STT Group

Light the way

# CẨM NANG TOÁN

# CÁCH HỌC PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH HIỆU QUẢ

- Tuỳ vào sở thích của từng em mà các em nên chọn học hệ phương trình, phương trình hay bất phương trình trước .Vì thật sự 3 cái này có mối liên hệ chặt chẽ với nhau nên các em hãy học cái mình thích trước để lấy cảm hứng rồi tiếp theo học 2 phần còn lại.
- Hãy trang bị thật nhiều phương pháp để có thể không hoảng sợ khi gặp những bài mới lạ.
- Khi học cần có một cuốn sổ tay để có thể ghi chép những phương pháp hay và những cách giải mới lạ (Cái này rất quan trọng nên các em cố gắng thực hiện)
- Có nhiều bài toán sẽ rất khó khăn và có những cách giải đặc biệt mà các em không thể tìm ta được cách đó.(Nhất là các bài trong đề thi đại học) Nhưng nếu các em có thể suy nghĩ ra cách nào đó có thể giải ra nhưng nó biến đổi phức tạp hơn thì đừng ngại khó ngại khổ mà hãy mạnh dạn biến đổi nó.
- Khi đọc lời giải một bài toán hệ phương trình bất phương trình hay phương trình thì các em nên luôn đặt câu hỏi cho mình .Vì sao lại có thể biến đổi như vậy? Nếu làm lại mình có thể suy nghĩ ra cách đó không?....
- Hãy luôn tự động não tư duy khi ta gặp những bài toán khó. Khoan hãy nhờ đến sự giúp đỡ. Vì trải qua nhiều lần như vậy thì khả năng của các em sẽ được tăng lên đáng kể.
- Cuối cùng hãy luôn tự tin và nhất định phải luôn nghĩ ***"Mình nhất định sẽ giải ra được"*** khi gặp những bài toán khó khăn.

Lưu ý quan trọng khi giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình hiệu quả.

- ***Đừng quên điều kiện***, nếu thấy bài toán xuất hiện căn chẵn,phân số ….khi làm bài đầu tiên chú ý hãy đặt điều kiện cho nó. Và khi giải ra nhớ đối chiếu với điều kiện.(Đây là bước các em thường hay quên nên hãy chú ý)
- Khi giải ra thì phải luôn luôn thử lại đáp số,đừng chủ quan xem thường việc này các em nhé.
- Nên đánh dấu (1)(2)(3) …..sau mỗi biểu thức quan trọng để có thể dễ quan sát và kiểm tra.
- Khi bình phương hai vế thì các em phải luôn chú ý đến điều kiện.
- Khi giải bpt thì khi có mẫu số muốn quy đồng thì phải luôn để ý đến dấu của mẫu số.
- Hãy luôn cẩn thận làm từng bước đừng nóng vội.

## Cách tìm nghiệm lẻ của PT bậc cao

***Ví dụ:*** $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$
Đầu tiên khi các em tìm nghiệm bấm máy tính thì các em tìm ra được 2 nghiệm $x = 2,618.....$ và $x = 0,38196.....$Các em sẽ thấy hơi bối rối vì thường thì các em sẽ hay làm những bài có nghiệm đẹp và chia sơ đồ hooc-ne. Nhưng với bài toán này thì không có nghiệm đẹp . Các em có 2 cách làm (nhưng anh ưu tiên cách 2 hơn vì nó mạnh hơn )
***Cách 1:***Các em dùng viet đảo
Các em bấm máy tính tìm ra được 2 nghiệm lưu 2 nghiệm vào máy tính A và B.
Các em lấy 2 nghiệm A và B cộng với nhau và nhân với nhau.
$A + B = 3; AB = 1$
Vậy các em sẽ có A và B chính là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 1 = 0$
Từ đó các em có thể phân tích được phương trình đầu thành:
$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$
***Cách 2:*** Cách này rất mạnh.
Đầu tiên em cũng đi tìm nghiệm nhưng chỉ cần tìm một nghiệm là đủ .Ví dụ tìm nghiệm $x = 2,618.....$ rồi lưu vào A.
Các em bấm mode bấm 7 (table) nó sẽ hiện ra một cái $F(X)$ các em nhập vào là $AX^2 - AX$
Các em bấm bằng. Nó ra $g(X)$ các em bấm bằng.
Nó hiện ra chữ start . Các em bấm số 1 rồi bằng.
Nó ra chữ end. Các em bấm số 10 rồi bằng.
Nó ra chữ step các em bấm bằng luôn. Nó sẽ xuất hiện một cái bảng thế này:

| | |
|---|---|
| 1 | 4.236… |
| 2 | 1.618… |
| 3 | -1 |
| 4 | -3.168. |
| 5 | -6.236 |
| 6 | -8.854 |
| 7 | -11.47 |
| 8 | -14.09 |
| 9 | -16.70 |
| 10 | -19.32 |

Khi nhìn vào cái bảng này thì các em sẽ thấy một điều đặc biệt là chỗ $x = 3$ thì $F(x) = -1$ .
Vậy ở đây các em đó có thể suy ra được nhân tử là $X^2 - 3X + 1 = 0$ (Các em đổi dấu x và F(x)).
**Nhưng các em lưu ý nếu với những trường hợp mà không ra thì các em làm thêm 1 lần nữa. Lần nãy start là -10 và end là -1 các em nhé . Rồi cũng quan sát cái bảng đó. (Nhớ là đổi dấu với kết quả mà các em nhìn thấy ở bảng)**

Các em chú ý nhé với cách 2 này các em sẽ thấy tốt hơn. Vì với những bài toán các

## Sử dụng đồng nhất hệ số để giải PT đẳng cấp

***Ví dụ 2:*** $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$ (1)

Điều kiện : $x\ge -2$

$\Leftrightarrow 2(x^2-3x+2)=3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$

Đến đây các em cố gắng biến đổi sao cho

$VT=A(x^2-2x+4)+B(x+2)$

$A(x^2-2x+4)+B(x+2)=2(x^2-3x+2)\Leftrightarrow Ax^2-2Ax+4A+Bx+2B=2x^2-6x+4$

$\Leftrightarrow Ax^2+x(B-2A)+4A+2B=2x^2-6x+4$

Cách biến đổi cũng đơn giản các em sẽ dùng phương pháp đồng nhất thức hệ số. Phương pháp này có nghĩa là các em cho hệ số đứng trước của $x$ bên trái bằng với hệ số của $x^2$ bên phải . Hệ số đứng trước x của bên trái bằng với hệ số đứng trước của bên phải và hệ số tự do cùng bằng nhau . Từ đó các em lập một hệ phương trình 2 ẩn để tìm ra A và B.

$$\begin{cases} A=2 \\ B-2A=-6 \\ 4A+2B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \end{cases}$$

Vậy đến đây các em có thể phân tích thành:

$2x^2-6x+4=2(x^2-2x+4)-2(x+2)$

(1) $\Leftrightarrow 2(x^2-2x+4)-2(x+2)=3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$

Do $x=-2$ không phải là nghiệm ta chia 2 vế cho $(x+2)$ :

$$\frac{2(x^2-2x+4)}{x+2}-3\sqrt{\frac{x^2-2x+4}{x+2}}-2=0$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}}$ $(t\ge 0)$

$$\Rightarrow 2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2} \quad (l) \\ t=2 \quad (n) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-2x+4}{x+2}}=2$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13} \\ x=3-\sqrt{13} \end{array}\right.$$

$aP(x)+bQ(x)+c\sqrt{P(x)Q(x)}=0\,(abc\ne 0)$

+Nếu $P(x)=0$ thì $Q(x)=0$ Dẫn đến hệ $\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)=0 \end{cases}$

+Nếu $P(x)\ne 0$, ta chia 2 vế phương trình cho $P(x)$ , được:

$a+b\dfrac{Q(x)}{P(x)}+c\sqrt{\dfrac{Q(x)}{P(x)}}=0$ Đặt $t=\sqrt{\dfrac{Q(x)}{P(x)}}$ $(t\ge 0)$

Phương trình thành $bt^2+ct+a=0$ . Tìm ra $t$ suy ra $x$

Lưu ý với dạng $aA(x)+bB(x)=\sqrt{mA^2(x)+nB^2(x)}$ thì các em có thể làm tương tự. Hoặc có thể bình phương 2 vế lên để trở thành phương trình đẳng cấp bậc 2 rồi giải.

## Kinh nghiệm xử lý bài có chứa căn thức

Khi các em đối diện các bài có chứa căn thức thì các em sẽ thường sử dụng các phương pháp như liên hợp hay hàm số…..Những nhưng phương pháp như vậy thì đòi hỏi các em phải tư duy và cũng không dễ dàng giải ra. Đối với những bài như vậy thì chúng ta sẽ sử dụng "cơ bắp" một tí. Chúng ta sẽ sử dụng câu nói "có căn đặt căn"(sẽ rất hữu ích đấy các em nhé)

Ta sẽ cùng lấy ví dụ câu phương trình đề đại học 2015 làm minh hoạ:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)(\sqrt{x+2}-2)$$

Phân tích : Đầu tiên các em tìm nghiệm của phương trình thì các em sẽ tìm ra được $x=2$ và $x=3,3027\ldots$. Bằng kĩ thuật tìm nghiệm lẻ ở trên thì ta có thể suy ra được dễ dàng $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ và biểu thức bậc 2 chứa nghiệm lẻ đó là $x^2-3x-1=0$. Ta để ý một chút thì sẽ thấy được $x^2+2x-8=(x-2)(x-4)$ và vế phải ta chỉ cần liên hợp thì sẽ xuất hiện nhân tử chung là $x-2$ .

