$$

* Xác định gia tốc của điểm chuyển động phức hợp

Sử dụng công thức:

$$\vec{W}_T=\vec{W}_t+\vec{W}_k+\vec{W}_c$$

a) Xác định gia tốc tương đối $\vec{W}_t$

$\vec{W}_t$ được xác định dựa trên chuyển động cụ thể của điểm trong hệ động Oxyz mà cơ sở của nó đã được khảo sát trong chương chuyển động của điểm.

b) Xác định gia tốc kéo theo $\vec{W}_k$

Dựa trên biểu thức:

$$\vec{W}_k=\vec{W}_0+\vec{W}^{\tau}_{OM^*}+\vec{W}^{n}_{OM^*}$$

Điểm O là góc của hệ động. $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ là vận tốc, gia tốc góc của hệ động.

Nếu hệ động có chuyển động tịnh tiến:

Lúc đó: $\vec{\varepsilon} = 0; \vec{\omega} = 0$ nên $\vec{W}^{\tau}_{OM^*} = \vec{\varepsilon} \wedge \overline{OM} = 0$

$$\text{và:} \quad \vec{W}^{n}_{OM^*} = -\omega^2.\overline{OM} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{W}_k = \vec{W}_O$$

Nếu hệ động có chuyển động quay quanh một điểm cố định hay trục cố định, ta chọn gốc O của hệ động nằm trên điểm hay trục đó.

Lúc đó gia tốc của điểm O: $\vec{W}_O = 0$

$$\Rightarrow \vec{W}_k = \vec{W}^{\tau}_{OM^*} + \vec{W}^{n}_{OM^*}$$

trong đó: $\vec{W}^{\tau}_{OM^*} = \vec{\varepsilon} \wedge \overline{OM}$

Về trị số: $\vec{W}^{\tau}_{OM^*} = OM.\varepsilon$

Về phương: $\vec{W}^{\tau}_{OM^*} \perp \overline{OM}$

Về chiều: Quay $\overline{OM}$ theo chiều quay của $\vec{\varepsilon}$ và quanh $\vec{\varepsilon}$ một góc $\frac{\pi}{2} \rightarrow$ chiều của $\vec{W}^{\tau}_{OM^*}$.

$$\vec{W}^{n}_{OM^*} = -\omega^2.OM$$

Về trị số: $W^{n}_{OM^*} = \omega^2.OM$

Có phương chiều: Nằm dọc theo OM và hướng từ M đến O.

c) Xác định gia tốc Côriôlíc $\vec{W}_c$

Dựa trên biểu thức: $\vec{W}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_t$

Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến thì $\vec{\omega} = 0$, lúc đó: $\vec{W}_c = 0$

Ngoài ra gia tốc $\vec{W}_c$ được xác định như sau:

- Về trị số: $W_c = 2\omega.V_t.\sin(\vec{\omega}, \vec{V}_t)$

- Về phương: $\vec{W}_c \perp$ mặt phẳng $(\vec{\omega}, \vec{V}_t)$

- Về chiều:

+ Trường hợp $\vec{V}_t \perp \vec{\omega}$: Quay $\vec{V}_t$ trong mặt phẳng chứa $(\vec{\omega}, \vec{V}_t)$ theo chiều quay của $\vec{\omega}$ một góc bằng $\frac{\pi}{2} \rightarrow$ chiều $\vec{W}_c$.

+ Trường hợp $\vec{V}_t$ không vuông góc với $\vec{\omega}$: Quay hình chiếu của $\vec{V}_t$ trên mặt phẳng vuông góc với $\vec{\omega}$, theo chiều quay của $\vec{\omega}$ một góc bằng $\frac{\pi}{2}$ thì ta nhận được chiều của $\vec{W}_c$.

+ Trường hợp $\vec{V}_t$ song song với $\vec{\omega}$ thì $\sin(\vec{\omega}, \vec{V}_t) = 0$, lúc này: $\vec{W}_c = 0$

d) Xác định gia tốc tuyệt đối của điểm M: $\vec{W}_T$

Sau khi xác định các gia tốc thành phần $\vec{W}_t$, $\vec{W}_k$, $\vec{W}_c$, để xác định gia tốc tuyệt đối $\vec{W}_T$ ta có thể sử dụng phương pháp giải tích:

Chiếu biểu thức hình học: $\vec{W}_T = \vec{W}_t + \vec{W}_k + \vec{W}_c$ lên các trục của hệ tọa độ Đềcác.

trong đó: $W_{T_x}; W_{T_y}; W_{T_z}$ - hình chiếu của $\vec{W}_T$.

Trị số của $\vec{W}_T$ được xác định:

$$W_T = \sqrt{W_{T_x}^2 + W_{T_y}^2 + W_{T_z}^2}$$

Phương chiều của $\vec{W}_T$ được xác định bằng các cosin chỉ hướng:

Gọi α, β, γ góc của $\vec{W}_T$ hợp với các phương O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{W_{T_x}}{W_T}; \quad \cos\beta = \frac{W_{T_y}}{W_T}; \quad \cos\gamma = \frac{W_{T_z}}{W_T}$$

THÍ DỤ

Thí dụ II.1

Cho chất điểm chuyển động theo phương trình:

$$x = a\sin\omega t$$

$$y = -a\cos\omega t$$

$$z = bt$$

Hãy xác định vận tốc và gia tốc của chất điểm.

Bài giải:

Theo phương pháp tọa độ Đềcác

1. Vận tốc của chất điểm, ta có:

$$V_x = \dot{x} = a\omega.\cos\omega t$$

$$V_y = \dot{y} = a\omega.\sin\omega t$$

$$V_z = \dot{z} = b$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{a^2\omega^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + b^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

2. Gia tốc của chất điểm.

$$W_x = \ddot{x} = -a\omega^2\sin\omega t$$

$$W_y = \ddot{y} = a\omega^2\cos\omega t$$

$$W_z = \ddot{z} = 0$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{a^2\omega^4} = a\omega^2$$

Ta nhận thấy W_x ngược dấu với x và W_y ngược dấu với y nên $\vec{W}$ là gia tốc hướng tâm.

Đáp số: 1. $V = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$.

2. $W = a\omega^2$.

Thí dụ II.2

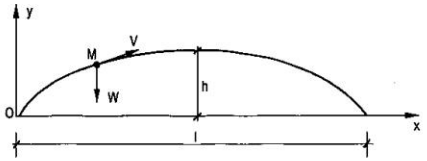
Viên đạn M chuyển động với vận tốc ban đầu là $\vec{V}_0$ hợp với phương nằm ngang Ox một góc α. Bỏ qua sức cản của không khí, hãy xác định:

- Phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo của viên đạn.

- Độ cao h và tầm xa l mà viên đạn đạt được.

- Bán kính cong của quỹ đạo tại thời điểm ban đầu (ρ_0) và tại thời điểm viên đạn đạt vị trí cao nhất.

Bài giải:



1. Phương trình chuyển động - quỹ đạo của viên đạn

a) Phương trình chuyển động của viên đạn

Viên đạn chuyển động rơi tự do trong mặt phẳng Oxy, gia tốc của viên đạn:

$$\vec{W} = \vec{g} \Rightarrow W_x = 0;\ W_y = -g$$

Ta có: $W_x = \dfrac{dV_x}{dt} \Rightarrow V_x = \int W_x dt = \int 0.dt = C_1$

Tại: $t = 0 \Rightarrow V_x^{(0)} = V_0 \cos\alpha \Rightarrow C_1 = V_0 \cos\alpha$

$\Rightarrow V_x = V_0 \cos\alpha$

Mà: $V_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int V_x dt = \int V_0 \cos\alpha.dt$

$x = V_0 \cos\alpha.t + C_2$

Tại: $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Vậy: $x = V_0 \cos\alpha.t$

Ta có: $W_y = \dfrac{dV_y}{dt} \Rightarrow V_y = \int W_y dt = \int -g dt = -gt + C_3$

Tại: $t = 0 \Rightarrow V_y = V_0 \sin\alpha \Rightarrow C_3 = V_0 \sin\alpha$

$V_y = -gt + V_0 \sin\alpha$

Mà: $V_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = \int V_y dt = \int(-gt + V_0 \sin\alpha)dt$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha.t + C_4$$

Tại: $t = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C_4 = 0$.

Vậy phương trình chuyển động của viên đạn:

$$x = V_0 \cos\alpha .t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha.t$$

b) Quỹ đạo của viên đạn

Khử t trong phương trình chuyển động, ta có:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} + V_0 \sin\alpha.\frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + tg\alpha.x$$

Phương trình trên là phương trình quỹ đạo của viên đạn. Vậy quỹ đạo là đường parabol.

2. Xác định độ cao h và tầm xa l

a) Độ cao h

Ở độ cao h, vận tốc của viên đạn nằm theo phương ngang.

Do đó: $V_y = 0$

Hay: $-gt + V_0 \sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow t_h = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

Vậy: $h = -\frac{1}{2}g\frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + V_0 \sin\alpha.\frac{V_0 \sin\alpha}{g}$

$$h = \frac{1}{2g} V_0^2 \sin^2 \alpha$$

b) Tầm xa l

Ở vị trí chạm đất, viên đạn đạt tầm xa nhất là l lúc đó: y = 0.

Hay: $$-\frac{1}{2} gt^2 + V_0 \sin\alpha . t = 0$$

$$\left(V_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} gt\right) t = 0$$

$$\Rightarrow t_0 = 0$$

$$t_1 = 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

Vậy: $$l = V_0 \cos\alpha . 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$l = \frac{2}{g} V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

3. *Bán kính cong quỹ đạo tại thời điểm ban đầu là (ρ_0) và ở vị trí cao nhất (ρ_h)*

a) Bán kính cong tại thời điểm ban đầu: ρ_0

Ta có: $$W^n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{W^n}$$

$$\rho_0 = \frac{V_0^2}{W_0^n} = \frac{V_0^2}{W \cos\alpha}$$

$$W = g \Rightarrow \rho_0 = \frac{V_0^2}{g.\cos\alpha}$$

b) Bán kính cong ở vị trí cao nhất

$$\rho_h = \frac{V_h^2}{W_h^n}$$

$$V_h = V_x = V_0 \cos\alpha \; ; \; W_h^n = W = g$$

$$\Rightarrow \rho_h = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

Đáp số: 1) $x = V_0 \cos\alpha.t$; $Y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha.t$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2 \sin^2 \alpha}x^2 + tg\alpha.x$$

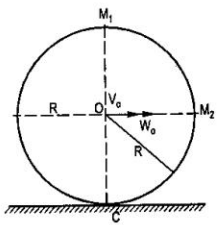
2) $h = \frac{1}{2g}V_0^2 \sin^2 \alpha$; $l = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$

3) $\rho_0 = \frac{V_0^2}{g.\cos\alpha}$; $\rho_h = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

Thí dụ II.3

Bánh xe lăn không trượt trên đường thẳng nằm ngang: Cho biết bánh xe có bán kính là R, khi chuyển động tâm O của bánh xe có vận tốc là $\vec{V}_0$ và gia tốc $\vec{W}_0$.

Hãy xác định vận tốc và gia tốc của điểm M_1, M_2.

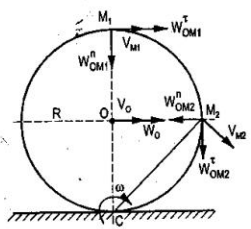


Bài giải:

Bánh xe chuyển động song phẳng, tâm vận tốc tức thời là C.

1. Xác định vận tốc và gia tốc của M_1

a) Vận tốc của điểm M_1: $\vec{V}_{M_1}$



Bánh xe chuyển động song phẳng, tâm vận tốc tức thời là C.

Vận tốc góc của bánh xe:

$$\omega = \frac{V_0}{CO} = \frac{V_0}{R}$$

$\overline{\omega}$ có chiều âm (-).

Ta có: $V_{M_1} = \omega.CM_1 = \frac{V_0}{R}.2R = 2V_0$

$$V_{M_1} = 2V_0$$

$\vec{V}_{M_1}$ có phương vuông góc với CM_1 cùng chiều với $\vec{V}_0$.

b) Gia tốc của điểm M_1: $\vec{W}_{M_1}$.

Chọn O làm cực, ta có:

$$\vec{W}_{M_1} = \vec{W}_0 + \vec{W}^{\tau}_{OM_1} + \vec{W}^{n}_{OM_1}$$

trong đó: $W^{\tau}_{OM_1} = \varepsilon.OM_1$.

Với: $\omega = \dfrac{V_0}{R}$ mà $R = CO = const.$

Do đó: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{R}\dfrac{dV_0}{dt} = \dfrac{1}{R}.W_0$

$$\Rightarrow W^{\tau}_{OM_1} = \frac{W_0}{R}.R = W_0$$

$\vec{W}^{\tau}_{OM_1}$ có phương vuông góc với OM_1, có chiều được xác định qua chiều quay của $\vec{\varepsilon}$.

$$W^{n}_{OM_1} = \omega^2.OM_1 = \frac{V_0^2}{R^2}.R$$

$$W^{n}_{OM_1} = \frac{V_0^2}{R}$$

$\vec{W}^{n}_{OM_1}$ hướng từ M_1 đến O.

Như vậy: $W_{M_1} = \sqrt{\left(W_0 + W^{n}_{OM_1}\right)^2 + \left(W^{n}_{OM_1}\right)^2}$

$$W_{M_1} = \sqrt{4W_0^2 + \frac{V_0^4}{R^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{4R^2W_0^2 + V_0^4}$$

Gọi α là góc hợp bởi $\vec{W}_{M_1}$ với phương nằm ngang, ta có:

$$tg\alpha = \frac{2W_0}{\frac{1}{R}\sqrt{4R^2W_0^2 + V_0^4}}$$

$$tg\alpha = \frac{2RW_0}{\sqrt{4R^2W_0^2 + V_0^4}}$$

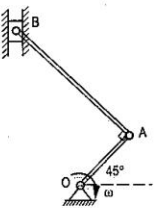
2. *Xác định vận tốc và gia tốc của M_2:* $\vec{V}_{M_2}; \vec{W}_{M_2}$

(Ta tiến hành các bước giải như đối với điểm M_1)

Đáp số: 1) $V_{M_1} = 2V_0$

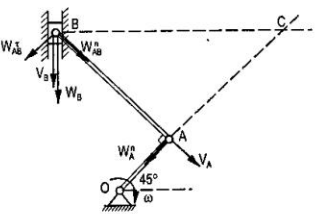
2) $W_{M_1} = \frac{1}{R}\sqrt{4R^2W_0^2 + V_0^4}$

Thí dụ II.4



Cơ cấu tay quay - con trượt: Tay quay OA có chiều dài là r, quay quanh trục O với vận tốc góc là ω, thanh AB có chiều dài là l, chuyển động song phẳng. Con trượt B chuyển động theo phương thẳng đứng. Hãy xác định vận tốc và gia tốc con trượt B ($\vec{V}_B, \vec{W}_B$)?

Bài giải:



Xét chuyển động của thanh AB.

Thanh AB chuyển động song phẳng, chọn điểm A làm cực.

Ta có: $V_A = r.\omega$

Và: $\vec{W}_A = \vec{W}_A^{\tau} + \vec{W}_A^{n}$

Tay quay OA quay đều : $\omega = const \Rightarrow \varepsilon = 0$

Do đó: $W_A^{\tau} = 0$

Và: $W_A^n = r.\omega^2$ ($\vec{W}_A^n$ hướng từ A đến O)

Vậy: $\vec{W}_A = \vec{W}_A^n$

1. Vận tốc của điểm B: $\vec{V}_B$

$\vec{V}_B$ có phương thẳng đứng, kẻ đường vuông góc với phương của $\vec{V}_B$ và $\vec{V}_A$ từ B và A, hai đường này cắt nhau tại C (C là tâm vận tốc tức thời). Điểm A quay quanh C ngược chiều kim đồng hồ nên điểm B cũng quay quanh C ngược chiều kim đồng hồ.

Vận tốc góc của thanh AB: $\vec{\omega}_{AB}$.

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{CA} = \frac{r.\omega}{l} = \frac{r}{l}.\omega$$

Vậy: $$V_B = \omega_{AB}.l.\sqrt{2}$$

$$V_B = r.\omega\sqrt{2}$$

2. Gia tốc của điểm B: $\vec{W}_B$

Ta có: $$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}^{\tau}_{AB} + \vec{W}^{n}_{AB} \quad (A)$$

trong đó: $$W_A = W_A{}^n = r.\omega^2$$

$$W^{\tau}_{AB} = \varepsilon_{AB}.AB$$

$$W^{n}_{AB} = \omega^2_{AB}.AB = \frac{r^2}{l^2}\omega^2.l = \frac{r^2}{l}\omega^2$$

- Chiếu biểu thức (A) lên phương AB, ta có:

$$W_B \cos 45° = W^n_{AB}$$

$$W_B\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2}{l}\omega^2 \Rightarrow W_B = \frac{r^2}{l}\omega^2\sqrt{2}$$

- Chiếu biểu thức (A) lên phương nằm ngang (hướng từ trái sang phải).

$$0 = -W_A\cos 45° + W^n_{AB}\cos 45° - W^{\tau}_{AB}\cos 45°$$

$$\Rightarrow W^{\tau}_{AB} = W_A - W^n_{AB} = r.\omega^2 - \frac{r^2}{l}\omega^2 = r\left(1-\frac{r}{l}\right)\omega^2$$

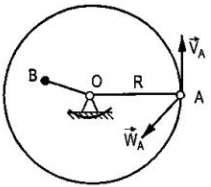
$$\Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{W^{\tau}_{AB}}{AB} = \frac{r}{l}\left(1-\frac{r}{l}\right)\omega^2$$

Đáp số: 1) $V_B = r.\omega\sqrt{2}$.

2) $W_B = \frac{r^2}{l}\omega^2\sqrt{2}$.

Thí dụ II.5

Một vật quay chậm dần quanh trục cố định. Ở thời điểm khảo sát, điểm A cách trục quay khoảng R = 0,5m có vận tốc v = 2m/s và gia tốc (toàn phần) là $8\sqrt{3}$ m/s^2.

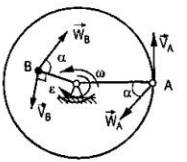


Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của vật.

Tìm vận tốc và gia tốc điểm B cách trục quay một khoảng r = 0,2m.

Bài giải:

1. Vận tốc góc và gia tốc góc của vật



- Vận tốc góc của vật:

$$\omega = \frac{V_A}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ rad/s}$$

- Gia tốc góc của vật:

$$W_A^\tau = \sqrt{W^2 - W_A{}^n} = \sqrt{W^2 - \frac{V_A^2}{R}} = \sqrt{192 - 8} = 8\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{W_A^\tau}{R} = \frac{8\sqrt{2}}{0,5} = 16\sqrt{2} \text{ rad/s}^2$$

2. Vận tốc và gia tốc điểm B

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{r}{R} = \frac{0,2}{0,5} = \frac{2}{5}. \Rightarrow V_B = \frac{2}{5}V_A = 0,8 \text{ m/s}$$

$$\frac{W_B}{W_A} = \frac{r}{R} = \frac{0,2}{0,5} = \frac{2}{5} \Rightarrow W_B = \frac{2}{5}W_A = \frac{16\sqrt{3}}{5} \text{ m/s}^2$$

Đáp số: 1) $\omega = 4$ rad/s ; $\varepsilon = 16\sqrt{2}$ rad/s^2;

2) $V_B = 0,8$ m/s ; $W_B = \frac{16\sqrt{3}}{5}$ m/s^2.

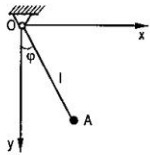
Thí dụ II.6

Quả cầu A treo ở đầu sợi dây dài l = 398 mm, dao động trong mặt phẳng thẳng đứng theo luật: $\varphi = \frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi t}{2}$. Tìm:

1. Thời điểm đầu tiên từ khi bắt đầu chuyển động để gia tốc pháp của quả cầu bằng không.

2. Thời điểm đầu tiên để gia tốc tiếp bằng không.

3. Gia tốc toàn phần lúc t = 2s.



Bài giải:

1. Thời điểm đầu tiên để gia tốc pháp bằng không

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\pi^2}{16}\cos\frac{\pi}{2}t \Rightarrow \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{-\pi^3}{32}\sin\frac{\pi}{2}t$$

Gia tốc pháp: $W^n = l.\omega^2 = 398.\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{2}t$

Khi: $W^n = 0 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{2}t = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{2}t = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, 1, 2,...$$

Thời điểm đầu tiên thì $k = 0 \Rightarrow t = 1s$

2. Thời điểm đầu tiên để gia tốc tiếp bằng không

Gia tốc tiếp: $W^\tau = l.\varepsilon = 398.\left(\frac{-\pi^3}{32}\right)\sin\frac{\pi}{2}t$

Khi $W^\tau = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}t = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t = k\pi,\ k = 1, 2, 3...$$

Thời điểm đầu tiên ứng với: $k = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}t = \pi \Rightarrow t = 2s$

3. Gia tốc toàn phần lúc t = 2s

Khi $W^\tau = 0$ và $W^n = 398.\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{2}.2 \Rightarrow W^n = 150\ cm/s^2$

Gia tốc toàn phần: $W = W^n = 150\ cm/s^2$

Đáp số: 1) t = 1s.

2) t = 2s.

3) $W = 150\ cm/s^2$.

BÀI TẬP

Bài tập II-1

Cho phương trình chuyển động của điểm M:

$$\begin{cases} x = 10\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right) \\ y = 10\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right) \end{cases}$$

(x, y, z tính bằng cm, t tính bằng s):

Tìm quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm M.

Bài tập II-2

Một xe chuyển động trên đường tròn bán kính R = 400m với vận tốc đầu V_O =18km/h. Xe chuyển động nhanh dần đều và 1 phút sau đạt được vận tốc 72 km/h. Tìm gia tốc tiếp, gia tốc pháp, gia tốc toàn phần của xe và đoạn đường mà xe đi được sau 20s kể từ lúc bắt đầu chuyển động?.

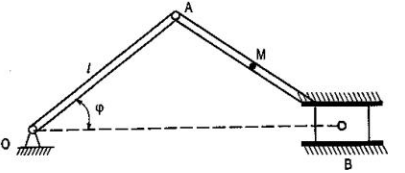
Bài tập II-3

Cho cơ cấu tay quay thanh truyền OAB tay quay OA = l = 10cm quay quanh O với quy luật φ = 10πt làm cho con chạy B chuyển động theo máng trượt nhờ thanh truyền AB = l. M trung điểm của AB.

a) Lập phương trình chuyển động của B và của M.

b) Xác định quỹ đạo của M.

c) Tìm vận tốc của B và M.

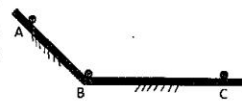


Bài tập II-4

Hai điểm cùng bắt đầu chuyển động từ một điểm trên vòng tròn bán kính R = 16m theo hai chiều ngược nhau. Điểm thứ nhất chuyển động

theo luật $S = Wt^2 + 2\sin\frac{\pi}{2}t$, trong đó W = const còn điểm thứ 2 có gia tốc pháp $W^n = 4t^2$. Khi hai điểm gặp nhau thì gia tốc của điểm thứ 2 là $4\sqrt{5}$ m/s^2. Tìm W và thời điểm gặp nhau.

Bài tập II-5



Một điểm chuyển động nhanh dần đều trên mặt nghiêng AB sau đó chậm dần đều trên mặt ngang và cuối cùng dừng lại ở C. Biết AB = S_1, BC = S_2 và thời gian điểm chuyển động từ A đến C là t. Tìm trị số các gia tốc $\vec{W}_1$ và $\vec{W}_2$ khi điểm chuyển động trên AB và BC. Lúc đầu ở A vận tốc của điểm bằng 0.

Bài tập II-6

Một điểm chuyển động trong mặt phẳng xOy, gia tốc của nó có hình chiếu: $W_x = 4$ cm/s^2, $W_y = 2t$ cm/s^2. Tìm phương trình chuyển động của điểm. Cho biết lúc t = 2s, vận tốc của điểm $v = 12\sqrt{2}$ cm/s và làm với các trục Ox và Oy những góc bằng nhau.

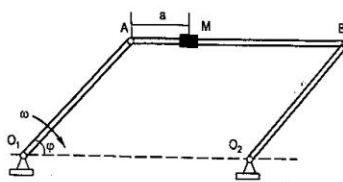
Bài tập II-7

Vật quay quanh trục cố định theo phương trình: $\varphi = 1{,}5t^2$.

1. Tính chất chuyển động ở các thời điểm $t_1 = 1$s và $t_2 = 2$s.

2. Vận tốc và gia tốc của điểm cách trục quay một khoảng r = 0,2m ở những thời điểm trên.

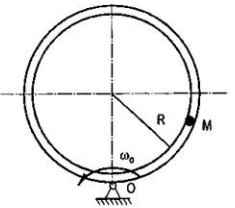
Bài tập II-8



Một cơ cấu 4 khâu có dạng hình bình hành. Tay quay O_1A dài 0,5m quay với vận tốc góc ω = 2t rad/s. Dọc theo AB con trượt M chuyển động theo luật: a = AM = $5t^2$ (a : m; t : s). Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của con trượt lúc t = 2s. Cho biết lúc đó φ = 30°.