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \frac{(x+4)}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)(*)\end{array}\right.$$

**Phân tích:** Đến đây các em sẽ thấy hơi bối rối. Và các em biết trong phương trình (*) còn có một nghiệm nữa là $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Vì trong phòng thi các em sẽ không thể nghĩ ra được những cách hay nên đến đây các em có thể sử dụng "cơ bắp". Thực hiện "có căn đặt căn". Chúng ta quan sát nếu đặt $t=\sqrt{x+2}$ thì chúng ta sẽ có thể biểu diễn $x$ và $x^2$ qua t được hết. Lúc này phương trình sẽ trở thành phương trình bậc cao và trở nên đơn giản hơn.

Đặt $t=\sqrt{x+2}\ (t\ge 0)$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{(t^2+2)}{(t^2-2)^2-2(t^2-2)+3}=(t^2-1)\left(\frac{1}{t+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow(t+2)(t^2+2)=(t^2-1)[(t^2-2)^2-2(t^2-2)+3]$$

$$\Leftrightarrow t^3+2t^2+2t+4=t^6-7t^4+17t^2-11$$ (Có thủ thuật khai triển ở đây)

$$\Leftrightarrow t^6-7t^4-t^3+15t^2-2t-15=0$$

$$\Leftrightarrow(t^2-t-3)(t^4+t^3-3t^2-t+5)=0$$ (Có thủ thuật biến đổi)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-t-3=0\quad(+)\\ t^4+t^3-3t^2-t+5=0\,(++)\end{array}\right.$$

$$(+)t^2-t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1+\sqrt{13}}{3}(n)\\ t=\frac{1-\sqrt{13}}{3}(l)\end{array}\right.$$

Với $t=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$$(++)t^4+t^3-3t^2-t+5=0\Leftrightarrow(t^2-2)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+t^3=0\quad(VN)$$

Vậy $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Đối với cách giải trên thì các em sẽ thấy là khá dễ dàng trong việc tư duy để giải bài toán nhưng nó lại khá phức tạp trong việc biến đổi và phân tích nhân tử. Nhưng các em đừng lo vì chúng ta chỉ cần một chút kĩ thuật khai triển và phân tích thành nhân tử thì sẽ thấy việc biến đổi không còn gì là khó khăn

# Kinh nghiệm xử lý bài có chứa căn thức

Kĩ thuật khai triển: Các em sẽ sử dụng máy tính để khai triển dễ dàng.
B1: Gán x=1000
B2: Xác định được hệ số của bậc cao nhất của phương trình
B3:Nhập biểu thức cần khai triển vào máy tính
B4:Lấy biểu thức đó trừ đi các bậc của x đến khi nào bằng 0 ta sẽ thu được một biểu thức mới. Biểu thức đó chính là biểu thức cần khai triển ra.

Ví dụ : Khai triển $(x^2+x-2)(x^2-x+5)$

Đầu tiên các em gán $x=1000$

Tiếp theo các em nhìn vào biểu thức thì sẽ dễ dàng thấy bậc cao nhất của nó là $x^4$

Các em nhập nguyên biểu thức vào máy tính rồi bắt đầu thực hiện trừ.

Biểu thức này nhất định sẽ chứa $x^4$ nên đầu tiên các em sẽ trừ đi cho $x^4$

Kết quả ra là: 2006990 các em sẽ liên tưởng đến $2x^2$ (vì $2x^2=2000000$)

Tiếp tục các em trừ đi cho $2x^2$ sẽ ra được kết quả là : 6990 các em sẽ tiếp tục liên tưởng đến $7x$ (vì $7x=7000$ )

Các em tiếp tục trừ đi cho $7x$ thì sẽ thu được kết quả là -10 đến đây các em sẽ cộng 10 vào thì sẽ thu được kết quả bằng 0.

Vậy chúng ta đã khai triển ra được một cách dễ dàng

$(x^2+x-2)(x^2-x+5)=x^4+2x^2+7x-10$

Tương tự thì các em cũng sẽ dễ dàng phân tích được:

$(t^2-1)[(t^2-2)^2-2(t^2-2)+3]=t^6-7t^4+17t^2-11$ ( cách giải "cơ bắp" ở trên )

Các em cần luyện tập nhiều lần để có thể quen với kĩ thuật này.

**Kĩ thuật phân tích nhân tử:**

Khi các em gặp phương trình bậc cao thì thường phân tích theo kiểu xác định được một nghiệm đẹp rồi chia sơ đồ hooc–ne. Nhưng đối với bài toán ở trên thì ta không thể dùng cách đó vì không có nghiệm đẹp . Chúng ta cũng sẽ dùng máy tính để tìm ra biểu thức còn lại.

Ví dụ:

$t^6-7t^4-t^3+15t^2-2t-15=0$

Ở phương trình này các em sẽ thấy có nghiệm xấu và cũng dễ dàng tìm ra được phương trình bậc 2 chứa nghiệm xấu đó là $t^2-t-3$

Từ đó ta có : $(t^2-\mathrm{t}-3)\mathrm{F}(x)=0$

Mục đích của chúng ta là tìm ra biểu thức F(x)

Đầu tiên các em cũng gán x =1000

Các em bấm biểu thức này vào máy tính $\dfrac{t^6-7t^4-t^3+15t^2-2t-15}{(t^2-\mathrm{t}-3)}$

Các em cũng xác định được là hệ số của bậc cao nhất trong phép tính này là $t^4$

Các em lấy biểu thức đó trừ đi cho $t^4$

Sẽ được kết quả là 996999005 đến đây các em sẽ liên tưởng đến $t^3$

## Kinh nghiệm xử lý bài có chứa căn thức

Tiếp theo các em tiếp tục trừ cho $t^3$ sẽ được kết quả là -3000995 đến đây các em sẽ nghĩ đến $3t^2$

Các em cộng $3t^2$ vào thì được -995 đến đây chúng ta cũng sẽ dễ dàng biết được là phải cộng thêm t vào (vì $t=1000$ )

Cuối cùng sẽ ra số 5 đến đây ta trừ đi cho 5 thì sẽ thu được số 0.

Vậy biểu thức ta thu được $t^4+t^3-3t^2-t+5$

$t^6-7t^4-t^3+15t^2-2t-15=0$

$\Leftrightarrow (t^2-t-3)(t^4+t^3-3t^2-t+5)=0$

**Có nhiều em sẽ thắc mắc vì sao lại là 1000 lựa chọn một con số khác được không?**

**Các em lựa chọn một con số khác vẫn được nhưng ở đây lấy 1000 để cho các em dễ liên tưởng hơn.**

## Kĩ thuật phân tích thành nhân tử

**Ví dụ 1:** $x^2+2-2\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x^2+1}+x=0$

Phân tích : Thường thì với bài này các em sẽ lập delta hoặc là sử dụng liên hợp hoặc nhóm…. Ở đây sẽ sử dụng kĩ thuật "1000" để phân tích. Kĩ thuật này là chúng ta sẽ cố gắng tạo thành phương trình bậc 2 và sử dụng casio.Quan sát ở đây chúng ta có thể tạo thành phương trình bậc 2 theo $\sqrt{x^2+1}$ hoặc là theo $x$ . Nhưng ở đây chúng ta chú ý là tạo phương trình bậc 2 theo căn thì mới có thể thuật hiện được kĩ thuật "1000" vì lúc đó thì chúng ta tính ra mới không lẻ.

Phương trình tương đương:

$x^2+1-\sqrt{x^2+1}.(x+2)+x+1=0$

Ta đã tạo được phương trình bậc 2 theo $\sqrt{x^2+1}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\ (t\ge 0)$

$\Rightarrow t^2-t(x+2)+x+1=0$

Đến đây chúng ta sẽ sử dụng casio:

Ở đây chúng ta sẽ xem như $x=1000$

Ấn mode bấm 5 bấm vào phương trình bậc 2.

Nhập $a=1;b=-1002;c=1001$ (vì $x=1000$)

Sẽ ra 2 nghiệm là $t=1001$ và $t=1$

Với 1001 các em sẽ nghĩ đến $x+1$ ( vì $x=1000$ hoặc nếu là 998 các em sẽ nghĩ đến là $x-2$ ) Đối với số 1 thì chúng ta chỉ có thể nghĩ là $t=1$ chứ nó không còn liên hệ gì đến x nữa.

$t=1001=x+1$

$t=1$

$\Leftrightarrow t^2-t(x+2)+x+1=0 \Leftrightarrow (t-x-1)(t-1)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-x-1)(\sqrt{x^2+1}-1)=0$

## Kĩ thuật phân tích thành nhân tử

**Ví dụ 2:** $\begin{cases} x^4+y^2\left(x^2+3\right)+7x^2=y\left(x^2+4+y^2\right)-12 & (1) \\ -4\sqrt[4]{x^2+y}+\sqrt{2x^2+3}=-4 & (2) \end{cases}$

Phân tích : Khi ta quan sát hệ phương trình này thì chúng ta sẽ thấy phương trình thứ 2 có căn bậc 4 và căn bậc 2 và giữa 2 căn này chẳng có mối liên hệ gì đặc biệt nên chúng ta sẽ thấy là không thể khai thác ở phương trình thứ 2 này. Vì vậy ta tập trung khai thác vào phương trình số 1. Ở phương tình này chúng ta sẽ cố gắng tìm ra mối liên hệ giữa x và y . Chúng ta sẽ sử dụng kĩ thuật "1000" để tìm ra điều đó. Muốn sử dụng kĩ thuật "1000" thì việc đầu tiên chúng ta phải đưa về 1 phương trình bậc 2. Ở đây ta có thể đưa về theo $x^2$ .

$(1)\Leftrightarrow x^4+y^2\left(x^2+3\right)+7x^2=y\left(x^2+4+y^2\right)-12\Leftrightarrow x^4+x^2y^2+7x^2-x^2y-y^3-4y+3y^2+12=0$

$\Leftrightarrow x^4+x^2\left(y^2-y+7\right)-y^3-4y+3y^2+12=0$

Đặt $t=x^2 \quad (t\ge 0)$ $\Leftrightarrow t^2+t\left(y^2-y+7\right)-y^3-4y+3y^2+12=0$

Đến đây các em thực hiện tương tự như bước ở ví dụ trên sẽ ra được là :

$t=997$ và $t=-1000004$

Các em sẽ nghĩ đến:

$997=y-3$

$-1000004=-y^2-4$ (vì $y^2=1000000$)

$t^2+t\left(y^2-y+7\right)-y^3-4y+3y^2+12=0\Leftrightarrow (t-y+3)(t+y^2+4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y-3 \\ t+y^2+4=0\,(VN) \end{array}\right.$

Với $t=y-3$ $\Leftrightarrow x^2=y-3$

Thế vào phương trình 2 :

$-4\sqrt[4]{2y-3}+\sqrt{2y-3}=-4\Leftrightarrow a^2-4a+4=0$ (với $a=\sqrt[4]{2y-3}$)

$\Leftrightarrow a=2\Leftrightarrow \sqrt[4]{2y-3}=2\Leftrightarrow y=\frac{19}{2}$

## Hàm số trong giải bất phương trình

Các em thường sử dụng hàm số trong giải phương trình hoặc hệ phương trình nhưng ít chú ý đến việc giải bất phương trình cũng có thể hàm số.Việc sử dụng hàm số trong giải bất phương trình cũng tương tự như giải trong phương trình.

Ví dụ: $\sqrt{x^3+1}-\sqrt{8x^3-12x^2+6x}>2x-2$

Phân tích : Đầu tiên khi nhìn vào bất phương trình này thì các em sẽ thấy rất khó khăn trong việc giải vì có hai căn và có mũ 3 trong căn . Nhưng các em nhìn kĩ một chút thì sẽ thấy trong căn thứ 2 có $8x^3-12x^2+6x$ chúng ta sẽ liên tưởng đến $(2x-1)^3$ và thấy trong căn đầu tiên có $x^3$ ta thấy có gì đó giống giống nhau nên ta liên tưởng phương pháp hàm số.

## Hàm số trong giải bất phương trình

$\sqrt{x^3+1}-\sqrt{8x^3-12x^2+6x}>2x-2$

Điều kiện: $\begin{cases} x^3+1\ge 0 \\ 8x^3-12x^2+6x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+1}>\sqrt{8x^3-12x^2+6x-1+1}+2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+1}>\sqrt{(2x-1)^3+1}+2x-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+1}+2x>\sqrt{(2x-1)^3+1}+2(2x-1)$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\sqrt{t^3+1}+2t\ (t\ge -1)$

$f'(t)=\dfrac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}}+2>0$

Vậy hàm số đồng biến với $t\ge -1$

$\Leftrightarrow f(x)>f(2x-1) \Leftrightarrow x>2x-1 \Leftrightarrow x<1$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $0\le x<1$

## Lý thuyết

"Bậc" là mũ của biến

Vd: Bậc của $x$ là n

Hằng số C có bậc là 0 (vì C=C. $x^0$ )

Số 0 có thể coi là bậc gì cũng được (vì 0=0. $x^n$ ,n bất kì)

Ở đây, ta xem sinx, siny như là biến x, y thì ta có:

$cos^2x, sin^2x$ bậc 2

$cos^3x, sin^3x$ bậc 3

$tanx = \frac{sinx}{cosx}$ bậc 0

$cotx$ là bậc 0

$sin2x = sinx.cosx$ là bậc 2

$cos2x = cos^2x - sin^2x$ là bậc 2

Trong lượng giác, ta có: $cos^2x + sin^2x = 1$

Vế trái là bậc 2, vế phải là bậc 0 => bậc 2 cũng như bậc 0 hay xem phường trình đồng bậc là cùng bậc chẵn hay bậc lẻ.

***Phương trình thuần nhất theo sinx, cosx***

$asinx + bcosx = c$ (*) $(a, b, c \in R$ và $a^2 + b^2 \neq 0)$

Để giải phương trình này, ta chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$

Điều kiện $a^2 + b^2 > c^2$

Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = sin\alpha \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = cos\alpha$

Vì $sin^2\alpha + cox^2\alpha = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$ nên ta suy ra được:

$(1) \Leftrightarrow sin\alpha sinx + cos\alpha cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

***Phương trình chứa tổng hiệu và tích của sinx, cos***

$a(sinx + cosx) + bsinxcosx + c = 0(*)$

Đặt $t = sinx + cosx$ $\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2sinxcosx => sinxcosx = \frac{t^2-1}{2}$

Với trường hợp $a(sinx - cosx) + bsinxcosx + c = 0(*)$ ta cũng làm tương tự như vậy

Thay vào (*) ta được phương trình một ẩn t. Giải phương trình ẩn t đưa về phương trình lượng cơ bản.

Chú ý: $sinx + cosx = \sqrt{2}sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$sinx - cosx = \sqrt{2}sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

## Ví dụ

**Ví dụ 1:** Giải phương trình lượng giác: $3sin^3x + cos^3x - 2sinx = 0$

**Phân tích**: ta có: $sin^3x$ bậc lẻ

$cos^3x$ bậc lẻ

$-2sinx$ bậc lẻ

**Cách làm:**

Ta chia phương trình cho $cos^n x$ trong đó n là bậc cao nhất

Ta thấy $cosx = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Chia cả 2 vế cho $cos^3x$ ta được:

$$3\frac{sin^3x}{cos^3x} + 1 - \frac{2sinx}{cos^3x} = 0 \Leftrightarrow 3tan^3x + 1 - 2tanx.\frac{1}{cos^2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3tan^3x + 1 - 2tanx\left(tan^2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(tanx - 1\right)\left(tan^2x + tanx - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tanx = 1 \\ tan^2x + tanx - 1 = 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 2:** Giải phương trình: $\sqrt{3}sinx + cosx = 2(1)$

Ta chia 2 vế cho $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}sinx + \frac{1}{2}cosx = 1 \Leftrightarrow sin\frac{\pi}{3}sinx + cos\frac{\pi}{3}cosx = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\left(k\epsilon Z\right)$$

**Ví dụ 3:** Giải phương trình: $2cos2x + sin^2xcosx + cos^2xsinx = 2\left(sinx + cosx\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(cos^2x - sin^2x\right) + sinxcosx\left(sinx + cosx\right) = 2\left(sinx + cosx\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(cosx - sins\right)\left(cosx + sinx\right) + sinxcosx\left(sinx + cosx\right) = 2\left(sinx + cosx\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(cosx + sinx\right)\left(2cosx - 2sinx + sinxcosx - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \quad (1) \\ 2cosx - 2\sin x + \sin xcosx - 2 = 0\,(2) \end{array}\right.$$

(1) Các em dùng công thức ở phần Chú ý và giải bình thường.

$$(2) \Leftrightarrow 2\left(cosx - sinx\right) + sinxcosx - 2 = 0$$

Đặt $t = cosx - \sin x\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow sinxcosx = \frac{1 - t^2}{2}$

(2) trở thành $2t + \frac{1 - t^2}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3\,(l) \\ t = 1\,(n) \end{array}\right. \Rightarrow cosx - \sin x = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Đến đây giải bình thường như phương trình lượng giác cơ bản

# Các quy tắc đếm

***I.Qui tắc cộng***

Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots A_k$. Phương án $A_1$ có $n_1$ cách thực hiện, phương án $A_2$ có $n_2$ cách thực hiện, …, phương án $A_k$ có $n_k$ cách thực hiện. Khi đó công việc có thể thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách.

***Ví dụ:*** Trên một chiếc bàn có 10 chiếc Iphone 6s Plus và 12 chiếc Samsung Galaxy S6. Hỏi một người có bao nhiêu cách chọn 1 chiếc điện thoại trong 2 loại nói trên.

***Giải:***

Người đó có 2 cách chọn.

Phương án 1 là chọn 1 chiếc điện thoại trong 10 chiếc Iphone. Phương án này có 10 cách chọn.

Phương án 2 là chọn 1 chiếc điện thoại trong 12 chiếc Samsung. Phương án này có 12 cách chọn.

Vậy người đó có 10 + 12 cách để chọn 1 chiếc điện thoại trong 2 loại nói trên.

***II.Qui tắc nhân***

Giả sử một việc nào đó gồm k công đoạn $A_1, A_2, \ldots A_k$ (khác với qui tắc cộng là k công đoạn này liên tiếp và có liên quan đến nhau). Công đoạn $A_1$ có $n_1$ cách thực hiện, công đoạn $A_2$ có $n_2$ cách thực hiện, …, công đoạn $A_k$ có $n_k$ cách thực hiện. Khi đó công việc có thể thực hiện bởi $n_1 n_2 \ldots n_k$ cách.

***Ví dụ:*** Trên một chiếc bàn có 10 chiếc Iphone 6s Plus và 12 chiếc Samsung Galaxy S6. Hỏi một người có bao nhiêu cách chọn 1 chiếc điện thoại Iphone và 1 chiếc điện thoại Galaxy.

***Phân tích:***

Ta có thể thấy để chọn được theo YCBT ta phải thực hiện 2 công đoạn. Công đoạn 1 là chọn ra 1 chiếc Iphone, công đoạn 2 chọn ra 1 chiếc Samsung.

***Giải:***

. Chọn 1 chiếc Iphone trong 10 chiếc: có 10 cách chọn

. Chọn 1 chiếc Samsung trong 12 chiếc: có 12 cách chọn

Ta thấy cứ mỗi cách chọn 1 chiếc Iphone sẽ ứng với 12 cách chọn 1 chiếc Samsung. Nên theo qui tắc nhân ta có 10.12 cách chọn theo YCBT.