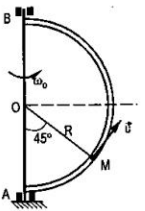
Bài tập II-9

Vành tròn bán kính R = 20cm quay trong mặt phẳng của nó quanh trục O với vận tốc góc không đổi $\omega_o = 3$ rad/s. Điểm M chuyển động trên vành theo luật s = cung OM = $5\pi t$ cm.Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M lúc t = 2s.



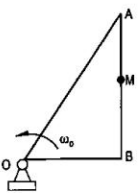
Bài tập II-10

Nửa đĩa tròn bán kính R = 40cm quay đều với vận tốc góc $\omega_o = 0,5$ rad/s quanh đường kính AB. Điểm M chuyển động theo vành đĩa với vận tốc không đổi u = 10 cm/s. Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M lúc góc AOM = 45°.



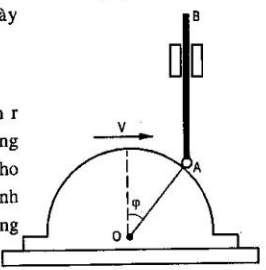
Bài tập II-11

Tam giác vuông OAB chuyển động trong mặt phẳng hình vẽ quay quanh O với vận tốc góc không đổi $\omega_o = 1$ rad/s. Điểm M chuyển động từ A đến B với gia tốc không đổi bằng 2cm/s^2, vận tốc đầu bằng 0. Tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của M lúc t = 0,5s, biết lúc này OB = BM = 4cm.

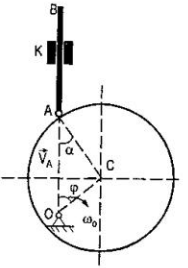


Bài tập II-12

Vấu có dạng nửa hình tròn bán kính r chuyển động phẳng tịnh tiến ngang sang phải với vận tốc không đổi V làm cho thanh tựa lên nó phải chạy dọc theo rãnh thẳng đứng. Tìm gia tốc của thanh thẳng đứng ứng với lúc φ = 30°.

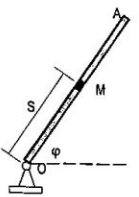


Bài tập II-13



Cam là một đĩa tròn bán kính R, tâm C quay đều quanh trục cố định vuông góc mặt phẳng hình vẽ và đi qua O với vận tốc ω_0 làm cho cần đẩy AB chuyển động dọc theo rãnh K. Độ lệch tâm $OC = \frac{R}{2}\sqrt{2}$. Tìm vận tốc và gia tốc của cần đẩy tại thời điểm ứng với $\alpha = 30°$; $\varphi = 45°$.

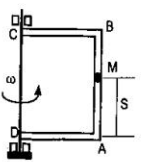
Bài tập II-14



Một cơ cấu culít OA quay quanh trục đi qua O với phương trình: $\varphi = 5t - 0,5t^2$. Một con chạy M chuyển động dọc theo rãnh của culít với phương trình $S = OM = 0,5t^3$ (S tính bằng cm, t tính bằng giây).

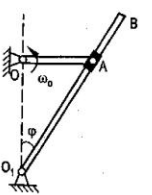
Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của con chạy M tại thời điểm t = 2s.

Bài tập II-15



Hình chữ nhật ABCD quay quanh cạnh CD với vận tốc $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s = const. Dọc theo cạnh AB điểm M chuyển động theo quy luật $S = a\sin\frac{\pi}{2}t$ (cm). Cho biết DA = CB = a (cm). Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của điểm M tại thời điểm t = 1s.

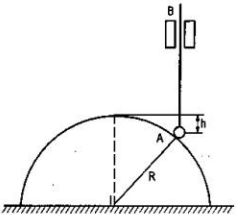
Bài tập II-16



Tay quay OA có chiều dài l = 10cm quay đều với vận tốc góc ω_0 = 6 rad/s làm cho con trượt A trượt dọc cần lắc O_1B. Lúc OA nằm ngang $\varphi = 30°$. Tìm vận tốc, gia tốc của A trượt dọc cần lắc? Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của cần lắc?

Bài tập II-17

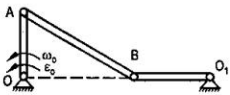
Cần AB chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ, sau 4 giây trượt từ vị trí cao nhất xuống đoạn h = 4 cm làm cho cam có bán kính R = 10 cm trượt ngang. Xác định vận tốc, gia tốc của cam tại vị trí trên?.



Bài tập II-18

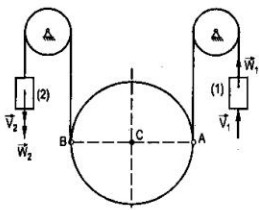
Cơ cấu 4 khâu bản lề như hình vẽ. Cho OA = r; AB = 2r; $O_1B = r\sqrt{2}$. Lúc OA thẳng đứng, các điểm OBO_1 cùng nằm trên đường nằm ngang, khi đó thanh OA có vận tốc góc là ω_o và gia tốc góc $\varepsilon_o = \omega_o^2\sqrt{3}$

Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của thanh AB?.



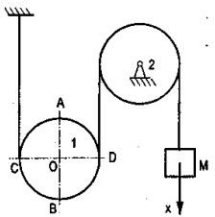
Bài tập II-19

Hệ ròng rọc như hình vẽ. Ở thời điểm vật (1) được nâng lên với vận tốc $\vec{v}_1$, gia tốc $\vec{W}_1$. Vật (2) hạ xuống với vận tốc $\vec{v}_2$, gia tốc $\vec{W}_2$. Ròng rọc động có bán kính R. Tìm vận tốc ròng rọc động, vận tốc và gia tốc tâm C, gia tốc điểm B?.



Bài tập II-20

Vật M rơi xuống theo quy luật $x = 2t^2$ (x tính bằng m, t tính bằng s) làm chuyển động ròng rọc 2 và ròng rọc động 1. Ròng rọc 1 có bán kính bằng 0,2 m. Tìm gia tốc các điểm C, B và D trên vành của ròng rọc 1 lúc t = 0,5 s; OB ⊥ CD.



PHẦN III

ĐỘNG LỰC HỌC

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN ĐỘNG LỰC HỌC

Động lực học là một phần của cơ học lý thuyết, nghiên cứu sự liên hệ giữa lực và chuyển động.

§1. CÁC ĐỊNH LUẬT ĐỘNG LỰC HỌC

Lý thuyết của phần động lực học được xây dựng từ những định luật cơ bản do Newton lần đầu tiên thiết lập một cách hoàn chỉnh, nên còn được gọi là những định luật cổ điển vì nó dựa trên khái niệm thời gian và không gian tuyệt đối, một khái niệm mà ngày nay đã có biến đổi, tuy nhiên nó vẫn còn đúng cho hầu hết trong các trường hợp thực tế và kỹ thuật thường gặp.

Đối tượng của các định luật động lực học là chất điểm.

I. Định luật I (Định luật quán tính)

Nếu chất điểm không có lực tác dụng thì chất điểm sẽ nằm yên hoặc chuyển động thẳng đều.

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{V} = \overline{const} \text{ (đặc biệt } \vec{V} = 0\text{)}$$

Mọi chất điểm tự nó không muốn biến thiên nếu không có lực tác dụng. Tính chất muốn giữ nguyên trạng thái chuyển động được gọi là quán tính. Chuyển động không có lực tác dụng ($\vec{V} = \text{const}$) được gọi là chuyển động quán tính, do đó định luật này còn gọi là định luật quán tính.

II. Định luật II (Định luật cơ bản)

Gia tốc mà chất điểm nhận được có phương, chiều trùng với phương, chiều của lực tác dụng, có giá trị tỷ lệ với cường độ của lực.

$$m\vec{W} = \vec{F}$$

Biểu thức trên còn gọi là phương trình cơ bản động lực học.

Trong đó m là hệ số tỉ lệ có giá trị không đổi, nó chính là khối lượng của chất điểm.

Định luật này còn được gọi là định luật cơ bản trong các định luật của động lực học vì nó nêu lên được mối liên hệ giữa lực và chuyển động.

- Trong trường hợp có nhiều lực cùng tác dụng lên chất điểm, thì các lực cùng tác dụng đó là hệ lực đồng quy, gọi $\vec{R}$ là hợp lực, ta có:

$$\varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{R} \Rightarrow m\vec{W} = \vec{R} \quad \text{hay} \quad m\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

- Cùng một lực tác dụng $\vec{F}$, nếu chất điểm có khối lượng lớn thì gia tốc nhận được sẽ nhỏ: Lực làm cho trạng thái chuyển động biến thiên ít, chất điểm có "độ quán tính" lớn, nên khối lượng là số đo quán tính của chất điểm.

- Với tác dụng của trọng lực, mọi vật rơi với gia tốc là $\vec{g}$. Như vậy theo định luật cơ bản, ta có: $m\vec{g} = \vec{p}$

Về trị số: mg = p

Theo hệ đơn vị quy định: Khối lượng, độ dài, thời gian là những đại lượng cơ bản có đơn vị (gọi là đơn vị cơ bản) được tính bằng: kg, m và s.

Như vậy, lực là đại lượng dẫn xuất có đơn vị (gọi là đơn vị dẫn xuất) N:

$$1N = 1kg.m/s^2$$

Do đó: $P = m.g = 1kg \times 9{,}81m/s^2 = 9{,}81N$

Vật có khối lượng m = 1 kg thì trọng lượng là 9,81N

III. Định luật III (Định luật tác dụng và phản tác dụng)

Lực mà hai chất điểm tác dụng lẫn nhau thì bằng nhau về trị số, cùng đường tác dụng và ngược chiều.

Hình 3-1

Định luật này đã có phát biểu trong tĩnh học, khác nhau là ở đây đối tượng là chất điểm có thể chuyển động còn trong tĩnh học đối tượng là vật rắn nằm yên.

Lực tác dụng bao giờ cũng là đại lượng tương hỗ, nó mang tính rất phổ biến và bao quát, do đó cũng rất quan trọng.

Ta có tác dụng giữa hai chất điểm A và B:

$\vec{F}_A$ là lực tác dụng của A lên B và ngược lại là $\vec{F}_B$: $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

Với $\vec{m}_A, \vec{m}_B, \vec{W}_A, \vec{W}_B$ là khối lượng và gia tốc của 2 chất điểm A và B:

$$F_A = m_B W_B \text{ và } F_B = m_A W_A$$

$$\Rightarrow m_B W_B = m_A W_A \text{ hay } \frac{W_B}{W_A} = \frac{m_A}{m_B}$$

Gia tốc hai chất điểm gây cho nhau tỉ lệ nghịch với khối lượng của chúng.

§2. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

I. Hai bài toán cơ bản

Trong động lực học, hai bài toán sau đây được gọi là hai bài toán cơ bản:

1. Tìm lực tác dụng lên chất điểm có chuyển động đã biết. Bài toán này gọi là bài toán thứ nhất hay bài toán thuận.

2. Tìm chuyển động của chất điểm chịu lực tác dụng đã biết và các điều kiện đầu. Bài toán này gọi là bài toán thứ hai hay bài toán nghịch.

Với ý nghĩa là bài toán cơ bản thì mọi bài toán khác đều được phân tích đưa về thành những bài toán trên để giải.

Đối với bài toán thứ nhất ta xác định phương, chiều, trị số của lực tác dụng còn bài toán thứ hai ta xác định được phương trình chuyển động của điểm. Ta dùng định luật cơ bản để giải bài toán thứ nhất và dùng phương trình vi phân chuyển động của chất điểm để giải bài toán thứ hai.

II. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

Chất điểm M có khối lượng m, chuyển động dưới tác dụng của lực $\varphi(\vec{F}_k)$. Theo định luật cơ bản ta có: $m\vec{W} = \Sigma\vec{F}_k$

+ Với $\vec{W} = \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$, từ định luật cơ bản ta có:

$$m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \Sigma\vec{F}_k \text{ hay } m\ddot{\vec{R}} = \Sigma\vec{F}_k$$

Được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng vec tơ.

+ Với: $\vec{W}$ có các hình chiếu là: $W_x; W_y; W_z$

$\vec{F}_k$ có các hình chiếu là: X; Y; Z

Chiếu đẳng thức vec tơ trên lên các trục tọa độ Đề các.

$$mW_x = \Sigma X;\ mW_y = \Sigma Y;\ mW_z = \Sigma Z.$$

Mà: $W_x = \ddot{x};\quad W_y = \ddot{y};\quad W_z = \ddot{z}$.

Nên ta có các phương trình:

$$m\ddot{x} = \Sigma X$$
$$m\ddot{y} = \Sigma Y$$
$$m\ddot{z} = \Sigma Z$$

Các phương trình này được gọi là các phương trình vi phân chuyển động của chất điểm viết dưới dạng tọa độ Đề các.

+ Với: $\vec{W} = \vec{W}^\tau + \vec{W}^n$

trong đó: $W^\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}$; $W^n = \frac{V^2}{\rho}$

Ta được: $m\ddot{S} = \Sigma F^\tau$ (lực tiếp tuyến)

$m\frac{V^2}{\rho} = \Sigma F^n$ (lực pháp tuyến)

Được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng tọa độ tự nhiên.

Chương 2

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI LƯỢNG

§1. KHỐI TÂM CỦA CƠ HỆ

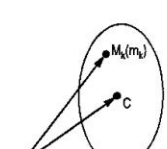
Cơ hệ là tập hợp của nhiều chất điểm mà chuyển động của chúng có liên quan với nhau.

I. Khái niệm về khối tâm

Khối tâm là một điểm hình học đặc trưng cho sự phân bố khối lượng của cơ hệ.

Gọi C là khối tâm của cơ hệ, thì C phải thỏa mãn điều kiện:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$$



Hình 3-2

Vị trí của khối tâm phụ thuộc vào khối lượng m_k và vị trí $\vec{r}_k$ của các chất điểm.

Trong hệ tọa độ Đề các vuông góc, gọi tọa độ của C là X_C, Y_C, Z_C, hình chiếu của $\vec{r}_k$ là x_k, y_k, z_k ta có:

$$X_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}$$

$$Y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}$$

$$Z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

Nếu nhân tử số và mẫu số cho trị số gia tốc trọng trường g ta nhận được:

$$X_C = \frac{\sum m_k g.x_k}{M.g} = \frac{\sum p_k.x_k}{\rho} = X_C^*$$

(Tương tự cho các tọa độ Y_C và Z_C)

X_C^*, Y_C^*, Z_C^* là tọa độ trọng tâm, vậy khối tâm C trùng trọng tâm của cơ hệ, ta dùng tính chất này để xác định khối tâm giống như xác định trọng tâm. Tuy nhiên, khối tâm có ý nghĩa tổng quát hơn trọng tâm, như trong môi trường không có lực hút (trường hấp dẫn) thì trọng tâm không còn ý nghĩa nhưng hệ vẫn có khối tâm.

Khối tâm đóng một vai trò quan trọng trong việc khảo sát chuyển động của cơ hệ.

II. Cách xác định khối tâm

Các công thức và các tính chất dùng để xác định trọng tâm đều được sử dụng để xác định khối tâm của hệ.

§2. MÔ MEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN

I. Định nghĩa

1. Mô men quán tính của chất điểm

Mô men quán tính của chất điểm đối với điểm bằng tích số giữa khối lượng của chất điểm với bình phương khoảng cách từ chất điểm đến điểm.

Ký hiệu: $dJ_0 = m\rho^2$

Mô men quán tính của chất điểm đối với trục bằng tích số giữa khối lượng của chất điểm với bình phương khoảng cách từ chất điểm đến trục.

Ký hiệu: $dJ_z = m\rho^2$

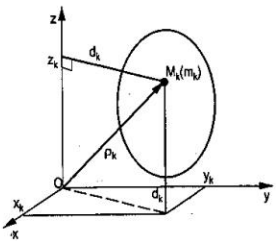
2. Mô men quán tính của vật rắn

Vật rắn có n chất điểm.

Mô men quán tính của vật rắn (cơ hệ) đối với một điểm bằng tổng mô men quán tính của các chất điểm thuộc vật (cơ hệ) đối với điểm đó.

Ký hiệu: $J_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2$

Mô men quán tính của vật rắn (cơ hệ) đối với một trục bằng tổng mô men quán tính của các chất điểm thuộc vật (cơ hệ) đối với trục đó.



Hình 3-3

Ký hiệu: $J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2$

Mô men quán tính luôn luôn dương. Đơn vị mô men quán tính là kgm^2.

II. Liên hệ giữa mô men quán tính của vật đối với các trục và góc tọa độ

Từ hình vẽ trên, ta có:

$$d_k^2 = x_k^2 + y_k^2$$

Và: $\rho_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$

Vậy: $J_z = \sum m_k d_k^2 = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right)$

Tương tự: $J_y = \sum m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right)$

$$J_x = \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right)$$

Suy ra: $J_x + J_y + J_z = 2\sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right)$

Vậy: $J_x + J_y + J_z = 2\sum m_k \rho_k^2$

Hay: $J_x + J_y + J_z = 2J_0$

Tổng mô men quán tính của vật đối với ba trục tọa độ bằng hai lần mô men quán tính của vật đối với gốc tọa độ.

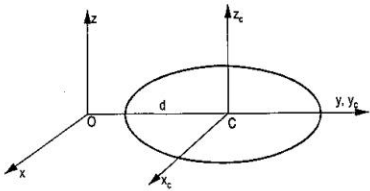
III. Định lý Steiner (hay chuyển trục mô men quán tính)

1. Định lý

Mô men quán tính của vật đối với một trục bất kỳ bằng tổng giữa mô men quán tính của vật đối với trục đi qua khối tâm của vật và song song với trục đã cho với tích số giữa khối lượng của vật và bình phương khoảng cách hai vật.

$$J_z = J_{z_C} + Md^2$$

2. Chứng minh



Hình 3-4

Từ hình vẽ ta có:

$$x_k = x_{kc}; y_k = y_{kc} + d; z_k = z_{kc}$$

$$J_z = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2) = \sum m_k(x_{kc}^2 + (y_{kc} + d)^2)$$

$$= \sum m_k x_{kc}^2 + \sum m_k y_{kc}^2 + 2\sum m_k y_{kc} d + \sum m_k d^2$$

$$= \sum m_k(x_{kc}^2 + y_{kc}^2) + Md^2$$

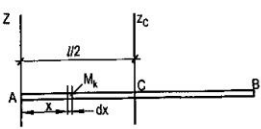
$$J_z = J_{z_c} + Md^2$$

Vì: $\sum m_k.d^2 = Md^2$

Và: $2d\sum m_k y_{kc} = 0$ (tọa độ khối tâm đối với hệ tọa độ $Cx_cy_cz_c$)

IV. Mô men quán tính của vật rắn đặc biệt

1. Thanh thẳng đồng chất có khối lượng là M, có chiều dài là l, C là khối tâm



Hình 3-5

Thanh có chiều dài là l.

Chọn M_k là đoạn VCB dx, ta có:

$$m_k = \frac{M}{l}dx$$

Suy ra: $$J_z = \int_0^l \frac{M}{l}.x^2dx = \frac{1}{3}\frac{M}{l}x^3\Big|_0^l$$

Vậy: $$J_z = \frac{1}{3}Ml^2$$

Từ công thức: $$J_z = J_{z_c} + Md^2$$

$$\Rightarrow J_{z_c} = J_z - Md^2 = \frac{1}{3}Ml^2 - M\frac{l^2}{4}$$

$$J_{z_c} = \frac{1}{12}Ml^2$$

Hoặc tính J_{z_c} từ định nghĩa, ta có:

$$J_{z_c} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l}x^2dx = \frac{1}{3}\frac{M}{l}x^3\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$J_{z_c} = \frac{1}{12}Ml^2$$

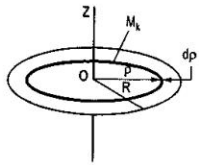
2. Đĩa tròn hay trụ tròn đồng chất có khối lượng là M, có bán kính là R

Chọn phần tử M_K là vòng tròn có bề dày là dρ, có tâm là O, có bán kính là ρ, ta có:

$$m_k = \frac{M}{\pi R^2}.2\pi\rho.d\rho = 2\frac{M}{R^2}\rho.d\rho$$

Suy ra: $$J_z = \int_0^R 2\frac{M}{R^2}\rho^3d\rho = \frac{2}{4}\frac{M}{R^2}\rho^4\Big|_0^R$$

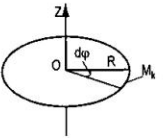
Vậy: $$J_z = \frac{1}{2}MR^2$$



Hình 3-6

3. Vành tròn hay ống tròn đồng chất có khối lượng là M, có bán kính R.

Chọn phần tử M_k là cung tròn trên chu vi của vòng tròn được chắn bởi góc dφ.



Hình 3-7

Từ công thức: $J_z = \sum m_k r_k^2$

Với: $r_k = R$

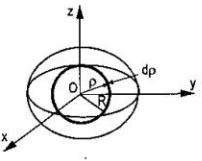
Ta có: $m_k = \dfrac{M}{2\pi R}.R.d\varphi$

Suy ra: $J_z = \int_0^{2\pi} \dfrac{M}{2\pi} R^2.d\varphi = \dfrac{MR^2}{2\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi}$

Vậy: $J_z = MR^2$

4. Khối cầu đồng chất có khối lượng là M, có bán kính là R.

Chọn phần tử M_k là hình cầu có bán kính ρ, tâm O, dày dρ, ta có:



Hình 3-8

$$m_k = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\, 4\pi\rho^2 d\rho$$

Suy ra: $J_0 = \int_0^R 3\dfrac{M}{R^3}.\rho^4 d\rho = \dfrac{3}{5}\dfrac{M}{R^3}\rho^5\Big|_0^R$

Vậy: $J_0 = \dfrac{3}{5}MR^2$

Với: $J_x + J_y + J_z = 2J_0$

$$\Rightarrow J_x = J_y = J_z = \frac{2J_0}{3} = \frac{2}{5}MR^2$$

§3. PHÂN LOẠI LỰC TÁC DỤNG LÊN CƠ HỆ

Lực tác dụng lên cơ hệ thường phân làm hai loại.

I. Ngoại lực

Lực từ bên ngoài tác dụng lên cơ hệ ký hiệu: $\vec{F}^e$

Gọi $\vec{R}'^e$ là vec tơ chính và $\vec{M}_0^e$ là mô men chính của hệ ngoại lực thì:

$$\vec{R}'^e = \Sigma \vec{F}_k^e$$

$$\vec{M}_0^e = \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) = \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^e$$

II. Nội lực

Là lực mà các chất điểm của hệ tác dụng lẫn nhau, ký hiệu: $\vec{F}^i$.

Gọi $\vec{R}'^i$ và $\vec{M}_o^i$ là vec tơ chính và vec tơ mô men chính của hệ nội lực, ta có:

$$\vec{R}'^i = \sum \vec{F}_k^i = 0$$

$$\vec{M}_0^i = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^i) = 0$$

Tổng hình chiếu và tổng mô men của các nội lực đối với bất kỳ trục nào cũng bằng không.

Chương 3

CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Các định lý tổng quát động lực học là các hệ quả của các định luật động lực học, đặc biệt là của Định luật II (Định luật cơ bản động lực học, $m\vec{W} = \vec{F}$). Các định lý này giúp ta giải quyết các dạng của hai bài toán cơ bản động lực học một cách hiệu quả trong từng trường hợp cụ thể.

§1. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG

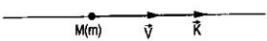
I. Khái niệm về động lượng

1. Động lượng của chất điểm

Chất điểm có khối lượng m, chuyển động với vận tốc $\vec{V}$, động lượng của chất điểm là một đại lượng có hướng đặt lên chất điểm.

Ký hiệu: $\vec{k}$

$$\vec{k} = m\vec{V}$$



Hình 3-9

2. Động lượng của cơ hệ, vật rắn

Động lượng của một cơ hệ hay của một vật rắn thì bằng tổng động lượng của các chất điểm thuộc cơ hệ hay vật rắn, cũng có nghĩa là động lượng của cơ hệ bằng tổng động lượng của các vật thuộc cơ hệ đó.

Ký hiệu: $\vec{K}$

$$\vec{K} = \sum \vec{k} = \sum m_k \vec{V}_k$$

$m_k, \vec{V}_k$ - khối lượng và vận tốc của chất điểm M_k thuộc cơ hệ - vật

Trong hệ tọa độ Đềcác:

$$K_x = \sum m_k V_{k_x} = \sum m_k \dot{x}_k$$

$$K_y = \sum m_k V_{k_y} = \sum m_k \dot{y}_k$$

$$K_z = \sum m_k V_{k_z} = \sum m_k \dot{z}_k$$

K_x, K_y, K_z - hình chiếu của $\vec{K}$ trên các trục x, y, z là tọa độ của chất điểm M_k.