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

| | Hoán vị | Chỉnh hợp | Tổ hợp |
|---|---|---|---|
| Công thức | $P_A = n!$<br>$n \geq 1$ | $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$<br>$1 \leq k \leq n$ | $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$<br>$1 \leq k \leq n$ |
| Ví dụ | Có bao nhiêu cách xếp 4 bạn vào 4 bàn khác nhau theo hang ngang | Từ các số 1,6,9,8 có bao nhiêu cách lập được một số tự nhiên có 3 chữ số | Có bao nhiêu cách chọn ra 3 trong số 5 bạn học sinh đi hát. |
| Đáp án | Ta xếp thứ tự cho 4 bạn: $P_A = 4!$ | Ta lấy 3 chữ số từ 4 chữ số {1; 6; 9; 8} và xếp thứ tự:<br>$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ | Ta lấy 3 người từ 5 người và không sắp xếp thứ tự:<br>$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ |
| Có sắp xếp thứ tự hay không | Có | Có | Không |
| Số phần tử | Tất cả. (Chọn n phần tử trong n phần tử và có sắp xếp thứ tự) | Chỉ k phần tử trong n phần tử | Chỉ k phần tử trong n phần tử |

## Xác suất

Tính xác xuất bằng Qui tắc cộng xác suất

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

P(A∪B)=P(A) + P(B) nếu A∩B=∅

***Ví dụ:*** Một hộp đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để:

a) Lấy được 3 viên bi cùng màu
b) Lấy được 3 viên bi khác màu
c) Lấy được ít nhất 2 viên bi xanh

***Giải:***

a)

Gọi A là biến cố "Lấy được 3 viên bi xanh", B là biến cố "Lấy được 3 viên bi đỏ", H là biến cố "Lấy được 3 viên bi cùng màu. Vì A và B xung khắc (tức là khi A xảy ra thì B không xảy ra) $H = A \cup B$ nên P(H)=P(A)+P(B).

$$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{14}{55};\ P(B) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{55}$$

$$P(H) = \frac{14}{55} + \frac{1}{55} = \frac{15}{55}$$

b) Biến cố lấy được 3 viên bi khác màu là biến cố $\overline{H}$ nên ta có $P(\overline{H}) = 1 - P(H) = \frac{40}{55}$

c) Gọi C là biến cố "Lấy được 2 viên bi xanh và một viên bi đỏ", K là biến cố "Lấy được ít nhất 2 viên bi xanh"

Ta có $K = A \cup C$ , A và C xung khắc nên P(K)=P(A)+P(C)

$$P(C) = \frac{C_8^2.C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{28}{55}$$

$$P(K) = P(A) + P(C) = \frac{29}{55}$$

Tính xác suất bằng qui tắc nhân xác suất

Để tính xác suất của hai biến cố độc lập A và B ta dung công thức P(AB)=P(A)P(B).

(Biến cố A độc lập với biến cố B khi A xảy ra không ảnh hưởng đến B và ngược lại)

***Ví dụ:*** Hai xạ thủ bắn vào 2 bia. Xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ 1 là 0.8, xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ 2 là 0.9. Tính xác suất để:

a) Cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia
b) Chỉ có 1 xạ thủ bắn trúng bia

***Giải:***

a) Gọi A là biến cố "Xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia". Ta có P(A)=0.8

B là biến cố "Xạ thủ thứ 2 bắn trúng bia". Ta có P(B)=0.9

Do xạ thủ thứ nhất có bắn trúng bia hay không không ảnh hưởng đến việc bắn trúng bia của xạ thủ thứ 2. Nên ta có 2 biến cố A và B độc lập

Gọi H là biến cố "Cả hai xạ thủ bắn trúng bia"

P(H)=P(A)P(B)=0,8.0,9=0,72

b) Gọi K là biến cố "Chỉ có một xạ thủ bắn trúng bia"

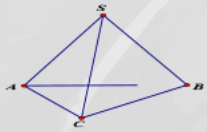
$$P(K) = P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0,8.0,1 + 0,2.0,9 = 0,26$$

## Kiến thức cơ bản

- Điểm: N($x_N;y_N;z_N$); M($x_M;y_M;z_M$);.....
- Trung điểm của MN: $\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2};\frac{z_M+z_N}{2}\right)$
- Trọng tâm tam giác ABC: $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$
- Vector :
  $\vec{u}=(a,b,c);\quad \vec{v}=(a';b';c');\quad \overrightarrow{MN}=(x_N-x_M;y_N-y_M;z_N-z_M)$
- Độ dài vector: $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2};\quad |\vec{v}|=\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}$
- Tích vô hướng của 2 vector: $\vec{u}.\vec{v}=a.a'+b.b'+c.c'$
- Tích hữu hướng của 2 vector: $[\vec{u};\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)$
- Xét hai vector $\vec{u}=(a,b,c);\quad \vec{v}=(a';b';c')$, ta có:
  - ✓ Hai vector bằng nhau: $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \\ c=c' \end{cases}$
  - ✓ Hai vector cùng phương: $\vec{u}\nearrow\nearrow\vec{v} \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ hay $\left[\vec{u}.\vec{v}\right]=\vec{0}=(0;0;0)$
  - ✓ Hai vector vuông góc: $\vec{u}$ vuông góc $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=a.a'+b.b'+c.c'=0$
- Trong tam giác:Cho tam giác ABC:


$$\boxed{S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|}$$

- Trong hình chóp tam giác: Cho chóp tam giác SABC:




$$\boxed{V_{S.ABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|}$$

- Góc tạo bởi 2 vector: xét hai vector $\vec{u}$, $\vec{v}$ tạo với nhau một góc là $\alpha$ .Ta luôn có:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos\alpha=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \quad \text{và} \quad \sin(\vec{u},\vec{v})=\sin\alpha=\frac{\left|\left[\vec{u};\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

❖ ***Lưu ý:***

- Ba điểm A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}\nearrow\nearrow\overrightarrow{BC}$
- Bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$

## Phương trình mặt phẳng

**1) LÝ THUYẾT:**

Cho mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}=(a;b;c)$ và đi qua M($x_o;y_o;z_o$), ta có phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0 \text{ hay } ax+by+cz+d=0$$

- Phương trình mặt phẳng (Q) cắt trục Ox tại A(*a;0;0*) ; *cắt Oy tại B(0;b;0) và cắt Oz tại C(0;0;c) là:* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
- Một điểm N($x_N;y_N;z_N$) thuộc (P):*ax+by+cz+d=0 khi và chỉ khi* $ax_N+by_N+cz_N+d=0$

***a) Khoảng cách từ điểm N($x_N;y_N;z_N$) đến đường thẳng (d)ax+by+c=0.***

$$d[N;(d)]=\frac{|ax_N+by_N+cz_N+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

***b) Góc $\alpha$ tạo bởi đường thẳng ($d_1$)$a_1x+b_1y+c_1=0$ và đường thẳng ($d_2$) $a_2x+b_2y+c_2=0$.***

*($d_1$) có vector pháp tuyến* $\vec{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$ *và ($d_2$) có vector pháp tuyến* $\vec{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$, *ta có:*

$$\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right|=\left|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right| \text{ và } \sin\alpha=\sin(\vec{u},\vec{v})=\frac{\left|\left[\vec{u};\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

- ***Lưu ý:*** Phương trình các mặt phẳng tọa độ:
  (Oxy):*z=0* ; *(Oyz):x=0* ;*(Oxz):y=0*

***c) Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng:***

Cho (P) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ *và (P')*$a_2x+b_2y+c\ 2z+d_2=0$ có vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$

- (P) và (P') cắt nhau khi và chỉ khi $\vec{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$ *không cùng phương .*
- (P) và (P') song song khi và chỉ khi $\vec{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$ *cùng phương và điểm M thuộc (P) nhưng M không thuộc (P').*
- (P) và (P') song song khi và chỉ khi $\vec{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$ *cùng phương và điểm M thuộc (P) và M cũng thuộc (P').*
- (P) và (P') vuông góc khi và chỉ khi $\vec{n_1}.\vec{n_2}=0$.

***d) Các mặt phẳng cần nhớ:***

(Oxy): z=0 (Oyz)x=0 (Oxz): y=0

**2) CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP:**

*a) Phương trình mặt phẳng trung trực (P)của đoạn thẳng tạo bởi hai điểm A,B:*

$\overrightarrow{AB}=(....;...;..)$

(P) nhận vector $\overrightarrow{AB}=(....;...;..)$ làm vector pháp tuyến

=> Phương trình mặt phẳng (P) là:

## Phương trình mặt phẳng

*b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với BC:*

$\overrightarrow{BC} = (.....;....;...)$

*(P)* nhận $\overrightarrow{BC} = (.....;....;...)$ làm vector pháp tuyến và (P) đi qua A

=> phương trình mặt phẳng (P) là:

*c) Phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm A,B,C:*

$\overrightarrow{AB} = (...;...;...)$

$\overrightarrow{AC} = (...;...;...)$

$\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (...;...;...)$

(P) nhận $\vec{u}$ làm vector pháp tuyến và (P) đi qua A nên (P) có phương trình là:

*d)Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và song song với mặt phẳng (P') ax+by+cz+d=0*

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng *ax+by+cz+d'=0* $(d' \neq 0)$

Có $A \in (P) => ax_A + by_A + cz_A + d' = 0$ => giải được *d'* từ đó tìm ra phương trình của mặt phẳng (P).

*e)Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A,B và vuông góc với mặt phẳng (P') ax+by+cz+d=0*

$(P')ax + by + cz + d = 0 => vtpt : \vec{n} = (a;b;c)$

$\overrightarrow{AB} = (...;...;...)$

$\vec{u} = \left[\vec{n};\overrightarrow{AB}\right] = (...;...;...)$

(P) nhận $\vec{u} = (...;...;...)$ làm vector pháp tuyến và (P) đi qua A

=> phương trình mặt phẳng (P) là:

*f) Viết phương trình mặt phẳng (P)qua A, vuông góc với mặt phẳng ($P_1$) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và mặt phẳng ($P_2$) $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.*

*($P_1$)* $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ có vtpt $\overrightarrow{n_1} = (a_1;b_1;c_1)$

*($P_2$)* $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ có vtpt $\overrightarrow{n_2} = (a_2;b_2;c_2)$

$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right] = (..;..;..)$

*(P)* nhận $\vec{u}$ làm vector pháp tuyến và đ qua A

=> phương trình mặt phẳng (P) là:

*g) Phương trình mặt phẳng (P) qua A,B và cách C một khoảng là k:*

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ $\left(a^2 + b^2 + c^2 > 0\right)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P), ta có: (P) $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$B \in (P) => a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0$ (tính a theo b và c hay ngược lại) (1)

Ta có: $d[C;(P)] = \dfrac{\left|a(x_C - x_A) + b(y_C - y_A) + c(z_C - z_A)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = k$ (2)

Thế (1) vào (2) ta giải phương trình:

## Phương trình mặt phẳng

*h) Phương trình mặt phẳng (P) qua A,B và tạo bởi (P')có vector pháp tuyến $\vec{n'} = (a';b';c')$ một góc $\alpha$ :*

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P), ta có: (P) $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$B \in (P) \Rightarrow a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)+c(z_B-z_A)=0$ (tính a theo b và c hay ngược lại) (1)

Ta lại có: $\cos(P;P') = \left|\cos(\vec{n};\vec{n'})\right| = \cos\alpha$ (2)

Từ (1) và (2) ta giải phương trình để tìm a,b,c.

*i)Tìm hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (P) ax+by+cz+d=0:*

*(P) ax+by+cz+d=0* có vector pháp tuyến $\vec{n} = (a;b;c)$

Gọi H($x_H;y_H;z_H$) là hình chiếu của A lên *(P)*, ta có:

H thuộc (P) => $ax_H+by_H+cz_H+d=0$

$\overrightarrow{AH} = (x_H-x_A;y_H-y_A;z_H-z_A)$

Ta có: $\overrightarrow{AH} \nearrow\nearrow \vec{n}$

Từ đây ta có 2 phương trình để giải tọa độ của H

- ✓ Nếu gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) thì ta có: H sẽ là trung điểm AA'. Vì vậy khi tìm điểm đối xứng của một điểm qua một mặt phẳng thì trước hết ta phải tìm hình chiếu của điểm đó lên mặt phẳng.

***j)Các bài toán về mặt phẳng cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C.***

Ta gọi các điểm A(a;0;0) ; B(0;b;0) ;C(0;0;c) rồi dùng phương trình đoạn chắn để giải quyết.

## Phương trình mặt cầu

**1) Lý thuyết:**

Cho mặt cầu (S) có tâm là I($x_0;y_0;z_0$) và bán kính là *R*, ta có phương trình của (S) là : (S) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

- *Vị trí tương đối của mặt cầu mặt và phẳng:*

Cho mặt cầu (S) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ có tâm I và bán kính R và mặt phẳng (P) *ax+by+cz+d=0.* Gọi *d* là khoảng cách từ tâm của (S) tới mặt phẳng (P), ta có:

- ✓ Nếu *d>R*, (S) không cắt (P).
- ✓ Nếu *d=R, (S)* cắt *(P)* tại một điểm duy nhất và điểm đó chinh là hình chiếu của tâm I lên mặt phẳng (P).
- ✓ Nếu *d<R* thì (S) cắt (P) theo một hình tròn có tâm là hình chiếu của (S) lên (P).

## Phương trình mặt cầu

**1) Các dạng bài tập thường gặp:**

*a) Viết phương trình mặt cầu khi biết tâm và bán kính:*

- Tâm là trung điểm đường kính:
- Bán kính là khoảng cách từ tâm tới một điểm bất kì thuộc mặt cầu; bán kính là một nữa đường kính

b) *Viết phương trình mặt cầu(S) có tâm thuộc mặt phẳng (P) và đi quaA,B,C.*

Gọi I(*a;b;c*) là tâm mặt cầu (S), *R* là bán kính của *(S)*, ta có phương trình mặt cầu (S) là:.....

I thuộc (P) , ta có phương trình thứ nhất:

A,B,C thuộc (S) ta có các phương trình còn lại để giải *a,b,c và R.*

.....

.....

.....

c) *Viết phương trình mặt cầu (S) qua bốn điểm A,B,C,D:*

Gọi I(*a;b;c*) là tâm mặt cầu (S), *R* là bán kính của *(S)*, ta có phương trình mặt cầu (S) là:.....

A,B,C,D thuộc (S) ta có các phương trình để giải *a,b,c và R.*

.....

.....

.....

d) *Viết phương trình mặt cầu qua 3 điểm A,B,C và tiếp xúc với mặt phẳng (P)*

Gọi I(*a;b;c*) là tâm mặt cầu (S), *R* là bán kính của *(S)*, ta có phương trình mặt cầu (S) là:.....

A,B,C thuộc (S) ta có các phương trình để giải *a,b,c và R.*

ta lại có: $d[I;(P)] = R <=> \quad R^2 = d^2[I;(P)]$ ta có phương trình còn lại :

.....

.....

.....

e) *Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng(d) và đi qua A,B:*

Vì tâm I thuộc đường thẳng nên số ẩn đặt cho I chỉ có 1: Dùng phương trình IA=IB ta sẽ giải được ẩn đó từ đó ta có tâm và bán kính là IA

f) *Viết phương trình mặt phẳng qua A cắt mặt cầu (S)có tâm I bán kính R theo một đường tròn có bán kính là r:*

Gọi d là khoảng cách từ I tới (P), ta có: $d = \sqrt{R^2 - r^2}$

Tơi đây bài toán đã trở về dạng viết pt mp qua 1 điểm và cách một điểm khác đoạn là d.

## Phương trình đường thẳng

**1) Lý thuyết:**

Cho đường thẳng (d) có vector chỉ phương là $\vec{n}=(a;b;c)$ và đi qua M($x_0;y_0;z_0$), *ta có phương trình đường thẳng (d) là:*

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

*Khi* $\vec{n}=(a;b;c)$ có một tọa độ bằng 0 người ta thường viết dưới dạng:

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

*a)khoảng cách từ một điểm M tới đường thẳng (d)đi qua N và có vector chỉ phuong là* $\vec{n}=(a;b;c)$: $\quad d=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN};\vec{n}\right]\right|}{\left|\vec{n}\right|}$

*b) Khoảng cách giữa đường thẳng ($d_1$) đi qua $M_1$ ,vector chỉ phương* $\vec{n_1}$ *và đường thẳng ($d_2$) đi qua $M_2$, vector chỉ phương* $\vec{n_2}$*:*

$$d=\frac{\left|\left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right].\overrightarrow{MM}\right|}{\left|\left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]\right|}$$

*c) Khoảng cách giữa đường thẳng ($d_1$) vector chỉ phương* $\vec{n_1}$ *và đường thẳng ($d_2$) vector chỉ phương* $\vec{n_2}$*:*

$$\cos(d_1;d_2)=\left|\cos(\vec{n_1};\vec{n_2})\right|$$

*d) các đường thẳng cần nhớ:*

*(Ox):* $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ *; (Oy):* $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$; *(Oz):* $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

*d)Vị trí tương đối của 2 đường thẳng trong không gian:*

Cho đường thẳng ($d_1$) đi qua $M_1$ ,vector chỉ phương $\vec{n_1}$ và đường thẳng ($d_2$) đi qua $M_2$, vector chỉ phương $\vec{n_2}$, ta có:

- ($d_1$) trùng ($d_2$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{n_1};\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\vec{0} \end{cases}$
- ($d_1$) song song ($d_2$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{n_1};\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$
- ($d_1$) cắt ($d_2$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]\neq\vec{0} \\ \left[\vec{n_1};\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\vec{0} \end{cases}$
- ($d_1$) cắt ($d_2$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]\neq\vec{0} \\ \left[\vec{n_1};\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$

## Phương trình đường thẳng

**1) Bài tập thường gặp:**

*a) Viết phương trình đường thẳng (d) khi biết điểm đi qua và vector pháp tuyến:*

(d) đi qua A,B thì $\overrightarrow{MN} = (.....)$ $\overrightarrow{AB}$ là vector chỉ phương của (d).

(d)// (d') thì vector chỉ phương của (d') chính là VTCP của (D)

Nếu đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) thì vector pháp tuyến của (P) sẽ và chỉ phương của (d):

Nếu (d) thuộc (hay song song) (P) và thuộc (hay song song ) (Q) thì tích có hướng của hai vector pháp tuyến (P) và (Q) sẽ là chỉ phương của (d):

*b) Viết phương trình đường thẳng qua A song song hay thuộc mặt phẳng (P) a'x+b'y+c'z+d=0 và tạo với đường thẳng (d₁)( có vector chỉ phương $\overrightarrow{n_1}$ ) một góc là $\alpha$ :*

*(P) a'x+b'y+c'z+d=0* có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n'} = (a';b';c')$

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ là vector chỉ phương của (d), ta có:

$\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$ ta có phương trình thứ nhất:

Có: $\cos(d;d_1) = \left|\cos(\vec{n};\overrightarrow{n_1})\right|$ ta có phương trình để giải a,b,c

Từ đây ta có vector chỉ phương của (d).

*c) Viết phương trình đường thẳng qua A song song hay thuộc mặt phẳng (P) a'x+b'y+c'z+d=0 và tạo với mặt phẳng (P₁) ( có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ ) một góc là $\alpha$ :*

*(P) a'x+b'y+c'z+d=0* có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n'} = (a';b';c')$

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ là vector chỉ phương của (d), ta có:

$\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$ ta có phương trình thứ nhất: $\cos(d;P_1) = \sqrt{1-\cos^2(\vec{n};\overrightarrow{n_1})}$

Từ đây ta giải được a,b,c

*d) Bài toán về đường thẳng (d) cắt (d₁) vả (d₂):*

Các bài toán dạng này t gọi giao điểm của (d) và (d₁); (d) và (d₂) rồi dựa vào yêu cầu đề bài để giải quyết:

- Lưu ý: khi biết 1 điểm thuộc đường thẳng ta nên rút hết tọa độ điểm đó theo một ẩn: .....