Đơn vị của động lượng: kgm/s

Từ biểu thức:

$$\vec{K} = \sum m_k \vec{V}_k$$

Đối với cơ hệ hay vật rắn, C là khối tâm, ta có:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$$

Hay: $$M.\vec{r}_c = \sum m_k \vec{r}_k$$

Đạo hàm hai vế theo t:

$$M\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}$$

$$M\vec{V}_c = \sum m_k \vec{V}_k = \vec{K}$$

Động lượng của cơ hệ bằng động lượng của khối tâm mang khối lượng của cả cơ hệ, từ đây cho ta phương pháp đơn giản để xác định động lượng của cơ hệ bằng cách xác định động lượng khối tâm của cơ hệ. Ta có:

- Động lượng của vật chuyển động tịnh tiến:

$$\vec{K} = M\vec{V}_c$$

- Động lượng của vật rắn quay quanh trục đi qua khối tâm:

$$\vec{K} = M\vec{V}_c = 0$$

- Động lượng của vật rắn chuyển động song phẳng:

$$\vec{K} = M\vec{V}_c$$

II. Khái niệm về xung lượng

Xung lượng là một đại lượng có hướng đặc trưng cho sự tác dụng của lực theo thời gian.

1. Xung lượng nguyên tố của lực (còn gọi là xung lực)

Đại lượng đặc trưng cho sự tác dụng của lực trong khoảng thời gian không xác định vô cùng bé dt. Gọi $\vec{F}$ là lực thì xung lực là $d\vec{s}$.

$$d\vec{s} = \vec{F}.dt \qquad (Ns)$$

Xung lượng của lực phụ thuộc vào lực và thời gian tác dụng.

2. Xung lượng của lực

Là xung lượng mà tác dụng của lực trong khoảng thời gian xác định được (hữu hạn), gọi thời gian đó là t, thì:

$$t = t_1 - t_0$$

Ký hiệu xung lượng của lực là $\vec{S}$ thì:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}.dt$$

Nếu lực $\vec{F}$ không đổi thì:

$$\vec{S} = \vec{F}.t\Big|_{t_0}^{t_1} = \vec{F}(t_1 - t_0) = \vec{F}.t$$

Đơn vị của xung lượng: Ns

Nếu 1N = 1kgm/s^2 thì: 1Ns = 1kg m/s

Nghĩa là thứ nguyên của xung lượng và động lượng giống nhau.

Trong hệ tọa độ Đềcác, thì xung lượng được xác định như sau:

$$S_x = X.t\ ;\ S_y = Y.t\ ;\ S_z = Z.t$$

trong đó: S_x, S_y, S_z - hình chiếu của $\vec{S}$ trên các trục;

X, Y, Z - hình chiếu của $\vec{F}$ trên các trục.

III. Định lý biến thiên động lượng

1. Định lý

Độ biến thiên động lượng của cơ hệ trong khoảng thời gian hữu hạn bằng tổng xung lượng của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian đó, nghĩa là:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}_k^e$$

2. Chứng minh

Xét chất điểm M có khối lượng là m chịu tác dụng của ngoại lực $\vec{F}^e$ và nội lực $\vec{F}^i$ thì theo phương trình cơ bản động lực học, ta có:

$$m\vec{W} = \vec{F}^e + \vec{F}^i$$

hay: $$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^e + \vec{F}^i$$

và: $$m(d\vec{V}) = \left(\vec{F}^e + \vec{F}^i\right)dt$$

Đối với cơ hệ gồm n chất điểm thì lấy tổng lên ta có:

$$\sum d(m_k\vec{V}_k) = \sum\left(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i\right).dt$$

$$d\sum m_k\vec{V}_k = \sum\vec{F}_k^e dt + \sum\vec{F}_k^i dt$$

$$\Rightarrow d\vec{K} = \sum\vec{F}_k^e dt$$

Tích phân hai vế các cận tích phân tương ứng, ta có:

$$\int_{\vec{K}_0}^{\vec{K}_1} d\vec{K} = \int_{t_0}^{t_1}\sum\vec{F}_k^e.dt = \sum\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}_k^e.dt$$

hay: $$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n}\vec{S}_k^e$$

Chỉ có ngoại lực mới có tác dụng làm biến thiên xung lượng cơ hệ.

IV. Định luật bảo toàn động lượng

a) Nếu ngoại lực tác dụng lên cơ hệ bằng không thì động lượng của cơ hệ được bảo toàn, nghĩa là:

$$\sum\vec{F}_k^e = 0 \text{ thì } \vec{K}_1 = \vec{K}_0 \text{ hay } \left(\sum m_k\vec{V}_k\right)_1 = \left(\sum m_k\vec{V}_k\right)_0$$

b) Nếu hình chiếu của ngoại lực lên một phương nào đó bằng không thì động lượng của cơ hệ theo phương đó được bảo toàn, nghĩa là:

$$\sum X_k^e = 0 \text{ thì } K_{x(1)} = K_{x(0)} \text{ hay } \left(\sum m_k\dot{x}_k\right)_1 = \left(\sum m_k\dot{x}_k\right)_0$$

Định lý này dùng xác định vận tốc của cơ hệ là tập hợp các vật chuyển động tịnh tiến.

§2. ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM

I. Định lý

Khối tâm của cơ hệ chuyển động giống như một chất điểm, mang khối lượng của cả cơ hệ và chịu tác dụng của ngoại lực đặt lên cơ hệ:

$$M\vec{W}_c = \sum\vec{F}_k^e$$

Chứng minh:

Khảo sát cơ hệ gồm n chất điểm; xét chất điểm M_k (m_k). Theo phương trình cơ bản động lực học, ta có:

$$m_k\vec{W}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

Đối với hệ, ta lấy tổng:

$$\sum m_k\vec{W}_k = \sum\vec{F}_k^e + \sum\vec{F}_k^i = \sum\vec{F}^e \qquad (a)$$

Theo công thức xác định khối tâm, ta đã biết:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k\vec{r}_k}{M}$$

$$\Rightarrow M\vec{r}_c = \sum m_k\vec{r}_k$$

Đạo hàm hai lần theo t cả hai vế, ta có:

$$\frac{d^2M\vec{r}_c}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum m_k\vec{r}_k$$

$$M.\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \sum m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}$$

$$M\vec{W}_c = \sum m_k\vec{W}_k \qquad (b)$$

So sánh giữa (a) và (b), ta được: $M\vec{W}_c = \sum\vec{F}_k^e$

II. Định luật bảo toàn chuyển động khối tâm

1. Nếu ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không, nghĩa là:

$$\sum\vec{F}^e = 0 \Rightarrow M\vec{W}_c = 0 \Rightarrow \vec{W}_c = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{V}_c}{dt} = 0$$

Xảy ra hai trường hợp:

a) $\vec{V}_c = \overrightarrow{const}$: Chuyển động khối tâm của cơ hệ được bảo toàn.

b) $\vec{V}_c = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{r}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{r}_c = \overrightarrow{const}$: Tọa độ khối tâm của cơ hệ được bảo toàn

$$\left(\sum m_k\vec{r}_k\right)_1 = \left(\sum m_k\vec{r}_k\right)_0 = \cdots$$

2. Nếu ngoại lực tác dụng lên hệ chiếu lên phương nào đó (ví dụ: phương x), nghĩa là:

$$\sum X_k^e = 0 \Rightarrow M\ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0$$

Xảy ra hai trường hợp:

a) $\dot{x}_c = \text{const}$: Chuyển động khối tâm của cơ hệ theo phương x được bảo toàn.

b) $\dot{x}_c = 0 \Rightarrow \frac{dx_c}{dt} = 0 \Rightarrow X_c = \text{const}$: Tọa độ khối tâm của cơ hệ theo phương x được bảo toàn

$$\left(\sum m_k x_k\right)_1 = \left(\sum m_k x_k\right)_0 = \cdots$$

Định luật bảo toàn chuyển động khối tâm của cơ hệ giúp xác định được độ dời tuyệt đối của các phần tử trong một cơ hệ có sự chuyển động tương đối giữa các phần tử với nhau.

Ta dễ dàng giải thích vì sao thuyền chuyển động khi có người di chuyển trên thuyền v.v... Cũng như xác định được độ dời của thuyền khi biết được di chuyển của người.

Định lý này dùng xác định chuyển dời của cơ hệ.

§3. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MÔ MEN ĐỘNG LƯỢNG

I. Khái niệm về mô men động lượng

Chất điểm M có khối lượng là m, chuyển động với vận tốc $\vec{V}_0$ như ta đã biết chất điểm có động lượng là $\vec{k} = m\vec{V}$.

1. Mô men động lượng của chất điểm

+ Mô men động lượng của chất điểm đối với điểm O:

$$\vec{l}_0 = \vec{m}_o(\vec{k}) = \vec{r} \wedge \vec{k} = \vec{r} \wedge m\vec{V}$$

+ Mô men động lượng của chất điểm đối với trục z:

$$\vec{l}_z = \vec{m}_z(\vec{k}) = \pm h.k' = \pm h.mV'$$

V' - hình chiếu của $\vec{V}$ xuống mặt phẳng P vuông góc với trục.

Lấy dấu (+) khi hình chiếu này quay quanh trục z ngược chiều kim đồng hồ.

Như trong tĩnh học ta cũng có định lý liên hệ mô men động lượng đối với điểm và đối với trục như sau:

$$\vec{m}_z(\vec{k}) = \vec{m}_0(\vec{k})\Big|_z : (O \in z)$$

Đơn vị của mô men động lượng: kgm^2/s.

2. Mô men động lượng của cơ hệ - vật rắn

Mô men động lượng của cơ hệ đối với điểm O bằng tổng mô men động lượng của các chất điểm thuộc hệ đối với điểm O:

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{l}_0 = \sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{V}_k$$

Mô men động lượng của cơ hệ đối với trục z bằng tổng mô men động lượng của các chất điểm thuộc hệ đối với trục z:

$$\overline{L}_z = \sum \overline{l}_z = \sum \pm h_k . m_k V_k'$$

*Mô men động lượng của vật rắn quay quanh trục cố định:

Vật quay với vận tốc góc là $\overline{\omega}$.

Ta có: $V_k = r_k.\omega$.

Do đó: $\overline{L}_z = \sum \pm r_k m_k V_k = \sum \pm r_k m_k r_k \omega = \pm\omega \sum m_k r_k^2 = \pm\omega J_z$.

$$\overline{L}_z = \pm\omega J_z .$$

J_z - mô men quán tính của vật quay đối với trục quay z.

Trị đại số của $\overline{L}_z$ trùng với trị đại số của vận tốc góc $\overline{\omega}$.

II. Định lý biến thiên mô men động lượng của hệ cơ

1. Định lý

Đạo hàm theo thời gian mô men động lượng của cơ hệ bằng tổng mô men của tất cả ngoại lực tác dụng lên cơ hệ. Nghĩa là:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}^e)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{L}_z = \sum \vec{m}_z(\vec{F}^e)$$

2. Chứng minh

Xét một chất điểm M_k thuộc cơ hệ, theo phương trình cơ bản động lực học ta có:

$$m_k\vec{W}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

Hay:

$$m_k\frac{d}{dt}\vec{V}_k = \frac{d}{dt}m_k\vec{V}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

$$\Rightarrow \sum\frac{d}{dt}\left(m_k\vec{V}_k\right) = \sum\vec{F}_k^e + \sum\vec{F}_k^i = \sum\vec{F}^e \text{ (vì } \sum\vec{F}^i = 0)$$

Thực hiện nhân có hướng $\vec{r}_k$ với hai vế:

$$\vec{r}_k \wedge \frac{d}{dt}\sum\left(m_k\vec{V}_k\right) = \vec{r}_k \wedge \sum\vec{F}^e$$

$$\frac{d}{dt}\sum\left(\vec{r} \wedge m_k\vec{V}_k\right) = \sum\vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^e$$

Vậy:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e)$$

III. Định luật bảo toàn mô men động lượng

Nếu $\sum\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = \overline{const}$. Mô men động lượng của cơ hệ đối với điểm O được bảo toàn:

$$\sum(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{V}_k)_1 = \sum(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{V}_k)_0$$

Nếu $\sum\vec{m}_z\left(\vec{F}_k^e\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_z = 0 \Rightarrow \vec{L}_z = \overline{const}$. Mô men động lượng của cơ hệ đối với trục z được bảo toàn:

$$(\sum \pm h_k m_k V_k)_1 = (\sum \pm h_k m_k V_k)_0$$

IV. Phương trình vi phân chuyển động của vật quay

Nếu có vật quay quanh trục z, áp dụng định lý biến thiên mô men động lượng của vật đối với trục z, ta có:

$$\vec{L}_z = \vec{\omega}.J_z$$

Suy ra:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_z = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}.J_z\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.J_z = \vec{\varepsilon}.J_z$$

Hay: $$\frac{d}{dt}\overline{L}_z = \ddot{\varphi}.J_z$$

Vậy: $$J_z.\ddot{\varphi} = \sum \overline{m}_z(\overline{F}^e)$$

Được gọi là phương trình vi phân chuyển động của vật quay.

Định lý này dùng xác định gia tốc góc của cơ hệ tập hợp các vật quay quanh trục cố định.

§4. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

I. Khái niệm về động năng

Một chất điểm khi chuyển động - có vận tốc - thì có một động lượng. Khi ta ngừng tác dụng lực thì chất điểm vẫn còn tiếp tục chuyển động. Vậy chất điểm khi chuyển động có mang một năng lượng, năng lượng này giúp nó duy trì chuyển động. Năng lượng đó được gọi là động năng. Đối với mọi cơ hệ thì nó vẫn có mang bản chất như vậy.

1. Động năng của chất điểm

Động năng là đại lượng vô hướng - dương, phụ thuộc vào khối lượng và trị số của vận tốc.

$$T = \frac{1}{2}mV^2$$

Đơn vị của động năng là: kgm^2/s^2.

2. Động năng của cơ hệ - vật rắn

Động năng của cơ hệ (vật rắn là cơ hệ đặc biệt) bằng tổng động năng của các chất điểm thuộc cơ hệ (động năng của hệ cũng bằng tổng động năng của các vật thuộc hệ).

$$T = \sum \frac{1}{2}m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2$$

* Động năng của một số vật có chuyển động đặc biệt:

a) Vật rắn chuyển động tịnh tiến

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k.V_c^2$$

$$T = \frac{1}{2}MV_c^2$$

Động năng của vật được tính như động năng của một chất điểm mang khối lượng cả vật.

b) Vật rắn quay quanh một trục cố định z: Với vận tốc góc là ω.

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k . r_k^2 \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

$J_z = \sum m_k r_k^2$ - mô men quán tính của vật đối với trục quay.

c) Vật rắn chuyển động song phẳng

Vật rắn quay quanh tâm vận tốc tức thời P (P còn gọi là tâm quay tức thời), do đó:

$$T = \frac{1}{2} J_P . \omega^2$$

Ta cũng có thể tính theo công thức khác, gọi C là khối tâm của vật

$$J_P = J_C + Md^2$$

Từ đó:

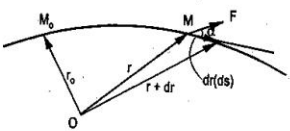
$$T = \frac{1}{2} J_C . \omega^2 + \frac{1}{2} Md^2 \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} J_C . \omega^2 + \frac{1}{2} M . V_C^2$$

Động năng của vật bằng tổng động năng của vật trong chuyển động quay quanh khối tâm cộng động năng của vật trong chuyển động tịnh tiến của khối tâm.

II. Khái niệm về công của lực

Công của lực là đại lượng đặc trưng cho tác dụng của lực khi điểm đặt dời chỗ. Công dương gọi là công hoạt động (công sinh ra làm cho cơ hệ chuyển động). Công âm gọi là công cản (công sinh ra cản trở chuyển động của cơ hệ).



Hình 3-10

1. Công nguyên tố của lực

Công nguyên tố của lực là công của lực sinh ra trên độ dời vô cùng bé của lực.

Ký hiệu: $dA_{\vec{F}}$.

- Dạng vec tơ: $dA_{\vec{F}} = \vec{F}.d\vec{r}$

- Dạng tự nhiên: $dA_{\vec{F}} = F.ds.\cos\alpha$

- Dạng tọa độ Đề các: $dA_{\vec{F}} = X.dx + V.dy + Z.dz$

Trong đó: X, Y, Z; dx, dy, dz - hình chiếu của $\vec{F}$ và của $d\vec{r}$ trên các trục tọa độ.

2. Công của lực trên một đoạn đường (hữu hạn) $\overline{S} = \overline{M_0M_1}$

Ký hiệu: $A_{\vec{F}}$.

$$A_{\vec{F}} = \int_{M_0M} dA_{\vec{F}}$$

Dạng vec tơ: $A_{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}.d\vec{r}$

Dạng tự nhiên: $A_{\vec{F}} = \int_S F\cos\alpha.ds$

Dạng tọa độ Đề các: $A_{\vec{F}} = \int_{x_0}^{x_1} X.dx + \int_{y_0}^{y_1} Y.dy + \int_{z_0}^{z_1} Z.dz$

trong đó: x_0, y_0, z_0 - tọa độ của M_0: $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

x_1, y_1, z_1 - tọa độ của M_1: $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Ghi chú:

- Chất điểm chịu tác dụng của một hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ thì: $\varphi(\vec{F}_k) \sim \vec{R}$ với:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k$$

Do đó: $dA_{\vec{F}} = \sum \vec{F}_k.d\vec{r} = \vec{R}.d\vec{r}$

- Nếu $\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow dA_{\vec{F}} = 0$.

- Nếu $\vec{F}$ trùng với $d\vec{r} \Rightarrow A_{\vec{F}} = \pm\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} F.dr = \pm\int_{S_0}^{S_1} F.ds$.

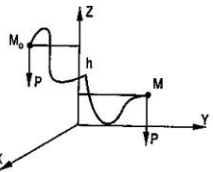
- Nếu $\vec{F} = \overline{const} \Rightarrow A = \pm F.S$.

Đơn vị của công là J: 1 J = 1 Nm = 1 kgm^2/s^2.

Thứ nguyên công của lực cùng thứ nguyên của động năng.

3. Công của các lực đặc biệt

a) Công của trọng lực



Ta có : $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $M(x, y, z)$; $\vec{P}(0, 0, -P)$

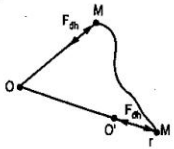
Do đó: $A_{\vec{P}} = \int_{z_0}^{z} Zdz = \int_{z_0}^{z} -Pdz$

$$A_{\vec{P}} = -P(z - z_0) = -P.\vec{h}$$

Công của trọng lực không phụ thuộc vào đường dịch chuyển mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối. Cụ thể là phụ thuộc vào hiệu số độ cao $h = z_1 - z_0$.

b) Công của lực đàn hồi

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}; \vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}$$



Lực đàn hồi:

$$\vec{F}_{dh} = -C\vec{r}$$

C - hệ số đàn hồi hay hệ số cứng;

$\vec{r} = \overrightarrow{O'M}$ - biến dạng thêm.

Ta có: $A_{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} F_{dh}.dr = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} - C\vec{r}.d\vec{r} = -\frac{1}{2}Cr^2\Big|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} = -\frac{1}{2}C\left(r_1^2 - r_0^2\right)$

Chọn : $\vec{r}_0 = 0 \Rightarrow r_1^2 - r_0^2 = r^2$.

Ta nhận được: $A_{\vec{F}_{dh}} = -\frac{1}{2}Cr^2$

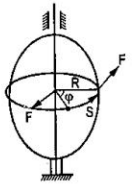
Nếu đường chuyển dời trùng với đường thẳng hướng tâm O, gọi đường thẳng hướng tâm là Ox, ta có:

$$A_{\vec{F}_{dh}} = -\frac{1}{2}C\left(x_1^2 - x_0^2\right)$$

Chọn x_0 ứng với $\vec{F} = 0$ thì: $A_{\vec{F}_{dh}} = -\frac{1}{2}Cx^2$ với $x = x_1 - x_0$

c) Công của ngẫu lực

Cho ngẫu lực $(\vec{F},\vec{F}')$ có mô men: $m = F.r$



- Công của ngẫu lực $(\vec{F},\vec{F}')$:

$$A_{\vec{m}} = A_{(\vec{F},\vec{F}')} = A_{\vec{F}} + A_{\vec{F}'}$$

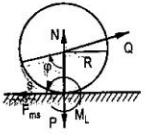
$$A_{\vec{F}'} = 0$$

$$\Rightarrow A_{(\vec{F},\vec{F}')} = A_{\vec{F}} = \pm F.S = \pm F.r.\varphi = \vec{m}.\vec{\varphi}$$

Vậy: $A_{\vec{m}} = \vec{m}.\vec{\varphi}$

Công của ngẫu lực bằng mô men của ngẫu lực nhân góc quay.

d) Công của lực ma sát



- Công của lực ma sát trượt:

$$A_{\vec{F}_{ms}} = -F_{ms}.S = -fN.S$$

F_{ms} - hệ số ma sát trượt;

N - trị số phản lực pháp tuyến của mặt tựa;

S - đoạn đường đi được.

- Công của ngẫu lực ma sát lăn (vật lăn không trượt):

Vật lăn được một đoạn là ds: $ds = R.d\varphi$

Mà: $$d\varphi = \frac{dS}{R}$$

Vậy: $$dA_{M_L} = \frac{\mu}{R}N.dS$$

$\frac{\mu}{R}$ - một đại lượng rất nhỏ nên công của ngẫu lực ma sát lăn không đáng kể, thường được bỏ qua.

4. Công suất của lực

Công suất của lực là công của lực sinh ra trong một đơn vị thời gian.

- Công suất của lực $\vec{F}$:

$$N_{\vec{F}} = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

- Công suất của ngẫu lực $\vec{m}$:

$$N_{\vec{m}} = \frac{\overline{A}_m}{t} = \frac{\vec{m}\vec{\varphi}}{t} = \vec{m}\vec{\omega}$$

Đơn vị của công suất là Watt (W): 1 W = 1 J/s = 1 Nm/s = 1 kgm^2/s^3

Công suất của cơ hệ là tổng công suất của các lực tác dụng lên cơ hệ.

III. Định lý biến thiên động năng

1. Định lý dạng đạo hàm hay vi phân

Đạo hàm theo thời gian động năng của cơ hệ bằng tổng công suất của cơ hệ.

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_{\vec{F}_k}$$

Chứng minh:

Xét chất điểm M_k thuộc cơ hệ, từ phương trình cơ bản động lực học:

$$m_k.\vec{W}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} m_k \vec{V}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e$$

Nhân vô hướng hai vế với $\vec{V}_k$, ta được:

$$\frac{d}{dt} m_k \vec{V}_k.\vec{V}_k = \left(\vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e\right).\vec{V}_k$$

$$m_k V_k.\frac{dV_k}{dt} = \vec{F}_k^i.\vec{V}_k + \vec{F}_k^e\vec{V}_k$$

Vì: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_k V_k^2\right) = \frac{1}{2}m_k \frac{dV_k^2}{dt} = \frac{1}{2}m_k V_k.2\frac{dV_k}{dt} = m_k V_k \frac{dV_k}{dt}$

Vậy: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_k V_k^2\right) = \vec{F}_k^i\vec{V}_k + \vec{F}_k^e\vec{V}_k$$

Đối với cả hệ ta lấy tổng của hai vế:

$$\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_k V_k^2\right) = \sum\vec{F}_k^i\vec{V}_k + \sum\vec{F}_k^e\vec{V}_k$$

Hay: $$\frac{d}{dt}\sum\frac{1}{2}m_k V_k^2 = \sum\vec{F}_k^i\vec{V}_k + \sum\vec{F}_k^e\vec{V}_k$$

Vậy: $$\frac{dT}{dt} = \sum\vec{F}_k^i\vec{V}_k + \sum\vec{F}_k^e\vec{V}_k = \sum N_{\vec{F}_k}$$

Định lý chứng minh xong.

Định lý này dùng xác định gia tốc (gia tốc góc) hoặc lực tác dụng lên cơ hệ.

2. Định lý dạng hữu hạn

Biến thiên động năng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng công của các ngoại lực và nội lực sinh ra trong các chuyển dời ứng với khoảng thời gian đó:

$$T_1 - T_0 = \sum A_{\vec{F}_k^e} + \sum A_{\vec{F}_k^i} = \sum A_{\vec{F}_k}$$

Chứng minh:

Từ: $$\frac{dT}{dt} = \sum\vec{F}_k^i\vec{V}_k + \sum\vec{F}_k^e\vec{V}_k$$

Suy ra: $$dT = \sum\vec{F}_k^i\vec{V}_k.dt + \sum\vec{F}_k^e\vec{V}_k.dt$$

Mà: $$\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} \Rightarrow \vec{V}_k.dt = d\vec{r}_k$$

Cho nên: $$dT = \sum\vec{F}_k^e.d\vec{r}_k + \sum\vec{F}_k^i.d\vec{r}_k$$

Tích phân hai vế theo các cận tương ứng.

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \sum\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1}\vec{F}_k^e d\vec{r} + \sum\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1}\vec{F}_k^i d\vec{r}_k$$

Vậy: $$T_1 - T_0 = \sum A_{\vec{F}_k^e} + \sum A_{\vec{F}_k^i} = \sum A_{\vec{F}_k}$$

Định lý chứng minh xong.

Định lý này dùng xác định vận tốc (vận tốc góc) của cơ hệ.