Cách tìm đường vuông chung của (d₁) *vector chỉ phương* $\overrightarrow{n_1}$ và (d₂), *vector chỉ phương* $\overrightarrow{n_2}$

Gọi M(.....) là điểm thuộc (d₁) và N (.....) thuộc (d₂) sao cho MN là đường vuông góc chung của (d₁) và (d₂):

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (.....)$ ; $\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_1} = 0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_2} = 0\end{array}$

Từ đây ta giải được M và N.

e) *Tìm hình chiếu của điểm N lên đường thẳng (d):*

Gọi H là hình chiếu của N lên (d), ta có: N chỉ còn 1 ẩn.

Có $\overrightarrow{NH}$ vuông góc với vector chỉ phương của (d) từ đây ta giải được H.

*f) Tìm điểm M thuộc (d) sao cho.....*

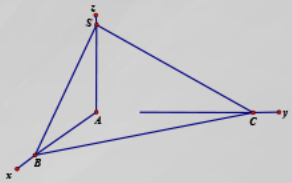
Vì M thuộc (d) nên M còn 1 ẩn.Rồi dựa vào dữ kiện đề bài để giải ẩn đó.

g) *Phương pháp chọn điểm: Cho (d₁) và (d₂). Tìm M thuộc (d₁) và N thuộc (d₂) sao cho:.....*

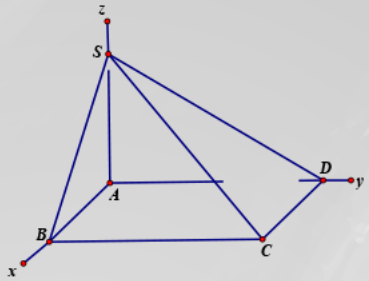
Ta lấy một điểm A cụ thể trên (d₁) rồi tìm điểm B thuộc (d₂) sao cho thỏa đề, ta có:..... AB//MN

## Giải bài tập hình học không gian bằng phương pháp tọa độ

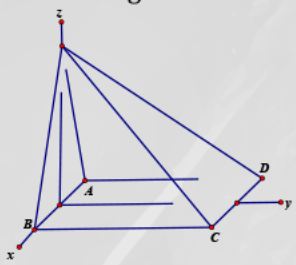
a) Chóp tam giác SABC có SA vuông góc với đáy là tam giác ABC vuông tại A.




b) Chóp tứ giác SABCD có SA vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông hay hình chữ nhật:

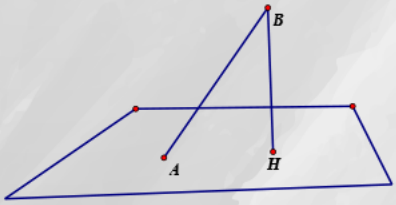



c) Chóp tứ giác SABCD có (SAB) vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông hay hình chữ nhật, SAB là tam giác cân hay tam giác đều:




## Các bài toán cực trị

**1)** *Cho điểm A,B viết phương trình mặt phẳng (P) qua A sao khoảng cách từ B tới (P) là lớn nhất:*




Gọi H là hình chiếu của B lên (P), ta có: BH là khoảng cách từ B tới (P)

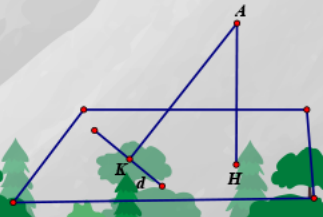
Có: $BH \le BA$

Dấu "=" xảy ra ⇔ $H \equiv A$

⇨ $\overrightarrow{HA}$ là vector pháp tuyến của (P).

**2)** *Cho điểm A và đường thẳng (d). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d) và cách A một khoảng là lớn nhất:*

Gọi H; K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và (d), ta sẽ tìm được K.




Có: $AH \le AK$

Dấu "=" xảy ra ⇔ H trùng K

⇨ $\overrightarrow{HK}$ là vector pháp tuyến của (P).

## Một số kiến thức cơ bản

- Tọa độ điểm: M $(x_M;y_M)$; $N(x_N;y_N)$
- Vector: $\overrightarrow{MN}=(x_N-x_M;y_N-y_M)$
- Tọa độ vector : $\vec{n}=(a;b)$; $\vec{n'}=(a';b')$
- Độ dài của vetor: $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2}$; $|\vec{n'}|=\sqrt{a'^2+b'^2}$
- Tích vô hướng của 2 vector: $\vec{n}.\vec{n'}=a.a'+b.b'$
- Góc giữa hai vector: $\cos(\vec{n};\vec{n'})=\dfrac{\vec{n}.\vec{n'}}{|\vec{n}|.|\vec{n'}|}$

**Quan hệ giữa 2 vector:** *Xét 2 vector* $\vec{n}=(a;b)$; $\vec{n'}=(a';b')$,ta có:

✓ Hai vector cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ *hay* $ab'=ba'$

✓ Hai vector vuông góc$\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'}=0$

✓ Hai vector bằng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases}a=a'\\b=b'\end{cases}$

## Phương trình đường thẳng

1) **Lý thuyết:**

Ta xét phương trình tổng quát của đường thẳng:Cho đường thẳng (d) có vector pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ và đi qua $M(x_o;y_o)$. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là:

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0}$$

- *Khoảng cách từ điểm $N(x_N;y_N)$ tới đường thẳng (d) ax+by+c=0 là:*

$$d=\frac{|ax_N+by_N+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- *Cos sin góc tạo bởi 2 đường thẳng:*Cho đường thẳng $(d_1)$ có vector chỉ pháp tuyến $\vec{n_1}$ và đường thẳng $(d_2)$ có vector chỉ pháp tuyến $\vec{n_2}$, ta có:

$$\cos(d_1;d_2)=|\cos(\vec{n_1};\vec{n_2})|$$

✓ ***Lưu ý:***

- Trong công thức cosin , ta có thể sử dụng 2 vector chỉ phương thay vì dùng hai vector pháp tuyến.
- Đường thẳng có vector pháp tuyến là (a;b) thì có vector chỉ phương là (-b;a) và ngược lại.

## Phương trình đường thẳng

**2)Các dạng bài tập liên quan đến đường thẳng:**

*a) Phương trình đường thẳng(d) qua 2 điểm A,B:*

Tính vector $\overrightarrow{AB}$ => vtpt của *(d)* là …..

⇨ Phương trình đường thẳng *(d)* là:….

*b) Phương trình đường thẳng qua $A(x_A;y_A)$ và song song với (d') ax+by+c=0.*

Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $ax+by+c'=0\,(c \neq c')$

Có : $A \in (d)$ => $ax_A+by_A+c'=0$ giải được $c'$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là: …

*c) Phương trình đường thẳng qua $A(x_A;y_A)$ và vuông góc với (d')ax+by+c=0*

*(d')ax+by+c=0 => vtpt của (d')=> vtpt của (d) là …….( vì (d) và (d') vuông góc) => phương trình của (d) là:*

*d) Phương trình đường thẳng(d) qua $M(x_0;y_0)$ và cách $N(x_N;y_N)$ một khoảng bằng k:*

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vtpt của *(d)*

⇨ phương trình của *(d)* là: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

Ta có: $d[N;(d)]=\dfrac{|a(x_N-x_0)+b(y_N-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=k$

……

……

*e) Phương trình đường thẳng qua $M(x_0;y_0)$ và tạo với (d')a'x+b'y+c'=0 một góc $\alpha$ :*

*(d')a'x+b'y+c'=0 => vtpt của (d') là $\vec{n'}=(a';b')$*

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vtpt của *(d)*

⇨ phương trình của *(d)* là: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

Ta có: $\cos(d;d')=|\cos(\vec{n};\vec{n'})|=\cos\alpha$

……

……

*f) Tìm hình chiếu của điểm $N(x_N;y_N)$ lên đường thẳng (d) ax+by+c=0*

## Phương trình đường thẳng

*(d) ax+by+c=0* => vector pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$

*Gọi I($x_I$;$y_I$)* là hình chiếu của N lên (d). Ta có 2 phương án giải quyết:

Cách 1: có $I \in (d) => ax_I + by_I + c = 0$

$$Có: \overrightarrow{NI} \nearrow\nearrow \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_I - x_N}{a} = \frac{y_I - y_N}{b}$$

Giải được I

Cách 2:Dựng phương trình đường thẳng IN ( IN nhận $\vec{n} = (a;b)$ làm vtcp và đi qua N)

I là giao điểm của IN và (d) => tìm được I

❖ ***Lưu ý:***Để viết được phương trình đường thẳng ta cần có điểm đi qua M và:

- Vector pháp tuyến
- Vector chỉ phương
- Khoảng cách từ N đến đường thẳng đó.
- Góc tạo bởi đường thẳng đó và một đường thẳng *(d')*.

*Lưu ý* các bài toán về phân giác trong và phân giác ngoài.

.....

.....

## Phương trình đường tròn

1. **Lý thuyết:**
   Cho đường tròn tâm I($x_0$;$y_0$) bán kính *R*,ta có phương trình đường tròn là :
   $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ *hay* $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ $(c = a^2 + b^2 - R^2)$
2. **Một số dạng bài tập:**

*a) Xác định tâm và bán kính:*

- tâm là trung điểm của đường kính.
- Bán kính bằng khoảng cách từ tâm tới một điểm trên đường tròn hay bán kính là một nửa đường kính và bán kính cũng là khoảng cách từ tâm đến 1 tiếp thuyến bất kì của đường tròn.