Ta nhận thấy nội lực của cơ hệ có làm biến thiên động năng của cơ hệ, chỉ có đối với vật rắn tuyệt đối thì:

$$\sum A_{\vec{F}_k^i} = 0$$

IV. Liên hệ giữa vận tốc (vận tốc góc) với gia tốc (gia tốc góc) của vật chuyển động từ trạng thái nghỉ

1. Vật chuyển động tịnh tiến

$$S = \frac{1}{2}Wt^2; V = Wt \Rightarrow V = \sqrt{2SW}$$

2. Vật quay quanh trục cố định

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2; \omega = \varepsilon t \Rightarrow \omega = \sqrt{2\varphi\varepsilon}$$

Ghi chú: Nếu bài toán xác định vận tốc và gia tốc, để việc giải đơn giản hơn thì tính gia tốc trước.

§5. TRƯỜNG LỰC - THẾ NĂNG - ĐỊNH LUẬT BẢO TỒN CƠ NĂNG

I. Trường lực

Là khoảng không gian, trong đó chất điểm chịu tác dụng của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí của chất điểm.

II. Trường lực thế

Là trường lực, trong đó công của lực tác dụng lên chất điểm không phụ thuộc vào quỹ đạo điểm đặt của lực mà phụ thuộc vào vị trí đầu và cuối của chất điểm.

Lực của trường lực gọi là lực thế.

III. Thế năng

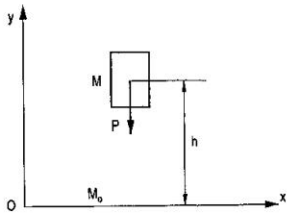
1. Định nghĩa

Thế năng của lực thế $\vec{F}$ ở vị trí M (kí hiệu $\pi_{\vec{F}}$) bằng công của lực thế $\vec{F}$ tác dụng lên cơ hệ khi nó chuyển động từ vị trí M về vị trí 0 (0,0,0).

$$\pi_{\vec{F}} = \int_{MO} dA_{\vec{F}}$$

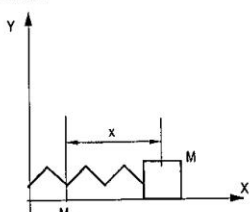
a) Thế năng trọng lượng $\vec{P}$

$$\pi_{\vec{P}} = -A_{\vec{P}} = -\vec{P}.\vec{h} = -m\vec{g}\vec{h}$$



Hình 3-11

b) Thế năng lực đàn hồi



Hình 3-12

$$\pi_{\vec{F}_{dh}} = -A_{\vec{F}_{dh}} = -\left(-\frac{1}{2}Cx^2\right) = \frac{1}{2}Cx^2$$

trong đó: x - biến dạng.

* Thế năng của cơ hệ ở vị trí M (kí hiệu π_M) bằng tổng công của các lực thế tác dụng lên cơ hệ khi các lực di chuyển từ vị trí M về vị trí 0.

$$\pi_M = \sum \int_{MO} dA_{\vec{F}_k}$$

IV. Tính chất của lực thế

1. Tính chất thứ nhất

Tổng công của các lực thế khi cơ hệ di chuyển trong trường lực thế bằng hiệu thế năng của vị trí đầu và vị trí cuối của cơ hệ trong di chuyển đó.

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{M_1M_2} dA_{\vec{F}_k} = \pi_{M_1} - \pi_{M_2}$$

Thực vậy, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{M_1M_2} dA_{\vec{F}_k} = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_1O} dA_{\vec{F}_k} + \sum_{k=1}^{n} \int_{M_2O} dA_{\vec{F}_k} = \pi_{M_1} - \pi_{M_2}$$

Vì công của các lực thế không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo các chất điểm của cơ hệ.

Đặt: $\sum_{k=1}^{n} \int_{M_1M_2} dA_{\vec{F}_k} = A_{M_1M_2}; \sum_{k=1}^{n} \int_{M_1O} dA_{\vec{F}_k} = A_{M_1} + \sum_{k=1}^{n} \int_{M_2O} dA_{\vec{F}_k} = A_{M_2}$

2. Tính chất thứ 2

Lực thế có biểu thức sau:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_k}\ ;\ F_{ky} = -\frac{\partial \pi}{\partial y_k}\ ;\ F_{kz} = -\frac{\partial \pi}{\partial z_k}$$

Thực vậy:

Giả sử cơ hệ di chuyển từ vị trí $M(x_k, y_k, z_k)$ sang vị trí lân cận $M'(x_k + dx_k, y_k + dy_k, z_k + dz_k)$. Theo tính chất thứ nhất ta có:

$$A_{MM'} = \pi_M - \pi_{M'} = -(\pi_{M'} - \pi_M) = -d\pi$$

Mà: $A_{MM'} = dA$

$$\Rightarrow dA = -d\pi$$

Mặt khác, công nguyên tố được tính theo công thức:

$$dA = \sum\left(F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k\right)$$

Còn vi phân toàn phần của hàm thế năng có dạng:

$$d\pi = \sum\left(\frac{\partial \pi}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial \pi}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial \pi}{\partial z_k}dz_k\right)$$

Từ đẳng thức: $dA = -d\pi$, ta nhận được:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_k}; F_{ky} = -\frac{\partial \pi}{\partial y_k}; F_{kz} = -\frac{\partial \pi}{\partial z_k}.$$

V. Định lý bảo toàn cơ năng

Khi cơ hệ chuyển động trong trường lực thế thì cơ năng của cơ hệ được bảo toàn.

$$E = T + \pi = const$$

Chứng minh:

Giả sử cơ hệ chuyển động trong trường lực thế từ vị trí đầu M_0 đến vị trí M nào đó.

Theo định lý động năng, ta có:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_{\vec{F}_k}$$

Mặt khác trong trường lực thế theo tính chất thứ nhất ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{\vec{F}_k} = \sum_{k=1}^{n} \int_{MM_0} dA_{\vec{F}_k} = \pi_M - \pi_{M_0}$$

Vậy: $$T - T_0 = \pi_M - \pi_{M_0}$$

Hay: $$T + \pi_M = T_0 + \pi_{M_0}$$

THÍ DỤ

Thí dụ III.1

Một pittông chuyển động theo luật:

$$x = \left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right) cm$$

Trong đó: r là chiều dài tay quay OA, l là chiều dài thanh biên AB. Cho biết trọng lượng của pittông B là P. Tính áp lực lớn nhất lên mặt pittông (pittông đặt nằm ngang).

Bài giải:

Xét chuyển động của pittông B.

Pittông chuyển động theo phương ngang.

Xác định gia tốc $\vec{W}$.

Ta có: $$W = W_x = \ddot{x}$$

trong đó: $\dot{x} = -r\omega \sin\omega t - \frac{r^2\omega}{2l}\sin 2\omega t$

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \cos\omega t - \frac{r^2\omega^2}{l}\cos 2\omega t$$

Vậy: $$W_x = -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$$

Thay vào phương trình cơ bản động lực học

$$m\vec{W} = \vec{F}$$

trong đó: $\vec{F}$ - áp lực lên mặt pittông:

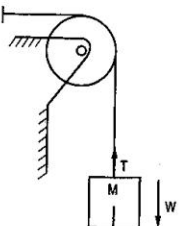
$$-\frac{P}{g}r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right) = -F$$

Áp lực lên mặt pittông lớn nhất khi:

$$\cos\omega t = 1 \text{ và } \cos 2\omega t = 1.$$

Vậy: $$F_{max} = \frac{P}{g}r\omega^2\left(1 + \frac{r}{l}\right)$$

Thí dụ III.2



Người ta hạ xuống giếng sâu vật nặng M có khối lượng m = 280kg. Vật chuyển động nhanh dần đều, 10s đầu đi được 35m. Tính sức căng của dây cáp treo vật.

Bài giải:

Khảo sát vật nặng.

Lực tác dụng lên vật: $\vec{P}, \vec{T}$.

Chọn gốc tọa độ là điểm bắt đầu, ta có:

$S_0 = 0$; $V_0 = 0$ (vật chuyển động từ nghỉ)

$$S = \frac{1}{2}Wt^2 \Rightarrow W = \frac{2S}{t^2}$$

$S = 35m$; $t = 10s$

$$W = \frac{2.35}{10^2} = 0,7m/s^2$$

Theo phương trình cơ bản động lực học

$$m\vec{W} = \Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$$

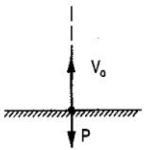
Ta có: $T = P - mW$

Hay: $T = mg - mW = m(g - W) = 280(9{,}81 - 0{,}7)$ kg m/s^2

$$T = 2250N$$

Thí dụ III.3

Một vật có trọng lượng P được ném thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là $\vec{V}_0$. Xác định độ cao tối đa vật có thể đạt tới và thời gian để vật đạt đến độ cao đó (bỏ qua sức cản của không khí).



Bài giải:

* Khảo sát vật:

Lực tác dụng lên vật: $\vec{P}$.

Chọn gốc tọa độ là điểm bắt đầu.

Từ phương trình cơ bản động lực học:

$$m\vec{W} = \vec{F}$$

Hay: $m\ddot{z} = -P = -mg$

$$\ddot{z} = -g$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \int -gdt = -gt + C_1$$

Lúc $t = t_0 = 0$ thì $\dot{z} = \dot{z}_0 = V_0 \Rightarrow C_1 = V_0$

Vậy: $\dot{z} = -gt + V_0$

$$\Rightarrow z = \int(-gt + V_0)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + C_2$$

Lúc $t = 0$ thì $z = z_0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Vậy: $z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t$

Khi vật đạt đến độ cao h thì $z = 0$:

$$-gt + V_0 = 0$$

$$\Rightarrow t_h = \frac{V_0}{g}$$

Vậy: $$h = -\frac{1}{2}g.\frac{V_0^2}{g^2} + V_0.\frac{V_0}{g}$$

$$h = \frac{1}{2g}V_0^2$$

Đáp số: Độ cao đạt được: $h = \frac{1}{2g}V_0^2$

Thời gian đạt độ cao h: $t_h = \frac{V_0}{g}$

Thí dụ III.4

Chất điểm có khối lượng m chuyển động trong một mặt phẳng nằm ngang dưới tác dụng của lực luôn hướng về điểm O cố định $\vec{F} = -k^2m\vec{r}$, trong đó $\vec{r}$ là bán kính vec tơ, k là hệ số tỉ lệ. Tìm phương trình chuyển động và quỹ đạo của điểm.

Biết rằng ở thời điểm t = 0, thì $x_0 = l; y_0 = 0; \dot{x}_0 = 0; \dot{y}_0 = V_0$.

Bài giải:

Khảo sát chất điểm. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

$$m\ddot{\vec{r}} = -k^2m\vec{r}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k^2mx$$

$$m\ddot{y} = -k^2my$$

hay: $$\ddot{x} = -k^2x \Rightarrow \ddot{x} + k^2x = 0$$

$$\ddot{y} = -k^2y \Rightarrow \ddot{y} + k^2y = 0$$

Nghiệm của các phương trình vi phân là:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt \quad (a)$$

$$y = C_3\cos kt + C_4\sin kt \quad (b)$$

$$\dot{x} = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt \quad (c)$$

$$\dot{y} = -C_3k\sin kt + C_4k\cos kt \quad (d)$$

Dựa vào điều kiện đầu để xác định các hệ số C_1, C_2, C_3, C_4.

Tại thời điểm ban đầu, t = 0:

$$x = x_0 = l \Rightarrow C_1 = l \quad (a)$$

$$y = y_0 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (b)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (c)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 = \dot{V}_0 \Rightarrow C_4 = \frac{V_0}{k} \quad (d)$$

Vậy phương trình chuyển động của chất điểm:

$$x = l\cos kt$$

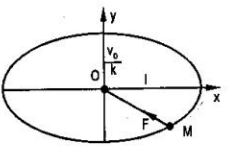
$$y = \frac{V_0}{k}\sin kt$$

Quỹ đạo của chất điểm (khử t), ta có:

$$\frac{x}{l} = \cos kt; \quad \frac{y}{\frac{V_0}{k}} = \sin kt$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{V_0}{k}\right)^2} = 1 \text{ là phương trình quỹ đạo.}$$

Vậy quỹ đạo là êlíp có hai bán trục là l và $\frac{V_0}{k}$



Thí dụ III.1 và III.2 là bài toán thứ nhất.

Thí dụ III.3 và III.4 là bài toán thứ hai.

Thí dụ III.5

Hai toa tàu có cùng trọng lượng là P. Một toa chạy với vận tốc là u đến chạm vào toa kia đang nằm yên để đẩy nó cùng chuyển động. Hãy xác định vận tốc các toa sau lúc va chạm?

Bài giải:

Khảo sát cơ hệ gồm hai toa tàu.

Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm trọng lượng toa và phản lực của mặt tựa đường ray tác dụng lên tại các bánh xe. Các lực này đều có phương vuông góc với phương nằm ngang.

Ta có: $\sum X^e = 0$

Vậy theo phương nằm ngang (phương x) động lượng của cơ hệ được bảo toàn, nghĩa là:

$$\left(\sum m_k \dot{x}_k\right)_1 = \left(\sum m_k \dot{x}_k\right)_0$$

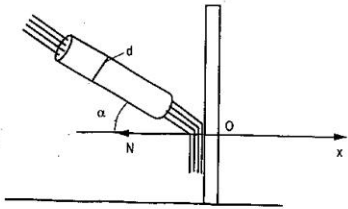
Lúc sau, cả hai toa cùng chuyển động nên vận tốc của chúng bằng nhau, ta gọi vận tốc là V thì: $(m_1 + m_2)V = m_1.u$.

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u$$

Thí dụ III.6

Một vòi nước chảy trong ống có đường kính d, hợp với phương nằm ngang một góc α. Vòi nước phun ra với vận tốc là V vào tường thẳng đứng. Hãy xác định áp lực của nước lên tường.

Bài giải:



Khảo sát khối nước chảy trong thời gian t, vậy khối lượng của khối nước:

$$m = \frac{\pi d^2}{4}.V.t.\gamma$$

trong đó: $\frac{\pi d^2}{4}$ - diện tích miệng ống nước;

V.t - chiều dài khối nước chảy trong thời gian t;

γ - khối lượng riêng của nước, (kg/m^3).

Gọi $\vec{N}$ là phản lực của tường lên khối nước.

Áp dụng định lý biến thiên động lượng, ta có:

$$K_{x(1)} - K_{x(0)} = \sum S_x^e \qquad (K_{x(1)} = 0)$$

Hay: $$-mV\cos\alpha = -N.t$$

$$\frac{\pi d^2}{4}.V.t.\gamma.V\cos\alpha = N.t$$

Vậy: $$N = \frac{\pi d^2}{4}V^2.\gamma.\cos\alpha$$

$K_{x(0)}$ - động lượng khối nước lúc vừa ra khỏi ống;

$K_{x(1)}$ - động lượng khối nước lúc chạm mặt tường, lúc đó $V_x = 0$ nên $K_{x(1)} = 0$;

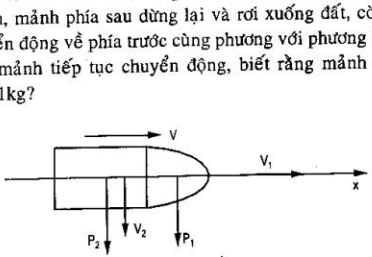
$\vec{N}$ - phản lực của mặt tường.

Do đó áp lực của khối nước lên mặt tường là $\vec{N}'$ cùng phương, ngược chiều và cùng trị số với $\vec{N}$.

Thí dụ III.7

Một viên đạn có khối lượng là M = 5kg chuyển động theo phương ngang có vận tốc V = 500m/s, đang lúc chuyển động thì kích nổ tách ra làm hai mảnh, mảnh phía sau dừng lại và rơi xuống đất, còn một mảnh tiếp tục chuyển động về phía trước cùng phương với phương ban đầu. Hỏi vận tốc của mảnh tiếp tục chuyển động, biết rằng mảnh này có khối lượng là m = 1kg?

Bài giải:



Khảo sát cơ hệ là viên đạn.

Ngoại lực tác dụng lên hệ là trọng lượng ta có: $\sum X^e = 0$. Vậy theo phương ngang động lượng của hệ được bảo toàn.

$$K_{x(1)} = K_{x(0)}$$

Hay: $$\left(\sum m_k \dot{x}_k\right)_1 = \left(\sum m_k \dot{x}_k\right)_0$$

trong đó: $\vec{V}_1$ - vận tốc của mảnh đạn tiếp tục chuyển động;

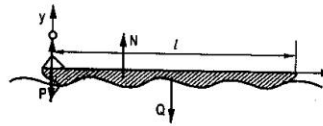
$\vec{V}_2$ - vận tốc của mảnh đạn dừng lại, $V_2 = 0$.

Vậy: $$V_1 = \frac{(m_1 + m_2)V}{m_1} = \frac{5}{1}.500 = 2.500\,m/s$$

$$V_1 = 2.500\ m/s$$

Thí dụ III.8

Thuyền có chiều dài l, một người đi từ đầu đến cuối thuyền. Hãy xác định độ dời của thuyền. Cho biết trọng lượng của thuyền là Q; trọng lượng của người là P. Bỏ qua sức cản của nước, ban đầu hệ đứng yên.



Bài giải:

Khảo sát hệ gồm thuyền và người.

Ngoại lực tác dụng lên hệ: Trọng lượng của thuyền $\vec{Q}$ và trọng lượng của người $\vec{P}$, lực đẩy của nước $\vec{N}$, các lực này đều vuông góc với phương ngang, do đó:

$$\sum X_k^e = 0$$

Hệ ban đầu đứng yên nên tọa độ của hệ theo phương x được bảo toàn, nghĩa là:

$$\left(\sum m_k x_k\right)_1 = \left(\sum m_k x_k\right)_0$$

Gọi S > 0 là độ dời của thuyền.

$x_{t(0)}, x_{t(1)}, x_{n(0)}, x_{n(1)}$ là tọa độ lúc đầu và lúc sau của thuyền và người, ta có:

$$x_{t(1)} = x_{t(0)} + S$$

$$x_{n(1)} = x_{n(0)} + l + S$$

Vậy: $$\frac{Q}{g}\left(x_{t(0)} + S\right) + \frac{P}{g}\left(x_{n(0)} + l + S\right) = \frac{Q}{g}x_{t(0)} + \frac{p}{g}x_{n(0)}$$

$$\Rightarrow Q.S + P(l + S) = 0$$

$$\Rightarrow Q.S + Pl + PS = 0$$

$$\Rightarrow (Q + P)S + Pl = 0$$

$$S = -\frac{Pl}{Q+P}$$

Ta thấy S mang dấu trừ, vậy giả thuyết S > 0 là sai, nghĩa là thực tế thuyền lùi lại một đoạn là S.

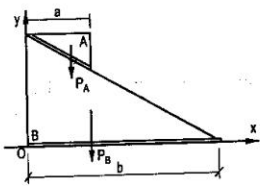
Đáp số: $S = -\frac{P}{Q+P}l$

Ta nhận thấy: Về kết quả độ dời S thì tử số là khối lượng của phần tử có chuyển động tương đối trong hệ, còn mẫu số là tổng khối lượng của cả hệ, phân số này tạo thành một hệ số nhân với di chuyển tương đối trong hệ.

Thí dụ III.9

Lăng trụ A có trọng lượng là P_A trượt trên mặt nghiêng của lăng trụ B có trọng lượng là P_B, từ trạng thái nghỉ cho đến khi lăng trụ A chạm mặt phẳng nằm ngang. Hãy xác định độ dời của lăng trụ B trên mặt phẳng ngang.

Bài giải:



Khảo sát cơ hệ gồm hai lăng trụ A và B, ngoại lực tác dụng lên hệ vuông góc với phương Ox, nên theo phương này tọa độ khối tâm của hệ được bảo toàn (hệ ban đầu nằm yên $X_C = 0 \Rightarrow X_C = const$).

Độ dời S của B ngược hướng với di chuyển của A (S < 0), độ dời tương đối của A là (b - a) theo phương x.

Qua ví dụ 4 ta có thể viết ngay: $S = \frac{P_A}{P_A + P_B}(b - a)$

Thật vậy:

Gọi $x_{A(0)}, x_{A(1)}, x_{B(0)}, x_{B(1)}$ là tọa độ lúc ban đầu và lúc sau của lăng trụ A, lăng trụ B:

$$x_{A(1)} = x_{A(0)} + (b-a) - S$$

$$x_{B(1)} = x_{B(0)} - S$$

Thế vào: $\left(\sum m_k x_k\right)_1 = \left(\sum m_k x_k\right)_0$, ta có:

$$\frac{P_A}{g}\left(x_{A(0)} + (b-a) - S\right) + \frac{P_B}{g}\left(x_{B(0)} - S\right) = \frac{P_A}{g}x_{A(0)} + \frac{P_B}{g}x_{B(0)}$$

$$\Rightarrow P_A(b-a) - P_A.S - P_B.S = 0$$

$$P_A(b-a) - (P_A + P_B)S = 0$$

Vậy: $$S = \frac{P_A}{P_A + P_B}(b-a)$$

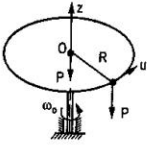
Đáp số: $S = \dfrac{P_A}{P_A + P_B}(b-a)$

Đối với dạng bài toán này có thể viết ngay kết quả mà không cần phải tính toán, điều cần lưu ý là phải xác định được các di chuyển tương đối trong cơ hệ theo phương mà khối tâm của cơ hệ được bảo toàn.

Thí dụ III.10

Đĩa tròn bán kính R, trọng lượng P, đĩa quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc là ω_0. Một xe con có trọng lượng p chuyển động theo vành của bánh với vận tốc tương đối là $\vec{u}$. Hãy xác định vận tốc góc ω lúc bấy giờ của đĩa.

Bài giải:



Hệ khảo sát gồm đĩa tròn và xe con, hệ ngoại lực tác dụng lên hệ gồm trọng lượng của các vật và phản lực của trục quay, nên ta có:

$$\sum \vec{m}_z(\vec{F}^e) = 0$$

Vậy mô men động lượng của hệ đối với trục z là được bảo toàn, nghĩa là:

$$\vec{L}_{z(1)} = \vec{L}_{z(0)} \quad (*)$$

Gọi vận tốc góc của đĩa lúc sau là ω, ta có:

$$\overline{L}_{z(1)} = \overline{L}^{d}_{z(1)} + \overline{L}^{x}_{z(1)}$$

trong đó: $\overline{L}^{d}_{z(1)}$ - mô men động lượng của đĩa lúc sau:

$$\overline{L}^{d}_{z(1)} = J_z.\omega = \frac{1}{2}m_1R^2.\omega = \frac{1}{2g}\rho.R^2.\omega$$

$\overline{L}^{x}_{z(1)}$ - mô men động lượng của xe lúc sau, vận tốc lúc sau của xe:

$$V^1 = u + \omega.R$$

$$L^{x}_{z(1)} = m_1V^1.R = \frac{1^2}{g}R(u+\omega R)$$

Vậy: $$\overline{L}_{z(1)} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2.\omega + \frac{p}{g}R(u+\omega R) = \frac{1}{2g}(2P+p)R^2.\omega + \frac{1}{g}pR.u$$

Còn: $$\overline{L}_{z(0)} = \overline{L}^{d}_{z(0)} + \overline{L}^{x}_{z(0)}$$

trong đó: $\overline{L}^{d}_{z(0)}$ - mô men động lượng của đĩa lúc đầu

$$\overline{L}^{d}_{z(0)} = J_z.\omega_0 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2.\omega_0$$

$\overline{L}^{x}_{z(0)}$ - mô men động lượng của xe con lúc đầu

$$\overline{L}^{x}_{z(0)} = \frac{p}{g}V^0.R = \frac{p}{g}R\omega_0.R = \frac{p}{g}R^2\omega_0$$

Vậy: $$\overline{L}_{z(0)} = \frac{1}{2g}PR^2.\omega_0 + \frac{1}{g}.pR^2.\omega_0 = \frac{1}{2g}(2P+p)R^2.\omega_0$$

Từ biểu thức (*) suy ra:

$$\frac{1}{2g}(2P+p)R^2.\omega = -\frac{1}{g}pR.u + \frac{1}{2g}(2P+p)R^2.\omega_0$$

Vậy: $$\omega = \frac{-2pRu + (2P+p)R^2\omega_0}{(2P+p)R^2}$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2p}{(2P+p)R}u$$

Đáp số: $\omega = \omega_0 - \dfrac{2p}{(2P+p)R}u$

Thí dụ III.11

Một lò xo có chiều dài 20cm, muốn nén vào 1cm cần một lực bằng 2N. Một viên bi có khối lượng m = 30g sẽ bay ra khỏi ống với vận tốc ban đầu bằng bao nhiêu, nếu lò xo bị nén 10cm? Ống đặt nằm ngang.

Bài giải:

Xét chuyển động của viên bi. Lực tác dụng lên viên bi gồm: Lực đàn hồi của lò xo, trọng lực của viên bi, phản lực của thành ống, trong đó chỉ có lực đàn hồi $\vec{F}$ là sinh công.