## Phương trình đường tròn

*a) Phương trình đường tròn (S) đi qua 3 điểm A,B,C:*

Gọi I($x_0;y_0$) là tâm của đường tròn cần tìm. R là bán kính của đường tròn đó, ta có:

(S) : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Ta có: $A\in(S) => (x_A-x_0)^2+(y_A-y_0)^2=R^2$

$B\in(S) => (x_B-x_0)^2+(y_B-y_0)^2=R^2$

$C\in(S) => (x_C-x_0)^2+(y_C-y_0)^2=R^2$

Từ 3 phương trình trên trừ nhau từng đôi một ta có hệ phương trình 2 ẩn để giải $x_0;y_0$ từ đó giải được R => phương trình của (S)

*b) Phương trình đường tròn đi qua 2 điểm A,B và tiếp xúc với đường thẳng (d) ax+by+c=0.*

Gọi I($x_0;y_0$) là tâm của đường tròn cần tìm. R là bán kính của đường tròn đó, ta có:

(S) : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Ta có: $A\in(S) => (x_A-x_0)^2+(y_A-y_0)^2=R^2$ (1)

$B\in(S) => (x_B-x_0)^2+(y_B-y_0)^2=R^2$ (2)

$$d[I;(d)]=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=R \quad (3)$$

Bình phương phương trình (3) rồi thế vào 2 phương trình đầu ta có 2 phương trình để giải $x_0;y_0$. Từ đó giải được R và tìm được phương trình (S).

## Bài toán về sự tương giao đường thẳng và đường tròn

*a) Cho đường tròn (S) tâm I($x_0;y_0$) bán kính R, viết phương trình đường thẳng (d) qua M($x_M;y_M$) cắt (S) một dây cung có độ dài bằng k.*

Ta có $d[I;(d)]=\sqrt{R^2-(\frac{k}{2})^2}$

Tới đây bài toán đưa về dạng phương trình đường thẳng qua 1 điểm và biết khoảng cách từ nó tới một điểm khác.

*b) Phương trình tiếp tuyến **tại** điểm M($x_M;y_M$)của đường tròn tâm I bán kính R:*

Ta có: $\overrightarrow{MI}$ là vector pháp tuyến của tiếp tuyến cần tìm. Từ đó ta viết được tiếp tuyến

*c) Phương trình tiếp tuyến **qua** điểm M($x_0;y_0$) hay* **xuất phát** *từ M($x_0;y_0$) của đường tròn(S) tâm I($x_I;y_I$) bán kính R.*

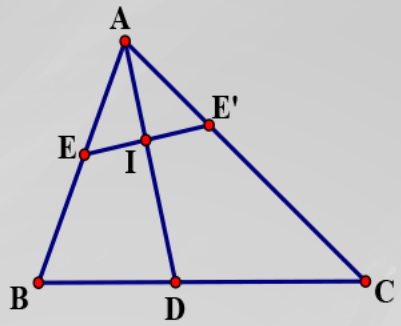
Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vector pháp tuyến của tiếp tuyến (d) cần tìm.

=> Phương trình (d): $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

Vì (d) là tiếp tuyến của (S) nên $d[I;(d)]=R$

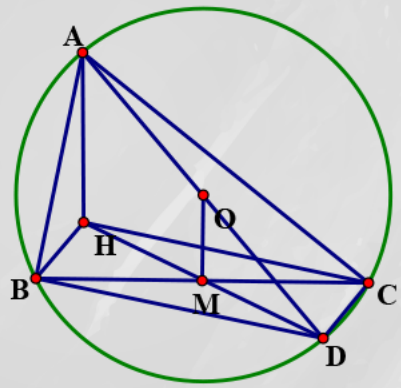
## Một số bổ đề phụ

a) *Cho tam giác ABC có đường phân giác trong của góc A là AD. E thuộc AB. Gọi đường thẳng Et vuông góc với AD tại I và cắt AC tại E'. Chứng minh. E đối xứng E' qua AD.*

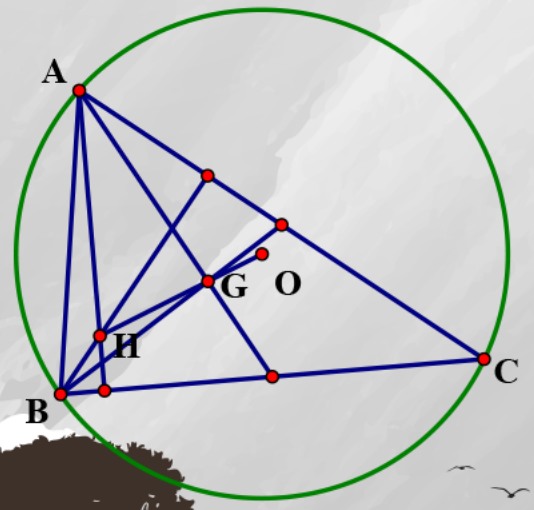



**Ứng dụng:** Cho tam giác ABC có A(2;-1) và 2 phân giác trong của góc B,C là $x-2y+1=0$ và $x+y+3=0$. Viết phương trình BC.

b) *Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC. Gọi H, O là trực tâm tam giác và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh:* $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$

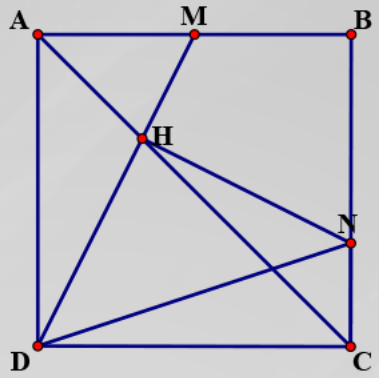



c) *Cho tam giác ABC có H là trực tâm , G là trọng tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh:* $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$



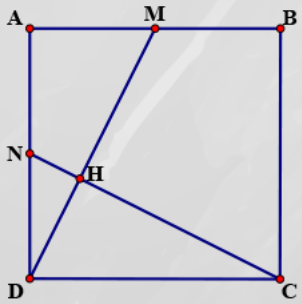
## Một số bổ đề phụ

a) *Cho hình vuông ABCD , M là trung điểm AB, trên BC lấy N sao cho BN=2NC. Gọi H là giao điểm DM với AC. Chứng minh NHD là góc vuông.*

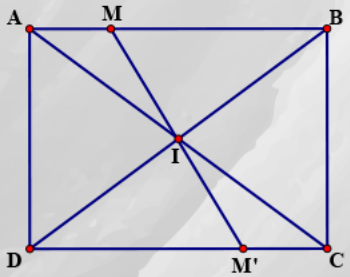



***Một số tính chất cần lưu ý:***Gọi K là giao điểm AC và DN, ta luôn có những dữ sau đây: NK=DN/4 ; CK=AC/4
MH=MH/3 ;AH=AC/3
Đó là một số dữ kiện thay thế đề bài

b) *Cho hình vuông ABCD có M là trung điểm AB, N là trung điểm AC. Chứng minh MD vuông góc CN*



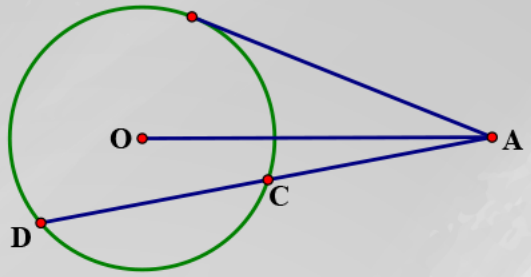

c) *Cho hình chữ nhật ABCD, Có I là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thuộc AB. Gọi M' là giao điểm MI và CD. Chứng minh I là trung điểm MM'*



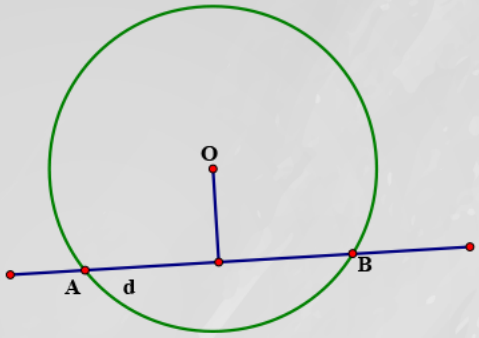

*Ngoài ra:* ABCD có thể là các hình sau:
***-Hình bình hành***
***- Hình vuông***
***- Hình thoi***

## Một số bổ đề phụ

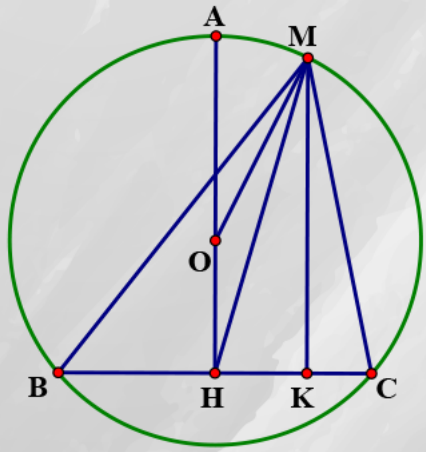
a) ***(Được sử dụng trực tiếp không cần chứng minh).*** *Cho đường tròn tâm O, từ điểm A ở ngoài đường tròn kẻ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Chứng minh:* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AB^2$ ***(phương tích).***




b) *Cho đường tròn tâm O bán kính R, đường thẳng (d) cắt (O) tại 2 điểm AB. Tìm vị trí của (d) sao diện tích OAB lớn nhất,*




c) *Cho đường tròn tâm (O) có dây cung BC cố định. M nằm trên cung BC. Chứng minh: diện tích tam giác MBC nhỏ nhất khi M nằm chính giữa cung BC.*



Việc đầu tiên để làm một bài toán Bất đẳng thức là đoán điểm rơi, và hôm nay anh xin giới thiệu một dạng điểm rơi nửa đối xứng. Để cụ thể hơn, anh sẽ đi vào từng ví dụ.

**Ví dụ 1:** Cho $a,b$ và c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}}+\frac{4bc}{(b+c)^2}$$

**Hướng đi:** (Nhiệm vụ của hướng đi là giúp bạn hướng tư duy và dự đoán dấu bằng)

Việc đầu tiên ta sẽ dự đoán dấu bằng của nó. Đối với bài này, thông thường dấu = xảy ra khi $b=c$.