Ta có: $F = cx$

c - độ cứng lò xo: $c = \dfrac{[\text{Lực}]}{[\text{Chiều dài}]}$

$$c = \frac{2N}{1cm} = 200\frac{N}{m}$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng:

$$T_1 - T_0 = \sum A_{\vec{F}_k}$$

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mV^2$$

$$\sum A_{\vec{F}_k} = A_{\vec{F}} = \int_{x_0}^{x_t} cxdx$$

Như vậy: $$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}cx^2\Big|_0^l = \frac{1}{2}cl^2$$

Suy ra: $$V^2 = \frac{c.l^2}{m}$$

$$V = \sqrt{\frac{c}{m}}.l = \sqrt{\frac{200}{30.10^{-3}}}.10.10^{-2}$$

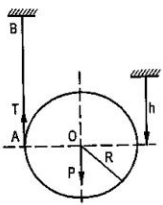
$$V = 8{,}16m/s$$

Đáp số: V = 8,16m/s

Thí dụ III.12

Người ta quấn một sợi dây mảnh quanh một hình trụ tròn có khối lượng là M. Đầu B của dây được gắn chặt, thả cho hình trụ rơi không có vận tốc ban đầu. Bán kính của hình trụ là R.

Hãy xác định vận tốc, gia tốc tâm O của hình trụ sau khi trụ hạ xuống một đoạn h? ($\vec{V}_0$; $\vec{W}_0$?).



Bài giải:

Xét chuyển động của hình trụ.

Hệ lực tác dụng: $\vec{P}, \vec{T}$

Trong đó: $\vec{T}$ - lực căng của dây không sinh công vì điểm đặt không chuyển dời (A là tâm vận tốc tức thời: $V_A = 0$).

- Xác định vận tốc $\vec{V}_0$:

Áp dụng định lý biến thiên động năng dạng hữu hạn:

$$T_1 - T_0 = \sum A_{\vec{F}_k}$$

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2$$

trong đó: $\omega = \dfrac{V_0}{R}$; $J_0 = MR^2$

Suy ra: $$T_1 = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}MR^2.\frac{V_0^2}{R^2}$$

$$T_1 = MV_0^2$$

$$\sum A_{\vec{F}_k} = A_{\vec{P}} = P.h$$

Vậy: $$MV_0^2 = P.h$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{P.h}{M}} = \sqrt{gh}$$

* Xác định gia tốc $\vec{W}_0$

Theo cách thông thường, ta có:

$$h = \frac{1}{2}W_0 t$$

$$V = W_0 t \Rightarrow t = \frac{V}{W_0}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{V^2}{W_0} \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2}\frac{V^2}{h} = \frac{1}{2}g$$

$$W_0 = \frac{1}{2}g$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng dạng vi phân (đạo hàm).

$$\frac{dT}{dt} = \sum \vec{F}_k.\vec{V}_k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(MV_0^2\right) = P.V_0$$

Hay $$2MV_0.\frac{dV_0}{dt} = P.V_0$$

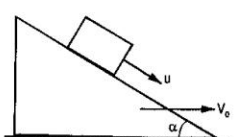
$$2\frac{P}{g}V_0 W_0 = PV_0 \Rightarrow W_0 = \frac{1}{2}g$$

Đáp số: $V_0 = \sqrt{gh}$; $W_0 = \frac{1}{2}g$

BÀI TẬP

I. ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG

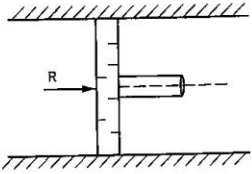
Bài tập III-1. Cho cơ hệ gồm vật nặng A trọng lượng P_1 đặt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ B có trọng lượng P_2. Góc nghiêng của mặt lăng trụ với mặt ngang là α. Lăng trụ đặt trên mặt phẳng ngang nhẵn như hình vẽ: ban đầu vật nặng đặt nằm yên trên lăng trụ, còn lăng trụ trượt sang phải với vận tốc V_0. Sau đó cho vật A trượt xuống mặt phẳng nghiêng lăng trụ với vận tốc tương đối u. Xác định vận tốc của lăng trụ.



Đáp số: $V = V_0 - \frac{P_1}{P_1 + P_2}u\cos\alpha$

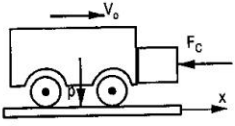
Bài tập III-2. Cho hợp lực R của tất cả các lực tác dụng lên Piston thay đổi theo thời gian theo quy luật R = 0,4P(1 - Kt), trong đó: P- trọng lượng piston, t- thời gian, K- hằng số tỉ lệ bằng 1,6 s^{-1}.

Xác định vận tốc piston tại thời điểm t_1 = 0,5s, nếu tại thời điểm ban đầu t_0 = 0 piston có vận tốc V_0 = 0,2m/s.



Đáp số: V = 1,4m/s

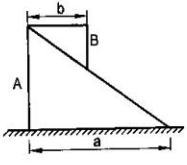
Bài tập III-3. Một ôtô trọng lượng P chuyển động theo phương ngang với vận tốc V_0 = 15m/s thì hãm phanh và chịu tác dụng lực cản tổng cộng bằng 1/10 trọng lượng của ôtô và theo phương chuyển động. Xác định khoảng thời gian ôtô chuyển động từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn và xác định quãng đường S ôtô đi được trong khoảng thời gian đó.



Đáp số: t = 15s; S = 112,5m

II. ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM

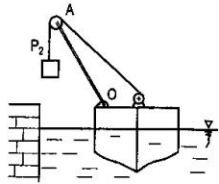
Bài tập III-4. Lăng trụ B đồng chất đặt lên lăng trụ A đồng chất đang nằm trên mặt phẳng ngang nhẵn. Tiết diện ngang các lăng trụ là các tam giác vuông. Trọng lượng lăng trụ A gấp ba lần trọng lượng lăng trụ B. Giả thuyết các lăng trụ đều nhẵn trơn.



Xác định độ dịch chuyển ngang L của lăng trụ A đi được khi lăng trụ B trượt trên A chớm tới mặt phẳng ngang.

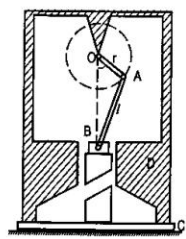
Đáp số: $L = \frac{a-b}{4}$

Bài tập III-5. Xác định dịch chuyển của cần cẩu nâng tải trọng $P_2 = 20$ kN. Khi thanh OA của cần cẩu quay được một góc $\alpha = 30°$ đạt tới vị trí thẳng đứng. Trọng lượng của toàn cần cẩu là $P_1 = 200$ kN, chiều dài thanh OA = 8m. Bỏ qua sức cản nước và trọng lượng thanh.



Đáp số: Dịch chuyển sang trái 0,36m

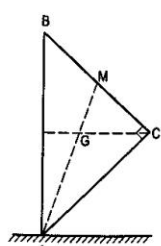
Bài tập III-6. Máy cắt kim loại gồm cơ cấu tay quay thanh truyền OAB, một lưỡi dao động gắn vào con chạy B và một lưỡi dao cố định gắn vào đế C, độ dài tay quay OA = r, trọng lượng P_1, độ dài thanh truyền AB = l với khối lượng bỏ qua. Trọng lượng con chạy B và lưỡi dao động là P_2. Trọng lượng đế C và vỏ D là P_3. Tay quay OA coi là thanh đồng chất quay quanh trục O với vận tốc góc $\omega = const$.



Xác định áp lực lên nền đặt máy. Giả thuyết $r/l << 1$.

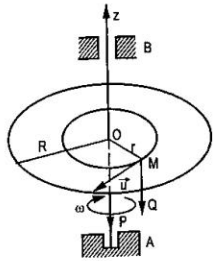
Đáp số: $N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{\omega^2}{2g}\left[(P_1 + 2P_2)\cos\omega t + 2P_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right]$

Bài tập III-7. Tấm tam giác vuông cân ABC tại C, với cạnh huyền AB = 12cm, đặt thẳng đứng và tiếp xúc với sàn nhẵn tại đỉnh A sao cho cạnh huyền thẳng đứng. Xác định quỹ đạo điểm M trung điểm cạnh BC vạch ra khi cho tấm rơi dưới tác dụng của trọng lượng tấm. Giả thiết trong quá trình chuyển động của tấm, đỉnh A luôn tiếp xúc với sàn ngang.



Đáp số: Đoạn cung elip $\frac{(x-2)^2}{10} + \frac{y^2}{90} = 1$

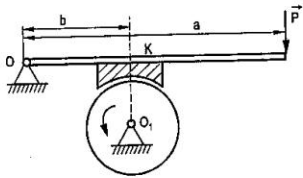
III. ĐỊNH LÝ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG



Bài tập III-8. Một tấm tròn nằm ngang có thể quay không ma sát quanh trục thẳng đứng z đi qua tâm O của nó. Một người trọng lượng Q đi trên mặt tấm theo đường tròn tâm O, bán kính r với vận tốc tương đối không đổi u.

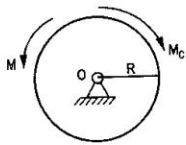
Hỏi tấm tròn quay với vận tốc góc bằng bao nhiêu? Nếu tấm tròn có bán kính R, trọng lượng P. Ở thời điểm đầu, tấm tròn và người đều đứng yên.

Đáp số: $\omega = \dfrac{2Qr}{PR^2 + 2Qr^2}u$



Bài tập III-9. Người ta dùng phanh tay để hãm một bánh xe đang quay với vận tốc góc ω_O. Tìm lực P cần thiết để tác dụng lên tay phanh tại A để bánh xe dừng hẳn sau T giây và tìm xem trong khoảng thời gian này bánh xe quay thêm được bao nhiêu vòng nữa.

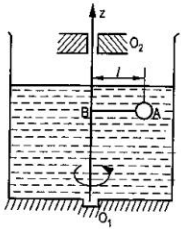
Đáp số: $P = \dfrac{J\omega_0 b}{RfTa}$; $n = \dfrac{\omega_0 T}{4\pi}$



Bài tập III-10. Một bánh đà động cơ bất đầu quay quanh trục cố định nhờ một ngẫu lực phát động có mô men M. Khi chuyển động, bánh đà còn chịu tác dụng ngẫu lực cản có mômen tỉ lệ với bình phương vận tốc góc $M_C = \alpha\omega^2$ (α- là hằng số tỉ lệ). Cho mô men quán tính của bánh đà với trục quay O là J. Xác định biểu thức vận tốc góc của bánh đà là hàm theo thời gian và giá trị vận tốc góc giới hạn của nó.

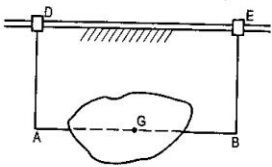
Đáp số: $\omega = \sqrt{\dfrac{m}{\alpha}}\dfrac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}+1}$; $\omega_{gh} = \sqrt{\dfrac{m}{\alpha}}$; với $\beta = \dfrac{2\sqrt{m\alpha}}{J} = \text{const}$

Bài tập III-11. Quả cầu A nằm trong bình chứa chất lỏng và gắn vào đầu thanh AB chiều dài l quay quanh trục thẳng đứng O_1O_2 với vận tốc góc ban đầu ω_0. Lực cản tác dụng lên quả cầu tỉ lệ với vận tốc góc: $R_C = \alpha m\omega$ với m là khối lượng quả cầu. α = const là hệ số tỉ lệ. Bỏ qua khối lượng thanh và trục quay. Hỏi trong thời gian bao lâu vận tốc góc giảm đi hai lần và tìm số vòng vật quay được.



Đáp số: $T = \frac{1}{\alpha}\ln 2; n = \frac{\omega_0}{4\pi\alpha}$

Bài tập III-12. Để xác định mô men quán tính J của vật thể cho trước đối với trục AB nào đó đi qua trọng tâm G của nó, người ta treo nó bằng các thanh AD và BE. Hai thanh này gắn chặt vào vật và lồng vào trục DE. Sau đó cho vật thể dao động bé và xác định được thời gian T của một nửa chu kỳ. Cho trọng lượng của vật là P, khoảng cách giữa hai trục AB và DE là h. Bỏ qua khối lượng thanh. Xác định J?.

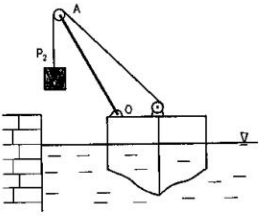


IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

Bài tập III-13. Một búa máy khối lượng m = 200kg trong 1 phút đập được 84 lần, hành trình búa là S = 0,35m. Hiệu suất có ích của búa máy η = 0,7. Xác định công suất lý thuyết của động cơ.

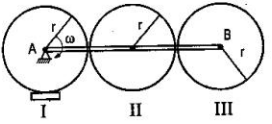
Đáp số: N = 2,747kW

Bài tập III-14. Dùng cần cẩu bốc than ở xà lan lên bờ. Thùng bốc than có khối lượng 1000 tấn và bốc được 600 kg trong một lần. Cần bốc dỡ 600 tấn than trong 12giờ. Thùng chứa than mỗi lần bốc phải kéo lên độ cao h = 10m. Tìm công suất lý thuyết của động cơ.



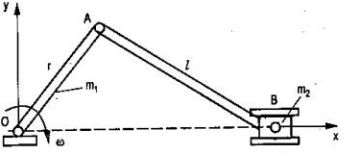
Đáp số: N = 3,63kW

Bài tập III-15. Cho cơ cấu truyền động nằm trong mặt phẳng nằm ngang chuyển động được nhờ tay quay OA nối trục của ba bánh xe bằng nhau I, II, III. Bánh xe I cố định, tay quay OA quay với vận tốc góc ω. Trọng lượng của mỗi bánh xe bằng P, bán kính là r, trọng lượng tay quay OA là Q. Tính động năng của hệ.



Đáp số: $T = \frac{r^2\omega^2}{3g}(33P + 8Q)$

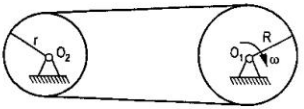
Bài tập III-16. Cho cơ cấu tay quay thanh truyền OAB: tay quay OA = r, khối lượng m_1 quay quanh trục O với vận tốc góc ω = const. Qua thanh truyền AB = l, khối lượng không đáng kể, chuyển động truyền cho con trượt B có khối lượng m_2 chuyển động dọc theo rãnh trượt nằm ngang.



Xác định biểu thức động năng của cơ cấu tay quay thanh truyền là hàm theo góc quay φ và vận tốc góc của tay quay OA.

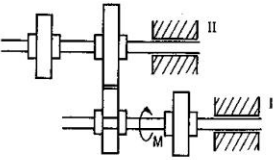
Đáp số: $T = \frac{r^2\omega^2}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}}\right]\right\}$

Bài tập III-17. Bánh đai lớn của hệ thống truyền động quay với vận tốc góc ω, bán kính của nó là R và mô men quán tính đối với trục quay là J_1. Bánh nhỏ có bán kính r và mô men quán tính đối với trục quay của nó là J_2. Trọng lượng dây xích trên các bánh đai là Q. Tính động năng cơ hệ.



Đáp số: $T = \frac{\omega^2}{2}\left[J_1 + J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{QR^2}{g}\right]$

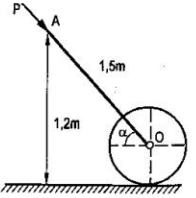
Bài tập III-18. Các trục quay I và II cùng các puli và các bánh răng gắn trên chúng có mô men quán tính tương ứng J_1 = 49 kg.m^2, J_2 = 39,2 kg.m^2. Tỉ số truyền động $K_{12} = \omega_1/\omega_2 = 2/3$.



Hỏi sau bao nhiêu vòng trục II sẽ quay với tốc độ n_2 = 120 vòng/phút. Nếu hệ phát động từ trạng thái nghỉ nhờ một mô men M = 490 Nm tác dụng lên trục I. Bỏ qua ma sát.

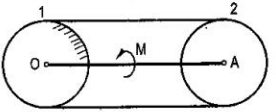
Đáp số: N = 2,34 vòng

Bài tập III-19. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn có bán kính r = 30cm, khối lượng m = 392kg chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng ngang do người đẩy với lực P có phương, chiều không đổi dọc theo thanh AO = 1,5m. Chiều cao đầu A so với nền ngang không đổi bằng 1,2m. Bỏ qua ma sát ở trục và ma sát ở lăn của nền. Xác định cường độ lực P sao cho khi người đẩy đi được 2m thì trục con lăn đạt vận tốc v = 0,8m/s. Bỏ qua trọng lượng thanh.



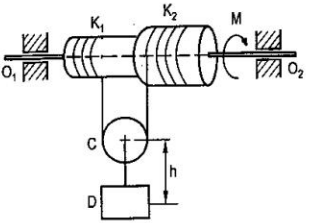
Đáp số: P = 117,6 N

Bài tập III-20. Tìm gia tốc góc của tay quay trong cơ cấu cho trên hình vẽ. Các bánh 1 và 2 có cùng bán kính, bánh 1 cố định, bánh 2 động. Coi tấm tròn đồng chất trọng lượng Q nối với nhau bằng đai truyền mềm, trọng lượng bỏ qua. Tay quay OA = l nối trục các bánh là đồng chất chịu tác dụng của mô men M không đổi quay độc lập quanh trục của bánh 1.



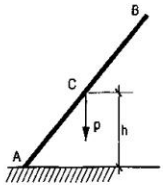
Đáp số: $\varepsilon = \dfrac{3gM}{(P+3Q)l^2}$

Bài tập III-21. Một tời kéo gồm hai trống K_1 và K_2 có bán kính lần lượt là r_1 và r_2 ghép cứng với nhau và gắn với trục nằm ngang tựa trên hai ổ đỡ O_1 và O_2. Khi tác dụng vào trục quay một ngẫu lực M thì trống K_2 cuốn dây và trống K_1 thả dây. Hai nhánh dây nối với nhau qua ròng rọc động C mang vật nặng D có trọng lượng P. Mô men quán tính của các trống K_1 và K_2 đối trục quay là J_1 và J_2 tương ứng. Bỏ qua khối lượng ròng rọc và dây. Xác định vận tốc góc của trục quay khi vật nặng D được kéo lên một đoạn h. Giả thiết ban đầu hệ đứng yên.

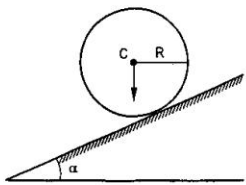


Đáp số: $\omega = 2\sqrt{2gh\dfrac{2M - P(r_1 - r_2)}{(r_2 - r_1)[P(r_2 - r_1)^2 + 4g(J_1 + J_2)]}}$

Bài tập III-22. Thanh đồng chất AB dài 2m rơi xuống và đầu A trượt trên nền ngang nhẵn. Tại thời điểm đầu thanh ở vị trí thẳng đứng và đứng yên. Xác định vận tốc khối tâm của thanh là hàm của độ cao h của nó so với sàn ngang.

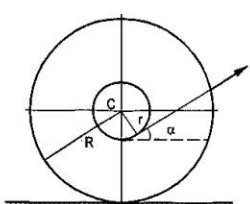


Bài tập III-23. Khối hình trụ đồng chất bán kính R trọng lượng P đặt trên mặt phẳng nghiêng so với phương ngang một góc α sao cho đường sinh của nó vuông góc với mặt phẳng nghiêng. Cho hệ số trượt, lăn giữa khối hình trụ và mặt phẳng nghiêng là f và k tương ứng. Xác định góc α để hình trụ lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng.



Đáp số: $\alpha = \text{arctg}\left(3f - \dfrac{2k}{R}\right)$

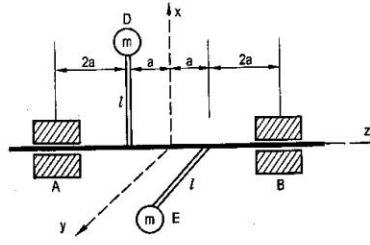
Bài tập III-24. Một con lăn trọng lượng P bán kính R lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang nhờ lực kéo T tác dụng vào dây cuốn vào tầng trong của con lăn có bán kính r và nghiêng với phương α. Cho hệ số ma sát giữa con lăn và mặt phẳng là f. Xác định lực chuyển động của con lăn.



Đáp số: $x_C = \dfrac{TR(R\cos\alpha - a)}{P(R^2 + \rho^2)} \cdot \dfrac{t^2}{2}$

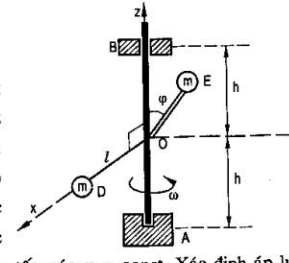
Bài tập III-25. Trên trục nằm ngang, người ta lắp cứng hai thanh cùng chiều dài l vuông góc với trục và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với

nhau. Ở đầu mỗi thanh gắn các quả cầu E và D cùng khối lượng m. Xác định áp lực động lực lên ổ trục A và B khi trục quay đều với vận tốc ω. Kích thước cho trên hình vẽ, bỏ qua khối lượng các thanh.



Đáp số: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2$

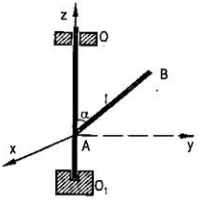
Bài tập III-26. Cho hai thanh OD và OE chiều dài l trọng lượng không đáng kể có gắn hai quả cầu khối lượng m tại điểm D và E tương ứng được gắn vào trục thẳng đứng z sao cho OD vuông góc với trục z. Thanh OE lập với trục z một góc ω và nằm trong mặt phẳng vuông góc với thanh OD. Các thanh cùng các quả cầu quay quanh trục z với vận tốc góc ω = const. Xác định áp lực động lực tại ở trục A và B, coi các quả cầu là các chất điểm.



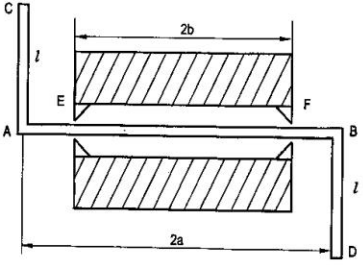
Đáp số: $X_A = X_B = -\frac{ml\omega^2}{2}$; $Y_A = \frac{ml\omega^2}{2}\left(1 + \frac{l}{a}\sin\alpha\cos\alpha\right)$;

$$Y_B = \frac{ml\omega^2}{2}\left(1 - \frac{l}{a}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

Bài tập III-27. Thanh đồng chất AB trọng lượng P dài l được ngàm chặn vào trục thẳng đứng với góc lệch α. Trục O_1O mang thanh AB quay với vận tốc góc ω không đổi. Xác định phản lực tại ngàm A.



Bài tập III-28. Người ta lồng vào hai đầu của trục giữa xe đạp hai tay quay như nhau AC và BD có cùng chiều dài l, trọng lượng Q và lập với nhau một góc 180°. Trục AB dài 2a trọng lượng P quay với vận tốc góc ω = const, tựa trên hai ổ đỡ E và F đặt đối xứng cách nhau khoảng 2b. Xác định áp lực ở ổ E và F khi quay AC thẳng đứng lên trên. Coi các tay quay là đồng chất.



Đáp số: $X_E = \frac{P}{2} + Q - \frac{Qal\omega^2}{2bg}$;

$X_F = \frac{P}{2} + Q + \frac{Qal\omega^2}{2bg}$;

$Y_E = Y_F = 0.$

PHẦN IV
CÁC NGUYÊN LÝ

Chương 1
NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

Nguyên lý D'Alembert làm cơ sở để hình thành một phương pháp giải bài toán động lực học bằng các phương trình cân bằng, phương pháp này gọi là phương pháp tĩnh - động.

Nguyên lý D'Alembert dựa trên cơ sở là lực quán tính của chất điểm, của cơ hệ. Lực quán tính là lực ảo (lực không có thực - không có tác dụng lên vật thể).

§1. LỰC QUÁN TÍNH

I. Lực quán tính của chất điểm

Chất điểm dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ chuyển động với gia tốc $\vec{W}$ thì lực quán tính của chất điểm:

$$\vec{F}^{qt} = -m\vec{w} = -m\vec{w}^{\tau} - m\vec{w}^{n} = \vec{F}^{(\tau)qt} + \vec{F}^{(n)qt}$$

Vậy: Lực quán tính của chất điểm là vectơ đặt lên chất điểm, có cùng phương, ngược chiều với gia tốc của chất điểm.

Dạng Đề các:
$$\begin{cases} \bar{X}^{qt} = -m\ddot{\bar{x}} \\ \bar{Y}^{qt} = -m\ddot{\bar{y}} \\ \bar{Z}^{qt} = -m\ddot{\bar{z}} \end{cases}$$

Dạng tự nhiên:
$$\begin{cases} \vec{F}^{(\tau)qt} = -m\ddot{s}\vec{\tau} \\ \vec{F}^{(n)qt} = -m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} \\ \vec{F}^{(b)qt} = 0 \end{cases}$$

II. Lực quán tính của cơ hệ

Cơ hệ gồm N chất điểm $M_1, M_2, ..., M_n$, ta có hệ lực quán tính: $\varphi(\vec{F}_k^{qt})$ với $\vec{F}_k^{qt}$ là lực quán tính của chất điểm thứ k của cơ hệ:

$$\vec{F}_k^{qt} = -m_k\vec{w}_k$$

Thu hệ lực $\varphi(\vec{F}_k^{qt})$ về tâm O ta được:

$$\varphi(\vec{F}_k^{qt}) \sim (\vec{F}_O^{qt}, \vec{M}_O^{qt})$$

Với:

$$\vec{F}_O^{qt} = \sum \vec{F}_k^{qt} = \sum -m_k\vec{w}_k = -M\vec{W}_C$$

$$(\sum m_k\vec{r}_k = M\vec{r}_C \Rightarrow \sum m_k\vec{w}_k = M\vec{W}_C)$$

$$\vec{M}_O^{qt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^{qt}) = -\sum \vec{r}_k \wedge m_k\vec{w}_k$$

$\vec{M}_O^{qt}$ - ngẫu lực quán tính

III. Lực quán tính của vật rắn

1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Lấy khối tâm C làm tâm thu gọn:

$$\varphi(\vec{F}_k^{qt}) \sim (\vec{F}_C^{qt}, \vec{M}_C^{qt})$$

$$\vec{F}_C^{qt} = -M\vec{W}_C$$

$$\vec{M}_C^{qt} = -\sum \vec{r}_k \wedge m_k\vec{w}_k = \sum \vec{w}_k \wedge m_k\vec{r}_k$$

Vật rắn chuyển động tịnh tiến: $\vec{w}_k = \vec{W}_C$.

$$\vec{M}_C^{qt} = \sum \vec{w}_k \wedge m_k\vec{r}_k = \sum \vec{W}_C \wedge m_k\vec{r}_k = \vec{W}_C \wedge \sum m_k\vec{r}_k$$

$$= \vec{W}_C \wedge M.\vec{r}_C = \vec{W}_C \wedge M.\vec{0} = 0$$

Do đó thu gọn hệ lực quán tính của vật chuyển động tịnh tiến về khối tâm C, ta được một lực đặt tại khối tâm C.

$$\vec{F}_C^{qt} = -M\vec{W}_C$$

2. Vật rắn quay quanh trục cố định đi qua khối tâm C của vật

$$\vec{F}_C^{qt} = -M\vec{W}_C = 0$$

$$\vec{M}_C^{qt} = -J_{ZC}\vec{\varepsilon}$$

3. Vật rắn chuyển động song phẳng

Vật có vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$.

Lấy khối tâm C của vật làm tâm thu gọn.

Ta có: $\vec{w}_k = \vec{w}_C + \vec{w}_k^t + \vec{w}_k^n = \vec{w}_C + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k - \omega^2 \vec{r}_k$

$$\vec{F}_C^{qt} = -M\vec{W}_C$$

$$\vec{M}_C^{qt} = -\sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{w}_k$$

$$= -\sum \vec{r}_k \wedge m_k (\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k - \omega^2 \vec{r}_k)$$

Mà: $$\sum \vec{r}_k \wedge m_k (-\omega^2 \vec{r}_k) = 0$$

$$\Rightarrow M_C^{qt} = -\sum \vec{r}_k \wedge m_k (\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k)$$

$$= -\sum m_k r_k^2 \vec{\varepsilon} = -J_C \vec{\varepsilon}$$

Do đó: Thu gọn hệ lực quán tính của vật chuyển động song phẳng về khối tâm C, ta được một lực đặt tại khối tâm C và một ngẫu lực:

$$\vec{F}_C^{qt} = -M\vec{W}_C$$

$$\vec{M}_C^{qt} = -J_C \vec{\varepsilon}$$

+ *Lực quán tính* (vai trò là lực): Đặt tại khối tâm của vật, ngược chiều gia tốc của vật.

+ *Ngẫu lực quán tính:* Nằm trong các mặt phẳng song song mặt phẳng chứa gia tốc góc và ngược chiều gia tốc góc của vật.

§2. NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

I. Đối với chất điểm

Các lực tác dụng lên chất điểm (các lực cho, các phản lực liên kết) và lực quán tính của chất điểm lập thành hệ lực cân bằng.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n, \vec{F}^{qt}) \sim 0$$

II. Đối với cơ hệ

Các lực tác dụng lên cơ hệ (các lực cho, các phản lực liên kết) và lực quán tính của cơ hệ lập thành hệ lực cân bằng:

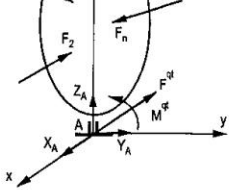
$$(\varphi(\vec{F}_k), \psi(\vec{N}_i), \phi(\vec{F}_j^{qt})) \sim 0$$

Từ đó ta lập các phương trình cân bằng được gọi là các phương trình cân bằng tĩnh - động, nó giúp giải bài toán động lực học. Phương pháp này gọi là phương pháp tĩnh - động.

§3. XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC TRỤC QUAY

Khảo sát vật rắn quay quanh một trục cố định oz dưới tác dụng của các lực hoạt động $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$, có vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc gốc $\vec{\varepsilon}$.

Các ngoại lực tác dụng lên vật rắn bao gồm các lực hoạt động $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$ và các phản lực ổ trục $\vec{R}_A$ và $\vec{R}_B$.



Hình 4-1

Chọn hệ trục tọa độ gắn liền vào vật Axyz, có trục Az trùng với trục quay. Hệ lực quán tính của vật rắn thu gọn về tâm A được một lực $\vec{F}_A^{qt}$ và ngẫu lực $\vec{M}_A^{qt}$.

Theo nguyên lý D'Alembert:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{F}_A^{qt}, \vec{M}_A^{qt}) \sim 0$$

Ta có hệ phương trình cân bằng tĩnh - động:

$$\sum X = \sum F_{kx} + R_{Ax} + R_{Bx} + My_C\varepsilon + Mx_C\omega^2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = \sum F_{ky} + R_{Ay} + R_{By} + My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = \sum F_{kx} + R_{Az} = 0 \quad (3)$$

$$\sum \bar{m}_X = \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) + m_x\left(\vec{R}_A\right) + m_x\left(\vec{R}_B\right) - J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\varepsilon = 0 \quad (4)$$

$$\sum \bar{m}_y = \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) + m_y\left(\vec{R}_A\right) + m_y\left(\vec{R}_B\right) + J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon = 0 \quad (5)$$

$$\sum \bar{m}_z = \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) - J_z\varepsilon = 0 \quad (6)$$

Vì hệ trục tọa độ gắn liền vào vật quay nên các đại lượng x_C, y_C, J_{zx}, J_z là không đổi.

Như vậy: Ta nhận được sáu phương trình.

- Phương trình cuối cùng không chứa các phản lực ổ trục, mà cho phép xác định chuyển động của vật quay, được gọi là phương trình vi phân vật quay quanh trục cố định Z:

$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right) - J_z\varepsilon = 0$$

- Năm phương trình còn lại cho phép ta xác định các phản lực ổ trục tại A và B.

$$\sum X = \sum F_{kx} + R_{Ax} + R_{Bx} + My_C\,\varepsilon + Mx_C\,\omega^2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = \sum F_{ky} + R_{Ay} + R_{By} + My_C\,\omega^2 - Mx_C\,\varepsilon = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = \sum F_{kx} + R_{Az} = 0 \quad (3)$$

$$\sum \bar{m}_X = \sum \bar{m}_x\left(\vec{F}_k\right) + \bar{m}_x\left(\vec{R}_A\right) + \bar{m}_x\left(\vec{R}_B\right) - J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\varepsilon = 0 \quad (4)$$

$$\sum \bar{m}_y = \sum \bar{m}_y\left(\vec{F}_k\right) + \bar{m}_y\left(\vec{R}_A\right) + \bar{m}_y\left(\vec{R}_B\right) + J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon = 0 \quad (5)$$

- Chú ý rằng các phản lực ổ trục phụ thuộc vào các lực hoạt động và các yếu tố động học của vật rắn, tức vận tốc góc $\bar{\omega}$ và gia tốc góc $\bar{\varepsilon}$ của vật quay.

Thành phần của phản lực ổ trục chỉ phụ thuộc vào các yếu tố động học của vật quay ($\bar{\omega}$ và $\bar{\varepsilon}$) được gọi là phản lực động lực của ổ trục.

Để làm sáng tỏ điều này, ta biểu diễn phản lực ổ trục dưới dạng:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^t + \vec{R}_A^d; \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^t + \vec{R}_B^d$$

trong đó:

$\vec{R}_A^t, \vec{R}_B^t$ - các thành phần không phụ thuộc vào chuyển động, tức không chứa ω, ε được gọi là các phản lực tĩnh;

$\vec{R}_A^d, \vec{R}_B^d$ - các thành phần phụ thuộc vào chuyển động, tức chứa ω và ε được gọi là các phản lực động lực.

$$\Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{R}_A^t, \vec{R}_A^d, \vec{R}_B^t, \vec{R}_B^d, \vec{F}_A^{qt}, \vec{M}_A^{qt}) \sim 0$$

Mà: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{R}_A^t,, \vec{R}_B^t,) \sim 0$

$$\Rightarrow (\vec{R}_A^d, \vec{R}_B^d, \vec{F}_A^{qt}, \vec{M}_A^{qt}) \sim 0$$

Ta có hệ phương trình:

$$\sum X = R_{Ax}^d + R_{Bx}^d + Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon = 0$$

$$\sum y = R_{Ay}^d + R_{By}^d + My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon = 0$$

$$\sum \overline{m}_x = m_x\left(\vec{R}_A^d\right) + m_x\left(\vec{R}_B^d\right) - J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\omega^2 = 0$$

$$\sum \overline{m}_y = m_y\left(\vec{R}_A^d\right) + m_y\left(\vec{R}_B^d\right) + J_{yz}\varepsilon + J_{zx}\omega^2 = 0$$

Các phương trình trên được gọi là các phương trình xác định phản lực động lực.

Việc xuất hiện các phản lực động lực làm giảm độ bền, độ chính xác, năng suất và gây hư hỏng máy. Chính vì vậy, cần phải triệt tiêu hoặc giảm các phản lực động lực. Điều kiện cần và đủ để triệt tiêu các phản lực động lực là trục quay phải thỏa mãn các điều kiện:

$$x_C = y_C = 0$$

$$J_{yz} = J_{zx} = 0$$

Tức là trục quay phải qua trọng tâm và là trục quán tính chính. Nói khác đi để triệt tiêu hoàn toàn phản lực động lực, trục quay phải là trục quán tính chính trung tâm.

Ghi chú: *Giải bài toán theo nguyên lý D'ALEMBERT ta phải đặt lực lên hệ khảo sát: Lực tác dụng lên cơ hệ và lực quán tính của cơ hệ.*

Chương 2

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

I. Cơ hệ không tự do

Là tập hợp các chất điểm mà trong chuyển động vị trí và vận tốc của chúng bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước.

II. Liên kết - phương trình liên kết - phân loại liên kết

1. Liên kết

Là những điều kiện ràng buộc các chất điểm của cơ hệ về mặt hình học và động học (vị trí và vận tốc của các chất điểm thuộc cơ hệ).

2. Phương trình liên kết

Là các phương trình và bất phương trình biểu thị về mặt toán học mối ràng buộc về mặt hình học và động học đối với các chất điểm thuộc cơ hệ, chúng có dạng sau:

$$f_\alpha\left(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) \geq 0,\ \alpha = 1....a$$

trong đó: a - số phương trình liên kết của cơ hệ.

Các phương trình liên kết được viết dưới dạng tắt sau:

$$f_\alpha\left(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t\right) \geq 0,\ \alpha = 1....a$$

Để minh họa, ta khảo sát chuyển động của con lắc toán học gồm chất điểm M, khối lượng m, buộc vào đầu dây mảnh, không giãn, có độ dài l, còn đầu kia được buộc vào một điểm O cố định.

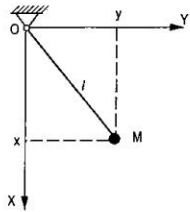
Điều kiện ràng buộc đối với chuyển động của con lắc là chất điểm M luôn luôn cách điểm cố định O một khoảng không lớn hơn l. Về mặt toán học, điều kiện này được biểu diễn như sau:

$$f(x_M, y_M, t) = x^2 + y^2 - l^2 \le 0$$

Tức là điểm M luôn luôn chuyển động bên trong (kể cả biên) của mặt tròn tâm O, bán kính l, ở đây số phương trình liên kết bằng một, tức a = 1.

Nếu giả thiết dây luôn luôn ở trạng thái căng, tức xem OM là một thanh mảnh cứng, thì phương trình liên kết có dạng:

$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$



Hình 4-2

Tức trong quá trình chuyển động, điểm M không thể rời khỏi đường tròn tâm O, bán kính l.

Trong trường hợp chiều dài của dây thay đổi theo thời gian, tức l = l(t) và giả thiết dây luôn luôn ở trạng thái căng thì phương trình liên kết được viết như sau:

$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$$

3. Phân loại liên kết

a) Liên kết giữ và không giữ

Nếu các điều kiện ràng buộc được mô tả bằng những phương trình thì liên kết được gọi là giữ hay liên kết hai phía, còn trong trường hợp được mô tả bằng những bất phương trình thì liên kết được gọi là không giữ hay liên kết một phía.

b) Liên kết dừng và không dừng

Nếu phương trình liên kết không chứa biến thời gian thì liên kết được gọi là dừng, trong trường hợp ngược lại là liên kết không dừng. Trường hợp con lắc có độ dài thay đổi theo thời gian, ta có liên kết không dừng.

c) Liên kết hôlônôm và không hôlônôm

Nếu trong phương trình liên kết không chứa các yếu tố vận tốc hoặc có chứa các yếu tố vận tốc nhưng nhờ các phép tích phân đưa được về dạng không chứa các yếu tố vận tốc thì liên kết được gọi là hôlônôm. Còn trong phương trình liên kết chứa các yếu tố vận tốc không khả tích thì liên kết được gọi là không hôlônôm.

Ở đây, chúng ta chỉ giới hạn việc khảo sát đối với các cơ hệ chịu liên kết hôlônôm, giữ và dừng, tức phương trình liên kết của chúng có dạng:

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N) = 0\ ,\ \alpha = 1.....a$$

III. Di chuyển khả dĩ - Số bậc tự do - Tọa độ suy rộng

1. Di chuyển khả dĩ của cơ hệ

Là tập hợp các độ dời vô cùng bé của cơ hệ, cơ hệ di chuyển từ vị trí đang xét sang vị trí lân cận phù hợp với các liên kết (không phá vỡ các liên kết).

Di chuyển khả dĩ được ký hiệu bởi $\delta\vec{r}, \delta x, \delta y, \delta z, \delta s, \delta\theta.....$; ($\vec{r}$ là vectơ định vị của chất điểm, s là đoạn đường đi được.....).

2. Bậc tự do của cơ hệ

Là số khả năng chuyển động độc lập của cơ hệ.

- Chất điểm tự do trong mặt phẳng có 2 chuyển động tịnh tiến.
- Chất điểm tự do trong không gian có 3 chuyển động tịnh tiến.
- Vật rắn tự do trong mặt phẳng có 2 chuyển động tịnh tiến và 1 chuyển động quay quanh một điểm.
- Vật rắn tự do trong không gian có 3 chuyển động tịnh tiến và 3 chuyển động quay quanh ba trục.

Ký hiệu số bậc tự do của cơ hệ là S, ta có:

- Cơ hệ là các chất điểm trong mặt phẳng: S = 2n-a.
- Cơ hệ là các chất điểm trong không gian: S = 3n-a.
- Cơ hệ là các vật rắn trong mặt phẳng: S = 3n-a.
- Cơ hệ là các vật rắn trong không gian: S = 6n-a.

n - số chất điểm (vật rắn) trong cơ hệ.

a - số phương trình liên kết.

3. Tọa độ suy rộng của cơ hệ

Tập hợp các thông số xác định được vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu được gọi là các tọa độ suy rộng của cơ hệ.

Tập hợp các thông số độc lập đủ để xác định được vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu được gọi là các tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ.

Các tọa độ suy rộng được ký hiệu là $q_1, q_2, ..., q_n$.

Bản chất vật lý của tọa độ suy rộng là bất kỳ, do đó thứ nguyên của nó là độ dài hoặc là góc.

Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ các tọa độ suy rộng, do đó các tọa độ Đề các của cơ hệ được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, ..., q_S, t)$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, ..., q_S, t)$$

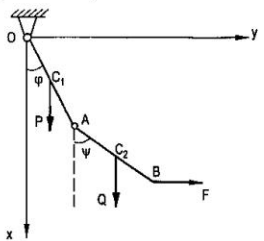
$$z_k = z_k(q_1, q_2, ..., q_S, t)$$

Hoặc viết ở dạng rút gọn:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ...q_s, t)$$

Nếu các tọa độ suy rộng là độc lập, ta có tọa độ suy rộng đủ, chúng được ký hiệu qua q_1, q_2, ..., q_S. Trường hợp ngược lại, ta có tọa độ suy rộng dư q_1, q_2, ..., q_m ($m > S$).

Ta xét trường hợp con lắc kép:



Hình 4-3

Để xác định vị trí của con lắc kép, ta có thể dùng một trong các tập hợp của các thông số sau:

$$\{x_A, y_A, x_B, y_B\}; \quad \{x_A, y_A, \psi\}, \{\varphi, \psi\}, ...$$

Các tọa độ Đề các của các chất điểm của cơ hệ, tức $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$, đều có thể được biểu diễn qua một trong các tập hợp nêu trên. Trong 3 tập hợp của các tọa độ nêu trên thì hai tập hợp đầu có các thông số là không độc lập với nhau.

Thực vậy, đối với tập hợp $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$ ta có:

$$x_A^2 + y_A^2 - OA^2 = 0; \quad (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - AB^2 = 0$$

Còn đối với tập hợp $\{x_A, y_A, \psi\}$ thì:

$$x_A^2 + y_A^2 - OA^2 = 0$$

Chỉ có tập hợp thứ ba $\{\varphi, \psi\}$ các thông số φ và ψ độc lập với nhau. Các tọa độ Đề các của các chất điểm của cơ hệ được biểu diễn qua chúng bởi các hệ thức sau:

$$x_A = OA\cos\varphi$$
$$y_A = OA\sin\varphi$$
$$x_B = OA\cos\varphi + AB\cos\psi$$
$$y_B = OA\sin\varphi + AB\sin\psi$$

Vậy $\{\varphi, \psi\}$ là các tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ con lắc kép, các tập hợp $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$ và $\{x_A, y_A, \psi\}$ là các tọa độ suy rộng dư.

Bậc tự do của cơ hệ và số tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ thì bằng nhau.

IV. Công khả dĩ - Lực suy rộng

Công của lực $\vec{F}$ trong di chuyển khả dĩ $\delta\vec{r}$ được gọi là công khả dĩ của lực $\vec{F}$.

Ký hiệu $\delta A_{\vec{F}}$: $\delta A_{\vec{F}} = \vec{F}.\delta\vec{r}$

Cho cơ hệ gồm n chất điểm di chuyển khả dĩ $\delta\vec{r}_k$. Theo công thức công khả dĩ sẽ là:

$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.\delta\vec{r}_k = \sum\left(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k\right)$$

trong đó: $\vec{r}_k = \vec{r}_k(\vec{q}_1, \vec{q}_2, ...\vec{q}_n)$ - các vectơ định vị của chất điểm trong hệ tọa độ suy rộng.

$\Rightarrow$ Vi phân riêng phần của hàm vectơ $\vec{r}_k$ bằng:

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

trong đó: δq_i - gia số của tọa độ suy rộng q_s.

$$\Rightarrow \sum \delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k.\delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{n} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}.\delta q_i = \sum\left(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k\right)$$

Chọn các tọa độ suy rộng đủ $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Ta tính được:

$$\delta x_k = \sum \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i; \quad \delta y_k = \sum \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\delta q_i; \quad \delta z_k = \sum \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

Khi thay các đại lượng này vào biểu thức công khả dĩ ở trên và sau khi sắp xếp lại các số hạng, ta được:

$$\sum \delta A_{\vec{r}_k} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \qquad (a)$$

trong đó: $$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \qquad (b)$$

Được gọi là lực suy rộng tương ứng với tọa độ suy rộng q_i.

Chú ý:

1. Công thức (a) vẫn còn đúng cho trường hợp các tọa độ suy rộng dư.

2. Lực suy rộng là đại lượng vô hướng, thứ nguyên của lực suy rộng là: $[Q] = \frac{[A]}{[q]}$. Bản chất vật lý của lực suy rộng phụ thuộc vào bản chất vật lý của tọa độ suy rộng tương ứng, chẳng hạn, nếu tọa độ suy rộng là độ dài thì lực suy rộng là lực, nếu tọa độ suy rộng là góc thì lực suy rộng là ngẫu lực v.v....

3. Các phương pháp tính lực suy rộng.

a) Dựa vào biểu thức

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

Theo công thức tính công khả dĩ của các lực trong tọa độ Đề các, biểu diễn các tọa độ Đề các theo tọa độ suy rộng, tính các biến phân của tọa độ Đề các theo các biến phân của tọa độ suy rộng và thay vào biểu thức của công khả dĩ. Các đại lượng đứng trước các biến phân của các tọa độ suy rộng trong biểu thức công khả dĩ chính là các lực suy rộng.

b) Trong trường hợp chọn các tọa độ suy rộng đủ, các biến phân của tọa độ suy rộng là độc lập với nhau.

Dựa vào tính chất trên ta tính từng lực suy rộng riêng lẻ bằng việc tính công khả dĩ của các lực trong các di chuyển khả dĩ của tọa độ suy rộng tương ứng.

Để tính lực suy rộng Q_i ứng với tọa độ suy rộng q_i, ta chọn di chuyển khả dĩ $\delta q_i \neq 0$, còn các di chuyển khả dĩ còn lại bằng không:

$$\delta q_1 = 0;\ \delta q_2 = 0;\ \ldots;\ \delta q_{i-1} = 0;\ \delta q_i \neq 0;\ \delta_{i+1} = 0 \ldots..$$

Tức là, ta chỉ cho tọa độ suy rộng q_i biến thiên một lượng δq_i, còn các tọa độ suy rộng khác được giữ không đổi.

Tính công khả dĩ của các lực trong di chuyển khả dã chọn, ta có:

$$\sum \delta A_k(\delta q_i) = Q_i \delta q_i$$

Do đó:
$$Q_i = \frac{\sum \delta A_k(\delta q_i)}{\delta q_i}$$

Minh họa

Tính lực suy rộng của các lực hoạt động gồm lực $\vec{F}$ và các trọng lượng $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ của các thanh OA và AB của con lắc kép. Cho OA = R, AB = l, $OC_1 = s_1$, $AC_2 = s_2$. Trong đó C_1 và C_2 là các trọng tâm của các thanh OA và AB.

Bài giải:

a) Áp dụng phương pháp thứ nhất

Dựa vào biểu thức :

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

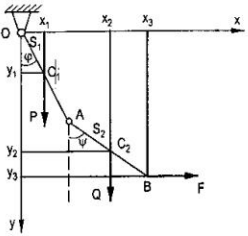
Chọn các tọa độ suy rộng đủ là φ và ψ.

Chọn hệ trục Oxy như hình 4-4, các lực hoạt động có điểm đặt $C_1(x_1,y_1)$; $C_2(x_2,y_2)$; $B(x_3,y_3)$.

$$\vec{P}\begin{cases} P_x = 0;\ x_1 = s_1\sin\varphi \\ P_y = P;\ y_1 = s_1\cos\varphi \end{cases}$$

$$\bar{Q}\begin{cases} Q_x = 0;\ x_2 = R\sin\varphi + s_2\sin\psi \\ Q_y = Q;\ y_2 = R\cos\varphi + s_2\cos\psi \end{cases}$$

$$\bar{F}\begin{cases} F_x = F;\ x_3 = R\sin\varphi + l\sin\psi \\ F_y = 0;\ y_3 = R\cos\varphi + l\cos\psi \end{cases}$$



Hình 4-4

Thực hiện các phép tính sau:

$$\frac{\partial x_2}{\partial\varphi} = R\cos\varphi;\quad \frac{\partial x_2}{\partial\psi} = s_2\cos\psi$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial\varphi} = R\cos\varphi;\quad \frac{\partial x_3}{\partial\psi} = l\cos\psi$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial\varphi} = -s_1\sin\varphi;\quad \frac{\partial y_1}{\partial\psi} = 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial\varphi} = -R\sin\varphi;\quad \frac{\partial y_2}{\partial\psi} = -s_2\sin\psi$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial\varphi} = -R\sin\varphi;\quad \frac{\partial y_2}{\partial\psi} = -s_2\sin\psi$$

Vậy:

$$Q_\varphi = P_y\frac{\partial y_1}{\partial\varphi} + Q_y\frac{\partial y_2}{\partial\varphi} + F_x\frac{\partial x_3}{\partial\varphi} = FR\cos\varphi - (QR + Ps_1)\sin\varphi$$

$$Q_\psi = P_y\frac{\partial y_1}{\partial\psi} + Q_y\frac{\partial y_2}{\partial\psi} + F_x\frac{\partial x_3}{\partial\psi} = Fl\cos\psi - Qs_2\sin\psi$$

b) Áp dụng phương pháp thứ hai

Tìm hình chiếu các lực trên các trục tọa độ Đề các và biểu thức các tọa độ Đề các của các điểm đặt của các lực theo tọa độ suy rộng, sau đó áp dụng công thức:

$$\sum\delta A_{\bar{F}_k} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i$$

Biểu thức công khả dĩ của các lực có dạng:

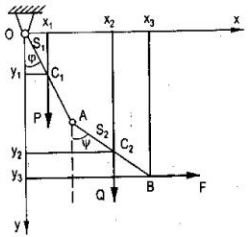
$$\sum\delta A_k = P\delta y_1 + Q\delta y_2 + F\delta x_3$$

Dễ dàng tính được: $\delta y_1 = -s_1\sin\varphi\delta\varphi$; $\delta y_2 = -R\sin\varphi\delta\varphi - s_2\sin\psi\,\delta\psi$;

$$\delta x_3 = R\cos\varphi\delta\varphi + l\cos\psi\delta\psi$$

Vậy: $\sum \delta A_k = \left[FR\cos\varphi - (QR + Ps_1)\sin\varphi\right]\delta\varphi + (Fl\cos\psi - Qs_2\sin\psi)\delta\psi$

$$\Rightarrow Q_\varphi = FR\cos\varphi - (QR + Ps_1)\sin\varphi; \quad Q_\varphi = Fl\cos\psi - Qs_2\sin\psi$$



Hình 4-5

c) Áp dụng phương pháp thứ ba

Để tính lực suy rộng Q_φ, ta chọn di chuyển khả dĩ: $\delta\varphi \neq 0$; $\delta\psi = 0$, tức cho thanh OA di chuyển quay quanh trục qua O với góc $\delta\varphi$, còn thanh AB tịnh tiến.