Khi đó $P=\sqrt{\frac{(a+2b)(ab+b^2+ab)}{ab^2}}+1=\sqrt{\frac{(a+2b)(b+2a)}{ab}}+1=\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5}+1$

Đến đây ta có thể dự đoán $a=b$ (theo Cauchy).

Từ đây ta sẽ biết được $a=b=c$

**Giải:** $P=\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}}+\frac{4bc}{(b+c)^2}=\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}+\frac{4bc}{(b+c)^2}$

Ta dùng Bất đẳng thức phụ: $\sqrt{(a+b)(x+y)}\ge\sqrt{ax}+\sqrt{by}$

$\leftrightarrow (a+b)(x+y)\ge ax+by+2\sqrt{abxy}\leftrightarrow ay+bx\ge 2\sqrt{abxy}$ (luôn đúng theo Cauchy).

Dấu = xảy ra khi $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$.

Tiếp theo ta sẽ lồng biểu thức $\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$ vào BĐT phụ trên, và điều ưu tiên là ta sẽ khử đi ẩn $a$.

$$\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\ge\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\sqrt{(b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=1+\frac{b+c}{\sqrt{bc}}$$

Đến đây ta kiểm tra, dấu = xảy ra khi $\frac{a}{b+c}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leftrightarrow\frac{a}{b+c}=\frac{bc}{a(b+c)}\leftrightarrow a^2=bc$.

Điều này đi đúng với hướng đã vạch ra là $a=b=c$.

( Ở bước này ta có thể làm $\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=\sqrt{1+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b+c}{a}}$

$\geq\sqrt{1+\frac{(b+c)^2}{bc}+2\frac{b+c}{\sqrt{bc}}}=1+\frac{b+c}{\sqrt{bc}}$ )

$\rightarrow P\geq 1+\frac{b+c}{\sqrt{bc}}+\frac{4bc}{(b+c)^2}=1+\frac{1}{t}+4t^2=f(t), t=\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$

$f'(t)=8t-\frac{1}{t^2}=\frac{8t^3-1}{t^2}\leq\frac{8.\frac{1}{2^3}-1}{\frac{1}{2^2}}=0\rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{2}\right]$

$\rightarrow f(t)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=4$ . Dấu = khi $t=\frac{1}{2}\rightarrow a=b=c$

Vậy $MinP=4$ khi $a=b=c$.

**Câu 2:** Cho $a,b$ và c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c(a+b)+4c^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{a(b+c)^2}{a+c}+\frac{b(a+c)^2}{b+c}-\frac{1}{c}$.

**Hướng đi:** Với đề bài như thế này, ta sẽ mập mờ đoán ra $a=b$. Khi đó, giả thiết sẽ là $a^2+ac+2c^2=2$

$P=\frac{a(a+c)^2}{a+c}+\frac{a(a+c)^2}{a+c}-\frac{1}{c}=2a(a+c)-\frac{1}{c}=4-4c^2-\frac{1}{c}=4-\left(4c^2+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}\right)\leq 1$ (cauchy 3 số)

Dấu = khi $c=\frac{1}{2}, a=b=1$

**Giải:** Chìa khóa bài này chính là bất đẳng thức phụ $\frac{(x+y)^2}{a+b}\leq\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}$

Đây là bất đẳng thức đầu tiên mà bạn nên học nếu muốn chinh phục 10 điểm đề thi THPT Quốc gia. Nó có rất nhiều tên gọi, một trong số đó là Schwarz. Cách chứng minh BĐT này đã có rất nhiều trên mạng, các bạn có thể lên google search. Vì là đất nước trên con đường hội nhập nên cách bạn hãy tự trang bị cho mình các kĩ năng, và một trong đó là kĩ năng tìm kiếm thông tin. Tôi chỉ xin nói ra dấu bằng của nó.

Dấu = xảy ra khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

Từ đây ta sẽ có

$$P \le a\left(\frac{b^2}{a}+c\right)+b\left(\frac{a^2}{b}+c\right)-\frac{1}{c}=a^2+b^2+c(a+b)-\frac{1}{c}=4-4c^2-\frac{1}{c}=4-\left(4c^2+\frac{1}{2c}+\right.$$

Dấu bằng xảy ra khi $c=\frac{1}{2}, a=b=1$

**Ví dụ 3:** Cho $x, y$ và $z$ thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+6z^2=4z(x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^3}{y(x+z)^2}+\frac{y^3}{x(y+z)^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

**Hướng đi:** Qua hai câu trên, chắc chắn các bạn đã dự đoán được $x=y$

Từ giả thiết suy ra $(x-z)(x-3z)=0$. Đến đây ta sẽ thử 2 trường hợp $x=y=z$ và $x=y=3z$ lần lượt vào P.

Thấy khi $x=y=z$ thì P có giá trị nhỏ hơn. Vậy dấu bằng khi $x=y=z$

**Giải:** Để ý thấy đây là BĐT là thuần nhất (có nghĩa là đồng bậc) nên ta sẽ sử dụng phép đặt như sau:

Đặt $a=\frac{x}{z}, b=\frac{y}{z}$ (từ đây hướng đi của chúng ta đều quy về $a=b=1$ )

$$x^2+y^2+6z^2=4z(x+y) \leftrightarrow \frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}-\frac{4x}{z}-\frac{4y}{z}+6=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4(a+b)=a^2+b^2+6 \ge \frac{1}{2}(a+b)^2+6 \\ 4(a+b) \ge 2ab+6 \end{cases}$$

$\rightarrow a+b \ge 2$ và $2(a+b) \ge ab+3$

$$P=\frac{x^3}{y(x+z)^2}+\frac{y^3}{x(y+z)^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\frac{a^3}{b(a+1)^2}+\frac{b^3}{a(b+1)^2}+\sqrt{a^2+b^2}$$

Đến đây, ta thấy sự tương quan giữa $\frac{a^3}{b(a+1)^2}$ và $\frac{b^3}{a(b+1)^2}$. Nhiệm vụ bây giờ của chúng ta là khử mẫu hoặc làm cho chúng cùng chung mẫu số. Bây giờ ta 2 chia ra hai hướng.

**Hướng 1:** Khử mẫu.

Ta thấy ở tử là bậc ba, điều đó liên tưởng cho ta cauchy 3 số. Và ta có thể khử theo hai cách như sau:

Cách 1.1:

Ta có $\frac{a^3}{b(a+1)^2}+\frac{a+1}{8}+\frac{ab+b}{8}\ge\frac{3a}{4}$ (lưu ý khi $a=b=1$ thì

$\frac{a^3}{b(a+1)^2}=\frac{a+1}{8}=\frac{ab+b}{8}=\frac{1}{4}$ nên ta chọn như thế).

Tương tự $\frac{b^3}{a(b+1)^2}+\frac{b+1}{8}+\frac{ab+a}{8}\ge\frac{3b}{4}$

$$\to\frac{a^3}{b(a+1)^2}+\frac{b^3}{a(b+1)^2}\ge\frac{2(a+b)-ab-1}{4}\ge\frac{2(a+b)-[2(a+b)-3]-1}{4}=\frac{1}{2}$$

Suy ra $P\ge\frac{1}{2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge\frac{1}{2}+\frac{a+b}{\sqrt{2}}\ge\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

Cách 1.2: Ta có

$$\frac{a^3}{b(a+1)^2}+\frac{b}{4}+\frac{a^2+2a+1}{16}\ge\frac{3a}{4};$$

$$\frac{b^3}{a(b+1)^2}+\frac{a}{4}+\frac{b^2+2b+1}{16}\ge\frac{3b}{4}$$

$$\to\frac{a^3}{b(a+1)^2}+\frac{b^3}{a(b+1)^2}\ge\frac{3}{8}(a+b)-\frac{1}{16}(a^2+b^2)-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{8}(a+b)-\frac{1}{16}(4a+4b-6)-\frac{1}{8}\ge\frac{1}{8}(a+b)+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{2}$$

Suy ra $P\ge\frac{1}{2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge\frac{1}{2}+\frac{a+b}{\sqrt{2}}\ge\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

**Hướng 2:** Làm cho chúng cùng chung mẫu số

$$\frac{a^3}{b(a+1)^2}+\frac{b^3}{a(b+1)^2}=\frac{2a^3}{2b(a+1)(a+1)}+\frac{2b^3}{2a(b+1)(b+1)}\ge\frac{54(a^3+b^3)}{(2a+2b+2)^3}=\frac{27(a^3+b^3)}{4(a+b+1)^3}$$

Mặt khác: $a^3+b^3\ge\frac{2(a+b)^3}{27}$ (BĐT này rất dễ dàng chứng minh bằng tương đương, nhưng bạn hãy thử chứng minh theo hướng khác nhé, mọi bài toán lớn đều cần 1 bài toán nhỏ thế này)

$$\to a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}=\frac{(3a+3b)^3}{4.27}\ge\frac{(2a+2b+2)^3}{27.4}=\frac{2(a+b+1)^3}{27}$$

Từ đó ta suy ra $\frac{a^3}{b(a+1)^2}+\frac{b^3}{a(b+1)^2}\ge\frac{27.\frac{2(a+b+1)^3}{27}}{4(a+b+1)^3}=\frac{1}{2}$

Suy ra $P\ge\frac{1}{2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge\frac{1}{2}+\frac{a+b}{\sqrt{2}}\ge\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

# Mọi thắc mắc xin liên hệ:


- **Ban Toán GSTT HCMC**

***Fanpage:*** *fb.com/onthidaihoccungthukhoa*
***Group:*** *fb.com/groups/GSTT.Toan*
***Số điện thoại:*** *0966194630 (Tuấn)*
***Địa chỉ emai:*** *latuan.stu15@medvnu.edu.vn*


GSTT Group

Light the way