Công khả dĩ của các lực trong di chuyển khả dĩ đã chọn bây giờ là:

$$\sum \delta A(\delta\varphi) = -Ps_1\sin\varphi\,\delta\varphi - QR\sin\varphi\,\delta\varphi + FR\cos\varphi\,\delta\varphi$$

Từ đó: $Q_\varphi = \dfrac{\sum \delta A(\delta\varphi)}{\delta\varphi} = \left[FR\cos\varphi - (Ps_1 + QR)\sin\varphi\right]$

Để tính lực suy rộng Q_ψ, ta chọn di chuyển khả dĩ như sau, $\delta\varphi = 0$; $\delta\psi \neq 0$, tức giữ cố định thanh OA, còn cho thanh AB di chuyển quay $\delta\psi$ quanh trục qua A. Công khả dĩ của các lực trong trường hợp này được tính như sau:

$$\sum \delta A(\delta\psi) = -Qs_2\sin\psi\,\delta\psi + Fl\cos\psi\,\delta\psi$$

Do đó: $$Q_\psi = \frac{\sum \delta A(\delta\psi)}{\delta\psi} = (Fl\cos\psi - Qs_2\sin\psi)$$

Chú ý:

- Phương pháp thứ ba rất thuận tiện, khi các tọa độ suy rộng được chọn là đủ.

- Khi các lực đều có thế và hàm thế năng Π được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng.

$\Pi\left[x_k(q_1,...,q_n), y_k(q_1,...,q_n), z_k(q_1,...,q_n)\right] = \Pi(q_1, q_2,...,q_n)$ thì các lực suy rộng được tính theo công thức:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

V. Liên kết lý tưởng

Liên kết được gọi là liên kết lý tưởng nếu tổng công của các phản lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ bằng không.

$$\sum \delta A_k^r = \sum \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0$$

trong đó:

$\vec{R}_k$ - lực liên kết tác dụng lên chất điểm M_k thuộc cơ hệ;

$\delta\vec{r}_k$ - di chuyển khả dĩ của chất điểm M_k.

Trong thực tế, nếu bỏ qua được ma sát và tính đàn hồi của các vật thể tạo thành cơ hệ thì các liên kết thường gặp là liên kết lý tưởng.

Ví dụ:

1- Vật rắn tự do là cơ hệ chịu liên kết lý tưởng. Điều này được rút ra từ tính chất tổng cộng của các nội lực của vật rắn (chúng là lực liên kết giữa các chất điểm thuộc vật rắn) luôn luôn bằng không trong bất kỳ chuyển động nào của vật rắn.

2- Hai vật rắn luôn luôn tựa vào nhau trong quá trình chuyển động và ma sát giữa chúng bỏ qua là cơ hệ chịu liên kết lý tưởng. Trường hợp riêng là hai vật trượt không ma sát đối với nhau hoặc nối bản lề không ma sát với nhau cũng là các cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

§2. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

I. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Đối với cơ hệ chịu liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng, điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng là tổng công khả dĩ của các lực chủ động của cơ hệ triệt tiêu.

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k.\delta\vec{r}_k = 0$$

trong đó: $\vec{F}_k$ - lực chủ động tác dụng lên chất điểm M_k thuộc cơ hệ.

$\delta\vec{r}_k$ - di chuyển khả dĩ của chất điểm M_k.

Chứng minh:

1. Điều kiện cần

Giả thiết cơ hệ cân bằng. Xét một chất điểm M_k thuộc cơ hệ chịu tác dụng của lực chủ động $\vec{F}_k$ và lực liên kết $\vec{R}_k$. Vì cơ hệ cân bằng nên mọi chất điểm của cơ hệ phải cân bằng, tức là: $\vec{F}_k + \vec{R}_k = \vec{0}$

Nhân vô hướng hai vế của đẳng thức nhận được với $\delta\vec{r}_k$ và lấy tổng theo tất cả các chất điểm của hệ cơ, ta có: $\sum \vec{F}_k\delta\vec{r}_k + \sum \vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0$

Do các liên kết của hệ là lý tưởng, nên: $\sum \vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0$

Vậy: $\sum \vec{F}_k\delta\vec{r}_k = 0$

Đó là điều cần chứng minh.

2. Điều kiện đủ

Giả thiết cơ hệ chịu liên kết hôlônôm giữ, dừng và lý tưởng, có tổng công khả dĩ của các lực chủ động bằng không. Ta chứng minh rằng cơ hệ mãi mãi cân bằng tại vị trí đã cho.

Thực vậy, giả sử có chất điểm M_k (ít nhất là một) của cơ hệ dưới tác dụng của lực chủ động $\vec{F}_k$ và lực liên kết $\vec{R}_k$ chuyển động từ vị trí đầu đứng yên, di chuyển của nó được ký hiệu bởi $d\vec{r}_k$ ($\vec{r}_k$ là vectơ định vị của chất điểm M_k), có cùng phương với lực tác dụng vào chất điểm M_k là $\vec{\Phi}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k$ vì chất điểm chuyển động từ trạng thái đầu đứng yên.

Do liên kết đặt lên hệ là dừng, nên phương của di chuyển thực trùng với một trong các phương của di chuyển khả dĩ nên ta chọn di chuyển khả dĩ của chất điểm M_k trùng với di chuyển thực của nó.

Vì vậy, chúng ta có: $\vec{\Phi}_k\delta\vec{r}_k = \left(\vec{F}_k + \vec{R}_k\right)\delta\vec{r}_k = \vec{F}_k\delta\vec{r}_k + \vec{R}_k\delta\vec{r}_k > 0$

Lấy tổng hai vế đối với các chất điểm thuộc cơ hệ và chú ý điều kiện về liên kết lý tưởng nên $\sum \vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0$ nhưng ta nhận được $\sum \vec{F}_k\delta\vec{r}_k > 0$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy không thể có chất điểm nào của cơ hệ chuyển động từ vị trí cân bằng, tức là cơ hệ mãi mãi nằm ở vị trí cân bằng.

II. Điều kiện cân bằng của cơ hệ hôlônôm tự do

1. Định lý 1

Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết hôlônôm giữ, dừng và lý tưởng cân bằng là tất cả các lực suy rộng của cơ hệ ứng với tọa độ suy rộng đủ, phải đồng thời triệt tiêu.

$$Q_i = 0;\ (i = 1,.....,n)$$

Thật vậy: Giả sử cơ hệ hôlônôm có n bậc tự do, vị trí của nó được xác định bằng n tọa độ suy rộng đủ $q_1, q_2, ..., q_n$. Như đã biết, biểu thức công khả dĩ của các lực hoạt động trong tọa độ suy rộng đủ có dạng:

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

trong đó: Q_i - lực suy rộng của cơ hệ ứng với tọa độ suy rộng q_i.

Điều kiện cân bằng của cơ hệ theo nguyên lý di chuyển khả dĩ sẽ là:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0$$

Vì cơ hệ là hôlônôm và các $\{\delta q_i\}$ $(i = 1,.....,n)$ độc lập đối với nhau do các tọa độ suy rộng là đủ, nên đẳng thức trên được thực hiện khi và chỉ khi:

$$Q_i = 0;\ (i = 1,.....,n)$$

2. Định lý 2

Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng bảo toàn cân bằng tại một vị trí nào đó là hàm thế năng đạt cực trị tại vị trí đó:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0;\ \ (i = 1,....., n)$$

Trong trường hợp các lực chủ động là những lực có thế và hàm thế năng có dạng $\Pi = \Pi(q_1, q_2, ...q_n)$, ta nhận được định lý trên.

Chương 3

ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

§1. PHƯƠNG TRÌNH D'ALEMBERT - LAGRANGE

Khi cơ hệ chịu liên kết lý tưởng chuyển động, tổng công khả dĩ của các lực chủ động tác dụng lên cơ hệ và của các lực quán tính của cơ hệ bằng không.

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{qt} = 0$$

Thật vậy: Xét cơ hệ có chịu liên kết lý tưởng, chịu tác dụng của các lực chủ động $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ và các lực liên kết $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \ldots, \vec{R}_n$

Áp dụng nguyên lý D'alembert, giả sử tác dụng lên chất điểm các lực quán tính $\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \ldots, \vec{F}_n^{qt}$, ta được hệ lực cân bằng:

$$((\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n), (\vec{R}_1, \vec{R}_2, \ldots, \vec{R}_n), (\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \ldots, \vec{F}_n^{qt})) \sim 0$$

Khi cơ hệ cân bằng, áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ cho cơ hệ đó, ta được

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{qt} + \sum \delta A_k^{R} = 0$$

Nhưng cơ hệ chịu liên kết lý tưởng, nên: $\sum \delta A_k^{R} = 0$

Do đó ta có phương trình: $\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{qt} = 0$

- Phương trình trên có thể biểu thị dưới dạng sau:

$$\sum (\vec{F}_k - m_k \vec{w}_k) \delta \vec{r}_k = 0$$

$$\sum (F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k = 0$$

- Phương trình:

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{qt} = 0$$

Được gọi là phương trình tổng quát động lực học.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE II

I. Phương trình Lagrange II

Dạng phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k$$

Chứng minh:

Xét chất điểm thứ i của cơ hệ. (Để bớt rườm rà ở đây ta không viết chỉ số i kèm theo các đại lượng nữa).

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm là: $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$.

Nhân 2 vế với di chuyển khả dĩ $\delta\vec{r}$,ta có:

$$m\ddot{\vec{r}}\delta\vec{r}=\vec{F}\delta\vec{r}=\delta A$$

Mặt khác: $$\delta\vec{r}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\delta q_k$$

Thế vào ta được:

$$m\ddot{\vec{r}}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\delta q_k=\vec{F}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\delta q_k \text{ hay } \sum_{k=1}^{s}\left(m\ddot{\vec{r}}-\vec{F}\right)\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\delta q_k=0$$

Do các δq_k khác không, nên các thừa số của nó phải bằng không, nghĩa là:

$$\left(m\ddot{\vec{r}}-\vec{F}\right)\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}=0 \text{ hay } m\ddot{\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}=\vec{F}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}$$

Vì: $$\ddot{\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right)-\dot{\vec{r}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right)$$

Ngoài ra ta còn có:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}=\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_k}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right)-\dot{\vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2}}{\partial \dot{q}_k}\right)-\left(\frac{\partial \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2}}{\partial q_k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \frac{1}{2}m\dot{r}^2}{\partial \dot{q}_k}\right\}-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)}{\partial q_k}=\vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}=Q_k$$

Hay: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k \ (k = 1, 2, ..., s)$$

trong đó: $T = \sum \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^2$ - động năng của cơ hệ;

Q_k - lực suy rộng $Q_k = \sum_1^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

II. Phương trình Lagrange II trong trường hợp các lực thế

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right\}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$$

Chứng minh:

Trường hợp các lực thế thì công của lực thế bằng độ biến thiên thế năng:

$$dA = dU = - d\Pi \text{ hay } \partial A = \partial U = - \partial \Pi$$

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$$

Ở đây Π là thế năng của hệ còn U là thế hàm của hệ

Như vậy phương trình Lagrange II trở thành:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$$

Lại do Π không phụ thuộc $\dot{q}_k$ nên: $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_k}$

Và phương trình Lagrange II trên viết lại được:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_k}\right\} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_k} = 0$$

Biểu thức $L = T - \Pi$ là hàm Lagrange, ta có:

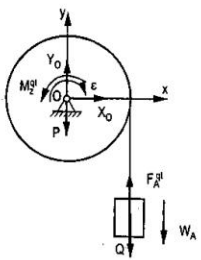
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right\} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ ; k = 1, 2, ..., s$$

THÍ DỤ

1. Thí dụ nguyên lý D'Alembert

Thí dụ IV.1

Ròng rọc nặng trọng lượng P, bán kính R có thể quay quanh một trục Oz cố định. Ở đầu cuối một sợi dây quấn quanh ròng rọc, người ta buộc vật A trọng lượng Q bỏ qua ma sát ổ trục O và cho biết bán kính quán tính của ròng rọc đối với ổ trục Oz là ρ.



Hãy tính gia tốc gốc của ròng rọc và phản lực ở ổ trục O nếu cho vật A rơi thẳng đứng. Tìm sức căng T.

Bài giải:

a) Xác định gia tốc góc của ròng rọc

Xét hệ gồm có ròng rọc O và vật A.

Ròng rọc quay quanh trục cố định qua khối tâm O và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ, vật A chuyển động tịnh tiến.

Đặt lên ròng rọc và vật A các lực quán tính thu gọn:

$$M_0^{qt} = J_0\varepsilon = \frac{P}{g}\rho^2\varepsilon$$

$$F_A^{qt} = \frac{Q}{g}W_A = \frac{Q}{g}W^{\tau} = \frac{Q}{g}R\varepsilon$$

Hệ lực tác dụng lên hệ: $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{F}_A^{qt}, \vec{M}z^{qt}) \sim 0$

Lập các phương trình tĩnh động:

$$\sum X_k = X_0 = 0$$

$$\sum Y_k = Y_0 + F_A^{qt} - P - Q = 0$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = M_z^{qt} + F_A^{qt}R - QR = 0$$

Thay các giá trị của F_A^{qt} và M_z^{qt} vào, giải ra ta có kết quả:

$$\varepsilon = \frac{QRg}{P\rho^2 + QR^2}$$

b) Phản lực ở ổ trụ

$$X_0 = 0;\ Y_0 = \frac{P^2\rho^2 + PQ(R^2 + \rho^2)}{P\rho^2 + QR^2}$$

c) Sức căng của dây

Muốn tìm sức căng T của dây, ta cắt dây và đặt lên vật A các lực tác dụng và sức căng của dây. Xét chuyển động của vật A. ta có:

$$\sum Y_k = T + F_A^{qt} - Q = 0 \Rightarrow T = Q - F_A^{qt}$$

Thay giá trị ε vào, tính ra:

$$T = \frac{QP\rho^2}{P\rho^2 + QR^2}$$

Đáp số: *1.* $\varepsilon = \dfrac{QRg}{P\rho^2 + QR^2}$

2. $X_0 = 0;\ Y_0 = \dfrac{P^2\rho^2 + PQ(R^2 + \rho^2)}{P\rho^2 + QR^2}$

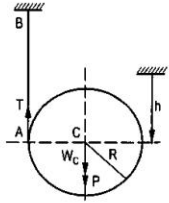
3. $T = \dfrac{QP\rho^2}{P\rho^2 + QR^2}$

Thí dụ IV.2

Người ta quấn một sợi dây vào hình trụ tròn C có khối lượng m, đầu B được buộc chặt, khi dây xả ra hình trụ rơi xuống, không có vận tốc đầu. Hãy xác định vận tốc tâm của trụ hình trụ $(\vec{V}_C)$ sau khi trụ đó hạ xuống dưới một đoạn h và tìm sức căng của dây AB?.

Bài giải:

1. Tìm gia tốc:



Xét chuyển động của khối trụ, theo định lý:

$$T_1 - T_o = \Sigma A$$

trong đó: $T_o = 0$;

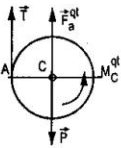
$$T_1 = \frac{3}{4} m V_C^2;$$

$$\Sigma A_{\vec{F}_k} = A_{\vec{P}} = P.h = mgh.$$

$$\frac{3}{4} mV_C^2 = mgh \Rightarrow V_C = v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

$$\Rightarrow W_C = \frac{2}{3} g$$

2. Tìm sức căng của dây:



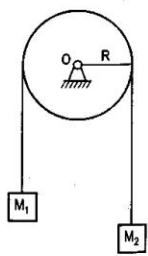
Xét chuyển động của khối trụ, theo nguyên lý D'Alambert: $(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}_C^{qt}, M_C^{qt}) \sim 0$

$$\Sigma Y = T + F_C^{qt} - P = 0$$

$$= T + mW_C - P = 0$$

$$\Rightarrow T = mg\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} mg$$

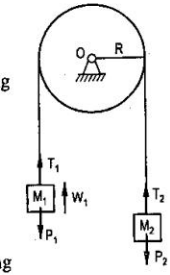
Thí dụ IV.3



Người ta buộc vật nặng M_1 có trọng lượng P_1 và vật M_2 có trọng lượng P_2 $(P_2 > P_1)$ vào 2 đầu của sợi dây mềm không giãn vắt qua ròng rọc O. Hãy tìm giá trị gia tốc của các vật nặng và sức căng của các dây ? bỏ qua khối lượng ròng rọc và dây.

Bài giải:

1. Tìm gia tốc của các vật nặng



Xét chuyển động của vật M_1, theo phương trình cơ bản ĐLH:

$$m_1\vec{W}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T}_1$$

$$\Rightarrow m_1W_1 = T_1 - P_1$$

$$\Rightarrow T_1 = m_1W_1 + P_1 = \frac{P_1}{g}W_1 + P_1 \quad (a)$$

Xét chuyển động của vật M_2, theo phương trình cơ bản ĐLH:

$$m_2\vec{W}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2$$

$$\Rightarrow m_2W_2 = P_2 - T_2$$

$$\Rightarrow T_2 = P_2 - m_2W_2 = P_2 - \frac{P_2}{g}W_2 \quad (b)$$

Với: $W_1 = W_2 = W$

Và bỏ qua ma sát, bỏ qua khối lượng ròng rọc nên: $T_1 = T_2$

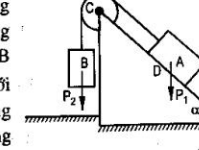
Từ (a) và (b) ta có:

$$\frac{P_1}{g}W + P_1 = P_2 - \frac{P_2}{g}W$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2 = W = \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}g$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2 = \frac{2P_1P_2}{P_1 + P_2}$$

Thí dụ IV.4

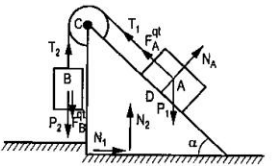


Một vật nặng A trọng lượng P_1 hạ xuống dưới theo mặt phẳng nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc α của lăng trụ D làm cho vật B trọng lượng P_2 chuyển động nhờ chúng nối với nhau bởi một dây không giãn có trọng lượng không đáng kể vắt qua ròng rọc C. Khối lượng bỏ qua.

Xác định áp lực nằm ngang của gờ E.

Bài giải:

Xét chuyển động của cả hệ, theo nguyên lý D'Alembert:



$$\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_A^{qt}, \vec{F}_B^{qt}\right) \sim 0$$

$$\Rightarrow \Sigma X = N_1 - F_A^{qt} \cos\alpha = 0$$

$$N_1 = F_A^{qt} \cos\alpha = \frac{P_1}{g} W_A \cos\alpha$$

Tìm $\vec{W}_A$:

- Xét chuyển động của vật A theo nguyên lý D'Alembert:

$$(\vec{P}_1, \vec{N}_1, \vec{F}_A^{qt}, \vec{T}_1) \sim 0$$

Chiếu lên phương chuyển động của vật A:

$$T_1 + F_A^{qt} - P_1 \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = -F_A^{qt} + P_1 \sin\alpha = P_1 \sin\alpha - \frac{P_1}{g} W_A$$

- Xét chuyển động của vật B theo nguyên lý D'Alembert:

$$(\vec{P}_2, \vec{F}_B^{qt}, \vec{T}_2) \sim 0$$

Chiếu lên phương chuyển động của vật B:

$$T_2 - F_B^{qt} - P_2 = 0$$

$$\Rightarrow T_2 = F_B^{qt} + P_2$$

$$T_1 = T_2; \; W_A = W_B = W$$

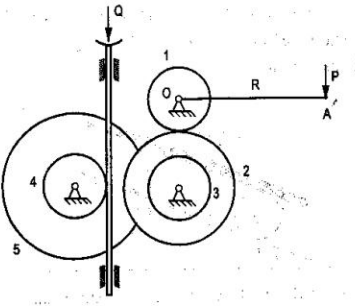
$$\Rightarrow W = \frac{P_1 \sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2} g$$

Thay vào $\Rightarrow N_1 = P_2 \dfrac{P_1 \sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2} g$

2. Thí dụ nguyên lý di chuyển khả dĩ

Thí dụ IV.5

Tính lực $\vec{P}$ đặt vuông góc vào đầu A của tay quay OA để hệ cân bằng khi có lực Q = 4800N tác dụng vào đĩa C. Cho R_1 = 3 cm, R_2 = 12 cm, R_3 = 4 cm, R_4 = 16 cm, R_5 = 3 cm. Tay quay OA dài R = 18 cm.



Bài giải:

Hệ có 1 bậc tự do. Cho hệ một di chuyển khả dĩ theo lực P.

$$\sum \delta s_A = P\,\delta s_A - Q\,\delta s_C = 0$$

$$\delta\varphi_{OA} = \delta\varphi_1,\ \delta s_A = R\,\delta\varphi_1$$

Theo công thức tỷ số truyền: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \Rightarrow$

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2}\delta\varphi_1$$

$$\frac{\delta\varphi_3}{\delta\varphi_4} = \frac{R_4}{R_3}$$

$$\Rightarrow \delta\varphi_5 = \delta\varphi_4 = \frac{R_3}{R_4}\delta\varphi_3 = \frac{R_1}{R_2}\frac{R_3}{R_4}\delta\varphi_1$$

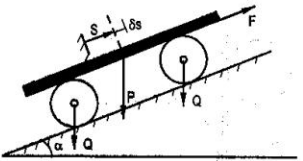
$$\delta s_c = R_5\delta\varphi_5 = \frac{R_1R_3R_5}{R_2R_4}\delta\varphi_1$$

Thay vào, tính ra: $P = \frac{R_1R_3R_5}{RR_2R_4}Q = 50\,N$

Thí dụ IV.6

Trọng lượng của dầm là P. Trọng lượng bánh lăn là Q. Xác định lực $\vec{F}$ tác dụng để giữ cho nó cân bằng trên mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt phẳng ngang, bỏ qua ma sát.

Bài giải:



Hệ có một bậc tự do⇒ Hệ có một tọa độ suy rộng, chọn tọa độ suy rộng $q_k = S$, cho hệ di chuyển khả dĩ δs.

Tổng cộng khả dĩ của các lực:

$$\sum\delta A = F\delta s - P\sin\alpha\,\delta s - Q\sin\alpha\,\delta s = 0$$

$$\Rightarrow F\delta s = P\sin\alpha\,\delta s + Q\sin\alpha\,\delta s$$

$$\Rightarrow F = (P+Q)\sin\alpha$$

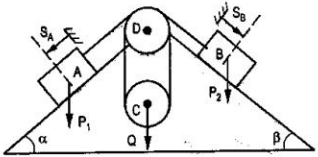
Thí dụ IV.7

Vật A trọng lượng P_1 được giữ cân bằng trên mặt phẳng nghiêng 1 góc α nhờ buộc vào đầu của sợi dây vòng qua ròng rọc D và ròng rọc động E treo vật nặng C có trọng lượng Q, một đầu khác của dây buộc vào vật nặng B có trọng lượng P_2 nằm cân bằng trên mặt nghiêng góc β.

Tìm quan hệ giữa các trọng lượng P_1, P_2, Q khi hệ cân bằng, bỏ qua ma sát.

Bài giải:

Hệ có 2 bậc tự do ⇒ Hệ có 2 tọa độ suy rộng, chọn tọa độ suy rộng $q_1 = S_A$; $q_2 = S_B$ cho hệ di chuyển khả dĩ δs.



- Tính lực suy rộng Q_{S_A} cho $\delta S_A \neq 0$ và $\delta S_B = 0$

$$\sum \delta A = P_1 \sin\alpha\, \delta S_A - Q\delta S_c = 0$$

Mà: $\delta S_A = 2\delta S_c$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{Q}{2\sin\alpha}$$

- Tính lực suy rộng Q_{S_B} cho $\delta S_A = 0$ và $\delta S_B \neq 0$

$$\sum \delta A = P_2 \sin\beta\, \delta S_B - Q\delta S_c = 0$$

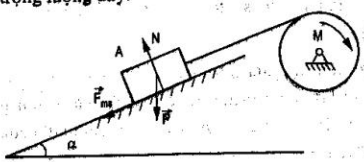
Mà: $\delta S_B = 2\delta S_c$

$$P_2 = \frac{Q}{2\sin\beta}$$

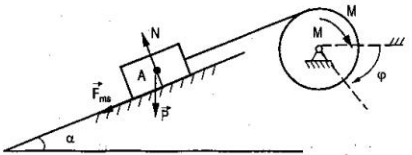
Thí dụ IV.8

Dùng tời kéo vật A lên dốc nghiêng góc α so với mặt ngang. Vật A có trọng lượng P. Hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng nghiêng là f. Tác dụng lên trục tời ngẫu lực phát động có mô men M. Bán kính trục tời là R.

Tìm điều kiện để kéo được vật lên từ trạng thái nghỉ. Bỏ qua ma sát ở ổ trục kéo và trọng lượng dây.



Bài giải:



Cơ hệ có một bậc tự do ⇒ Hệ có một tọa độ suy rộng, chọn tọa độ suy rộng là góc quay của tời: q = φ. cho hệ di chuyển khả dĩ δφ.

* Để tìm điều kiện cân bằng của vật A:

- Vật A sắp trượt lên

$$\Sigma\delta A(\vec{F}_k) = M\delta\varphi - (P\sin\alpha + F_{ms})\delta s$$

Với: $F_{ms} = f.N = f.P\cos\alpha$, $\delta s = R.\delta\varphi$

$$\Rightarrow \Sigma\delta A(\vec{F}_k) = [M - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)R]\delta\varphi$$

Lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng φ:

$$Q_\varphi = M - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)R = 0$$

Vậy để vật không trượt lên cần phải có: $M \le P(\sin\alpha + f\cos\alpha)R$

- Vật A sắp trượt xuống

Trường hợp vật A sắp trượt xuống lúc đó lực ma sát sẽ hướng lên

$$M - P(\sin\alpha - f\cos\alpha)R = 0$$

* Để vật không trượt xuống cần phải thực hiện điều kiện:

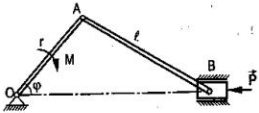
$$M \ge P(\sin\alpha - f\cos\alpha)R$$

Như vậy vật A cân bằng thì phải thoả mãn điều kiện sau:

$$P(\sin\alpha - f\cos\alpha)R \le M \le P(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

Thí dụ IV.9

Tìm hệ thức liên hệ giữa mô men M của ngẫu lực tác dụng lên tay quay của cơ cấu tay quay thanh truyền và áp lực P lên piston khi cân bằng. Cho biết chiều dài của tay quay OA = r, chiều dài của thanh truyền AB = ℓ, góc AOB = φ.



Bài giải:

Áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ:

$$\sum \delta A = 0 \Leftrightarrow \sum \delta A = M\delta\varphi + P\delta x = 0 \qquad (1)$$

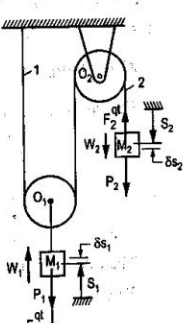
Mà $x = r\cdot\cos\varphi + \sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\varphi} \Rightarrow \delta x = -r\sin\varphi\delta\varphi\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)$

Thay vào (1) ta được: $M = P\cdot r\cdot\sin\varphi\left(1 + \dfrac{r\cdot\cos\varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)$

3. Thí dụ động lực học vật rắn

Thí dụ IV.10

Một hệ ròng rọc được treo hai vật nặng M_1 trọng lượng P_1 = 100N và M_2 trọng lượng P_2 = 80N. Xác định gia tốc W_2 của vật M_2 và sức căng T của nhánh dây 2. Bỏ qua trọng lượng dây và ròng rọc.



Bài giải:

1. Tính W_2.

Hệ có một bậc tự do.

Các lực hoạt động tác dụng lên hệ là: $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$.

Các lực quán tính của các vật:

$$F_1^{qt} = \frac{P_1}{g}W_1 \;;\; F_2^{qt} = \frac{P_2}{g}W_2$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δs_2 và sử dụng phương trình tổng quát động lực học, ta có:

$$\sum \delta A_k = P_2\delta s_2 - F_2^{qt}\delta s_2 - P_1\delta s_1 - F_1^{qt}\delta s_1 = 0$$

Ròng rọc O chuyển động song phẳng, nên: $\delta s_2 = 2\delta s_1 \Rightarrow W_2 = 2W_1$.

Thay vào và tính ra: $W_2 = \frac{2P_2 - P_1}{4P_1 + P_1} 2g = 2,8\ m/s^2$

2. Tính T.

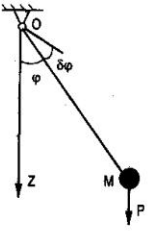
Cắt dây 2: $\sum Y_k = T + F_2^{qt} - P_2 = 0.$

Thay W_2 vào F_2^{qt} tính ra: $T = \frac{3P_1P_2}{4P_2P_1} = 57\ N$

Thí dụ IV.11

Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của chất điểm M trọng lượng P treo bằng sợi dây có chiều dài a không đổi bằng phương pháp Lagrange II.

Bài giải:



Con lắc có một bậc tự do, vị trí của nó được xác định bởi góc φ nên $q_1 = \varphi$. Truyền cho góc φ một số gia dương δφ, ta sẽ thấy trên độ dời này chỉ có trọng lực P sinh công bằng $\delta A_\varphi = (-P\sin\varphi)\delta\varphi$, trong đó a = OA. Do đó $Q_1 = -P\sin\varphi$.

Động năng của con lắc $T = \frac{1}{2} J_o\omega^2 = \frac{1}{2} J_o\dot{\varphi}^2$

Phương trình Lagrange II có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1 \quad (*)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_o\dot{\varphi} \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J_o\ddot{\varphi}$$

Thay các đại lượng này vào phương trình (*).

Ta có: $J_o\varphi = -P\sin\varphi$

$$\Rightarrow J_o\varphi + P\sin\varphi = 0$$

Chú ý: Vì trọng lực P là lực có thế, nên có thể lập phương trình Lagrange II dưới dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

trong đó: L = T - Π

Hướng trục O_z thẳng đứng xuống phía dưới.

Trong trường hợp này ta có $\Pi = -PZ = -Pa\cos\varphi$

$$L = \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + Pa\cos\varphi\ ;\ \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = J_0\dot{\varphi};\ \ \frac{\partial L}{\partial\varphi} = -Pa\sin\varphi$$

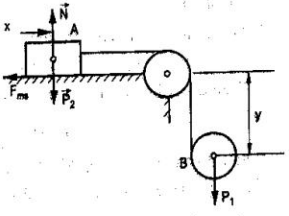
$$\Rightarrow J\ddot{\varphi} + Pa\sin\varphi = 0$$

Thí dụ IV.12

Đầu cuối sợi dây là một con lăn đồng chất B có trọng lượng P_1, sợi dây được vắt qua ròng rọc cố định O, còn đầu dây còn lại mắc vào vật A có trọng lượng P_2 trượt trên mặt phẳng nằm ngang có hệ số ma sát trượt f. Bỏ qua trọng lượng của ròng rọc và sợi dây.

Xác định gia tốc của vật A và gia tốc khối tâm C của con lăn

Bài giải:



Hệ có 2 bậc tự do ⇒ Hệ có 2 tọa độ suy rộng, chọn tọa độ suy rộng cho hệ :

$$q_1 = x;\ q_2 = y.$$

Phương trình Lagrange II đối với hệ này sẽ là:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y$$

- Động năng của hệ :

$$T = T_{vật} + T_{trụ}$$

trong đó: $T_{vật} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\dot{x}^2;\ \ T_{trụ} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$

Vận tốc v_c của tâm khối trụ gồm vận tốc tương đối (đối với dây) bằng $\dot{y}$ và vận tốc theo bằng $\dot{x}$.

$$v_c = \dot{x} + \dot{y}$$

Còn vận tốc góc của khối trụ bằng:

$$\omega = \frac{\dot{y}}{r} \text{ (r là bán kính của khối trụ),}$$

Mô men quán tính của khối trụ đối với tâm C: $J_c = \frac{1}{2}\frac{p_1}{g}r^2$.

Cuối cùng ta tìm được: $T = \frac{P_2\dot{x}^2}{2g} + \frac{P_1}{2g}\left[(\dot{x}+\dot{y})^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2\right]$

Do đó:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{p_2}{g}\dot{x} + \frac{p_1}{g}(\dot{x}+\dot{y}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{p_2}{g}\ddot{x} + \frac{p_1}{g}(\ddot{x}+\ddot{y})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{p_1}{g}\left(\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{y}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{p_1}{2g}(2\ddot{x} + 3\ddot{y})$$

- Tính Q_x và Q_y

Trước tiên ta truyền cho hệ một độ dời khả dĩ sao cho chỉ có tọa độ x thay đổi và có số gia $\delta x > 0$, còn y = const.

Trên độ dời này, chỉ có lực P_1 và F_{ms} ($F_{ms} = fp_2$) sinh công:

$$\delta A_1 = (P_1 - fP_2)\delta x$$

Sau đó truyền cho hệ dời khả dĩ sao cho chỉ có tọa độ y thay đổi và có số gia $\delta y > 0$, còn x = const. Trên độ dời này $\delta A_2 = P_1\delta y$.

Do đó: Lực suy rộng $Q_x = (P_1 - fP_2)$ và $Q_y = P_1$

Thay các đại lượng vào phương trình LagrangeII ta được các phương trình vi phân chuyển động của hệ:

$$(P_1 + P_2)\ddot{x} + p_1\ddot{y} = (P_1 - fP_2)g$$

$$2\ddot{x} + 3\ddot{y} = 2g$$

Giải các phương trình, ta tìm được:

$$\ddot{x} = \frac{P_1 + 3fP_2}{P_1 + 3P_2}g; \quad \ddot{y} = \frac{2(1+f)P_2}{P_1 + 3P_2}g$$

Do đó: $W_A = \ddot{x}, W_C = \ddot{x} + \ddot{y}$

($\ddot{y}$ chỉ cho ta gia tốc tương đối của khối tâm khối trụ).

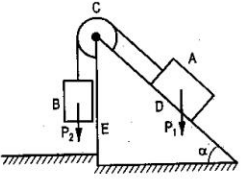
BÀI TẬP

A- BÀI TẬP NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

Bài tập IV-1. Một quả cầu nhỏ có trọng lượng P treo vào toa xe chuyển động ngang với gia tốc không đổi $\vec{W}$. Dây treo quả cầu bị lệch đi góc α so với phương thẳng đứng tương ứng với trạng thái cân bằng tương đối của quả cầu. Xác định gia tốc của toa xe.

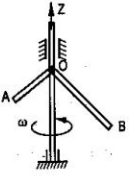
Đáp số: $\vec{W} = g\,tg\alpha$.

Bài tập IV-2. Một vật nặng A trọng lượng P_1 hạ xuống dưới theo mặt phẳng nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc α của lăng trụ D làm cho vật B trọng lượng P_2 chuyển động nhờ chúng nối với nhau bởi một dây không dãn trọng lượng không đáng kể vắt qua ròng rọc C khối lượng bỏ qua. Xác định áp lực nằm ngang của lăng trụ lên gờ E của sàn. Coi mặt phẳng nghiêng nhẵn trơn.



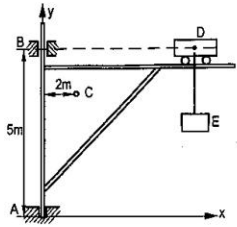
Đáp số: $N = P_1\dfrac{P_1\sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2}\cos\alpha$

Bài tập IV-3. Hai thanh mảnh đồng chất có chiều dài OA = a, OB = b nối cứng với nhau dưới một góc vuông. Đỉnh O nối bằng bản lề bằng chốt ngang trên trục thẳng đứng. Trục này quay với vận tốc góc không đổi $\bar{\omega}$. Tìm mối liên hệ giữa $\bar{\omega}$ và góc ω tạo bởi thanh OA với phương thẳng đứng.



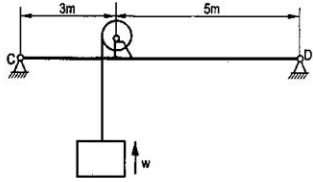
Đáp số: $\omega^2 = 3g\dfrac{b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin 2\varphi}$

Bài tập IV-4. Một cần trục quay có khối lượng bằng 2000kg có khối tâm C. Xe tời D có khối lượng 500kg. Xác định các phản lực ổ đỡ A và B trong trường hợp sau: cần trục và xe tời đứng yên. Người ta kéo vật nặng E có khối lượng 3000kg theo phương thẳng đứng với gia tốc $W = \dfrac{1}{10}g$ (g- gia tốc trọng trường).

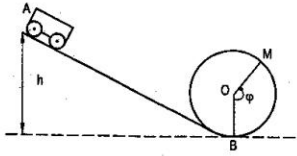


Đáp số: $X_A = -X_B = 52.1kN$, $Y_A = 63.7kN$.

Bài tập IV-5. Một máy tời đặt trên một dầm CD để kéo vật nặng khối lượng m = 2000kg lên trên theo phương thẳng đứng với gia tốc W = 0,5 m/s^2. Dầm CD đặt trên hai gối tựa mũi nhọn tại hai đầu C và D. Giả thuyết bỏ qua khối lượng của dầm, dây và máy tời. Kích thước cho trên hình vẽ. Xác định áp lực phụ do lực quán tính của vật nặng tại C và D.



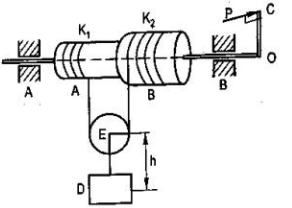
Bài tập IV-6. Xe goòng trọng lượng P lăn theo đường ray như hình vẽ. Hỏi phải thả xe goòng với vận tốc đầu bằng không từ độ cao h bằng bao nhiêu để xe đi hết đường ray vòng tròn bán kính R mà không tách khỏi nó.



Đáp số: $N = P\left(\frac{2h}{R} - 2 + 3\cos\varphi\right)$; $h \geq 2,5R$.

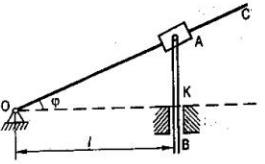
B- BÀI TẬP CƠ HỌC GIẢI TÍCH

1. Nguyên lý di chuyển khả dĩ



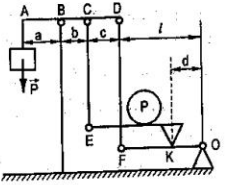
Bài tập IV-7. Trục kéo vi sai có hai tầng A và B gắn chặt với nhau trên trục chuyển động nhờ tay quay OC = R. Vật nặng D trọng lượng Q treo trên ròng rọc động E. Khi tay quay OC quay thì nhánh dây bên trái thả dây và nhánh bên phải quấn dây để nâng vật D lên. Bán kính hai tầng A và B lần lượt là r_1 và r_2 ($r_2 > r_1$). Tìm cường độ lực P cần thiết đặt vuông góc với tay quay tại C để giữ hệ cân bằng. Cho Q = 7505N, r_2 = 12cm, r_1 = 10cm, R = 60cm.

Đáp số: $P = Q\dfrac{r_2 - r_1}{2R} = 117{,}5N$



Bài tập IV-8. Khi tay quay OC của cơ cấu rãnh trượt quay quanh trục O vuông góc với mặt phẳng hình vẽ thì con chạy A dịch chuyển dọc theo tay OC làm thanh AB chuyển động trong rãnh thẳng đứng K. Tay quay OC dài, khoảng cách OK = l. Tìm cường độ lực Q cần thiết đặt vuông góc tay quay OC tại C để cơ cấu cân bằng nếu tại B tác dụng lực P hướng thẳng đứng lên trên.

Đáp số: $Q = \dfrac{Pl}{R\cos^2\varphi}$

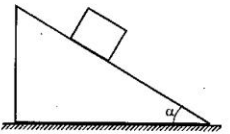


Bài tập IV-9. Cho một sơ đồ cân bàn với kích thước như hình vẽ. Tìm mối liên hệ giữa đối trọng p và vật cân P khi cơ cấu cân bằng và tìm mối liên hệ giữa kích thước của cân bàn khi cân bằng.

Đáp số: $p = \dfrac{Pb}{a}$; $\dfrac{l}{d} = \dfrac{b+c}{b}$

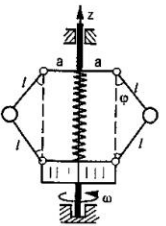
2. Nguyên lý D'Alembert - Lagrange

Bài tập IV-10. Lăng trụ A có trọng lượng P trượt theo mặt bên nhẵn trơn của lăng trụ B có trọng lượng Q. Mặt này hợp với phương ngang góc α. Xác định gia tốc của lăng trụ B khi nó trượt không ma sát theo mặt nằm ngang.



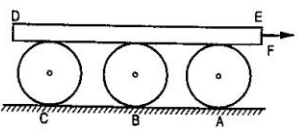
Đáp số: $W_B = g\dfrac{P\sin 2\alpha}{2(Q+P\sin^2\alpha)}$

Bài tập IV-11. Cho cơ cấu điều tiết ly tâm như hình vẽ. Các vật nặng A, B coi là chất điểm có trọng lượng cùng là P, còn đối trọng D có trọng lượng Q. Các thanh có chiều dài l bỏ qua khối lượng được treo cách trục quay một đoạn a. Cho độ cứng lò xo là C và khi φ = 0 thì lò xo không bị biến dạng. Bỏ qua ma sát và khối lượng lò xo. Tìm biểu thức liên hệ giữa vận tốc góc ω của trục quay với góc mở φ của các thanh.



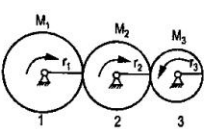
Đáp số: $\omega^2 = g.\dfrac{P+Q+2cl(1-\cos\varphi)}{P(a+l\sin\varphi)}\operatorname{tg}\varphi$

Bài tập IV-12. Thanh DE có trọng lượng Q nằm trên ba con lăn A, B, C có trọng lượng P. Lực F nằm ngang hướng vào bên phải đặt vào thanh, làm cho thanh và các con lăn chuyển động. Giả thiết không có sự trượt giữa các con lăn và thanh cũng như các con lăn và mặt phẳng ngang. Xác định gia tốc của thanh DE. Coi mỗi con lăn là hình trụ tròn đồng chất và bỏ qua ma sát lăn.



3. Phương trình Lagrange loại 2

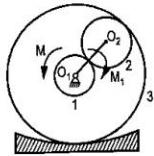
Bài tập IV-13. Các bánh xe 1, 2, 3 ăn khớp với nhau như hình vẽ và chuyển động dưới tác dụng của ngẫu có mô men M_1, M_2, M_3. Tìm



gia tốc góc của bánh xe thứ nhất. Các bánh coi là đĩa tròn đồng chất có khối lượng và bán kính lần lượt là $m_1; m_2, m_3$ và $r_1; r_2; r_3$.

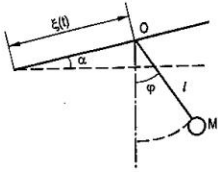
Đáp số: $\varepsilon_1 = \dfrac{2\left(M_1 - \dfrac{r_1}{r_2}M_2 - \dfrac{r_1}{r_3}M_3\right)}{r_1^2(m_1 + m_2 + m_3)}$

Bài tập IV-14. Cho cơ cấu hành tinh vi sai gồm 3 bánh xe. Bánh 2 bị tay quay kéo đi lăn không trượt trong bánh xe 3 cố định và truyền chuyển động cho bánh xe 1 quay quanh trục cố định O_1. Tay quay chịu tác dụng của ngẫu phát động M, bánh 1 chịu tác dụng của ngẫu cản M_1. Cho bánh 1 quay gấp 10 lần tay quay. Coi các bánh xe là tấm tròn đồng chất, cùng bề dày, cùng vật liệu. Xác định gia tốc tay quay, cho mô men quán tính bánh 1 đối với trục O_1 là J, khối lượng thanh bỏ qua.



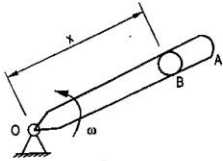
Đáp số: $\varepsilon_t = \dfrac{M - 10M_1}{1300J}$

Bài tập IV-15. Thiết lập phương trình chuyển động của con lắc gồm một dây dài l một đầu treo chất điểm M có khối lượng m, còn đầu kia treo vào điểm O chuyển động trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α. Giả thiết bỏ qua khối lượng của dây, và con lắc chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng.



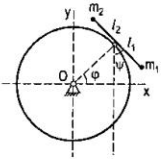
Đáp số: $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi + \dfrac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\varphi - \alpha) = 0$

Bài tập IV-16. Xác định quy luật chuyển động của viên bi B chuyển động trong ống máng OA đang quay đều trong mặt phẳng nằm ngang với vận tốc góc ω. Tại thời điểm ban đầu viên bi B cách trục quay O một khoảng a và có vận tốc dọc theo trục ống bằng không.



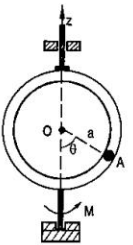
Đáp số: x = achωt

Bài tập IV-17. Tay đòn mang tại đầu mút của mình, các khối lượng tập trung $m_1; m_2$ được gắn bản lề với vành tròn của đĩa đồng chất bán kính R. Khoảng cách từ các khối lượng đến bản lề là $l_1; l_2$. Đĩa quay quanh trục thẳng đứng vuông góc mặt phẳng đĩa nằm ngang với vận tốc góc $\omega = \text{const}$. Thiết lập phương trình chuyển động của tay đòn. Bỏ qua khối lượng của tay đòn. Trục quay tay đòn song song trục quay của đĩa.



Đáp số: $\ddot{\psi}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) - R\omega^2(m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) = 0$

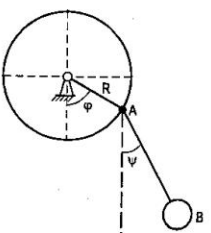
Bài tập IV-18. Một chất điểm khối lượng m ở bên trong ống nhẵn có đường trục là vòng tròn bán kính a. Ống quay tự do quanh trục đi qua đường kính thẳng đứng và có mô men quán tính đối trục quay là J. Thiết lập phương trình chuyển động của cơ hệ khi ống quay dưới tác dụng của ngẫu lực phát động có mô men M không đổi.



Đáp số:

$$\begin{cases}(J + ma^2\sin^2\theta)\ddot{\varphi} + 2ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta = M \\ ma^2\ddot{\theta} - ma^2\varphi^2\sin\theta\cos\theta + mga\sin\theta = 0\end{cases}$$

Bài tập IV-19. Đĩa tròn đồng chất khối lượng M, bán kính R có thể quay quanh trục nằm ngang của nó đi qua O. Một chất điểm khối lượng m, treo trên đĩa bởi sợi dây AB dài l. Thiết lập phương trình chuyển động của cơ hệ.



Đáp số:

$$\begin{cases}\left(m + \dfrac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi} + mRl\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + mRl(\dot{\psi})^2\sin(\varphi - \psi) + mgR\sin\varphi = M \\ mRl\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi)\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\psi} - mRl(\dot{\varphi})^2\sin(\varphi - \psi) + mgl\sin\psi = 0\end{cases}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Hữu Duẩn, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Thế Tiến. *Bài tập Cơ học lý thuyết*. NXB Đại học và THCN. 1970.

[2] Trần Hữu Duẩn, Nguyễn Văn Đình, Đỗ Như Lân, Nguyễn Thế Tiến. *Bài tập Cơ học lý thuyết - Hướng dẫn và giải mẫu*. NXB Đại học và THCN. 1970.

[3] Nguyễn Văn Khang. *Cơ học kỹ thuật*. NXB Giáo dục. 2009.

[4] Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Nhật Lệ. *Bài tập Cơ học tập 1*. NXB Giáo dục. 2008.

[5] Đỗ Sanh, Lê Doãn Hồng. *Bài tập Cơ học tập 2*. NXB Giáo dục. 2008.

[6] Nguyễn Văn Đạo. *Bài tập Cơ học giải tích*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội. 2002.

[7] Nguyễn Phong Điền, Nguyễn Quang Hoàng, Nguyễn Minh Phương. *Bài tập cơ học kỹ thuật*. NXB Giáo dục, 2010.

[8] K. S Kolesnikov. *Bài tập Cơ học lý thuyết (Tiếng Nga)*. NXB Khoa học. Moskva. 1989.

[9] V. Meserxki. *Tuyển tập bài tập Cơ học lý thuyết*. NXB Khoa học Moskva. 1975.

[10] Đặng Thanh Tân. *Ngân hàng đề thi cơ học lý thuyết*. In tại trường ĐH.SPKT. 2007.

MỤC LỤC

PHẦN II - ĐỘNG HỌC

PHẦN III - ĐỘNG LỰC HỌC

PHẦN IV - CÁC NGUYÊN LÝ